PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 1
Strani 8–11

Milena Strnad:

PITAGOROV IZREK PRED PITAGOROM

Ključne besede: matematika, Pitagora.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/966-Strnad.pdf

PITAGOROV IZREK PRED PITAGOROM

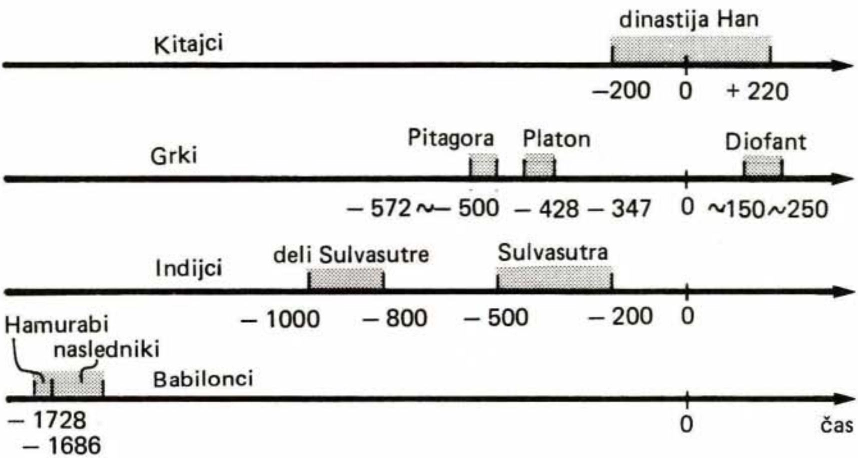
V matematiki so skoraj sočasna neodvisna odkritja dokaj redka, večkratna odkritja pa prave izjeme. * Znani matematik in poznavalec matematike starih civilizacij B.L. van der Waerden misli, da je taka izjema tudi odkritje *Pitagorovega izreka.* Z njim so računali v starih časih Babilonci, Indijci, Grki in Kitajci. Pri vseh štirih narodih srečamo tudi enak način računanja pitagorejskih trojic. Zato si je zanimivo ogledati, kako so se s pravokotnim trikotnikom ukvarjali matematiki davno umrlih kultur.

Najprej ponovimo:

- Pravokotni trikotnik ima en pravi kot.
- Pitagorov izrek poveže njegove stranice x, y, z takole

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

- Trojico naravnih števil, ki zadošča zvezi (1) imenujemo *pitagorejsko trojico.*
- Pitagorejska trojica je *primitivna,* če števila x, y, z nimajo skupnega faktorja.



Slika 1. Pitagorejske trojice pri Babiloncih, Indijcih, Grkih in Kitajcih.

---

* V novejšem času je tak primer odkritje neevklidske geometrije, le-to je uspelo skoraj hkrati trem: Gaussu, Bolyaiu in Lobačevskemu.

– V primitivni pitagorejski trojici (x, y, z) mora biti eno izmed števil x ali y liho in drugo sodo. Če sta obe števili sodi, trojica po definiciji ne more biti primitivna. Če sta obe števili lihi, je vsota njunih kvadratov $x^2 + y^2$ število oblike $4n + 2$, ki ne more biti kvadrat naravnega števila.

Pot do primitivnih pitagorejskih trojic ni zahtevna. Poznati moramo Pitagorov izrek in *pravilo o razcepu razlike kvadratov*

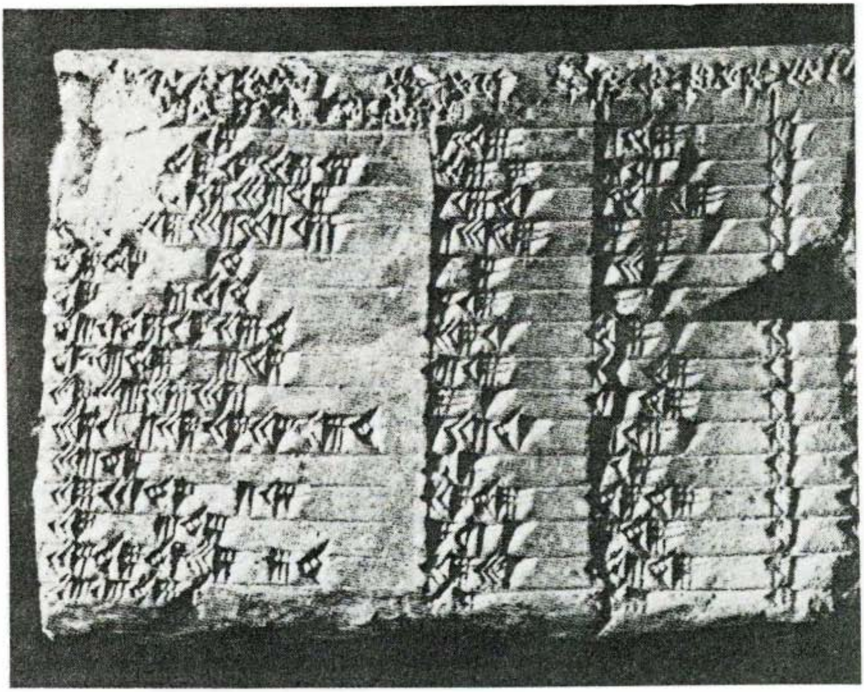
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{2}$$

Znati tudi moramo z naravnimi števili rešiti sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama.

