PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 6
Strani 338–343

Marko Razpet:

TI PRESNETA SEDMICA!

Ključne besede: matematika, potence, korenjenje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1531-Razpet.pdf

TI PRESNETA SEDMICA!

Gospoda Tine Sedmak in Tone Devetak sta, kljub letom, še vedno izkušena morjeplovca. Leta 1977 sta se z majhno jadrnico podala na tvegano pot, da bi objadrala svet. Pred tem sta vsako poletje križarila po sinjem Jadranu, kjer sta dobro poznala vsak otoček in zalivček ter muhavost vetrov. Toda na poti okrog sveta ju je nekje na Tihem oceanu doletela nesreča. V razburkanem morju sta doživela brodolom. Samo naključju se lahko zahvalita, da sta na razbitinah pristala na neobljudenem otočku. Kot po čudežu sta rešila tudi nekaj hrane, ladijski dnevnik, nekaj pisemskega papirja in svinčnikov ter še precej druge krame. Ko sta spoznala, kako nezavidljiva je njuna situacija, sta si na otočku takoj uredila zasilno bivališče, si posušila rešene stvari in ugotovila, da bo mogoče preživeti nekaj tednov, dokler ju kdo ne opazi in reši. V okolici novega domovanja se je dobilo tudi kaj za pod zob, pa tudi kako ribo sta sem ter tja potegnila iz morja.

Toda najhuje je bilo nepredvidljivo dolgo čakanje. Začela sta brskati po dnevniku in ugotovila, da se je brodolom zgodil 7. 7. 1977 po lokalnem času. Datum s štirimi sedmicami in s samimi lihimi števkami. Ti presneta sedmica! Kdaj smo že nazadnje pisali datum s samimi lihimi števkami? Kaj pa s sodimi? Tone Devetak je njega dni študiral matematiko in se je takrat v šali podpisoval nekoliko krajše, namreč kot *Tone 9ak*. V zrelejših letih je še vedno rad reševal matematične probleme. Kot zanalašč je sedaj našel v dnevniku listek, na katerem se je še dalo razbrati naslednje besedilo:

Brez uporabe tablic, žepnega računala ali računalnika ugotovi, kaj je prav:

$$\sqrt{8}^{\sqrt{7}} < \sqrt{7}^{\sqrt{8}} \quad \text{ali} \quad \sqrt{7}^{\sqrt{8}} < \sqrt{8}^{\sqrt{7}} .$$

Nalogo je vzel s sabo kar tako, za vsak primer, da bi z njo zapravljal čas, ko ne bi bilo drugega dela. Zdaj pa je kazalo, da bo časa za matematiko na pretek. Tine Sedmak pa je bil strojni inženir in je imel na Fakulteti za strojništvo tudi kar precej višje matematike. Tone si je nalogo ogledoval in kmalu prišel na misel, da bi jo posplošil:

Za katera naravna števila n velja neenakost

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} \tag{1}$$

in za katera neenakost

$$\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} < \sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} ? \tag{1'}$$

Ker imamo v zgornjih relacijah opravka s pozitivnimi števili na obeh straneh, sta se naša junaka s kvadriranjem hitro znebila dveh korenov in reševala enakovreden problem:

Za katera naravna števila n velja neenakost

$$n^{\sqrt{n+1}} < (n+1)^{\sqrt{n}} \tag{2}$$

in za katera neenakost

$$(n+1)^{\sqrt{n}} < n^{\sqrt{n+1}}\,? \tag{2'}$$

Tone se je spomnil, da je funkcija $x \mapsto x^\alpha$ za vsak eksponent $\alpha > 0$ na poltraku $x > 0$ naraščajoča, tako da sta s potenciranjem z eksponentom $\sqrt{n}$ iz relacije (2) dobila

$$n^{\sqrt{n(n+1)}} < (n+1)^n\,, \tag{3}$$

s potenciranjem z eksponentom $\sqrt{n+1}$ pa sta iz relacije (2') prišla do

$$(n+1)^{\sqrt{n(n+1)}} < n^{n+1}\,. \tag{3'}$$

Tone je pomislil tudi na to, ali bi nemara lahko za kako naravno število n v zgornjih relacijah veljal enačaj namesto neenačajev, torej, ali je za kakšno naravno število n izpolnjena enakost

$$(n+1)^n = n^{\sqrt{n(n+1)}}\,.$$

Ker bi bilo potem na levi strani očitno naravno število, bi moral biti eksponent $\sqrt{n(n+1)}$ na desni strani te enačbe tudi naravno število. To se pravi, obstajal bi tak naraven k, da bi veljala enačba $n(n+1) = k^2$, iz katere takoj sledi enakovredna enačba $(2n+1)^2 = 4k^2 + 1$ oziroma $(2n+1-2k)(2n+1+2k) = 1$. Toda to velja le v primeru, ko je hkrati $2n+1-2k = 1$ in $2n+1+2k = 1$, ali pa je hkrati $2n+1-2k = -1$ in $2n+1+2k = -1$. Hitro vidimo, da je potem bodisi $n = 0$ ali pa $n = -1$, kar je nemogoče, saj mora biti n naravno število.

