PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 1
Strani 22–23

Božidar Casar:

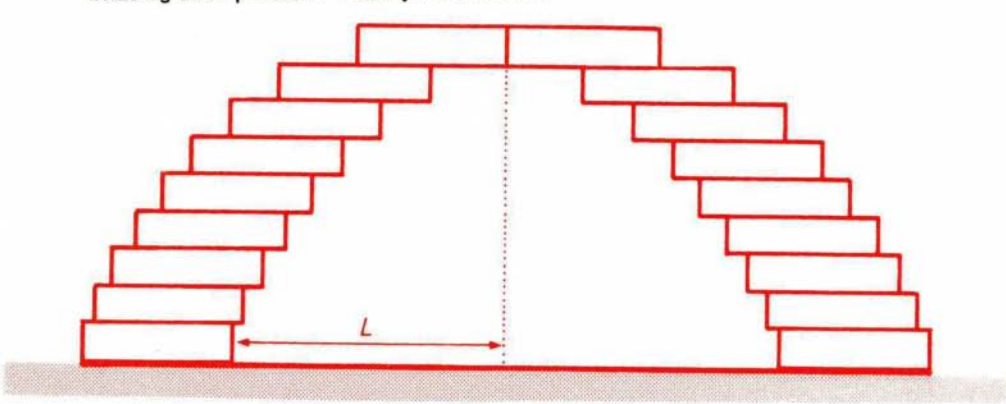
SLAVOLOK ZIDAKOV

Ključne besede: fizika, matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/966-Casar.pdf

SLAVOLOK IZ ZIDAKOV

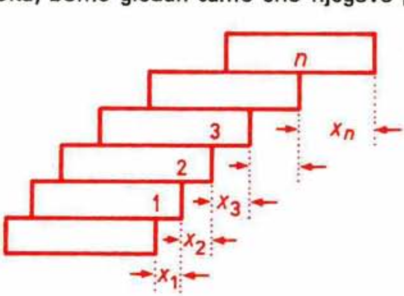
Kot otroci ste se gotovo kdaj igrali z zidaki (ali pa s kockami); postavljali ste jih enega na drugega, zidali hiše, stolpe, mostove ... Včasih so nastale prave mojstrovine, včasih pa se je vse skupaj podrlo in ponovno je bilo treba poprijeti za delo. To so bili trenutki, ko ste se prvič nevede seznanjali s fizikalnimi pojmi, kot sta navor in težišče. V pričujočem prispevku si bomo nekoliko pobliže ogledali problem "zidanja slavoloka".



Slika 1

Homogene zidake, ki imajo maso m, ter mere a = 20 cm, b = 10 cm, c = 5 cm, zlagamo enega na drugega tako, da dobimo slovolok, ki je narisan na sliki 1. Vprašanje, ki si ga bomo zastavili je, kako moramo zlagati zidake, da bo širina slavoloka maksimalna in da se le–ta seveda še ne bo podrl. Ker so razmere simetrične glede na sredino slavoloka, bomo gledali samo eno njegovo polovico.

V mejnem primeru (ko iščemo maksimum) mora biti vsota navorov sile teže zidakov posebej za vsako od osi 1, 2, 3, ..., n enaka nič. Očividno pa je, da so za navor okrog določene osi odgovorni samo zidaki, ki so nad to osjo. Zapišimo enačbo, ki mora veljati za prvo os



Slika 2

$$mg(x_1 - \tfrac{a}{2}) + mg(x_1 + x_2 - \tfrac{a}{2}) + mg\,(x_1 + x_2 + x_3 - \tfrac{a}{2}) + \ldots$$
$$mg\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - \tfrac{a}{2}) = 0$$
$$nx_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + \ldots + x_n = n\,\tfrac{a}{2} \qquad (1)$$

Podobne enačbe dobimo tudi za vsako od naslednjih osi

$$(n-1)x_2 + (n-2)x_3 + \ldots + x_n = (n-1)\,\tfrac{a}{2} \qquad (2)$$

$$(n-2)x_3 + \ldots + x_n = (n-2)\,\tfrac{a}{2} \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \tfrac{a}{2} \qquad (n)$$

Odštejmo sedaj po vrsti enačbo (2) od enačbe (1), enačbo (3) od enačbe (2), ..., enačbo (n) od enačbe ($n - 1$) pa dobimo

$$nx_1 = \tfrac{a}{2}$$
$$(n-1)\,x_2 = \tfrac{a}{2}$$
$$\vdots$$
$$2\,x_{n-1} = \tfrac{a}{2}$$
$$x_n = \tfrac{a}{2}$$

Razdalja od začetnega zidaka do polovice slavoloka je potemtakem

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \frac{a}{2n} + \frac{a}{2(n-1)} + \frac{a}{2(n-2)} + \ldots + \frac{a}{2}$$

ali

$$L = \tfrac{a}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n}\right)$$

Zdaj se pokaže glavno presenečenje. Vsota v oklepaju je neskončna, če je n neskončen, kar pomeni, da je pri neskončnem številu zidakov tudi širina slavoloka neskončna. Vendar pa širina slavoloka narašča zelo počasi, kar bomo videli na spodnjih dveh primerih.

a) Za $n = 50$, bi bil slavolok širok 90 cm in visok 2, 5 m, kar je zadosti spodobno, da se lahko pod njim sprehajamo.

b) Za $n = 1000$, bi bila višina slavoloka že 50 m, širina pa skromnih 150 cm, kar bi bilo komaj zadosti, da se spodaj pelje manjši avto.

Božidar Casar