Najprej izberimo poljubno naravno število x. Z rešitvijo enačbe $z^2 - y^2 = x^2$ v obliki

$$(z - y)(z + y) = x^2 \tag{3}$$

mu priredimo drugi števili. To storimo tako, da število x zapišemo kot produkt



Slika 2. Klinopisna tablica z oznako Plimton 322, ki jo hrani kolumbijska univerza v New Yorku.

dveh naravnih števil. Nato enačbo (3) razbijemo v sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama. Njegova rešitev je rešitev enačbe (3).

Od tega, ali izberemo lih ali sod x, je odvisno, ali sledimo računanju Kitajcev v času dinastije Han (od 200 let pred našim štetjem do leta 220 našega štetja) ali Grka Diofanta iz Aleksandrije (okoli leta 250 našega štetja).

Kitajski način: Naj bo $x = st$ poljubno liho število. Iz (3) sledi $(z - y)(z + y) = s^2 t^2$ in od tod sistem enačb

$$z + y = s^2 \qquad z - y = t^2$$

z rešitvijo

$$z = \tfrac{1}{2}(s^2 + t^2) \qquad y = \tfrac{1}{2}(s^2 - t^2) \tag{4}$$

Grški način: Naj bo $x = 2pq$ poljubno sodo število. Iz (3) sledi $(z - y)(z + y) = 4p^2q^2$ in od tod sistem enačb

$$z + y = 2p^2 \qquad z - y = 2q^2$$

z rešitvijo

$$z = p^2 + q^2 \qquad y = p^2 - q^2 \tag{5}$$

Navedimo nekaj zgledov za kitajski in za grški način.

$x = st$	$y = (s^2 - t^2)/2$	$z = (s^2 + t^2)$	$x = 2pq$	$y = p^2 - q^2$	$z = p^2 + q^2$
5=3.1	5	4	4=2(2.1)	3	5
5=5.1	13	12	12=2(3.2)	5	13
7=7.1	25	24	24=2(4.3)	7	25

Na koncu vstavimo v (4) $s = p + q$ in $t = p - q$, pa dobimo (5). Oba načina za računanje pitagorejskih trojic sta torej enakovredna.

Šele leta 1945 so ugotovili, da so poznali primitivne pitagorejske trojice tudi Babilonci. S klinopisne tablice iz časa Hamurabija (1728—1686 pred našim štetjem) in njegovih naslednikov so razbrali, da so pitagorejske trojice računali enako kot za njimi Grki. Pot do spoznanja ni bila preprosta, ker se klinopisni zapis števil razlikuje od našega in ker tablica ni bila v celoti ohranjena. Kaže, da so Babilonci reševali nalogo v dveh korakih. Najprej so z rešitvijo enačbe $1 + v^2 = w^2$ poiskali vse pitagorejske trojice z obliko $(1, v, w)$, nato so dobljene trojice pomnožili s številom x. Nalogo je mogoče najhitreje rešiti prek enačbe $(w + v)(w - v) = 1$. Po tem je mogoče sklepati, da so Babilonci poleg Pitagorovega izreka poznali tudi razcep (2).

Zapis Pitagorovega izreka in primitivnih pitagorejskih trojic najdemo tudi v starem hindujskem priročniku za gradnjo oltarjev *Sulvasutra* (od 500 do 200 pred našim štetjem, nekateri deli izvirajo iz 1000 do 800 pred našim štetjem). V njem preberemo: "Diagonala 'podolgovatega' (v angleškem prevodu oblong) da sama obe ploščini, ki ju dasta obe stranici 'podolgovatega' posebej." (Pomeni: Kvadrat hipotenuze pravokotnega trikotnika je enak vsoti kvadratov obeh katet.) To vidimo po tistih 'podolgovatih', katerih stranici sta 3 in 4, 12 in 15, 15 in 8, 7 in 48, 12 in 53 ter 15 in 36.

Ko izračunamo manjkajoče stranice 'podolgovatih', to je pravokotnih trikotnikov, dobimo pitagorejske trojice, pri katerih sta kateti skoraj enako veliki. To vsiljuje misel, da so Indijci računali pitagorejske trojice z enačbo (4) ob primerni izbiri x. Zgledi

$z-y=1$	$z-y=2$	$z-y=3$
(3, 4, 5)	(8,15,17)	(15,36,39)
(5,12,13)	(12,35,37)	

govorijo proti temu, da so dobili trojice z merjenjem trikotnikov. Trojice (12, 35, 37) ne bi bilo lahko določiti z merjenjem, saj obstaja več kot tisoč pravokotnih trikotnikov, katerih kateti sta celi števili, njuna vsota pa manjša kot 48.

Vse kar smo izvedeli o računanju pitagorejskih trojic v Babiloniji, Indiji, na Kitajskem in v Grčiji ne nasprotuje, a tudi ne dokazuje van der Waerdenove misli o neodvisnem odkritju Pitagorovega izreka in pitagorejskih trojic. Morda pa so bile davne civilizacije med seboj bolj povezane, kot smo doslej mislili.

Milena Strnad