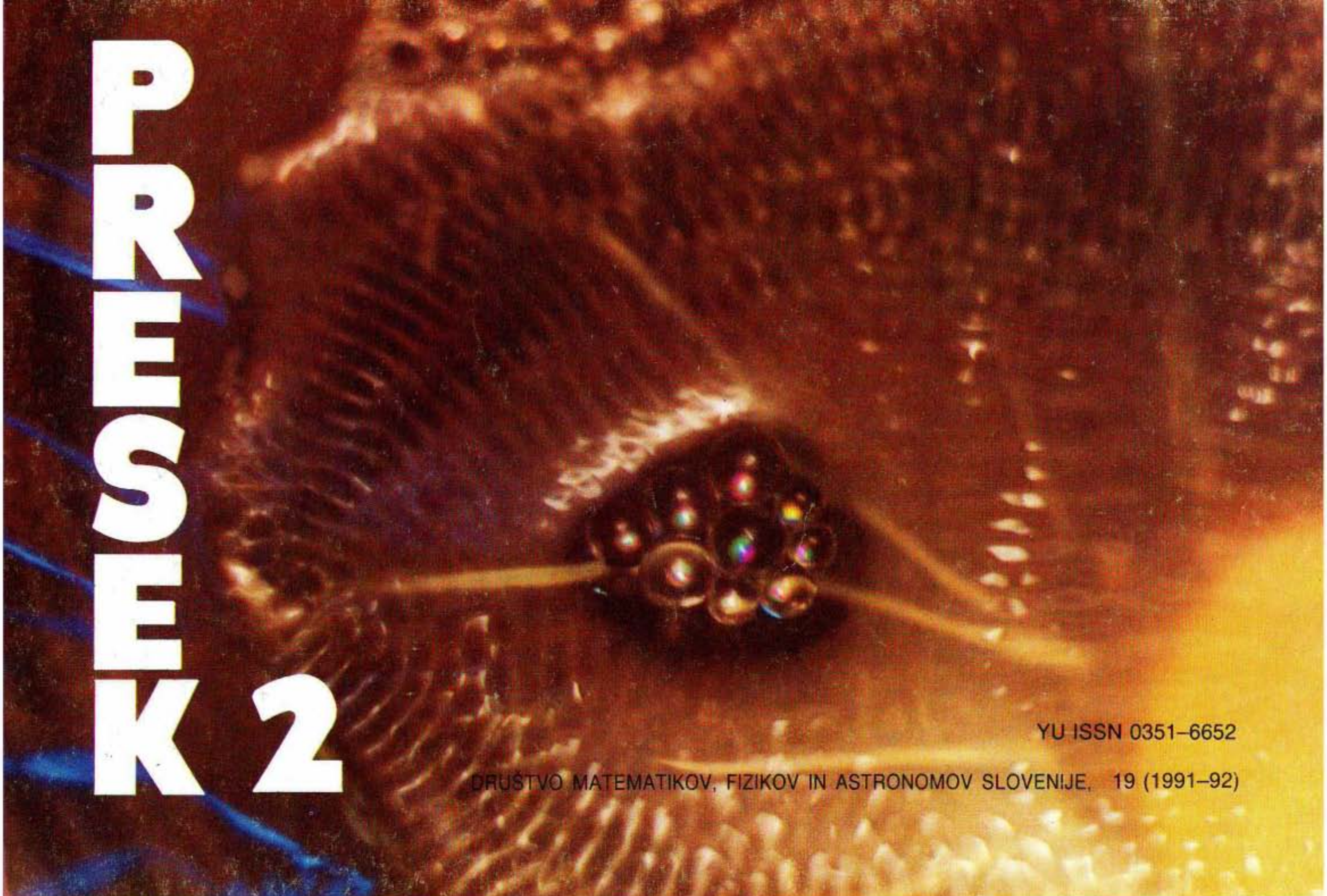


PRESEK 2

YU ISSN 0351–6652

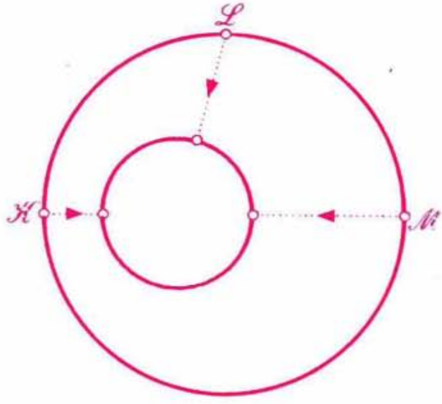
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE. 19 (1991–92)

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
19. letnik, leto 1991/92, številka 2, strani 65-128

VSEBINA

JEZERCE Z OTOČKOM

Katja, Luka in Matjaž nameravajo z različnih krajev obale okroglega jezera plavati na okrogel otok v njem. Katja se je odločila za najkrajšo možno pot, Matjaž je najdlje od otoka, Luka pa je enako oddaljen od Katje in Matjaža, do otoka pa ima (po najkrajši poti) 60 m dlje kot Katja in 40 m manj kot Matjaž (glej sliko).



a. Kolikšno je jezero?

b. Koliko so Katja, Luka in Matjaž oddaljeni od otoka, če ima ta trikrat manjši premer kot jezero?

Boris Lavrič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

19. letnik, šolsko leto 1991/92, številka 2, strani 65 – 128

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel. (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1991/92, vplačana po 1.11.1991, je za posamezne naročnike 400.- SLT, za skupinska naročila šol 300.- SLT, posamezna številka 75.- SLT (60.- SLT), za tujino 12000.- LIT.

List sofinancirajo MZT, MIŠ in MK
Ofset tisk DELO - TISKARNA, Ljubljana
Tekst je postavljen z računalnikom SLIM 286, ALTECH, Ljubljana

IZMERIMO SVITEK

Za začetek na kratko povzemimo, kaj o svitku pravi Slovar slovenskega knjižnega jezika :

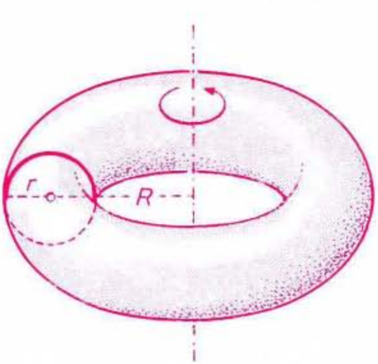
Svitek je obročasta, spletena ali iz blaga narejena priprava za lažje prenašanje bremena na glavi, pa tudi tisto, kar je po obliki podobno tej pripravi (na primer napihnjena avtomobilska pnevmatika).

Matematični opis svitka mora biti seveda natančnejši. Pa si ga oglejmo:

Svitek ali *torus* je vrtenina, ki nastane, kadar sučemo krog okrog premice, ki leži v ravnini tega kroga in ga ne seka.

S pomočjo te definicije lahko preprosto izmerimo velikost svitka. Dva podatka zadoščata: polmer kroga, ki ga sučemo, in oddaljenost njegovega središča od osi vrtenja. Polmer kroga bomo označevali z r, oddaljenost središča od osi pa z R.

S tema podatkoma bomo izrazili prostornino in površino svitka.



Slika 1

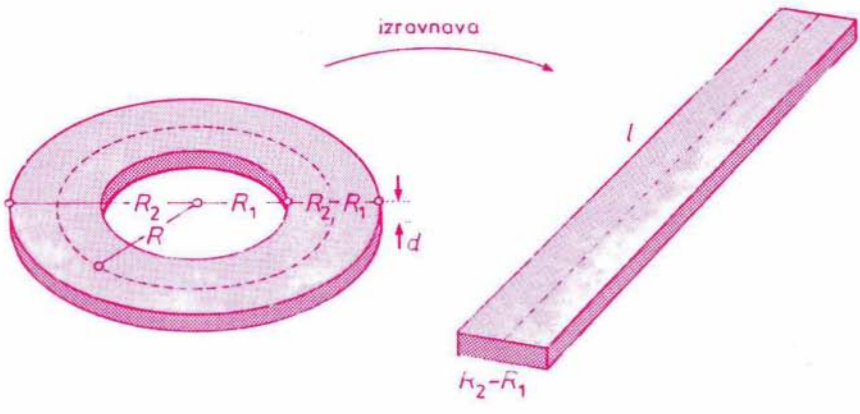
1. Prostornina

Najprej se lotimo kolobarjaste plošče. Krožni kolobar z notranjim polmerom R_1 in z zunanjim polmerom R_2 odebelimo v kolobarjasto ploščo debeline d. Širina te plošče tedaj meri $R_2 - R_1$. Nato ploščo izravnajmo v enako debelo in široko pravokotno ploščo z isto prostornino (glej sliko 2). Poiščimo zdaj njeno dolžino l. Izenačimo prostornini prvotne in izravnane plošče

$$\pi(R_2^2 - R_1^2)\, d = (R_2 - R_1)\, d\, l$$

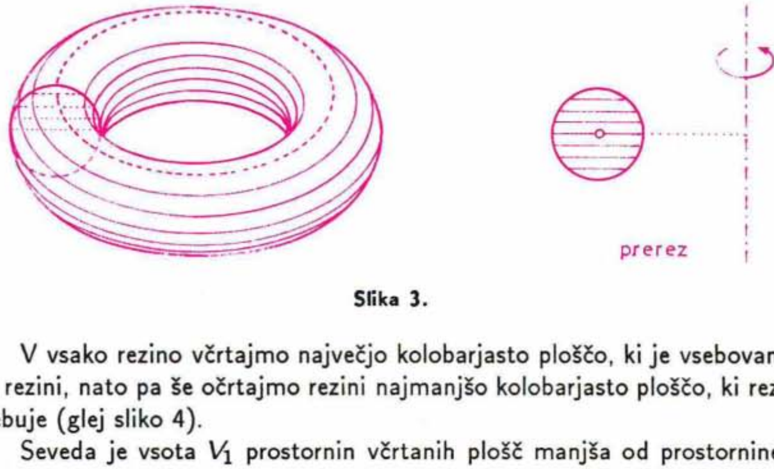
in že dobimo $l = \pi(R_1 + R_2)$. Torej je l natančno obseg kroga, ki teče po sredi kolobarja, saj ima le-ta polmer R enak

$$R = R_1 + (R_2 - R_1)/2 = (R_1 + R_2)/2.$$



Slika 2

Zdaj pa svitek razrežimo na kolobarjaste rezine z ravninami, ki so pravokotne na njegovo os. Ena od teh ravnin naj razpolovi svitek, rezine pa naj bodo enako debele.



