PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 1
Strani 6–11

Marija Vencelj:

CEVOV IZREK

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1115-Vencelj.pdf

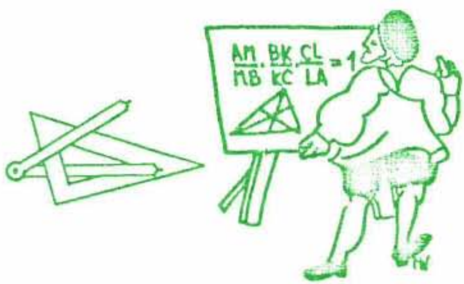
© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

CEVOV IZREK

Med vsemi ravninskimi liki so se matematiki največ ukvarjali s trikotnikom. Že stari Grki so vedeli, kako trikotniku očrtati krožnico, to da gredo vse tri težiščnice skozi isto točko, da velja isto za višine in za kotne simetrale, pa še marsikaj drugega.

Cevov izrek je zelo uporaben izrek, ki govori o tem, kdaj imajo tri premice, ki potekajo skozi različna trikotnikova oglišča, skupno točko. Je torej nekakšna posplošitev izrekov o težišču, višinski točki in središču včrtane krožnice. Odkril in dokazal ga je v drugi polovici 17. stoletja italijanski matematik Giovanni Ceva (beremo Čeva).



Preden izrek navedemo, se bomo nanj nekoliko pripravili.

- Najprej se domenimo za nekaj oznak:

$\overleftrightarrow{AB}$	premica skozi točki A in B
(A, B)	daljica s krajiščema A in B
AB	usmerjena daljica z začetno točko A in končno točko B
$\overline{AB}$	dolžina daljice (A, B)

- **Delilno razmerje.** Naj bo dana daljica AB in točka $C \in (A, B)$. Pravimo, da točka C deli daljico AB v razmerju $\overline{AC} : \overline{CB}$. Ta kvocient je neko pozitivno realno število λ, zato lahko tudi rečemo, da točka C deli daljico AB v razmerju λ. Očitno deli točka C usmerjeno daljico BA v razmerju $\dfrac{1}{\lambda}$.

Če je $C = A$, je $\lambda = 0$; ko gre C proti B, pa narašča delilno razmerje čez vse meje.

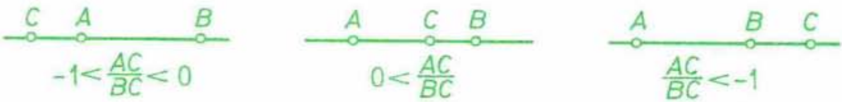
Pojem delilnega razmerja lahko posplošimo na vse točke premice $\overleftrightarrow{AB}$. Za $C \in \overleftrightarrow{AB}$, toda $C \notin (A, B)$, je delilno razmerje λ, v katerem C deli usmerjeno daljico AB, definirano takole:

$$\lambda = -\overline{AC} : \overline{CB}$$

in je torej za točke C zunaj daljice (A,B) negativno. V obeh primerih uporabljamo za delilno razmerje oznako $\frac{AC}{CB}$. Torej je za $C \in \overleftrightarrow{AB}$:

$$\frac{AC}{CB} = \begin{cases} \overline{AC} : \overline{CB} & \text{za} \quad C \in (A, B) \\ -\overline{AC} : \overline{CB} & \text{za} \quad C \notin (A, B) \end{cases}$$

Velja še: Dve različni točki delita daljico AB v različnih delilnih razmerjih. O tem se lahko s kratkim računom sami prepričate za vsak primer s slike 1 posebej.



a) b) c)

Slika 1

- **Cevova premica**. Premica, ki poteka skozi natanko eno oglišče trikotnika, se imenuje Cevova premica tega trikotnika.

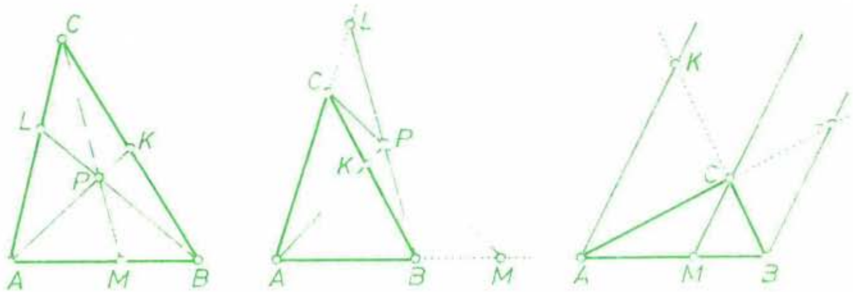
Oglejmo si sedaj

<u>**Cevov izrek**</u>. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik in K, L, M točke na premicah $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ in $\overleftrightarrow{AB}$, različne od oglišč trikotnika. Potem so Cevove premice $\overleftrightarrow{AK}, \overleftrightarrow{BL}, \overleftrightarrow{CM}$ ali vzporedne ali gredo skozi skupno točko natanko takrat, ko je

