# Izbor ekipe za 12. mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike

↓↓↓
Dunja Fabjan, Andrej Guštin

→ **Izbor ekipe za mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike (MOAA) je dolgotrajen proces.**

Tekmovalke in tekmovalci so se morali najprej udeležiti šolskega tekmovanja iz znanja astronomije, ki je bilo v začetku decembra 2017. Potem so se najboljši spopadli z nalogami na državnem tekmovanju, ki je bilo v začetku januarja 2018. Prejemniki zlatih priznanj na tem tekmovanju so postali tudi kandidati za olimpijsko ekipo. Še v januarju 2018 je bil zanje izbirni krog Sanktpetrburške astronomske olimpijade (SAO), ki šteje kot del izbirnega postopka za MOAA. Najboljši so se uvrstili v teoretični in praktični krog SAO, ki se je zaključil marca, za srednješolce pa je potekal na Gimnaziji Bežigrad. Marca bi se morali kandidati za olimpijsko ekipo udeležiti Messierjevega maratona, ki je preiskus znanja praktične astronomije. Žal je bilo letos vreme slabo in je Messierjev maraton odpadel, zato smo morali praktični del izbirnega postopka premakniti na dan končnega teoretičnega izbirnega testa, ki je bil 8. maja na Konservatoriju za glasbo in balet Ljubljana. Ob koncu napornega izbirnega postopka smo dobili ekipo za 12. MOAA, ki bo letos med 3. in 11. novembrom v Pekingu na Kitajskem.

Člani in članica ekipe za 12. MOAA so:

- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad;
- Gregor Humar, Gimnazija in srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik;
- Andraž Jelinčič, Gimnazija Bežigrad;
- Klemen Keršič, Srednja šola Slovenska Bistrica;
- Ema Mlinar, Gimnazija Vič, Ljubljana.

## Naloge teoretičnega dela izbirnega tekmovanja za 12. MOAA

1. Dne 24. junija opazujemo zvezdo Vego ($\alpha = 18^h 36^m 56^s$, $\delta = +38°47'1{,}2''$) iz Ljubljane ($\varphi = 46°\ 13{,}4'$ N, $\lambda = 14°\ 27'$ E).

(a) Kdaj kulminira Vega? Kolikšna je njena višina ob kulminaciji?
(b) Kolikšna sta višina ($h$) in azimut ($A$) zvezde, če jo opazujemo ob 23h?

Podatki. Vega: $\alpha = 18^h 36^m 56^s$, $\delta = +38°47'1{,}2''$
Ljubljana: $\varphi = 46°13{,}4'$N, $\lambda = 14°27'$E

(a) Za dan 24. junij lahko brez težav izračunamo zvezdni čas na Greenwichu ob $0^h$UT, ki je enak

$$S(0^hUT, 24.\,6.) = S(0^hUT, 21.\,6.) + \dot{S}\Delta t = 18^h + \frac{4\text{min}}{\text{dan}}\,3\text{dni} = 18{,}2^h.$$

Ko zvezda kulminira, je njen časovni kot enak 0, torej velja

$$0 = H = S(0^hUT, 24.\,6.) + \lambda + \gamma\,(t_k - t_0) - \alpha$$
$$t_k = t_0 + \frac{1}{\gamma}(\alpha - S(0^hUT, 24.\,6.) - \lambda) = 1{,}453^h.$$

Ker je $\varphi > \delta$, je višina Vege ob kulminaciji enaka

$$h_k = 90° - \varphi + \delta = 82{,}56°.$$

→

(b) Če zvezdo opazujemo ob $23^h$, je njen časovni kot takrat enak

$$H = S(0^h UT, 24.\,6.) + \lambda + \gamma\,(t - t_0) - \alpha(= 21{,}6053^h)$$
$$= -2{,}39^h,$$

saj je $H$ definiran na intervalu od $-\pi/2$ do $\pi/2$ oziroma med $-12^h$ in $12^h$.
S pomočjo višinske enačbe izračunamo višino Vege ob $23^h$:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H = 0{,}88902.$$

Ker je $h$ definiran med $-\pi/2$ in $\pi/2$, obstaja samo ena rešitev in ta je

$$h = 62{,}75^\circ.$$

Azimut ob kulminaciji izračunamo s pomočjo sinusnega in kosinusnega izreka, ki pravita