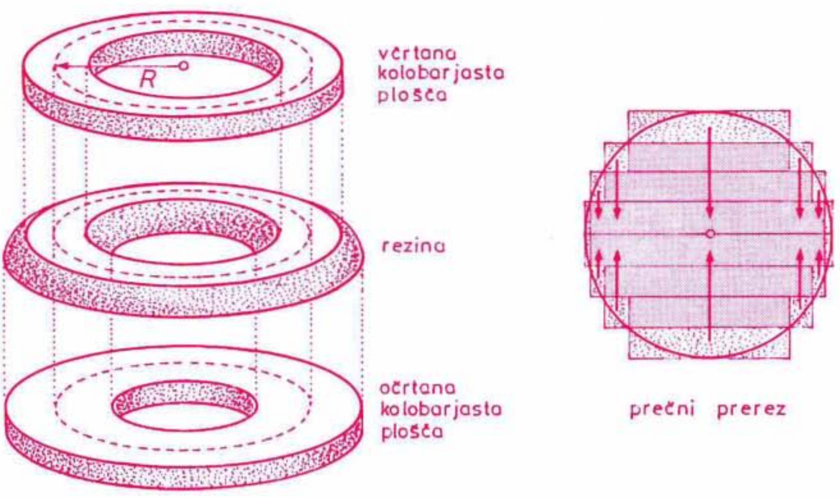
Slika 3.

V vsako rezino včrtajmo največjo kolobarjasto ploščo, ki je vsebovana v tej rezini, nato pa še očrtajmo rezini najmanjšo kolobarjasto ploščo, ki rezino vsebuje (glej sliko 4).

Seveda je vsota V_1 prostornin včrtanih plošč manjša od prostornine V svitka, ta pa manjša od vsote V_2 prostornin očrtanih kolobarjastih plošč, torej

$$V_1 < V < V_2. \tag{1}$$

Razlika $V_2 - V_1$ je enaka dvakratni prostornini največje očrtane kolobarjaste plošče, kar lahko ugotovimo tako, da od očrtanih plošč odvzamemo



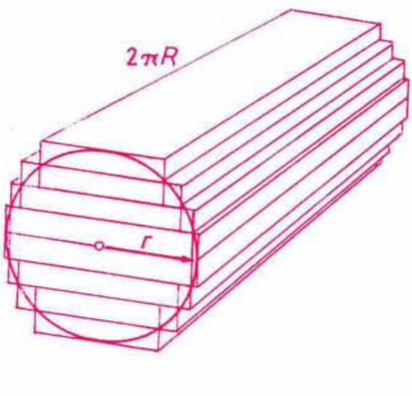
Slika 4.

včrtane in ostanek zložimo kot kaže slika 4 desno. Torej velja

$$V_2 - V_1 = 8\pi R r d, \qquad (2)$$

kjer smo z d označili debelino plošč.

Nadalje opazimo, da imajo vsi krogi, ki tečejo po sredinah kolobarjev z osnovnih ploskev teh plošč, polmer R. Izravnajmo vse plošče hkrati, tako kot smo prej storili z eno samo. Dobimo pravokotne plošče, ki so vse dolge $2\pi R$. Zložimo



Slika 5.

jih, kot kaže slika 5. Plošče, ki so pri izravnavi nastale iz včrtanih, so zdaj vsebovane v valju, visokem $2\pi R$, katerega osnovna ploskev je krog s polmerom r, izravnane očrtane plošče pa ta valj vsebujejo. Prostornina valja meri $(\pi r^2)2\pi R$, zato velja

$$V_1 < 2\pi^2 r^2 R < V_2. \qquad (3)$$

Če svitek narežemo na dovolj tanke rezine, je razlika $V_2 - V_1$ zaradi (2) majhna kot le želimo, torej iz (1) in (3) sledi iskana formula za prostornino svitka

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

2. Površina

Narežimo svitek na rezine, kot smo to storili pri računanju njegove prostornine. Površje svitka sestavljajo plašči teh rezin. Vsak je sestavljen iz dveh delov, ki ju dobimo s sukanjem ustreznih krožnih lokov na krožnici s polmerom r (glej sliko 6).

Slika 6.

Namesto teh lokov zasukajmo tetivi, ki jima pripadata. Tako dobimo plašča dveh prisekanih stožcev. Poglejmo na sliko 7 in po formuli izračunajmo njuni površini pl_n in pl_z.

$$pl_n = \pi s((R-a)+(R-b)) = \pi s(2R-(a+b))$$

$$pl_z = \pi s((R+a)+(R+b)) = \pi s(2R+(a+b)).$$

Vsota obeh je torej enaka

$$pl = pl_n + pl_z = 4\pi R s,$$

kjer je s dolžina tetiv, ki smo ju sukali. Zdaj seštejmo površine plaščev vseh obravnavanih prisekanih stožcev. Dobimo z $2\pi R$ pomnožen obseg večkotnika, ki ga sestavljajo vse tetive. Če rezine tanjšamo, se obseg večkotnika bliža obsegu kroga s polmerom r, vsota površin plaščev prisekanih stožcev pa iskani površini svitka. Torej za površino P svitka velja formula

$$P = 4\pi^2 R r.$$

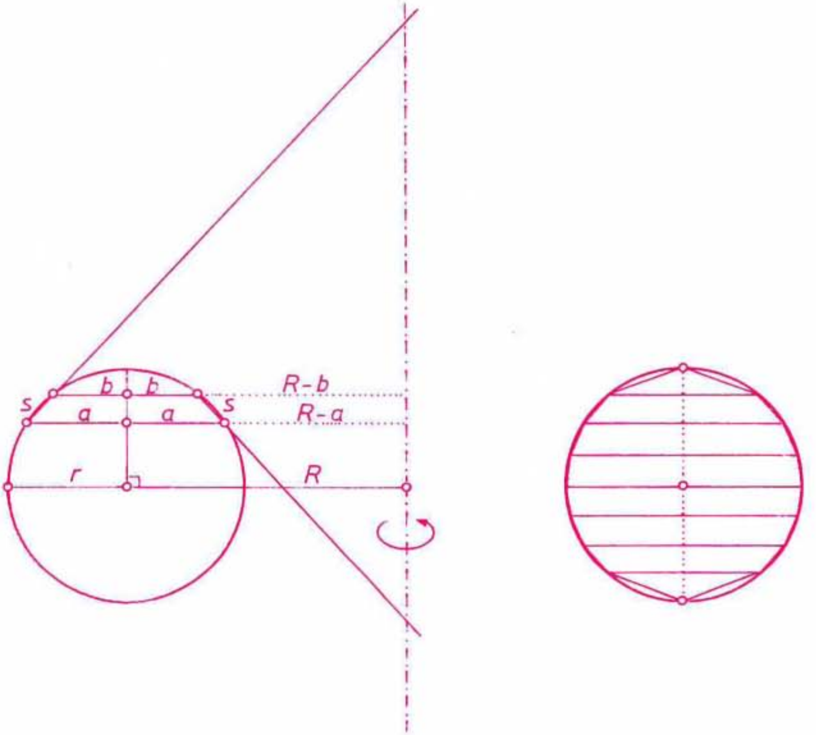
Pravkar dobljeni obrazec lahko utemeljimo še drugače. Na površje svitka s podatkoma R in r nanesimo enakomeren sloj debeline d, tako da vrh sloja tvori nov svitek z enakim R, namesto r pa je sedaj $r + d$. Prostornina V_d dodanega sloja potem po formuli za prostornino svitka meri

$$V_d = 2\pi^2 R(r + d)^2 - 2\pi^2 Rr^2 = 2\pi^2 R(2r + d)d.$$

Ker površje svitka ni preveč nagubano, je pri zelo tankem sloju (torej pri majhnem $d > 0$) njegova površina približno enaka z d pomnoženi površini P prvotnega svitka: $V_d \doteq Pd$. Od tod dobimo

$$P \doteq 2\pi^2 R(2r + d),$$

s tanjšanjem debeline d pa brž dobimo enakost $P = 4\pi^2 Rr$, ki smo jo želeli utemeljiti.



Slika 7.

Za konec postavimo bralcu še nekaj nalog :

1. Bi bila dobra tudi naslednja definicija svitka: Svitek (s podatkoma R in r) je množica točk, ki so največ r oddaljene od dane krožnice s polmerom R.

2. Kakšen mora biti svitek, da obstaja po površini enak svitek z dvakrat večjo prostornino ?

3. Osnosimetričen ravninski lik s ploščino p in z obsegom o zasučemo okrog premice, ki je vzporedna simetrijski osi lika, leži v njegovi ravnini in ga ne seka. Kolikšni sta prostornina in površina nastale vrtenine ?

Boris Lavrič

SKOZI VSE TOČKE

V ravnini je dvanajst točk, razvrščenih v pravokotnik kot na sliki. Poišči táko petstrano sklenjeno lomljenko, ki bo potekala skozi vseh dvanajst točk.

Bojana Dvoržak

DVE O IGRAH

1. Na šahovskem turnirju, na katerem je posamezen par odigral le po eno partijo, je sodelovalo 8 šahistov. Dosegli so paroma različno število točk. Šahist, ki je zasedel drugo mesto, je dosegel toliko točk kot zadnji štirje skupaj. Kako sta igrala med seboj šahista, ki sta zasedla tretje in sedmo mesto? Kaj pa četrti in peti?

2. Dan je trikotnik ABC s ploščino 1. Prvi igralec izbere na stranici AB poljubno točko X, drugi na BC poljubno točko Y in nato spet prvi poljubno točko Z na stranici AC. Prvi igralec želi doseči, da bi imel trikotnik XYZ čim večjo ploščino, drugi, da bi imel čim manjšo. Največ kolikšno ploščino si lahko zagotovi prvi igralec neodvisno od igre drugega?