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1. \tag{1}$$

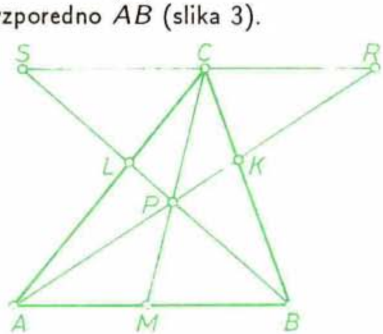
(Torej tedaj, ko je produkt razmerij, v katerih točke K, L, M delijo usmerjene trikotnikove stranice BC, CA, AB, enak 1.)

Dokaz: Pogoj je potreben. Naj gredo $\overleftrightarrow{AK}, \overleftrightarrow{BL}, \overleftrightarrow{CM}$ skozi isto točko P. Skupaj bomo dokazali trditev za primer, ko je P notranja točka trikotnika $\triangle ABC$. Sami poskusite na sličen način ugnati primer, ko leži P zunaj trikotnika ali ko so Cevove premice vzporedne (slika 2).

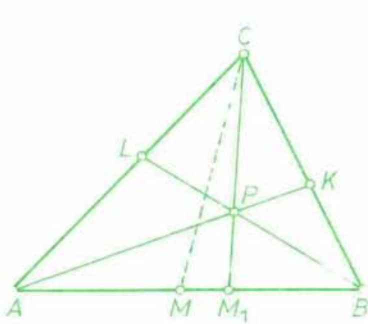


Slika 2

Naj bosta R in S presečišči premic $\overleftrightarrow{AK}$ in $\overleftrightarrow{BL}$ s premico skozi C, vzporedno $\overleftrightarrow{AB}$ (slika 3).



Slika 3



Slika 4

Opazimo lahko štiri pare podobnih trikotnikov:

$$\triangle CLS \sim \triangle ALB, \quad \triangle CPS \sim \triangle MPB,$$

$$\triangle CPR \sim \triangle MPA, \quad \triangle AKB \sim \triangle RKC.$$

Iz njih razberemo:

$$\frac{CL}{LA} = \frac{\overline{SC}}{\overline{AB}}, \tag{2}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CR}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{CS}}$$

in od tod, ker je $M \in (A, B)$,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CS}}. \tag{3}$$

Nadalje je še:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CR}}. \tag{4}$$

Z množenjem enačb (2), (3), (4) dobimo pogoj (1).

Pogoj je zadosten. Naj velja enačba (1). Potem so Cevove premice ali vzporedne ali pa obstaja točka P, ki je dvema premicama skupna. Naj bosta to $\overleftrightarrow{AK}$ in $\overleftrightarrow{BL}$. Položimo skozi P novo Cevovo premico $\overleftrightarrow{CM_1}$ (slika 4). Iz potrebnosti pogoja Cevovega izreka sledi:

$$\frac{AM_1}{M_1B} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1. \tag{5}$$

Od tod in iz (1) dobimo

$$\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{AM}{MB}.$$

Točki M in M_1 torej delita usmerjeno daljico AB v istem razmerju. Ker pa delilno razmerje točko natanko določa, je $M = M_1$ in torej $P \in \overleftrightarrow{CM}$, kar smo želeli dokazati.

Uporaba.

Težišče. Težiščnice trikotnika nasprotno stranico razpolavljajo, torej jo dele v razmerju 1. Ker je $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, gredo težiščnice skozi isto točko - težišče trikotnika.

Središče včrtane krožnice. Kotne simetrale dele trikotnikove stranice v razmerju priležnih stranic. Če so a, b, c dolžine trikotnikovih stranic, je

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CL}{LA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1.$$

Kotne simetrale gredo torej skozi isto točko - središče včrtane krožnice.

