Geometrijski magični kvadrati

Nada Razpet

Magični kvadrat reda n je kvadrat, razdeljen na $n \times n$ enakih celic, pri čemer je n naravno število. V vsaki celici je eno od naravnih števil $1, 2, 3, \ldots n^2$ razporejenih tako, da so vsote števil po vrsticah, stolpcih in diagonalah enake. To vsoto števil pogosto imenujejo *magično število M*. Kako izračunamo magično število?

Vsota vseh števil v magičnem kvadratu je vsota vseh naravnih števil od 1 do n^2, torej

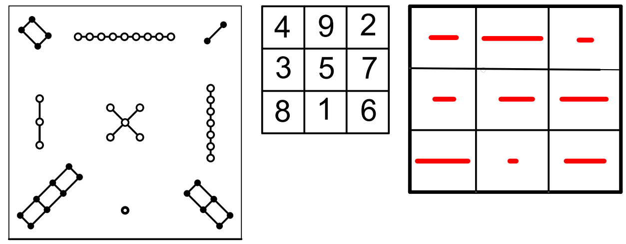
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Ker je n vrstic, je vsota števil po vrsticah

$$M = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n^3+n}{2}.$$

Magične kvadrate poznajo ljudje že zelo dolgo. Izvirali naj bi iz Kitajske. Kdaj so se prvič pojavili, ne vemo. Nekateri pravijo, da naj bi jih Kitajci poznali že od leta 650 pred našim štetjem, nekateri zapisi naj bi omenjali leto 80 našega štetja, zanesljivi viri pa prihajajo iz leta 570. Največkrat omenjeni star magični kvadrat je Lo šu. Po legendi naj bi ga opazili na oklepu želve, ki je ob poplavah lezla iz reke Lo. Del vzorca, ki naj bi bil na hrbtu želve, je magični kvadrat, prikazan na sliki 1. Poleg smo narisali še ustrezni številski in geometrijski magični kvadrat. Merska števila daljic so ravno števila, ki so zapisana v posameznih celicah. Dolžino enotske daljice pa si lahko izberemo.

Tokrat se posvetimo *geometrijskim magičnim kvadratom*. Več o njih najdete v [1]. Navedli bomo le najpreprostejšo definicijo magičnega kvadrata. Geometrijski magični kvadrat reda n je kvadrat, ki je razdeljen na $n \times n$ celic, pri čemer je n naravno število. V celicah geometrijskega magičnega kvadrata (v nadaljevanju GMK) so namesto številk črte, geometrijski liki ali telesa razporejeni tako, da iz njih po vrsticah, stolpcih in diagonalah sestavimo nove črte, like ali telesa.



SLIKA 1.
Magični kvadrat Lo šu, njegova številska in geometrijska različica

Dogovorimo se še za poimenovanja. Osnovni liki so liki; te sestavljamo v nove like, ki polnijo celice GMK. Tem sestavljenim likom v celicah bomo rekli elementi celic. Elemente celic po vrsticah, stolpcih in diagonalah sestavljamo v nove like; to so *vsote elementov*. Pri vseh sestavljanjih velja, da lahko osnovne like ali elemente po celicah zavrtimo, morajo pa se stikati brez vrzeli in se ne smejo prekrivati.

Pri manj strogih zahtevah morajo imeti vsote elementov enake dolžine, ploščine oz. prostornine, lahko pa se razlikujejo po obliki. Vsote elementov pri nekem GMK so lahko npr. poljubni večkotniki, ki imajo enake ploščine (vsota elementov prve vrstice je trikotnik, druge vrstice štirikotnik ...). Prav tako se lahko v celicah kakšen element tudi ponovi. Pri strožjih zahtevah pa morajo biti vsote elementov med seboj skladni liki, elementi v posameznih celicah pa morajo biti različni. Tak GMK ima v tem primeru n^2 različnih elementov.

V nadaljevanju bomo pri sestavljanju GMK upoštevali strožja merila.