Karas

NEPROŽNI TRKI

Baseball je v ZDA med najbolj priljubljenimi moštvenimi športi.[1] Igrata dve moštvi s po devetimi igralci. Sredi igrišča je kvadrat s stranico 27,4 metra, katerega oglišča imenujejo domača, prva, druga in tretja baza. Iz središča kvadrata vrže igralec žogico proti soigralcu ob domači bazi. Igralec nasprotnega moštva pred njim si prizadeva s kijem izbiti žogico čim dlje, na primer med gledalce. Tedaj steče ta igralec mimo vseh treh baz nazaj do domače baze in njegovo moštvo dobi točko. Igralci so razmeščeni ob vseh bazah in v polju in poskušajo žogico ujeti in jo vrniti do soigralcev. Če se igralec z žogico v roki dotakne nasprotnega igralca v teku med bazami, mora ta začasno zapustiti igro. Podrobna pravila so dokaj zapletena. Že po povedanem pa uvidimo, kako pomemben je za svoje moštvo igralec, ki vešče ravna s kijem in doseže točko s tem, da izbije žogico z igrišča. V letih od 1950 do 1980 se je to v ameriških profesionalnih ligah primerilo v povprečju po enainpolkrat na tekmo, najboljšim igralcem sezone pa je to uspelo v povprečju pri vsakem tretjem poskusu.

Ker baseball privlači gledalce in ker je izbijanje žogice s kijem pomemben sestavni del igre, je zanimivo obdelati gibanje žogice pred dotikom s kijem in po njem. Omejimo se na *trk* kija z žogico, in to na *premi trk*, pri katerem se telesi gibljeta po premici. Za *neodvisen sistem teles*, skupino teles, za katero lahko privzamemo, da druga telesa ne vplivajo nanje, velja *izrek o ohranitvi gibalne količine*. Skupna gibalna količina obeh teles po trku je enaka kot pred njim. Gibalno količino telesa izračunamo tako, da pomnožimo maso in hitrost. Velja torej

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 . \tag{1}$$

Z m smo zaznamovali maso in z v hitrost, indeks 1 zadeva prvo telo, indeks 2 drugo, hitrosti s črtico razmere pred trkom in hitrosti brez črtice razmere po njem.

Navadno obdelamo pri fiziki v šoli samo dve vrsti trkov. Preprost je *popolnoma neprožni trk*, po katerem se telesi gibljeta z enako hitrostjo:

$$v_1 = v_2 . \tag{2}$$

Če poznamo masi obeh teles in začetni hitrosti, lahko izračunamo končno hitrost. Vzemimo, da od dveh enakih teles drugo pred trkom miruje. Po neprožnem trku se telesi gibljeta s polovično začetno hitrostjo prvega telesa.

[1] Počasi se širi tudi v druge dežele. Junija 1991 je bilo v Ljubljani evropsko prvenstvo.

Pri *prožnem trku* velja poleg izreka o ohranitvi gibalne količine (1) tudi *izrek o ohranitvi kinetične energije*. Skupna kinetična energija obeh teles je po trku enaka kot pred njim:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2. \tag{3}$$

Hitrosti teles po prožnem trku nista med seboj enaki in ju moramo izraziti z začetnima hitrostma. V enačbah (1) in (3) zberemo vse količine z indeksom 1 na levi in vse količine z indeksom 2 na desni, drugo enačbo razstavimo in jo delimo s prvo:

$$v_1' + v_1 = v_2' + v_2 \quad \text{ali} \quad v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2'). \tag{4}$$

Hitrost prvega telesa glede na drugo je po trku nasprotno enaka kot pred njim. Vzemimo, da od dveh enakih teles drugo pred trkom miruje. Po prožnem trku miruje prvo, drugo pa se giblje tako, kot se je pred trkom prvo.

Ali je mogoč trk, ki ni niti popolnoma neprožen niti prožen? Da, to je *neprožni trk*. Zanj ne velja niti enačba (2) niti enačba (4). Namesto tega velja enačba

$$v_1 - v_2 = -k(v_1' - v_2'), \tag{5}$$

ki preide pri $k = 0$ v enačbo popolnoma neprožnega trka (2) in pri $k = 1$ v enačbo prožnega trka (4). Z *restitucijskim* (*"obnovitvenim") koeficientom k* smo zajeli vse trke. Popolnoma neprožni trk ($k = 0$) in prožni trk ($k = 1$) sta dve skrajnosti.

Iz enačb (1) in (5) sledi za hitrost žogice po trku v splošnem zveza

$$v_1 = \frac{(m_1 - km_2)v_1' + (1+k)m_2 v_2'}{m_1 + m_2}, \tag{7}$$

ki jo lahko uporabimo pri popolnoma neprožnem trku, če postavimo $k = 0$, in pri prožnem trku, če postavimo $k = 1$.

Koeficient k lahko zavzame v splošnem katero koli vrednost med 0 in 1. Za trk kija in žogice pri baseballu pa velja $k = 0,55$. Tvrdka Spalding Sports Worldwide, ki edina izdeluje žogice za profesionalne igre, nenehno natančno preverja ta predpis.

Kij mora biti izdelan iz enega kosa lesa, a njegova masa ni natančno predpisana. Žogica ima po pravilih maso $m_1 = 0,145$ kg (in premer 7,32 cm). Hitrost žogice je pri tem izbijanju večja, pri drugem manjša, a tukaj za začetno hitrost upoštevamo dokaj veliko vrednost 40 m/s. V vetrovniku so izmerili, da se žogica tedaj, ko enakomerno pada in sta zračni upor in

Po *Galilejevem zakonu relativnosti* se oblika enačb ne spremeni, če opazujeta pojave mirujoči opazovalec ali opazovalec z vozečega se vlaka. Izrek o ohranitvi gibalne količine (1) in enačba (2) pri neprožnem trku ali izrek o ohranitvi kinetične energije (3) pri prožnem ostaneta v veljavi, če vsem hitrostim prištejemo enako hitrost:

$$v_1' \to v_1'^* = v_1' + v_0, \quad v_1 \to v_1^* = v_1 + v_0,$$

$$v_2' \to v_2'^* = v_2' + v_0, \quad v_2 \to v_2^* = v_2 + v_0. \tag{6}$$

Pri prožnem trku sledita iz enačb (1) in (3) enačbi (4) in (6). Enako sledita iz enačb (4) in (6) enačbi (1) in (3) ali iz enačb (1) in (4) enačbi (2) in (6). Pri popolnoma neprožnem trku stopi na mesto enačbe (3) enačba (2), pri neprožnem trku pa na mesto enačbe (4) enačba (5).

teža v ravnovesju, giblje s hitrostjo 43 m/s. Zagotovo doseže vsaj v nekaterih primerih po trku s kijem večjo hitrost. Za največjo hitrost žogice pri baseballu navajajo 45 m/s. Hitrejša je na športnih igriščih samo žogica pri teniškem servisu (nekaj desetin metra na sekundo več) in pri golfu (61 m/s).

Hitrost kija blizu mesta, kjer trči z žogico, so merili s časovnim razmikom med prekinitvama dveh svetlobnih curkov. Želeli so določiti najugodnejšo maso kija za posamezne igralce. Nekateri igralci so namreč stavili na težji kij, drugi na lažjega. Prvi so zabijali v kij gramofonske igle ali žeblje, drugi pa izvrtali vanj luknjo in jo napolnili s plutovino. Merjenja so po pričakovanju pokazala, da pojema hitrost kija z naraščajočo maso. Pri nekaterih profesionalnih igralcih so ugotovili, da pojema hitrost kija pred trkom linearno z naraščajočo maso (slika 1 spodaj):

$$v_2' = v_{2o}' - \alpha m_2.$$

S to zvezo dobimo za hitrost žogice po trku (slika 1 zgoraj)

$$v_1 = \frac{-\alpha(1+k)m_2^2 + [(1+k)v_{2o}' - kv_1']m_2 + m_1 v_1'}{m_1 + m_2}$$

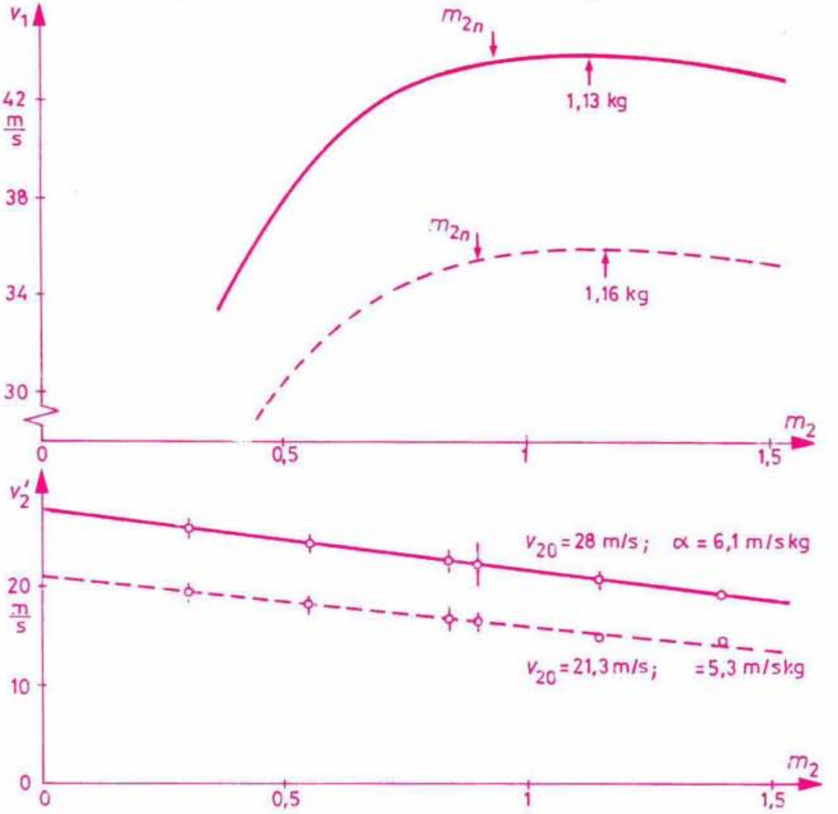
Iz zahteve $dv_1/dm_2 = 0$ sledi masa kija pri največji hitrosti

$$m_{2n} = \sqrt{\frac{m_1(v_{2o}' - v_1')}{\alpha} + m_1^2} - m_1.$$

S podatkoma za enega izmed profesionalnih igralcev $v_{2o}' = 28$ m/s in $\alpha = 6,1$ m/skg ter s hitrostjo žogice pred trkom $v_1' = -40$ m/s dobimo $m_2 = 1,13$ kg. Z negativnim znakom smo upoštevali, da se pred trkom žogica giblje v nasprotni smeri kot kij. V tem primeru meri hitrost žogice po trku 43,9 m/s.

