PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 6
Strani 368–370

Silva Kmetič:

ŠE O METODI PLOŠČINE

Ključne besede: matematika, geometrija, trikotnik, težiščnice, trapez.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1354-Kmetic.pdf

ŠE O METODI PLOŠČINE

V 4. številki lanskega letnika Preseka smo prikazali, kako lahko z metodo ploščine rešimo nekatere naloge. Oglejmo si jih še nekaj!

Najprej dokažimo dve neenakosti:

1. Naj bosta a in b dolžini katet, c dolžina hipotenuze in v dolžina višine na hipotenuzo pravokotnega trikotnika. Potem velja $c + v > a + b$. Dokaži!

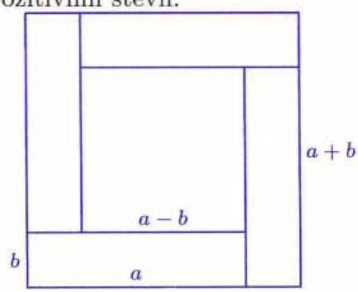
   Ker imamo pravokotni trikotnik, pričnemo s Pitagorovim izrekom $c^2 = a^2 + b^2$. Desno stran dopolnimo do popolnega kvadrata in zagotovimo, da se enakost ohrani. Dobimo enačbo $c^2+2ab = a^2+b^2+ + 2ab$. Na levi strani te enačbe upoštevamo, da je $ab = cv$ (ploščina pravokotnega trikotnika!), torej dobimo $c^2 + 2cv = (a + b)^2$. Nato dopolnimo še levo stran do popolnega kvadrata, kar nam da enačbo $c^2 + 2cv + v^2 = (a + b)^2 + v^2$ oziroma $(c + v)^2 = (a + b)^2 + v^2$. Če v tej enakosti odštejemo pozitivno število v^2 na desni strani, preide v neenakost $(c + v)^2 > (a + b)^2$. Ker je koren monotona funkcija in sta izraza $c + v$ in $a + b$ pozitivna, se neenakost pri korenjenju ohrani. Sledi $c + v > a + b$.

2. Dokaži, da za vsak par pozitivnih števil a, b velja neenakost

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

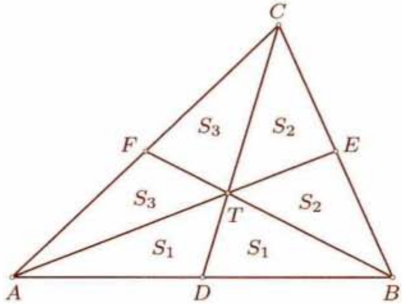
   Ob tej znani neenakosti se je tudi težko spomniti na metodo ploščine. Morda nas na geometrijo spominja desna stran neenakosti, kjer je zapisana geometrijska sredina dveh pozitivnih števil.

   S slike, ki spominja na enega izmed dokazov Pitagorovega izreka, razberemo zvezo $(a + b)^2 = (a - b)^2 + + 4ab \geq 4ab$. Njen začetek in konec dasta po korenjenju željeno neenakost $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.



Skupaj si poglejmo še nalogi, v katerih uporabimo izrek: Trikotniki z enakimi osnovnicami in enakimi višinami na te osnovnice imajo enako ploščino.

1. Dokaži, da razdelijo težiščnice trikotnik na 6 ploščinsko enakih trikotnikov.



Na sliki najdemo tri pare trikotnikov. Trikotnika v paru imata za osnovnico vsak polovico pripadajoče stranice in enaki višini. Zato sta ploščinsko enaka, kar je upoštevano že pri oznakah na sliki.

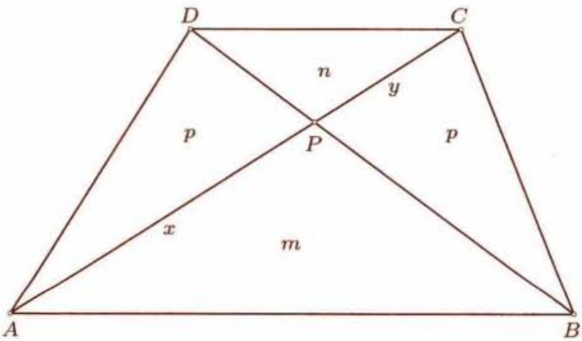
Nato upoštevamo, da imata iz enakega razloga enako ploščino trikotnika ADC in DBC ter ABF in FCB. Torej dobimo enačbi

$$S_1 + 2S_3 = S_1 + 2S_2 \qquad \text{in} \qquad S_3 + 2S_1 = S_3 + 2S_2.$$

Iz prve sledi $S_3 = S_2$, iz druge $S_2 = S_1$.

2. Diagonali poljubnega trapeza delita trapez na štiri trikotnike. Ploščini trikotnikov nad osnovnicama trapeza sta m in n. Izračunaj ploščino trapeza.

Izberimo oznake kot na sliki. Trikotnika ABC in ABD imata enaki osnovnici in enaki višini na ti osnovnici, zato sta njuni ploščini enaki.



S slike sledi zveza med ploščinami $S(ABC) = m + S(BCP) = m + S(APD) = S(ABD)$.
Torej imata trikotnika BCP in APD enako ploščino, ki jo označimo s p. Daljico AP označimo z x in daljico PC z y. Vemo tudi, da sta ploščini trikotnikov APD in PCD v razmerju pripadajočih osnovnic (izrek pod točko 3 v prvem članku s tem naslovom), torej $\frac{p}{n} = \frac{x}{y}$.

Enak zaključek velja za ploščini trikotnikov ABP in BCP, kar da podobno enačbo $\frac{m}{p} = \frac{x}{y}$.
Sklepamo, da je $\frac{m}{p} = \frac{p}{n}$, torej je $p = \sqrt{mn}$. Iskana ploščina trapeza pa je enaka $S = m + n + 2\sqrt{mn}$.

Silva Kmetič