Ko sta Tine in Tone gledala relaciji (3) in (3'), sta hitro odkrila, da bo najbrž za nekaj začetnih naravnih števil n veljala prva, torej

$$(n+1)^n > n^{\sqrt{n(n+1)}}\,. \tag{4}$$

Za $n = 1$ imamo $(1+1)^1 = 2 > 1 = 1^{\sqrt{2}}$ in (4) res velja.

Ker jima princip popolne indukcije pri naših neenakostih sploh ni šel od rok, sta poskusila za $n = 2$ in seveda takoj dobila $(2+1)^2 = 9$. Toda na desni strani v (4) se pojavi nerodno število, namreč $2^{\sqrt{6}}$, za katero moramo šele ugotoviti, da je manjše kot 9. Kako to dognati brez logaritemskih tablic, brez računala? Ni težav! Ker je $6 < 9$, je $\sqrt{6} < 3$ in zato $2^{\sqrt{6}} < 2^3 = 8 < 9$. Relacija (4) tudi tokrat velja.

Za $n = 3$ moramo dokazati, da je $(3+1)^3 = 64 > 3^{\sqrt{12}}$. Na žalost pa ne gre več tako kot prej. Res je, da velja $\sqrt{12} < 4$, toda $3^4 = 81 > 64$, tako da ocena ne gre v pravo smer. To je zato, ker se 4 preveč razlikuje od $\sqrt{12}$. Toda Tone se nenadoma spomni, da je

$$n(n+1) = n^2 + n < n^2 + n + 1/4 = (n + 1/2)^2$$

in zato $\sqrt{n(n+1)} < n + 1/2$ za vsako naravno število n. V posebnem primeru velja za $n = 3$ relacija $\sqrt{12} < 3 + 1/2$. Ker je

$$3^{\sqrt{12}} < 3^{3+1/2} = 3^3 \cdot \sqrt{3} < 27 \cdot 2 = 54 < 64\,,$$

res velja relacija $4^3 > 3^{\sqrt{12}}$.

Primer $n = 4$ zahteva primerjavo števil $(4+1)^4 = 5^4 = 25^2 = 625$ in $4^{\sqrt{20}}$. Ker je $\sqrt{20} < 4 + 1/2$, velja

$$4^{\sqrt{20}} < 4^{4+1/2} = 4^4 \cdot \sqrt{4} = 16^2 \cdot 2 = 512 < 625\,.$$

Torej je relacija (4) pravilna za $n = 4$.

Pri $n = 5$ moramo primerjati števili $(5+1)^5$ in $5^{\sqrt{30}}$, ki pa nista več tako majhni kot dosedanja. Na srečo se je Tone spomnil binomske formule in zapisal

$$(5+1)^5 = 5^5 + \binom{5}{1}5^4 + \binom{5}{2}5^3 + \ldots + 1\,.$$

Nato sta vzela prve tri člene in s skupnimi močmi zapisala:

$$6^5 > 5^5 + 5 \cdot 5^4 + 10 \cdot 5^3 = 5^5(2 + \frac{2}{5})\,.$$

Radi bi videli, da je slednje število večje kot $5^{5+1/2} = 5^5 \cdot \sqrt{5}$, kar je več kot $5^{\sqrt{30}}$. Torej je dovolj preveriti le še relacijo $2 + 2/5 > \sqrt{5}$ oziroma $(2 + 2/5)^2 = (12/5)^2 > 5$. To velja, ker je $144/25 = (125 + 19)/25 = 5 +$ $+ 19/25 > 5$. Potemtakem tudi $n = 5$ zadošča neenačbi (4).