Hitrost žogice po trku je okoli največje vrednosti le rahlo odvisna od mase kija (slika 1 zgoraj). Kij z manjšo maso je laže voditi in z njim polno zadeti žogico. Zato izberejo kot *najugodnejšo maso kija* manjšo vrednost, na primer tisto, pri kateri je hitrost za 1 % manjša od največje vrednosti. S prejšnjimi podatki dobimo za najugodnejšo maso 0,94 kg. Večina profesionalnih igralcev uporablja kij z nekoliko manjšo maso 0,91 kg.

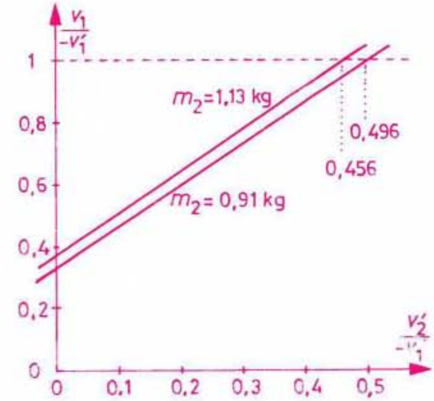
Kako je hitrost žogice po trku odvisna od hitrosti kija pred trkom, če vzamemo maso kija za dano? Enačbo (7) delimo z $-v_1'$:



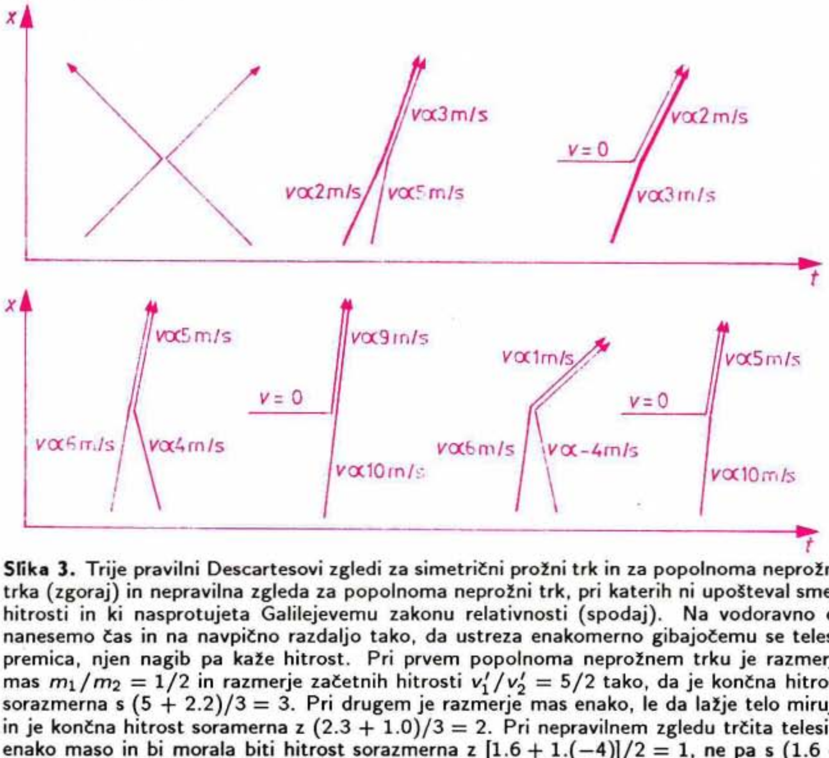
Slika 1. Izmerjena odvisnost hitrosti kija od mase za dva igralca sanfranciških Velikanov (spodaj). Podatki so iz članka T.Bahill, W.Karnavas, *The ideal baseball bat*, New Scientist 6.april 1991, str.26. Izračunana odvisnost hitrosti žogice po trku s kijem za te podatke in začetno hitrost $v_1' = -40$ m/s (zgoraj).

$$\frac{v_1}{-v_1'} = \frac{(1+k)m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{v_2'}{-v_1'}\right) + \\ + \frac{km_2 - m_1}{m_1+m_2}.$$

Razmerje hitrosti $v_1/(-v_1')$ je linearno odvisno od razmerja $v_2'/(-v_1')$ (slika 2). Da ima žogica po trku vsaj enako veliko hitrost kot pred



Slika 2. Odvisnost razmerja hitrosti $v_1/(-v_1')$ od razmerja $v_2'/(-v_1')$ za kij z maso 0,91 kg in z maso 1,13 kg. Vodoravna črta ustreza žogici, ki je po trku enako hitra kot pred njim.



Slika 3. Trije pravilni Descartesovi zgledi za simetrični prožni trk in za popolnoma neprožna trka (zgoraj) in nepravilna zgleda za popolnoma neprožni trk, pri katerih ni upošteval smeri hitrosti in ki nasprotujeta Galilejevemu zakonu relativnosti (spodaj). Na vodoravno os nanesemo čas in na navpično razdaljo tako, da ustreza enakomerno gibajočemu se telesu premica, njen nagib pa kaže hitrost. Pri prvem popolnoma neprožnem trku je razmerje mas $m_1/m_2 = 1/2$ in razmerje začetnih hitrosti $v_1'/v_2' = 5/2$ tako, da je končna hitrost sorazmerna s $(5 + 2.2)/3 = 3$. Pri drugem je razmerje mas enako, le da lažje telo miruje in je končna hitrost soramerna z $(2.3 + 1.0)/3 = 2$. Pri nepravilnem zgledu trčita telesi z enako maso in bi morala biti hitrost sorazmerna z $[1.6 + 1.(-4)]/2 = 1$, ne pa s $(1.6 + 1.4)/2 = 5$.

njim, mora veljati

$$\frac{v_2'}{-v_1'} \geq \frac{1-k+2m_1/m_2}{1+k}.$$

Kij z maso 0,91 kg mora v tem primeru imeti vsaj polovično hitrost žogice: $v_2' \geq -0,50v_1'$. Mimogrede omenimo zanimivost, da ima žogica s hitrostjo 40 m/s enako kinetično energijo kot kij s hitrostjo 16 m/s.

Po trku žogice s kijem s hitrostjo 20 m/s odleti žogica s hitrostjo 40 m/s, če je priletela s to hitrostjo. V tem primeru bi padla na tla v razdalji več kot $v_1^2 \sin 2\beta/g = 160$ m, če bi jo igralec usmeril pod kotom $\beta = 45^\circ$ proti vodoravnici. Zagotovo bi taka žogica zletela z igrišča in prinesla točko.

Naši računi so dali vsaj površen pregled nad trkom žogice in kija pri baseballu. Prizadevali smo si, da bi bilo računanje čim preprostejše, zato se nismo mogli izogniti poenostavitvam. Trk navadno ni prem in žogica in kij se gibljeta tako, da nimajo vsi njuni deli enake hitrosti. Žogica in kij nista popolnoma neodvisna od okolice, saj igralec drži kij v rokah. Dotik žogice in kija traja samo dobro tisočino sekunde in v tem času smemo vzeti, da se skupna kinetična energija žogice in kija ne spremeni. Roki pa lahko vplivata na gibanje kija, ker ga žogica ne zadene v težišču. Zračni upor na eni strani zmanjša domet žogice. Na drugi strani pa zrak na žogico, ki se vrti tako, da se se spodnji deli gibljejo v smeri leta in zgornji v nasprotni smeri, deluje z

Trke je med prvimi podrobno obravnaval René Descartes (1596 do 1650). Leta 1644 je v *Principih filozofije* postavil tri trditve: Vsaka stvar (gibanje, oblika...) se ohrani, dokler je ne spremeni kak zunanji vzrok. Gibanje se nadaljuje v ravni črti. Pri trku se ohrani gibanje.

Vidimo, da je Descartes poudaril pomen tega, kar danes imenujemo *ohranitvene zakone*. *Gibanje* mu je v tej zvezi pomenilo nekako našo gibalno količino. Spregledal pa je, da je pomembna tudi smer hitrosti in da je pri premem trku hitrost lahko pozitivna ali negativna. (V optiki pa je upošteval pri hitrosti tudi smer.) Namesto kinetične energije je računal s tedanjo *živo silo* mv^2. Descartes je našel prave rešitve le pri simetričnem prožnem trku in pri popolnoma neprožnem trku, če so imele vse hitrosti isto smer (slika 3). Od osmih zgledov jih je pet rešil napačno. Descartes je imel trke za posebno pomembne, ker je sodil, da deluje telo na drugo telo le, če se ga dotakne.