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h + \cos\varphi \cos h \cos A$$
$$\frac{-\sin A}{\cos\delta} = \frac{\sin H}{\cos h}.$$

Preverimo lahko posebej rezultate za sinus in kosinus kota ali pa dobimo rešitev iz enačbe

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = 1{,}05028.$$

Azimut je

$$A = 92{,}8098^\circ.$$

2. Dvozvezdje sestavljata kefeidna spremenljivka in masivna zvezda. Za kefeido velja zveza $M_{\mathrm{abs}} = 2{,}81 \cdot \log_{10} P_{[\mathrm{dni}]} - 1{,}43$, kjer je $P_{[\mathrm{dni}]}$ perioda kefeide v dnevih, $M_{\mathrm{abs}}$ pa njena absolutna magnituda. Njena izmerjena perioda spremembe izseva je $P_A = 3{,}97$ dni, navidezna magnituda pa $m_A = 1{,}97$. Masivna zvezda leži na glavni veji HR diagrama, ima navidezno magnitudo $m_B = -0{,}8$ in temperaturo $T_B = 30000$ K.

(a) Kolikšen je izsev kefeide $L_A$? Izrazi ga v Sončevih izsevih ($L_\odot$).
(b) Kolikšen je radij druge zvezde ($R_B$), ko je še na glavni veji? Izrazi ga v radijih Sonca ($R_\odot$).
(c) Izračunaj maso kefeide ($M_A$), če je perioda sistema 76 let, razdalja zvezd pa 51 a.e. Rezultat izrazi v radijih Sonca ($R_\odot$). *(Namig: najprej izračunaj maso masivne zvezde, $M_B$.)*
(d) Ko bo masivna zvezda porabila vodik v sredici, bo del življenja preživela kot orjakinja in kasneje eksplodirala kot supernova. Takrat se bo njeno jedro skrčilo v nevtronsko zvezdo s polmerom 10 km, ovojnica pa se bo razletela. Med eksplozijo bodo večino sproščene energije odnesli nevtrini, le majhen del pa se bo porabil za gibanje snovi. Kolikšen del sproščene energije bo v kinetični energiji ovojnice? Izmerjena hitrost ovojnice je $v = 1200$ km/s. Predpostavi, da je v jedru zbrane 10 % mase zvezde in da sta jedro in ovojnica homogena.

Podatki. $m_A = 1{,}97$
$m_B = -0{,}8$
$T_B = 30000$ K
$M_{A,abs} = -3{,}11$ (iz formule za kefeide)

(a) Najprej izračunamo razdaljo do zvezd:

$$m_A - m_{A,abs} = -2{,}5 \log\left(\frac{10\mathrm{pc}}{d}\right)^2$$
$$d = 10\,\mathrm{pc}\,10^{(m_A - m_{A,abs})/5}$$
$$d = 10\,\mathrm{pc}\,10^{(1{,}97-(-3{,}11))/5}$$
$$= 103{,}9\ \mathrm{pc}$$

Izračunamo izsev kefeide:

$$M_{A,abs} - M_{\odot,abs} = -2{,}5 \log\left(\frac{L_A}{L_\odot}\right)$$
$$L_A = 10^{(M_{A,abs} - M_{\odot,abs})/-2{,}5} \cdot L_\odot$$
$$= 10^{(-3{,}11-4{,}83)/-2{,}5} \cdot L_\odot$$
$$= 1499{,}7 \cdot L_\odot$$

(b) Izsev druge zvezde je

$$m_B - m_A = -2{,}5 \log\left(\frac{L_B}{L_A}\right)$$
$$L_B = 10^{(m_B - m_A)/-2{,}5} \cdot L_A$$
$$= 10^{(-0{,}8-1{,}97)/-2{,}5} \cdot L_A$$
$$= 19231{,}1 \cdot L_\odot$$

Radij druge zvezde je

$$R_B^2 = \frac{L_B}{\sigma T_B^4 4\pi} = \frac{19231{,}1 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{5{,}6726 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W}m^{-2}K^{-4}\,30000^4\,K^4\,\pi} = 9{,}9 \cdot 10^{17}\mathrm{m}^2$$

$$R_B = 9{,}9 \cdot 10^8\ \mathrm{m} = 1{,}4R_\odot$$

(c) Izračunamo maso $M_B$, in sicer iz zveze za zvezde na glavni veji, kjer vemo, da je $L \propto M^{3,5}$ (kot pravilen se upošteva faktor med 3 in 3,5; rešitve so podane za faktor 3,5).