Pri $n = 6$ se izkaže, da je premalo vzeti le tri člene, pač pa je dobro upoštevati kar štiri člene v razvoju števila $(6+1)^6$ po binomski formuli:

$$(6+1)^6 = 6^6 + \binom{6}{1}6^5 + \binom{6}{2}6^4 + \binom{6}{3}6^3 + \ldots + 1 >$$
$$> 2 \cdot 6^6 + 15 \cdot 6^4 + 20 \cdot 6^3 = 6^6(2 + 15/6^2 + 20/6^3) = 6^6(2 + 55/108)\,.$$

Po drugi strani pa je $6^{\sqrt{42}} < 6^{6+1/2} = 6^6 \cdot \sqrt{6}$. Če nam uspe preveriti relacijo $(2+55/108)^2 > 6$, potem smo dokazali, kar smo želeli: $7^6 > 6^{\sqrt{42}}$. To pa res ni težko:

$$(2+55/108)^2 = 4+4\cdot 55/108+55^2/108^2 > 4+55/27 = 4+2+1/27 > 6\,.$$

Sedmi dan neprostovoljnega bivanja na samotnem otočku je bil za Tineta in Toneta žalosten. Videla sta ladjo, ki je plula mimo, na vse pretege sta vpila in mahala, toda zaman. Nihče ju ni opazil. Ko sta se pomirila, sta poskušala ugotoviti, kaj je s številom $n = 7$. Ni in ni šlo tako kot za prejšnjih šest števil. Seveda velja $7^{\sqrt{56}} < 7^{7+1/2} = 7^7 \cdot \sqrt{7}$. Nista pa znala pokazati, da je $7^7 \cdot \sqrt{7} < 8^7$. Posumila sta, da je nasprotno, $7^7 \cdot \sqrt{7} > 8^7$. To pomeni isto kot $(8/7)^7 < \sqrt{7}$. Kvadriranje te relacije bi pripeljalo do računanja velikih potenc, kar jima ni bilo preveč všeč. Kar naenkrat se je Tone spomnil, da je nekoč v Preseku bral članek o verižnih ulomkih. Zapisal je: $\sqrt{7} = 2 + x$, kjer je $0 < x < 1$. Pri tem število x zadošča kvadratni enačbi $x^2 + 4x = 3$, ki jo po deljenju z x prepišemo v obliko $1/x = 1 + (x+1)/3$. Ker velja tudi $(x+1)^2 + 2(x+1) = 6$, dobimo po deljenju z $x+1$ še $3/(x+1) = 1 + (x+1)/2$ in $2/(x+1) = 1 + x/3$. Ker velja tudi $3/x = 4 + x$, je krog sklenjen in imamo

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1/x} = 2 + \frac{1}{1+(x+1)/3} = \ldots = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+1/x}}}}\,.$$

Torej lahko $\sqrt{7}$ zapišemo v obliki neskončnega periodičnega verižnega ulomka

$$\sqrt{7} = \langle 2; \overline{1,1,1,4}\rangle\,.$$

Nekaj prvih njegovih zaporednih približkov dobimo brez težav:

$$2, 3, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}\,.$$

Hitro lahko ugotovimo, da velja relacija $37/14 < \sqrt{7}$, saj velja $37^2 = 1369 < 1372 = 196 \cdot 7 = 14^2 \cdot 7$. Nekoliko teže je brez računala preveriti, da velja tudi $(8/7)^7 < 37/14$. Hitro spoznamo, da moramo preveriti veljavnost relacije $2^{22} < 7^6 \cdot 37$ oziroma $(2^{11})^2 < (7^2)^3 \cdot 37$. Z malo truda najdemo $2^{22} = 2048^2 = 4\,194\,304$ in $7^6 \cdot 37 = 49^3 \cdot 37 = 4\,353\,013$. Torej drži relacija $8^7 < 7^7 \cdot \sqrt{7}$, kar pomeni, da pravzaprav še nismo uspeli dokazati, katero izmed števil $7^{\sqrt{56}}$ in 8^7 je večje. V bistvu je bilo vse to računanje le strel v prazno, kar je tudi v matematiki pogost pojav.