Tudi drugi so spoznali pomen trkov in Kraljeva družba (angleška akademija znanosti) v Londonu je vzpodbudila poskuse in razpisala nagradno nalogo. Ob koncu leta 1668 je dobila tri rešitve. Matematik John Wallis je pri popolnoma neprožnem trku upošteval pozitivne in negativne hitrosti, od prožnih trkov pa je upošteval samo nekaj najpreprostejših zgledov. Arhitekt in matematik Christopher Wren je prišel nekaj dlje na osnovi izrekov, ki jih pa ni utemeljil. Vprašanje je do kraja rešil Christian Huygens (1629 do 1695). S trki se je ukvarjal že od leta 1652 in je ugotovil, da so Descartesove rešitve v splošnem napačne. Postopno je našel enačbi (3) in (5). Leta 1661 je v Londonu razpravljal z Wallisom in Wrenom, ne da bi tedaj kaj objavil. V rešitvi nagradne naloge je upošteval zakon relativnosti (6). Vse izpeljave pa je mogoče najti šele v razpravi, ki je izšla po njegovi smrti leta 1703. V njej je zakon relativnosti pojasnil z zgledi na gibajočih se ladjah. V zvezi s tem je tudi priredil hitrosti z njenim kvadratom sorazmerno dvižno višino in tako ugotovil enakovrednost kinetične in potencialne energije.

dodatno silo navzgor in poveča domet. Zaradi tega je kot proti vodoravnici, pri katerem je domet žogice največji, manjši kot 45°. Žogica, ki se zavrti 68-krat na sekundo v pravi smeri, naj bi kljub zračnemu uporu dosegla 133 m, če bi odletela pod kotom 16°. Pri tem pride do izraza hrapava površina žogice in imajo svojo vlogo tudi šivi. Zadeve so dokaj zapletene in čeprav so nekateri delni izidi precej zanesljivi, to za druge ne velja. Mogoče je slišati nasprotujoče si trditve. Igralcem baseballa je morda koristil podatek o najugodnejši masi kija, z drugimi nasveti pa jim fiziki doslej niso mogli kaj prida pomagati.

Janez Strnad

Miroslav Cvahte, FIZIKALNE NALOGE IZ VSAKDANJEGA ŽIVLJENJA. 60 domačih poskusov. Rešitve. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije 1991, 80 str. (Presekova knjižnica ; 35) Cena 200 SLT (160 SLT)

Vsakdanji dogodki skrivajo mnoga fizikalna vprašanja. Pozornemu opazovalcu so vzpodbuda za razmišljanje, ob katerem lahko s pridom uporabi znanje fizike, lahko pa so tudi vzpodbuda za nabiranje novega znanja. Knjižica z vprašanji iz fizike, ki jo je pripravil Miroslav Cvahte, naj bi nas opozarjala na to.

Vsebina je razdeljena na tri dele. Na začetku so vprašanja in naloge. Sledijo kratki napotki ali namigi za reševanje. Na koncu so obširne rešitve, ki podajajo izčrpno fizikalno ozadje nalog in tako pripomorejo pri reševanju drugih, podobnih vprašanj.

Pričakovati je, da bodo bralci najprej sami iskali rešitve. Če se bo kaj zataknilo, pa naj bi si pomagali z namigi za reševanje. Kot je pri reševanju fizikalnih problemov skoraj pravilo, nakazane poti niso edine, zato je pričakovati, da bodo bralci sami našli svoje poti do rešitev. Knjižica bo dosegla svoj namen, če bo vzpodbuda za postavljanje novih vprašanj in iskanje novih rešitev.

Brošura je namenjena vsem, ki so se kdaj učili fiziko in se jim je zdela zanimiva. V prvi vrsti naj bi segali po njej srednješolci. Na mnoga vprašanja pa lahko odgovore tudi osnovnošolci. Nekaj teh vprašanj je posebej označenih.

Knjižico toplo priporočamo bralcem Preseka. Hkrati jih vabimo, da nam pišejo o svojih rešitvah in o novih vprašanjih, ki so se jim zastavila ob reševanju problemov.

Marjan Hribar

ULOMKI ZA PRVOŠOLCE - tudi bivše

1. $\frac{a+4}{a+5}-\frac{2a-10}{a^2-a-12}\cdot\frac{a-4}{a^2-25}$

2. $\frac{a^2-3a+2}{a^2+4a+3}:\frac{a^2-5a+6}{a^2+5a+6}\cdot\frac{a^2-2a-3}{a^2+a-2}$

3. $\frac{a^2-4a+4}{a^2-3a-4}:\frac{a+3-10a^{-1}}{a+4+3a^{-1}}:\frac{1-9a^{-2}}{1+a^{-1}-20a^{-2}}$

4. $\left(\frac{a-1}{a+2}-\frac{a-3}{a+4}\right)\cdot\frac{a^2+5a+4}{2a+1}$

5. $\frac{2a-6}{a^2+10a+25}\cdot\frac{a+5}{a^2-9}+\frac{a+6}{a+5}$

6. $\frac{2a^2+a-1}{a^2-16}:\frac{a^2-2a-3}{a+4}+\frac{a+2}{a-3}$

7. $\frac{2a+4}{a^2-2a-15}\cdot\frac{a+3}{a^2-2a-8}+\frac{a-1}{a^2-16}:\frac{a-1}{a^2+2a-8}$

8. $\left(\frac{a-3}{a+4}-\frac{a-1}{a+2}\right):\left(\frac{a+1}{a+2}-\frac{a+3}{a+4}\right)$

9. $\left(a+\frac{1}{a-2}\right)\cdot\left(a-\frac{2}{a-1}\right)$

10. $\left(a+\frac{2}{a+3}\right)\cdot\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)$

11. $\left(\frac{a+3}{a-4}\cdot\frac{a-5}{a+6}-\frac{a-3}{a+6}:\frac{a-4}{a+4}\right)\cdot\frac{a^2+2a-24}{3a+3}$

12. $\frac{a^3+1}{a^2+a-6}:\frac{a^2-a+1}{a+3}-3(a-2)^{-1}$

13. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$

14. $\left(\frac{2a^2+6a-8}{a^2+4a-32}-\frac{1+2a^{-1}}{1+8a^{-1}}\right)\cdot\left(\frac{2a^2-20a+42}{a^2-10a+9}+\frac{1-6a^{-1}}{9a^{-1}-1}\right)$

15. $\left(\frac{a-1}{a+5}-\frac{2a^2-32}{a^2-49}:\frac{a^2+9a+20}{a^2+8a+7}\right):\left(\frac{a-5}{a-8}-\frac{a^2-12a+36}{a^2-10a+16}\cdot\frac{2a^2-8a+8}{a^2-6a}\right)$

16. $-(((((1-a^{-1})^{-1}-1)^{-1}-1)^{-1}-1)^{-1}+1)^{-1}$

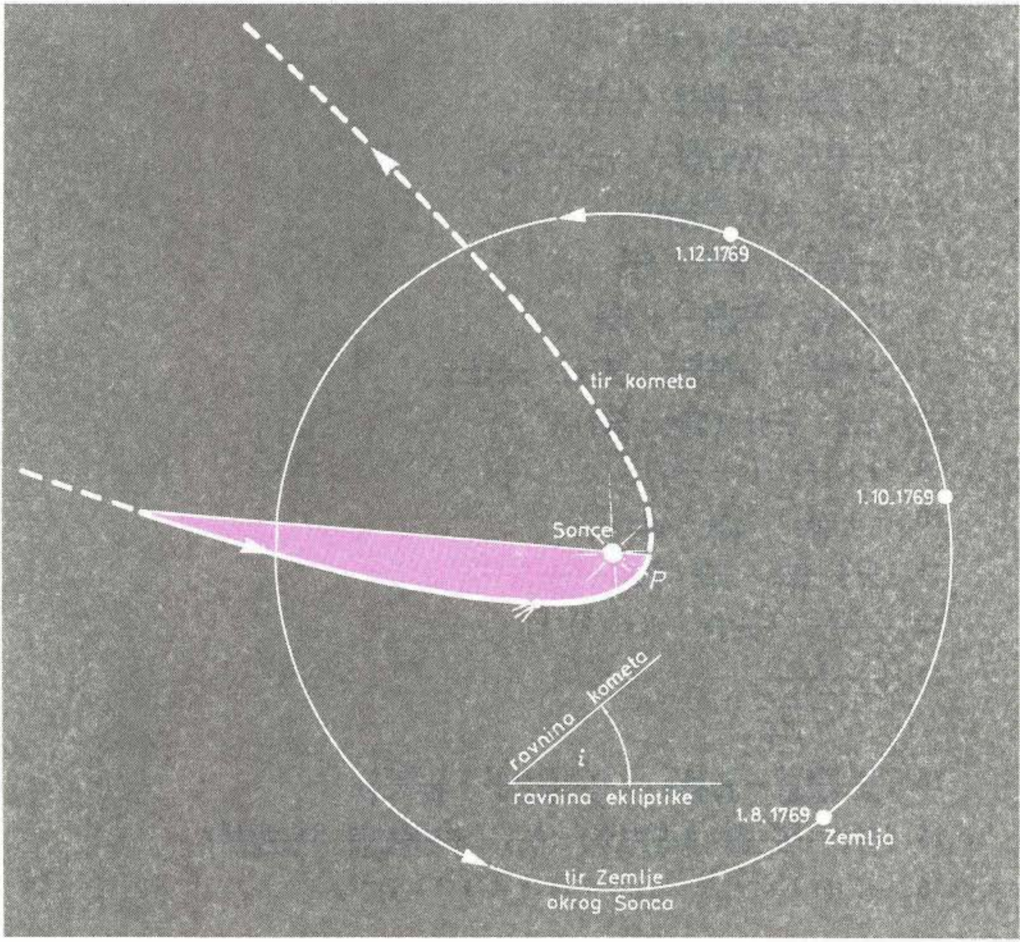
Rezultati

1. $\frac{a+2}{a+3}$, 2. 1, 3. $\frac{a-2}{a-3}$, 4. $\frac{2a+2}{a+2}$, 5. $\frac{a+4}{a+3}$, 6. $\frac{a+3}{a-4}$, 7. $\frac{a-3}{a-5}$, 8. $2a-1$, 9. a^2-1, 10. $\frac{1}{a+3}$, 11. -1, 12. 1, 13. $\frac{8}{13}$, 14. $\frac{a}{a-1}$, 15. $\frac{a}{a-7}$, 16. $a-3$.

Franc Oblak

ASTRONOMIJA

ASTRONOM S PTUJA



Slika 1. Tir gibanja kometa, ki ga je opazoval Karl Tirnberger. Komet je z daljnogledom odkril 8.8.1769 znani lovec kometov Charles Messier. Lego kometovega tira v prostoru, obliko in velikost tira ter obhodni čas kometa pa je izračunal znani astronom Friedrich Wilhelm Bessel.