Magični kvadrat reda 3

Kako sestaviti GMK? Pomagamo si s t. i. Lucasovo tabelo (ustvaril jo je francoski matematik François Édouard Anatole Lucas (1842–1891)). Kot je razvidno iz slike 2, moramo najti tri osnovne like a, b, c, se dogovoriti, kako jih bomo *seštevali in odšte-*

vali, narisati ustrezne *vsote in razlike* teh likov (elemente) in jih razporediti po celicah. Vsota likov $a+b$ pomeni, da sestavimo (staknemo) lika a in b. Razlika likov $a-b$ pa pomeni, da liku a odrežemo lik b. Kako lika staknemo ali odrežemo, pa je treba premisliti. Čisto poljubno ne gre, saj moramo elemente po vrsticah, stolpcih in diagonalah sestaviti tako, da med njimi ne bo vrzeli in da bodo vsote elementov skladni liki ali telesa.

Primer. Lika a in c sta pravokotnika, ki imata enako dolgi daljši stranici, lik b pa je polovica kroga. Vsota $a+c$ pomeni, da moramo sestaviti lika a in c tako, da se stikata po daljši stranici. Razlika $c-a$ pomeni, da moramo od lika c odrezati lik a. Lik b pa bomo likoma a in c dodajali ali odvzemali na sredini daljše stranice. Če upoštevamo pravila zapisana v tabeli na sliki 2, dobimo narisani GMK na desni strani. Če poiščemo vsote elementov GMK na sliki 2 po vrsticah, stolpcih ali diagonalah, dobimo pravokotnik, to je lik $3c$. Opazimo še, da v posameznih celicah nimamo osnovnih likov a, b in c, ampak le njihove vsota ali razlike.

Če pravokotnik a ne bi imel ene enako dolge stranice kot pravokotnik c, bi se morali dogovoriti, kako ju staknemo, recimo tako, da se sredini daljših stranic ujemata. Odrežite en konec pravokotnika a, tako da bo njegova daljša stranica krajša od daljše stranice pravokotnika c in sestavite nov magični kvadrat. Kateri lik je zdaj vsota elementov po vrsticah, stolpcih ali diagonalah?

Naredimo še primer za geometrijski magični kvadrat reda 4 na dva načina. Prvega tako, da v celicah ne bo osnovnih likov, drugega pa tako, da bodo v celicah nekateri osnovni liki.

Magični kvadrat reda 4 brez osnovnih likov

Pomagamo si z latinskim kvadratom. *Latinski kvadrat* je kvadrat, razdeljen na $n \times n$ enakih celic, v katerih je n različnih elementov, navadno črk (latinskih črk, od tod tudi ime). Črke so po celicah razporejene tako, da se v vsaki vrstici oz. v vsakem stolpcu vsaka črka pojavi le enkrat (tabela 1 levo). Ime za tak kvadrat je uvedel Leonhard Euler (1707–1789). Latinski kvadrat ni magični kvadrat.

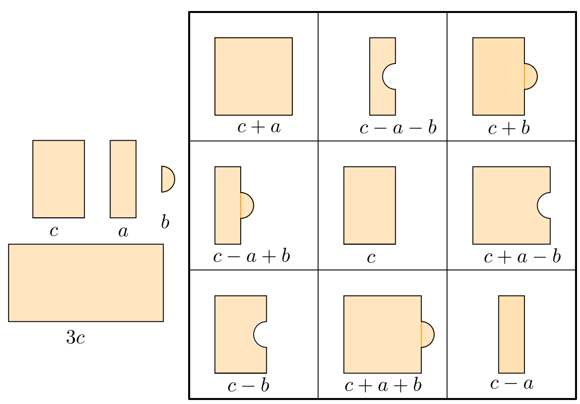
Zdaj latinski kvadrat, ki ima štiri različne elemente A, B, C, D, preuredimo tako, da dobimo magični kvadrat reda 4, ki ustreza strožjim zahtevam in ima po celicah različne elemente (tabela 1 desno). Osnovni liki so A, B, C, D, a in b.

Po tabeli 1 desno sestavljeni GMK je na sliki 3.

Magični kvadrat reda 4 z osnovnimi elementi po celicah

Sestavimo še magični kvadrat iz istih elementov kot v prejšnjem primeru, le da bodo v celicah tudi osnovni elementi A, B, C in D. Zopet si pomagamo z latinskim magičnim kvadratom.

