PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 1
Strani 37–40

Robert Bakula in Aleksandar Jurišić:

PRESEK, SALAMA IN SINUS

Ključne besede: zanimivosti, razvedrilo, matematika, vaja.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/30/1502-Bakula-Jurisic.pdf

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

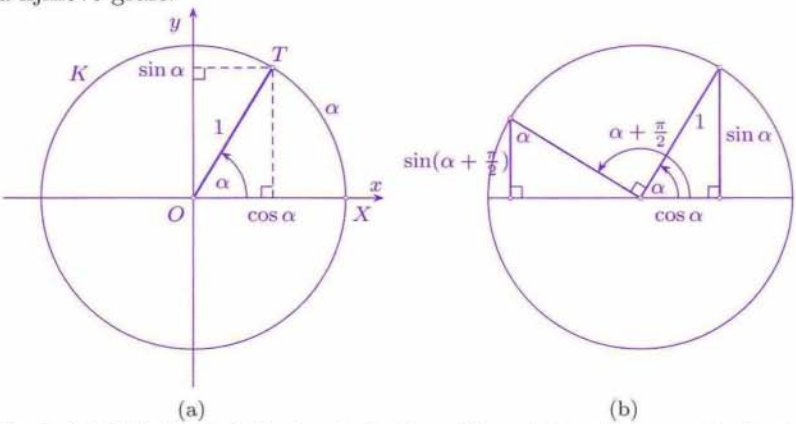
Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

PRESEK, SALAMA IN SINUS

V naravi srečujemo različne geometrijske oblike, ko pa jih zagledamo na tabli pri matematiki ali fiziki, jih včasih ne prepoznamo ali nas celo prestrašijo. To so na svoji koži občutili tudi antični matematiki, ko so želeli dokazati kakšno navidez očitno geometrijsko resnico. V tem sestavku bomo pokazali, kje vse srečamo sinusoido.

— — —

Premice in ravnine si dobro predstavljamo. Kaj pa krivulje? Krožnico, elipso, parabolo in hiperbolo (tako imenovane *krivulje drugega reda*) lahko najdemo na stožcu (vsi možni preseki plašča stožca z ravnino) in jih zato imenujemo *stožnice*. Kje pa najdemo kotne oziroma trigonometrične funkcije? Že samo ime pove, da so povezane s koti in s trikotniki. Z njimi jih definiramo (slika 1), lahko pa se tudi vprašamo, kje v naravi naletimo na njihove grafe.



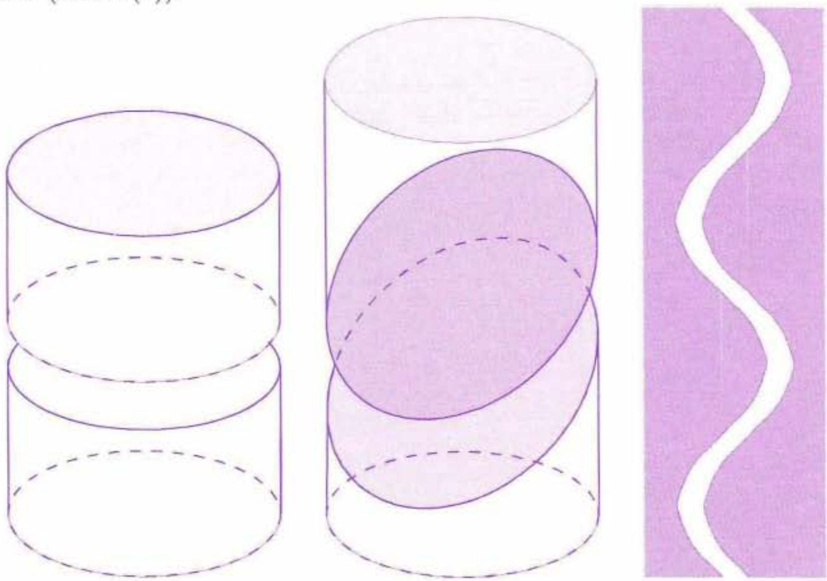
Slika 1. (a) Definiciji funkcij *sinus* in *kosinus*. V ravnini narišemo enotsko krožnico K s središčem O v izhodišču koordinatnega sistema. Iz točke $X = (1,0)$ se v smeri, nasprotni gibanju urinega kazalca, poda na pot po krožnici K točka T. Ko ima za seboj "prehojen" lok dolžine α (takrat kot $\sphericalangle XOT$ meri α radianov), ima točka T koordinato x enako $\cos\alpha$ in koordinato y enako $\sin\alpha$. Funkcija sinus je pozitivna v prvem in drugem kvadrantu, funkcija kosinus pa v prvem in četrtem. Obe funkciji sta periodični s periodo 2π (tj. $360°$). (b) Iz Pitagorovega izreka sledi zveza $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, še lažje pa se prepričamo o veljavnosti zveze $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$.

Iskanje sinusoide

Ker beremo Presek, bomo sinusoido našli s pomočjo preseka. Na valj z radijem 1 navijemo papir. Primer je črevo, ki objema salamo. (Saj veste, to je tisti nadležni "papir", ki ga moramo odstraniti, kadar želimo narezati salamo, ali pa se ga znebiti po rezanju, če tega nismo storili prej.) Velja:

Če prerežemo salamo (valj z radijem 1) z ravnim nožem pod kotom 45° glede na os valja in razvijemo črevo (papir), dobimo sinusoido (sliki 2(b) in 2(c)).

Prepričajmo se, da je res tako. Vzemimo pravokotni presek pokončnega valja (slika 2(a)). To je enotski krog; njegovo središče označimo z S (slika 3(a)).