Komet je bil nekaj časa viden tudi s prostim očesom. Soncu se je najbolj približal 7. 10. 1769, in sicer na razdaljo 0,12 astronomske enote, to je razdalje med Zemljo in Soncem.

P - prisončje (perihel), *i* - naklonski kot ravnine gibanja kometa k ravnini ekliptike, v kateri se giblje Zemlja okrog Sonca. Izvlečeni lok kometovega tira leži v prostoru nad (severno) ravnino ekliptike, črtkani pa pod (južno) njo.

To, da so do konca druge svetovne vojne na Slovenskem večinoma delovali samouki, ljubitelji in popularizatorji astronomije, je daleč od resnice. V zadnjem desetletju opravljeno raziskovanje naše kulturne in znanstvene dediščine jasno kaže na številno in tudi strokovno bogato udejstvovanje Slovencev na področju astronomije. O treh pomembnih astronomih naše preteklosti smo že pisali (*Presek* **17**, 214 in 239, *Presek* **18**, 10). Pa še o kakem bomo spregovorili. Tokrat o astronomu, ki je bil rojen na Ptuju. To je bil *Karl Tirnberger* (1731 - po 1780).

Karl Tirnberger je pridobil humanistično srednješolsko izobrazbo v Mariboru. Vstopil je v jezuitski red in na dunajski univerzi zaključil študij filozofije. Poučeval je humanistične vede in retoriko (govorništvo) na gimnaziji v Gradcu. Vodil je fizikalni kabinet graškega jezuitskega kolegija. Bil je upravnik tamkajšnje zvezdarne in se poleg astronomskih opazovanj ukvarjal tudi z meteorološkimi. Predaval je še višjo matematiko na graški univerzi. V letih 1773/74 je poučeval mehaniko in hidravliko na montanistični akademiji v Banski Štiavnici na Slovaškem. Po ukinitvi jezuitskega reda (1773) je bil eno leto upravnik zvezdarne na Dunaju in nato še eno leto upravnik zvezdarne v Gradcu. Po letu 1780 se je za njim izgubila vsaka sled.

Karl Tirnberger je bil astronom, matematik, fizik, meteorolog in tehnik. Leta 1769 je z daljnogledom opazoval novi komet (glej sliko 1). Najpomembnejše njegovo astronomsko delo je *Opazovanja Jupitrovih satelitov, opravljena v Gradcu na Štajerskem v jezuitskem kolegiju 1770 (Observationes satellitum Jovis factae Graecii in Styria in collegio academico Societatis Jesu 1770).*

Zbral in uredil je tudi meteorološka opazovanja v Gradcu v letih od 1765 do 1769.

Za Presekove bralce še **naloga o kometu**:

Komet, ki ga je leta 1769 opazoval naš astronom Karl Tirnberger, se giblje po zelo sploščeni elipsi. Dolžina velike polosi elipse je $a = 164$ a.e. (astronomskih enot). Izračunaj obhodni čas t_0 kometa.

Rešitev:

Iz tretjega Keplerjevega zakona $\frac{t_0^2}{a^3} = \frac{(leto)^2}{(a.e.)^3}$ sledi obhodni čas kometa $t_0 = \sqrt{a^3} = \sqrt{164^3}$ let $\doteq 2100$ let.

Marijan Prosén

NOVE KNJIGE

Janez Strnad, VOZI ME, AVTO, V DALJAVE, Fizika in avtomobil. DMFA Slovenije, Ljubljana 1991, 76 str. - (Knjižnica Sigma ; 49) Cena 200.- SLT (160.- SLT)

Nova knjiga, pestro branje,
sveže misli, stare sanje.

Profesor Janez Strnad se je že davno odločil, da z besedo in zgledom oškropi s fiziko vsakogar, ki se temu doživetju noče ravno posebej ogniti. Tokrat se zdi, kakor da so pri njem na vrsti avtomehaniki. Napisal je namreč knjižico s pevnim naslovom VOZI ME, AVTO, V DALJAVE in s prozaičnim pojasnilom, da gre za fiziko avtomobila, sanjskega rekvizita vseh mladih, še zlasti onih, ki si svet že ogledujejo v dvoje.

Pa se kmalu izkaže, da priročnik za popravila ta knjiga ravno ni, saj se pisec ne spušča v podrobnosti. Kar nekaj časa avto obravnava kot celoto in se ne meni za njegove dele in pojave v njem. Prav previdno mu nato natakne štiri kolesa, ki so spočetka toga in se po cesti kotale zato, da bralec ob njih razmisli o lepenju in trenju pri kotaljenju. Pisec prikaže dvojno naravo tega pojava, saj se z avtom ne bi mogli voziti, če ne bi bilo trenja, po drugi strani pa prav zaradi njega zapravljamo energijo.

Še malo kasneje dobi avto na toga kolesa prožne gume pa tudi nekaj netogega drobovja kot so zavore in motor. Tako si pisec pripravi okoliščine za razpravo o notranjih silah in njihovem vplivu na vožnjo avtomobila. Mladim bralcem ponudi tudi možnost za fizikalno sanjarjenje o upravljanju in vodenju avta od znotraj.

Posebej mikaven je predlog, da rezervoarja za gorivo ne bi šteli k avtu. Namesto tega si bralec lahko predstavlja, da je ob cesti napeljana cevka z notranjim premerom 0,4 mm, po kateri v avto priteka bencin. Ni pojasnjeno, kam je vtaknjeno drugo krajišče cevke. Vožnje željni bralec si zato lahko misli, da naravnost v očetov žep in tako pride do gospodarske osnove svojih sanj. Porabo goriva bo po novem lahko meril v m^2 podobno kot stanovanja in gradbene parcele.

Če zvijača s cevko ne bi delovala, se še vedno da z avtom potovati na štop. Pisec je mislil tudi na to zvrst bralcev. Ponudil jim je računski dokaz, da bodo s svojimi kostmi, kožo in nahrbtnikom porabo goriva v gostiteljevem avtu povečali le za dva deci na 100 km, po novem za $2 \cdot 10^{-9}$ m^2. To je tako malo, da bodo po objavi tega dokaza štoparke začeli pobirati celo rojeni Kranjci.

V zadnji tretjini knjige zvemo, kako lastnika avta izkoriščata Ottojev ali dieselski motor. Potem ko eno tretjino denarja poženeta naravnost skozi izpušno cev, je treba drugo tretjino odriniti okolici po določbah zveznega in republiškega entropijskega zakona. Zadnja tretjina energije gre delno za ropot in rožljanje pod pokrovom motorja, s preostankom pa avto dela veter, ki maje grmovje in rožice ob cesti in se sopotnikom lovi v lase. To zadnje je seveda tudi glavni namen avta.

Ob razpravi o silah in navorih je pisec načel kar nekaj kočljivih vprašanj, ki jih v šoli pogosto zmašimo v nekaj standardnih fraz. Posebno skrb je posvetil energijskemu zakonu, tako da ob pozornem branju lahko na koncu razločujemo, katere zunanje sile avtu oddajajo delo, katere pa so potrebne za energijske pretvorbe v avtu samem.

Škoda, da fizikov avto ostaja prav do konca brez vzmetenja. Spremembe sil pri speljevanju in zaviranju je namreč prav dobro mogoče opazovati na vzmeteh, pri togo privezanih kolesih pa se vsega tega ne vidi.

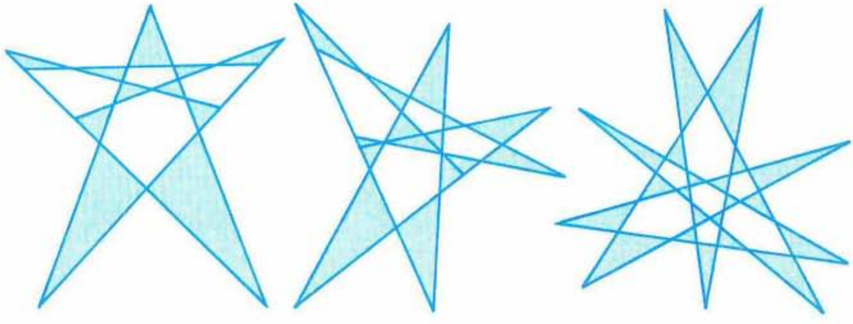
Janez Ferbar

KVADRATNA SESTAVLJANKA

Danih je n poljubnih kvadratov. Dokaži, da se jih da razrezati na večkotnike tako, da lahko iz dobljenih kosov sestavimo nov kvadrat.

Marija Vencelj

KOBONOVI TRIKOTNIKI – Rešitev s str. 45



Domneva se, da je največje število neprekrivajočih trikotnikov, ki jih lahko naredimo s 7, 8 in 9 premicami enako 11, 15 in 21.

Ciril Pezdir

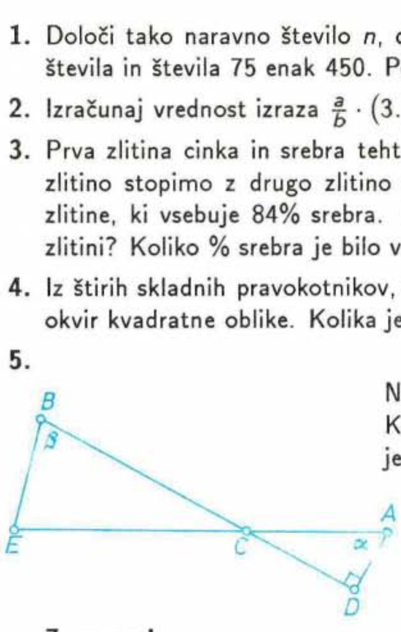
TEKMOVANJA

26. OBČINSKO TEKMOVANJE OSNOVNOŠOLCEV IZ MATEMATIKE

13. aprila 1991 se je 1589 šestošolcev, 1471 sedmošolcev in 1553 osmošolcev na občinskih tekmovanjih potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 444 učencev 6. razreda, 438 učencev 7. razreda in 668 učencev 8. razreda. Naloge, ki jih je izbrala republiška tekmovalna komisija, so bile:

6. razred

1. Določi tako naravno število n, da bo najmanjši skupni večkratnik tega števila in števila 75 enak 450. Poišči vse možnosti.
2. Izračunaj vrednost izraza $\frac{a}{b} \cdot \left(3.\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}$, če je $\frac{a}{b} - 1 = \frac{1}{2}$.
3. Prva zlitina cinka in srebra tehta 3,5 kg in vsebuje 76% srebra. Če to zlitino stopimo z drugo zlitino srebra in cinka, dobimo 10,5 kg nove zlitine, ki vsebuje 84% srebra. Koliko kilogramov srebra je bilo v prvi zlitini? Koliko % srebra je bilo v drugi zlitini?
4. Iz štirih skladnih pravokotnikov, ki so dolgi 3 dm in široki 3 cm, sestavi okvir kvadratne oblike. Kolika je ploščina notranjega kvadrata?
5.