$$M_B = \left(\frac{L_B}{L_\odot}\right)^{1/3{,}5} M_\odot = 16{,}7M_\odot$$

(d) Zapišemo posamične komponente začetne in končne skupne energije, kjer je $R_z$ ($M_z$) začetni radij (masa) zvezde, $R_k$ ($M_k$) pa končni. Upoštevamo homogenost zvezd, oznake tot, tot ns, ovoj in $\nu$ pa se nanašajo na skupno energijo, skupno energijo nevtronske zvezde, ovojnice ter nevtrine:

$$W_{\mathrm{tot,z}} = \frac{1}{2}W_{g,z} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}G\frac{M_z^2}{R_z}\right)$$

$$W_{\mathrm{tot,k}} = W_{\mathrm{totns,k}} + W_{\mathrm{ovoj,k}} + W_\nu$$

$$W_{\mathrm{totns,k}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}G\frac{M_k^2}{R_k}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}G\frac{0{,}01M_z^2}{R_k}\right)$$

$$W_{\mathrm{ovoj,k}} = \frac{1}{2}M_{\mathrm{ovoj}}v^2 = \frac{1}{2}0{,}9M_z v^2$$

Upoštevamo ohranitev energije in zapišemo začetno energijo zvezde in končno energijo zvezde, ovojnice ter nevtrinov:

$$W_{\mathrm{tot,z}} = W_{\mathrm{totns,k}} + W_{\mathrm{ovoj,k}} + W_\nu$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}G\frac{M_z^2}{R_z}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}G\frac{0{,}01M_z^2}{R_k}\right) + \frac{1}{2}0{,}9M_z v^2 + W_\nu$$

Zanima nas delež energije v ovojnici glede na sproščeno energijo. Ker večino energije odnesejo nevtrini, nas zanima delež $W_{\mathrm{ovoj,k}}/W_\nu$. Tega lahko izrazimo s pomočjo zgornje enačbe, kjer opazimo, da bomo pri odštevanju $W_{\mathrm{tot,z}} - W_{\mathrm{totns,k}} - W_{\mathrm{ovoj,k}}$ dobili termin $(1/R_z - 0{,}01/R_k)$. Vendar $R_k << 0{,}01R_z$, kar lahko preverimo, če kot začetni radij vstavimo $R_B$. (Pred eksplozijo bo zvezda orjakinja, njen radij bo bistveno večji od $R_B$, zato ga pri izračunu ne uporabimo.) Ocenimo, da je $W_\nu \simeq -W_{\mathrm{totns,k}} - W_{\mathrm{ovoj,k}}$:

$$\frac{W_{\mathrm{ovoj,k}}}{W_\nu} = 0{,}0009725\ ,$$

kjer uporabimo vrednosti $v = 1200$ km/s, $R_k = 10$ km. Posamične energije so $W_{\mathrm{totns,k}} = -2{,}2219 \cdot 10^{46}$ kg m$^2$ s$^{-2}$, $W_{\mathrm{ovoj,k}} = 2{,}1589 \cdot 10^{43}$ kg m$^2$ s$^{-2}$, $W_\nu \simeq 2{,}21978 \cdot 10^{46}$ kg m$^2$ s$^{-2}$.

3. Izračunaj rdeči premik, na katerem sta bili gostoti energije snovi in sevanja enaki. Prasevanje ima temperaturo 2,7 K, vrednost Hubblove konstante danes ($H(t_0)$) je podana. Privzemi, da so nevtrini (takrat relativistični) prispevali k gostoti energije sevanja, njihov prispevek je gostoto energije sevanja povečal za 69 %.
*Nasvet. Upoštevaj, da je gostota energije sevanja enaka $\frac{4j}{c}$, kjer je $j$ gostota svetlobnega toka črnega telesa! Pri izračunih upoštevaj tudi, da je parameter gostote snovi danes $\Omega_{m,0} = 0{,}27$.*

Gostota energije snovi in gostota energije sevanja se spreminjata s skalirnim faktorjem $R$ na sledeči način:

$$\rho_m c^2 = \frac{\rho_{m,0}c^2}{R^3}$$

$$\rho_r c^2 = \frac{\rho_{r,0}c^2}{R^4}.$$

Uporabimo enačbo $R \propto \frac{1}{1+z}$ in zapišemo

$$\rho_m c^2 = \rho_{m,0}\ (1+z)^3$$

$$\rho_r c^2 = \rho_{r,0}\ (1+z)^4$$

Iščemo rdeči premik, pri katerem sta $\rho_m c^2$ in $\rho_r c^2$ enaka, torej

$$\rho_{r,0}c^2\ (1+z)^4 = \rho_{m,0}c^2\ (1+z)^3.$$

Gostoto energije snovi lahko izrazimo kot

- $\rho_{m,0} = \Omega_m \rho_{cr,0} = \Omega_m \dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$ .