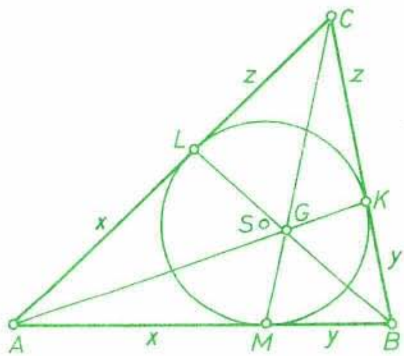
Višinska točka. Za pravokoten trikotnik nimamo kaj dokazovati. Če je trikotnik ostrokoten, so podnožišča višin notranje točke nasprotnih stranic. Pri topokotnem trikotniku sta podnožišči višin, ki izhajata iz ostrih kotov, zunanji točki nasprotnih stranic, podnožišče tretje višine pa notranja točka. Vedno je torej produkt delilnih razmerij z leve strani formule (1) pozitivno število. Poglejmo še njegovo absolutno vrednost. Če so v_a, v_b, v_c trikotnikove višine, je

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{LA}}=\frac{v_c}{v_b},\quad \frac{\overline{BK}}{\overline{MB}}=\frac{v_a}{v_c},\quad \frac{\overline{CL}}{\overline{KC}}=\frac{v_b}{v_a}.$$

Produkt levih strani teh enačb je absolutna vrednost leve strani enačbe (1), produkt desnih pa je enak 1. Višinska točka torej obstaja.

Gergonnova točka. Spojimo oglišča trikotnika z dotikališči včrtane krožnice na nasprotnih stranicah. Ker sta tangenti iz dane točke na dano krožnico enako dolgi, imamo situacijo kot na sliki 5.
Velja $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CL}{LA}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$.
Torej gredo konstruirane Cevove premice skozi skupno točko G. Imenujemo jo Gergonnova točka trikotnika.

Omeniti velja še nekaj. Že okrog leta 100 je grški matematik Menelaj iz Aleksandrije dokazal naslednji izrek: Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik in K, L, M točke na premicah $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ in $\overleftrightarrow{AB}$, različne od oglišč trikotnika. Če so točke K, L, M kolinearne, je



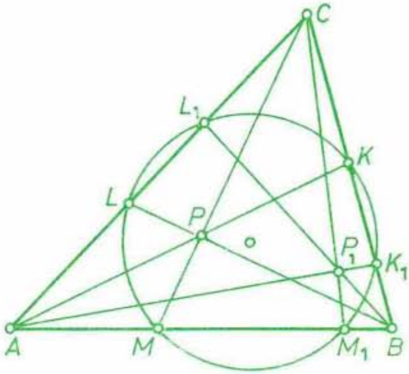
Slika 5

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CL}{LA}=-1. \tag{6}$$

Kasneje je bila dokazana tudi zadostnost pogoja (6) za kolinearnost točk K, L, M. Ta - Menelajev - izrek je nekakšen izrek dvojček Cevovega izreka. Zato se zdi kar neverjeto, da je med njunima odkritjema minilo poldrugo tisočletje. Pove pa ta podatek veliko o počasnem razvoju matematike v tem obdobju.

Za konec z uporabo Cevovega izreka rešite naslednji nalogi:

1. naloga: Naj bodo $\overleftrightarrow{AK}$, $\overleftrightarrow{BL}$, $\overleftrightarrow{CM}$ tri take Cevove premice trikotnika $\triangle ABC$, ki gredo skozi skupno točko. Krožnica skozi točke K, L, M seka nosilke trikotnikovih stranic $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ in $\overleftrightarrow{AB}$ zapored še v točkah K_1, L_1, M_1 (slika 6), ki niso nujno različne od K, L, M. Dokaži, da gredo tudi Cevove premice $\overleftrightarrow{AK_1}$, $\overleftrightarrow{BL_1}$, $\overleftrightarrow{CM_1}$ skozi isto točko! (Nasvet: Uporabi potenco točke glede na krožnico!)

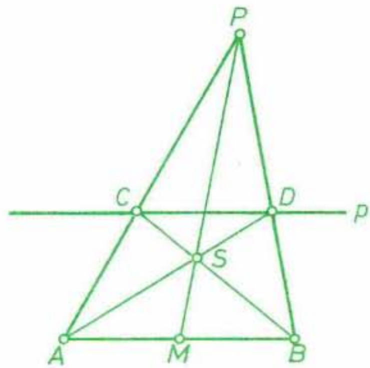


Slika 6

2. naloga: V ravnini naj bosta dani daljica (A, B) in njej vzporedna premica p. Izven premic p in $\overleftrightarrow{AB}$ izberimo poljubno točko P in narišimo geometrijsko figuro kot na sliki 7.

Dokaži, da točka M razpolavlja daljico (A, B)!

(Opomba: Kot veste, običajno razpolavljamo daljico tako, da s šestilom in ravnilom narišemo njeno simetralo. Tu smo uporabili le ravnilo! Res pa smo pri tem potrebovali "oporo" - podana je morala biti tudi vzporednica daljici (A, B).)



Slika 7

Marija Vencelj