Na sliki sta daljici BC in EC enako dolgi. Kot $\angle CDA$ je pravi. Izračunaj kot α, če je kot $\beta = 67^0 24'$.

7. razred

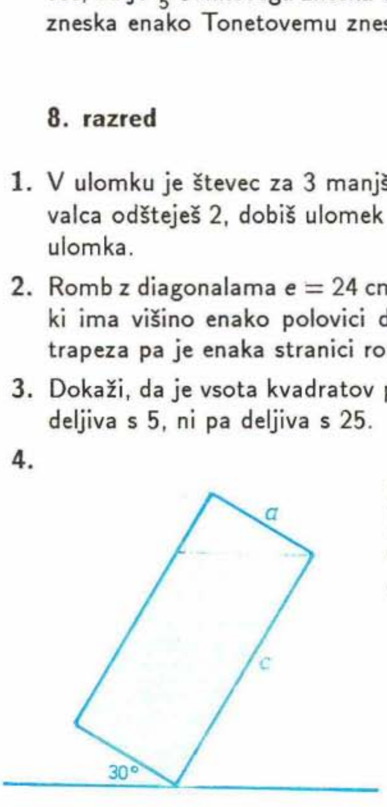
1. Izračunaj vrednost izraza $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) : \left(\frac{1}{3}\right)^2 - (-2)^2 \cdot (1^3 + {} + (-1)^4)$.
2. Na premici p so točke A, B, C, D. Daljica AB je dolga $\frac{7}{11}$ cm, daljica BC $\frac{14}{11}$ cm in daljica CD $\frac{21}{11}$ cm. Nad daljicami AB, BC, CD in AD nariši polkroge. Izračunaj obseg lika, ki ga omejujejo polkrogi ($\pi = \frac{22}{7}$).
3. Določi število k tako, da bosta za $x = 2$ in $y = 3$ vrednosti izrazov $(k+2) \cdot x - (2k-1) \cdot y$ in $x - 15$ enaki.

4. Metka, učenka osnovne šole, je pomnožila naslednje:
   - število svojih let,
   - razred, v katerega hodi,
   - število let svoje mame in
   - še neko trimestno naravno število.

   Dobila je 333333. Koliko je Metka stara? Koliko je stara Metkina mama?
5. Janko, Marko in Tone si razdelijo 7777 SLT. Koliko dobi vsak od njih, če veš, da je $\frac{2}{5}$ Jankovega zneska enako Markovemu znesku in $\frac{7}{9}$ Markovega zneska enako Tonetovemu znesku?

8. razred

1. V ulomku je števec za 3 manjši od imenovalca. Če od števca in imenovalca odšteješ 2, dobiš ulomek $\frac{1}{2}$. Izračunaj obratno vrednost prvotnega ulomka.
2. Romb z diagonalama $e = 24$ cm in $f = 18$ cm je ploščinsko enak trapezu, ki ima višino enako polovici daljše diagonale romba, krajša osnovnica trapeza pa je enaka stranici romba. Izračunaj daljšo osnovnico trapeza.
3. Dokaži, da je vsota kvadratov poljubnih petih zaporednih naravnih števil deljiva s 5, ni pa deljiva s 25.
4.



Posoda v obliki kvadra z robovi $a = 8$ cm, $b = 3$ cm in $c = 18$ cm je napolnjena z vodo. Koliko vode bo ostalo v njej, če jo okrog roba b nagnemo za 30^0 ?

5. Enakostraničnemu trikotniku s stranico a očrtamo in včrtamo krog. Izračunaj razmerja ploščin včrtanega kroga, očrtanega kroga in krožnega kolobarja.

Aleksander Potočnik

15. REPUBLIŠKO SREDNJEŠOLSKO TEKMOVANJE IZ RAČUNALNIŠTVA. SREČANJE MLADIH RAZISKOVALCEV

Na srečanju mladih raziskovalcev s področja računalništva, ki je bilo v petek, 17.5.1990, na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo v Ljubljani, je sodelovalo 84 mladih raziskovalcev, ki so zagovarjali 41 raziskovalnih nalog.

Naloge so bile razdeljene v tri skupine. Zagovor so vodile strokovne komisije, sestavljene iz pedagoških delavcev FER in FNT – oddelek Matematika in mehanika ter predstavnikov gospodarstva.

Na osnovi ocen predloženih elaboratov in zagovorov so bile nagrajene naslednje naloge:

- **Borut Hočevar**: Simulacija nevronske mreže,
- **Marko Krajnc**: Računalniška grafika v 3D prostoru,
- **Robert Ivanc** in **Marko Maček**: Zaščita osebnega računalniškega sistema,
- **Gorazd Perenič** in **Jan Bervar**: Simulator vlaganja podatkovno pretokovnih grafov v heksagonalno mrežo procesorjev,
- **R. Verhovšek**, **D. Bogunovič** in **A. Ložar**: Analizator digitalnih logičnih vezij,
- **D. Hozjan** in **R. Lipič**: Uporaba razpoznavanja govora pri krmiljenju invalidskega vozička,
- **D. Jug** in **R. Derlič**: Ukazno – fonetični urejevalnik FOUR.

Komisije pa so pohvalile še naslednje naloge:

- **Kristjan Sečan** in **David Modic**: Razpoznavanje vzorcev s pomočjo nevronskih mrež,
- **Roberto** in **Alessandro Cobalti**: Rovina del giocatore (Analiza teoremov propada igralca s pomočjo simulacije na računalniku),
- **Robert Horvat**: Simulacija borze,
- **Milan Stajnko**: Oblikovanje kompozicije pohištva s pomočjo programskega paketa AutoCAD,
- **Branko Jurič**: Simulacijski model vrednotenja podjetij,
- **David Gorišek**: Razvoj OCR paketa,
- **Tomo Cerovšek** in **Boštjan Gomilšek**: Grafi pretakanj med tremi posodami s celoštevilsko prostornino.

V soboto, 18.5.1990, je potekalo 15. republiško tekmovanje srednješolcev s področja računalništva. Tekmovanja se je udeležilo 54 tekmovalcev v prvi skupini (eno leto učenja računalništva), 47 tekmovalcev v drugi skupini (dve leti učenja) in 20 tekmovalcev v tretji skupini (tri ali več let). Doseženi so bili naslednji rezultati:

	1. skupina:
I. nagrada:	Marko Javornik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
II.nagrada:	Andrej Ulčakar, Gimnazija Vič, Ljubljana
	Alojz Novak, Gimnazija Novo mesto
	Marko Boben, SŠTUD Kočevje
III.nagrada:	Matjaž Trontelj, Gimnazija Vič, Ljubljana
	Aleks Jakulin, TNŠ Postojna
	Bernard Ženko, TNŠ Postojna
	Janez Ravnik, Gimnazija Kranj
	2. skupina:
I.nagrada:	Luka Frelih, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
	Gregor Brečko, Elektrotehniška šola, Ljubljana
II.nagrada:	Bojan Gornik, Gimnazija Novo mesto
	Robert Galle, Elektrotehniška šola, Ljubljana
III.nagrada:	Marko Krajnc, II. Gimnazija Maribor
	Peter Luževič, Tehniška šola, Ljubljana
	3. skupina:
I.nagrada:	Luka Renko, Gimnazija Kranj
II.nagrada:	Damjan Slapar, Gimnazija Kranj
III.nagrada:	Matevž Mrak, Gimnazija Kranj

NALOGE ZA 1. SKUPINO

1. Mojster Turing je izumil prav čuden stroj. Stroj namreč nima pomnilnika. Dela z magnetnim trakom, s katerega lahko bere, pa tudi piše lahko po njem. To počne s posebno bralno-pisalno glavo, ki jo premika naprej in nazaj po posameznih zapisih. Zapisi imajo lahko vrednost "0", "1" ali "P", kar pomeni prazno. Na začetku dela je glava na začetku traku.

Stroj upravljaš z naslednjimi ukazi:

PremakniGlavo (smer: smerT)	- premakne glavo v smer '*smer*' (naprej ali nazaj);
PreberiZnak: znakT	- prebere znak s traku, pri čemer se glava ne premakne;
IzpisiZnak (znak: znakT)	- napiše znak na trak, pri čemer se glava ne premakne.