(a) (b) (c)

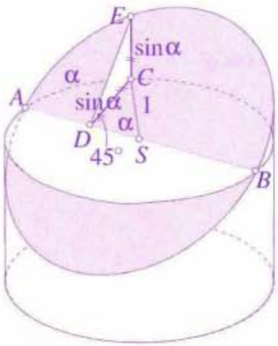
Slika 2. Sinusoida na valju. V našem primeru smo papir dvakrat ovili okoli valja.

Na sliki 3(a) je AB premer kroga, obarvan pa je presek valja z ravnino, ki seka enotski krog vzdolž daljice AB pod kotom 45°. Po tej ravnini je med rezanjem drsel nož. Presek je seveda elipsa (pa naj je videti še tako okrogla), a tega pravzaprav ne bomo nikjer uporabili.

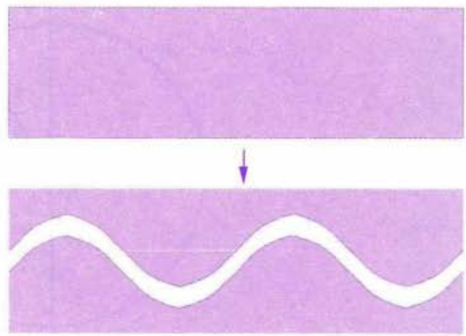
Iz točke A se podajmo na sprehod po robu izbranega enotskega kroga. Za tisti del, ko leži pot pod elipso, bomo pokazali, da smo od točke navpično nad nami oddaljeni natanko za sinus poti, ki smo jo že prehodili.

Na enotski krožnici izberimo tako točko C, da bo kot $\sphericalangle ASC$ enak α. Potem je dolžina loka AC enaka α, kjer je kot α merjen v radianih. Narišimo pravokotnici iz točke C na premer AB in na ravnino, v kateri leži izbrani enotski krog. Pravokotnici sekata premer AB in elipso zaporedoma v točkah D in E. S slike 1 smo si zapomnili, da je dolžina daljice CD

enaka $\sin\alpha$. Trikotnik DCE je pravokotni trikotnik, kot pri oglišču D pa je enak 45°. To pomeni, da gre za enakokraki trikotnik, zato je $\overline{CE} = \overline{CD} = \sin\alpha$. Ko črevo salame razvijemo, preide enotska krožnica v del premice, ki jo vzamemo za abscisno os. Obravnavani del elipse preide v del sinusoide, ki leži nad abscisno osjo. Podobno premislimo, da preide preostali del elipse v del sinusoide pod abscisno osjo.



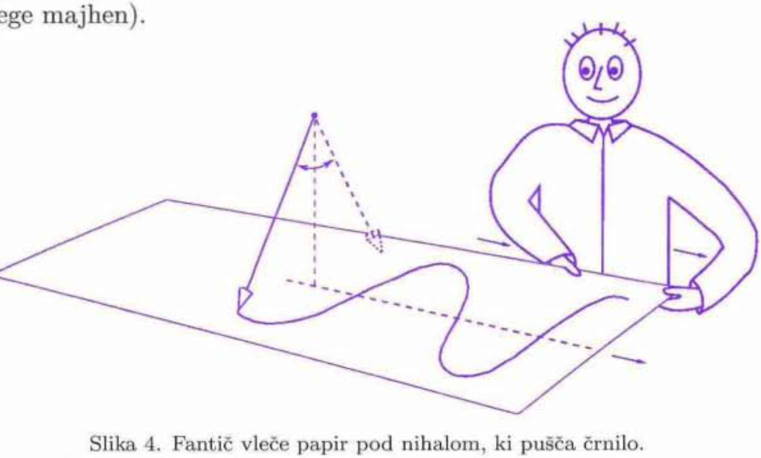
(a)



(b)

Slika 3.

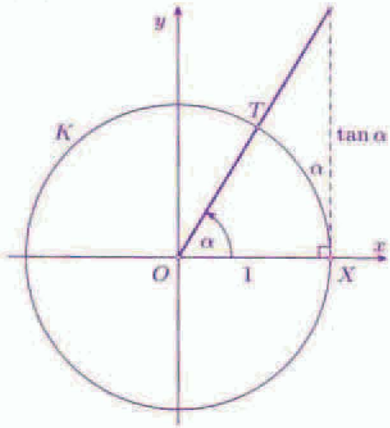
Kje pa najdemo sinusoido v fiziki? Najpogosteje naletimo nanjo pri raznih periodičnih pojavih, kot so mehanska ali elektromagnetna nihanja in valovanja (npr. pri matematičnem nihalu, dokler je odmik od ravnovesne lege majhen).



Slika 4. Fantič vleče papir pod nihalom, ki pušča črnilo.

Naloge

Za konec zastavimo še nekaj vprašanj. Kako priti do kosinusoide čivkajo že ptiči (slika 1 (b)), medtem ko je iskanje tangensoide ($\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$, slika 5) precej trši oreh.



Slika 5. Neposredno iz definicije funkcije tangens sledi, da je za $0 \leq \alpha < \pi/2$ vrednost $\tan\alpha$ enaka razdalji med točko X in presečiščem premice OT s pravokotnico na os x v točki X.

1. Dokaži, da je presek plašča valja in ravnine elipsa (slika 2(b)).
2. Zapiši enačbo krivulje, ki jo dobimo, če z nožem prerežemo valj s polmerom 1 pod kotom 60° glede na os valja.
3. Kakšno senco meče luč s cilindričnim senčnikom na navpično steno? (Nasvet: Najprej si ogledamo konkreten primer, ko za luč izberemo točko (0,0,0), za senčnik $x^2 + y^2 = 1$, $-1 < z < 1$, snop luči je rob sence oziroma stožec $x^2 + y^2 = z^2$, stena pa ravnina $x = 2$.)

Robert Bakula in Aleksandar Jurišić