Gostoto energije sevanja izrazimo kot

- $\rho_{r,0}c^2 = 1{,}69\,\dfrac{4j}{c} = 1{,}69\,\dfrac{4\sigma T^4}{c}$ ,

kjer smo upoštevali tudi prispevek relativističnih nevtrinov:

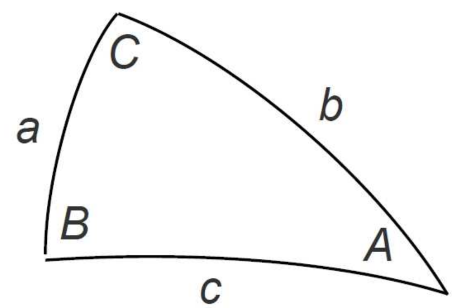
- $$\begin{aligned} \rho_{r,0}c^2\,(1+z)^4 &= \rho_{m,0}c^2\,(1+z)^3 \\ \rho_{r,0}c^2\,(1+z) &= \rho_{m,0}c^2 \\ (1+z) &= \frac{\Omega_m \rho_{cr,0}c^2}{1{,}69\,\frac{4\sigma T^4}{c}} \\ &= \frac{\Omega_m \frac{3H_0^2}{8\pi G}c^2}{1{,}69\,\frac{4\sigma T^4}{c}} \\ &= \frac{\Omega_m\,3H_0^2}{1{,}69\cdot 4\cdot 8\cdot \pi G c\sigma T^4} \\ z &= 3285 \end{aligned}$$

## Konstante

| kratica/simbol | količina | vrednost |
|---|---|---|
| $a.e.$ | astronomska enota | 149597870691 m |
| $R_Z$ | povprečni polmer Zemlje | 6371000 m |
| $M_\odot$ | masa Sonca | $1{,}9891 \times 10^{30}$ kg |
| $m_\odot$ | navidezna magnituda Sonca | $-26{,}8$ |
| $M_{\mathrm{bol},\odot}$ | absolutna (bolometrična) magnituda Sonca | 4,82 |
| $M_{K,\odot}$ | absolutna magnituda Sonca v K filtru | 3,31 |
| $L_\odot$ | izsev Sonca | $3{,}826 \times 10^{26}$ J s$^{-1}$ |
| $R_\odot$ | radij Sonca | $6{,}955 \times 10^{8}$ m |
| $j_Z$ | solarna konstanta | 1370 W m$^{-2}$ |
| $R_L$ | radij Lune | 1738000 m |
| $d_L$ | povprečna razdalja med Zemljo in Luno | 384399000 m |
| $G$ | gravitacijska konstanta | $6{,}6726 \times 10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$ |
| $\sigma$ | Stefan-Boltzmannova konstanta | $5{,}6705 \times 10^{-8}$ J s$^{-1}$ m$^{-2}$ K$^{-4}$ |
| $h$ | Planckova konstanta | $6{,}6261 \times 10^{-34} Js$ |
| $c$ | svetlobna hitrost | $2{,}9979 \times 10^{8}$ m/s |
| $k$ | Boltzmannova konstanta | $1{,}38065 \times 10^{-23}$ m$^2$ kg s$^{-2}$ K$^{-1}$ |
| pc | parsek | $3{,}0860 \times 10^{16}$ m |
| $H_0 = H(t_0)$ | vrednost Hubblove konstante danes | 70 km/s Mpc$^{-1}$ |

Osnovne enačbe sferne trigonometrije:

- $$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned}$$




Osnovne enačbe za kozmologijo:

- Hubblov čas: $t_H(t_0) = \frac{1}{H_0}$
- kritična gostota: $\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$
- Starost vesolja:
  $t_0 = \frac{2}{3}t_H$ (kritični model, $k = 0$, $\Lambda = 0$)
- Skalirni faktor: $a \propto t^{2/3}$

× × ×