Za naravna števila n, $1 \le n \le 6$, je torej dokazana (brez tablic in računala) neenakost

$$\sqrt{n}^{\,\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}^{\,\sqrt{n}}\,.$$

Skupaj s Tinetom in Tonetom predvidevamo, da bo od nekega naravnega števila naprej veljala neenakost (1') oziroma (3'). Zopet uporabimo neenakost $\sqrt{n^2+n} < n + 1/2$ in se najprej vprašajmo, kdaj je

$$(n+1)^{\,n+1/2} < n^{n+1}\,.$$

Enemu od naših junakov je po daljšem razglabljanju prišlo na misel, da bi to relacijo delil s produktom $n^n \cdot \sqrt{n+1}$. Dobila sta

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{n}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Kakor v en glas sta Tine in Tone spoznala, da ima to nekaj opraviti s številom $\mathrm{e} = 2,71828\ldots$, z osnovo naravnih logaritmov. Velja namreč

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Znana je tudi relacija $2 < \mathrm{e} < 3$ in pa $(1+1/n)^n < \mathrm{e}$, ki velja za vsako naravno število n. Zato bo vsekakor pametno pogledati, kdaj velja relacija $\mathrm{e} < \frac{n}{\sqrt{n+1}}$. Za $n = 8$ dobimo na njeni desni strani število $8/3 = 2 + 2/3$, kar je očitno manjše od e. Torej na prvotno zastavljeno vprašanje še nimamo odgovora. Neenakost $\sqrt{n^2+n} < n + 1/2$ je namreč za $n = 8$ pregroba. Za $n \ge 9$ lahko hitro preverimo, da velja neenakost $n/\sqrt{n+1} > 11/4 = 2 + 3/4 > \mathrm{e}$. Leva polovica te relacije namreč privede do relacije $16n^2 - 121n > 121$, ki res velja za $n \ge 9$, za $n = 8$ pa ne. To pomeni, da za $n \ge 9$ velja tudi neenakost (3').

Za $n = 8$ moramo, hočeš–nočeš, vse skupaj pogledati na novo. Dokazati moramo pač relacijo $9^{\sqrt{8}} < 8^{\sqrt{9}}$ ali pa ustrezno relacijo z znakom $>$.

Kot bomo videli, velja prva, ki jo prepišemo v obliko $3^{4\sqrt{2}} < 8^3 = 2^9$. Uporabimo relacijo $4\sqrt{2} < 17/3$, ki jo je preprosto dokazati, saj velja $288 = 32 \cdot 9 < 17^2 = 289$. Torej je treba preveriti le še relacijo $3^{17/3} < 2^9$ oziroma $3^{16} < 2^{27}/3$. Zapišemo:

$$3^{16} = (((3^2)^2)^2)^2 = ((9^2)^2)^2 = (81^2)^2 = 6561^2 = 43\,046\,721$$

in

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{27} = \frac{2}{3} \cdot 2^{16} \cdot 2^{10} = \frac{2}{3} \cdot 65\,536 \cdot 1\,024 = 44\,739\,242 + \frac{2}{3}\,.$$

Potenci 2^{16} in 2^{10} sta bili Tinetu in Tonetu najbrž znani iz osnov računalništva. Pa tudi s približkoma $2^{16} \approx 65\,000$ in $2^{10} \approx 1\,000$ bi presegla število 43 300 000.

Torej je za vsa naravna števila $n, n \geq 8$, dokazana (prav tako brez tablic in računala) neenakost

$$\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} < \sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}\,.$$

Tako jima je ostal samo še primer $n = 7$, za katerega nista mogla izvedeti, ali velja zanj relacija (1) ali (1'). Izkaže se, da ni preprostega ulomka, s katerim bi približno ocenili število $\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ in postopali brez uporabe tablic in računala tako kot v ostalih primerih.

Dva tedna po brodolomu so Tinetove in Tonetove signale na pomoč vendarle opazili z neke večje ladje, spustili v morje čoln, odveslali ponju in ju rešili. Rešili pa niso le njunih življenj, pač pa so ju odrešili tudi primera $n = 7$. Ko jima je kapitan posodil računalo, sta izračunala

$$\sqrt{8}^{\sqrt{7}} = 15,655\,817\,80, \quad \sqrt{7}^{\sqrt{8}} = 15,672\,890\,87\,,$$

torej velja

$$\sqrt{8}^{\sqrt{7}} < \sqrt{7}^{\sqrt{8}}\,.$$

Tukaj nastopajoči števili sta si toliko blizu, da ne dopuščata približkov s preprostimi ulomki, katerih števci in imenovalci bi bili majhni, primerni za računanje "peš". Če natančno analiziramo izraz $|\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} - \sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}|$ za naravne n, ugotovimo, da je ravno za $n = 7$ najmanjši. Zato nam ta sedmica dela toliko težav v zastavljeni nalogi. Na koncu pa lahko le pripomnimo, da smo ob tej zgodbi ponovili kar nekaj matematike, pri čemer smo ves čas, do srečanja s kapitanom, vztrajali brez računala in tablic.

Marko Razpet (Raz5)