$c+a$	$c-a-b$	$c+b$
$c-a+b$	c	$c+a-b$
$c-b$	$c+a+b$	$c-a$

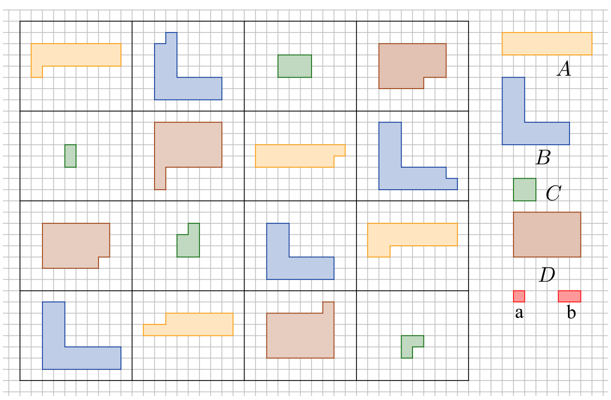


SLIKA 2.
Lucasova tabela za konstrukcijo magičnega kvadrata 3×3. Vsote po vrsticah, stolpcih in diagonalah (magično število) so $3c$. Poleg so narisani osnovni liki a, b in c in vsota elementov, to je lik $3c$ in ustrezni GMK.

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

$A+a$	$B-a$	$C+b$	$D-b$
$C-b$	$D+b$	$A-a$	$B+a$
$D-a$	$C+a$	$B-b$	$A+b$
$B+b$	$A-b$	$D+a$	$C-a$

TABELA 1.
Latinski 4×4 kvadrat. Ima samo štiri različne elemente. Poleg je dopolnjena tabela za izdelavo geometrijskega magičnega kvadrata z različnimi elementi po celicah.



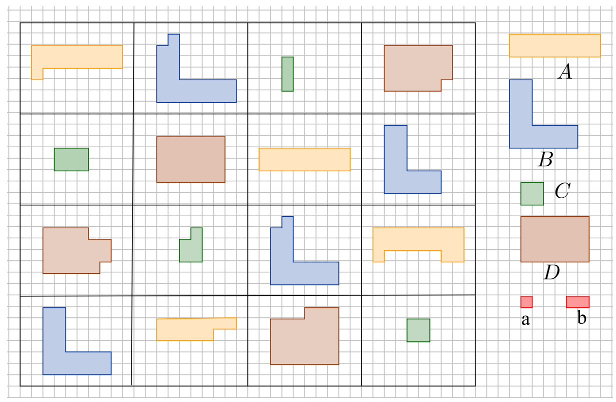
SLIKA 3.
Magični kvadrat s samimi različnimi liki po celicah. Da je slika preglednejša, smo osnovne like A, B, C in D obarvali in z enako barvo označili tudi elemente v celicah, ki so nastali tako, da smo tem štirimi osnovnim likom prišteli ali odšteli osnovna lika a in b.

Sestavimo ta magični kvadrat. Tudi tu smo osnovne like obarvali, tako da je v celicah vidno, iz katerega osnovnega lika je nastal narisani element celice (slika 4).

Kateri lik je vsota elementov po vrsticah, stolpcih oz. diagonalah? Kolikšna je njegova ploščina? So vsote elementov po vrsticah, stolpcih in diagonalah skladni liki? Za lažje preverjanje smo elemente v celicah narisali na kvadratni mreži.

$A+a$	$B-a+b$	$C+a-b$	$D-a$
$C+b$	D	A	$B-b$
$D-a-b$	$C+a$	$B-b$	$A+a+b$
B	$A-b$	$D+b$	C

TABELA 2.
Iz latinskega magičnega kvadrata smo naredili tabelo za konstrukcijo še enega geometrijskega magičnega kvadrata.



SLIKA 4.
Magični kvadrat z nekaterimi osnovnimi liki A, B, C in D po celicah

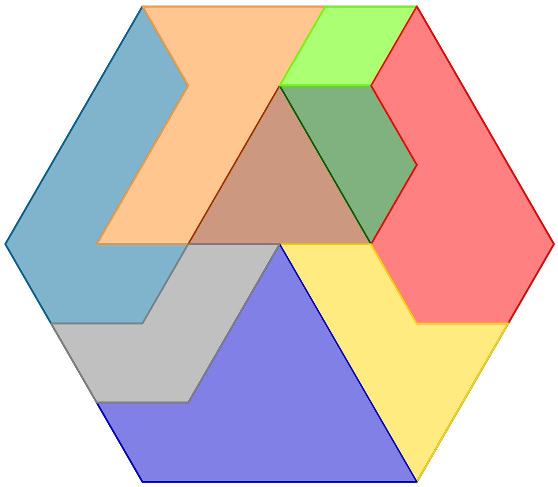
Magični kvadrat reda 3 iz delov šestkotnika

Pravilni šestkotnik smo razdelili na devet mnogokotnikov (slika 5). Iz narisanih delov sestavimo GMK reda 3.

Ali lahko sestavite tak GMK da ustreza strožjim zahtevam? Kateri lik je vsota elementov po vrsticah, stolpcih oz. diagonalah?

Kako naprej?

Ali lahko iz predlaganih osnovnih likov sestavimo posamezne elemente v celicah kako drugače, pa bodo še vedno ustrezali strožjim zahtevam za sestavo MGK? Spremenimo polkrog iz primera na sliki 2 v enakokraki (enakostranični) trikotnik in sestavimo GMK. Ali lahko trikotnik *prištejemo ali odštejemo* kako drugače, kot smo to naredili s polkrogom (ne po sredini stranice)?



SLIKA 5.
Iz delov pravilnega šestkotnika izdelajte GMK 3×3.

Ernest Bergholt je 1910 objavil »formulo« za tvorjenje GMK reda 4, ki ima v celicah tudi nekaj osnovnih likov. Določite osnovne like in sestavite GMK po tabeli 3.

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+d$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

TABELA 3.
Bergholtova shema za GMK reda 4

Več primerov geometrijskih magičnih kvadratov tudi višjih redov najdete tudi na spletni strani `www.geomagicsquares.com`.

Literatura

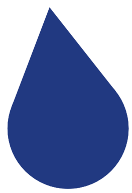
[1] Lee C. F. Sallows *Geometric Magic Squares*, A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2013.

× × ×

Kapljice dežja

Andrej Likar

→ Kapljice dežja ilustratorji najpogosteje rišejo podolgovate s konico na vrhu, podobno, kot je predstavljeno na sliki 1, torej v obliki solze. Tudi sicer prevladuje mnenje, da imajo kapljice ribjo obliko, saj deluje na tako oblikovano kapljico precej manjši zračni upor kot na kroglico. Kapljice, ki visijo na vejah, tik preden padejo, so res podolgovate, vendar ne zaradi upora zraka.



SLIKA 1.
Kapljica dežja, kot si jo najpogosteje zamišljajo ilustratorji slikanic.

Manjše dežne kapljice imajo obliko kroglice, večje pa so nekoliko sploščene, kot kaže slika 2. Sploščenost je opazna pri kapljicah s polmerom nad 3 mm. Torej niti sledu o kakšni podolgovati obliki s konico na vrhu! Ko sem tole razlagal prijatelju Bogdanu, se s kroglasto obliko kapljic ni mogel sprijazniti. Morda je tako blizu tal, mi je ugovarjal, a gori blizu oblakov je oblika lahko drugačna. Tam pa verjetno ni nihče podrobneje opazoval kapljic. Prav mogoče je, da so solznate oblike. Le kako mu pokazati, da se moti? Spomnil sem se mavrice, ki jo tvori svetloba, odbita od notranjih sten kapljic visoko nad tlemi. O mavrici je Bogdan sicer nekaj vedel, a ne prav podrobno. Torej sem začel z razlago in jo podkrepil z računalniškim programom, kjer se računi loma in odboja bliskovito opravijo. Seveda je pisanje programa malo manj bliskovito, a sem ga napisal in preveril že prej. Kdor pa želi kaj več vedeti o tem računanju na roko, naj si pogleda članek v eni prejšnjih številk Preseka [1].