Turing je pospravljal svojo sobo in našel naslednji program. Žal se ne more spomniti, kaj program naredi. Ali mu lahko pomagaš ?

```
program TuringovStroj(input,output);
  type
    smerT = (eNazaj, eNaprej);
    znakT = (e0, e1, eP);
  procedure PremakniGlavo(smer: smerT); external;
  function  PreberiZnak: znakT; external;
  procedure IzpisiZnak(znak: znakT); external;

begin
  while PreberiZnak <=>= eP do
    if PreberiZnak = e0 then begin
      repeat PremakniGlavo(eNaprej)
      until (PreberiZnak = e1) or (PreberiZnak = eP);
      if PreberiZnak = eP then begin
        PremakniGlavo(eNazaj);
        IzpisiZnak(eP)
      end
      else begin
        PremakniGlavo(eNazaj);
        IzpisiZnak(e1);
        PremakniGlavo(eNaprej)
      end { if }
    end
    else begin
      repeat PremakniGlavo(eNaprej)
      until (PreberiZnak = e0) or (PreberiZnak = eP);
      if (PreberiZnak = eP) then begin
        PremakniGlavo(eNazaj);
        IzpisiZnak(eP)
      end
      else begin
        PremakniGlavo(eNazaj);
        IzpisiZnak(e0);
        PremakniGlavo(eNaprej)
      end { if }
    end { else }
end.
```

2. Program za igranje šaha (med človekom in računalnikom) bi radi dopolnili v študijski šahovski program, ki bi omogočal igralcu vračanje svojih potez in vlečenje drugačnih. Program naj bi hranil zadnjih deset šahistovih potez. Šahist naj bi imel tudi možnost, da odigrane in nato vrnjene poteze ponovno odigra, ne da bi moral iste poteze ponovno vpisovati. Ponoviti je možno le poteze, ki so bile tik pred tem vrnjene - po vpisani novi (drugačni) potezi ponovitev ni več možna.

```
type
  ukazT = (Vrni, Ponovi, Vleci, Konec);
  potezaT = ...
```

Šahistovo naslednjo željo ugotovi podprogram:

```
procedure BeriUkaz(var ukaz: ukazT; var poteza: potezaT); external;
```

pri tem je *ukaz* lahko:

Vrni zahtevano je vračanje poteze, če je še kakšna shranjena;

Ponovi zahtevana je ponovitev poteze, če je bila pred tem vrnjena;

Vleci igranje nove poteze, pri tem je v spremenljivki *poteza* zapisana nova šahistova poteza;

Konec konec partije;

Pri ukazih *Vrni* in *Ponovi* vrednost spremenljivke *poteza* ni definirana.

Na voljo imaš še dva podprograma:

```
procedure IgrajPotezo(poteza: potezaT); external;
```

odigra podano šahistovo potezo (in računalnikovo protipotezo),

```
procedure VrniPotezo(poteza: potezaT); external;
```

pa opravi obratno potezo od podane poteze - vrne šahovnico v stanje pred odigrano navedeno šahistovo potezo. Podprogram deluje pravilno le v primeru, da vračamo poteze v obratnem vrstnem redu, kot so bile pred tem odigrane.

Napiši **program**!

3. Napiši **program**, ki prepiše izvorno kodo pascalskega programa z vhoda na izhod, in pri tem uporabi za izpis rezerviranih besed in komentarjev pisave, različne od pisave preostalega besedila. Rezervirane besede so tista zaporedja črk, za katera funkcija *RezervBeseda* vrne vrednost *true*. Komentarji se prično z znakom "{" in končajo z "}", vmes pa lahko nastopajo poljubni znaki razen znaka "}". V besedilu lahko nastopajo tudi nizi, ki se prično in končajo z znakom "'", vmes pa se lahko pojavi poljuben znak razen "'".

Na voljo imaš naslednje podprograme:

PreberiZnak(*c*)	vrne naslednji znak z vhoda v spremenljivko *c*;

IzpisiZnak(*c*) — izpiše znak *c* na izhod. Meja med vrsticami je predstavljena kot poseben znak za konec vrstice, ki ga gornja podprograma upoštevata kot vsak drug znak.

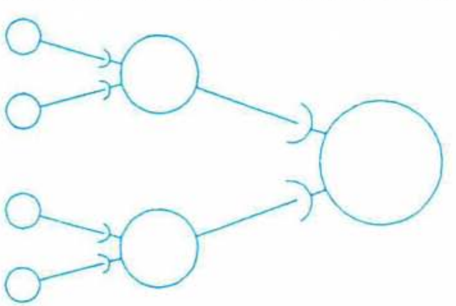
SpremeniPisavo(*pisava*) — spremeni obliko izpisa na izhodu. Spremenljivka *pisava* lahko zavzame vrednosti:

- *Krepko* (za izpis rezerviranih besed),
- *Nagnjeno* (za izpis komentarjev),
- *Normalno* (za izpis vsega ostalega besedila).

RezervBeseda(*niz*,*nizL*) — vrne vrednost *false*, če niz dolžine *nizL* ni rezervirana beseda, in *true*, če je.

Kot primer izpisa lahko služi program iz prve naloge.

4. V osončju so medplanetarno pomembne odločitve sprejete, če zanje glasujejo predstavniki vseh štirih naseljenih lunic. Med glasovanjem sprejme vesoljska postaja *MARS* glasova z lun *DEIMOS* in *PHOBOS* ter pošlje v glavno postajo skupen glas obeh lun (**DA**, če sta obe ZA, sicer **NE**). Enako stori postaja *JUPITER* z glasovi z lun *EUROPA* in *IO*.



V glavni postaji iz obeh prejetih glasov ugotovijo, ali je bila odločitev sprejeta. Nekoč se je zgodilo, da se je na eni od treh postaj pokvaril eden od sprejemnikov, tako da je bilo videti, da sprejema glas ZA, ne glede na to kaj je v resnici sprejemal. Da bi podobno napako v bodoče pravočasno odkrili, so sklenili, da bodo odslej pred pravimi glasovanji opravili nekaj poskusnih glasovanj s predpisanimi izjavami (glasovi **DA** ali **NE**). Napiši **zaporedje poskusnih glasovanj** (za vsako glasovanje 4 predpisane izjave z lun), s katerimi je vedno mogoče odkriti, kateri od šestih sprejemnikov se je pokvaril, ali pa dejstvo, da so vsi brezhibni.

NALOGE ZA 2. SKUPINO

1. Na nekaj primerih **izračunaj**, kaj program izpiše, in **razloži** način delovanja (postopek)!

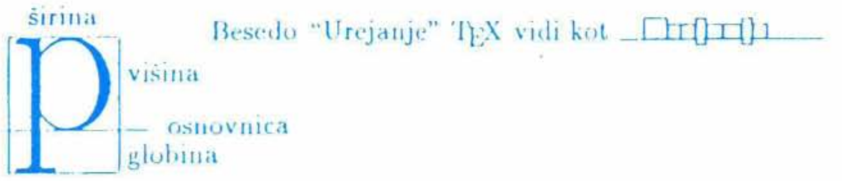
```
program KajIzpisem(input,output);
type
  stevilo = 0..255;

var
  a,b : stevilo;
  i,k,ham : integer;
  procedure Podprogram(p1: stevilo; var p2: stevilo; i: integer);
  var
    b1: integer;
    b2: integer;
  begin
    b1:= (p1 div i) mod 2;
    b2:= (p2 div i) mod 2;
    p2:= (p2 mod i) + Abs(b2 - b1) * i + (p2 div (2*i)) * (2*i);
  end; { Podprogram }
begin
  Readln(a,b);
  i:= 1;
  for k:= 1 to 8 do begin
    Podprogram(a,b,i);
    i:= 2*i;
  end; { for }
  ham:= 0;
  for k:= 8 downto 1 do begin
    i:= i div 2;
    if Odd(b div i) then ham:= ham + 1;
  end; { for }
  Writeln(ham);
end.
```

2. Program za stavljenje besedil TEX obravnava vsako črko, kot da je zaprta v pravokotnik. Črke ene vrstice so nanizane na črto, ki jo imenujemo *osnovnica*.

Vsak pravokotnik opišemo z

- globino, to je razdalja med osnovnico in spodnjim robom pravokotnika;
- višino, to je razdalja med osnovnico in zgornjim robom pravokotnika;
- širino.



Vrstice nanizanih pravokotnikov TEX razmakne na primerno razdaljo in jih pripravi za izpis. Včasih pa želimo vrstice stisniti čimbolj skupaj, vendar tako, da se pravokotniki ne prekrivajo. Napiši **podprogram**, ki izračuna najmanjšo razdaljo med dvema nepraznima vrstama (razdaljo med njunima osnovnicama), pri kateri se pravokotniki ne prekrivajo. Naj bodo podatki predstavljeni v obliki:

```
const
  najvec= ...

type
  skatla= record
            visina, globina, sirina : integer;
          end;
  vrstaT= array [1..najvec] of skatla;
```

Argumenti, ki jih dobi podprogram, so

- *vrsta1*, *vrsta2* tipa *vrstaT* in
- *dolzina1*, *dolzina2* (število pravokotnikov v vrsti) tipa *integer*.

3. Želimo narediti program, ki bo bral podatke z izpolnjenih formularjev. Številke na formularjih so natisnjene s posebnim tiskalnikom, ki jih izpisuje tako, kot to počne večina kalkulatorjev.

Program za razpoznavanje podatkov najprej vsako prebrano številko razbije na sedem delov (ki ustrezajo sedmim segmentom, iz katerih so sestavljene številke). Nato se za vsakega od teh delov odloči, ali je na formularju tam črnilo ali praznina (to stori z nekim nam neznanim postopkom). Pri tem se včasih tudi zmoti. Zato kliče naš podprogram, ki ta delno pravilni opis primerja z opisi števil in pove, kateremu je najbolj podoben. Če se ne more odločiti, potem vrne presledek. Napiši **podprogram** za primerjanje znakov.

Oblika znakov (številk), ki se lahko pojavijo v formularju, je spravljena v tabeli *oblikeZnakov*.

```
type
  znak= array [1..7] of boolean;
var
  oblikeZnakov: array ['0'..'9'] of znak;
```

Naš podprogram pa dobi en argument tipa *znak*.

4. Med dvema računalnikoma želimo prenašati poljubna zaporedja bitov, grupiranih v pakete. Na voljo imamo serijsko linijo (prenaša se en bit naenkrat), dolžine posameznih paketov ne poznamo vnaprej in tudi nimamo dovolj pomnilnika, da bi lahko shranili ves paket.

Med paketi dodamo določeno (fiksno dogovorjeno) zaporedje bitov, ki ga bo sprejemni računalnik vedno razpoznal kot mejo med paketi.

Predlagaj postopek, ki bo omogočal prenos poljubnega zaporedja bitov in ki bo omogočal, da na sprejemni strani zanesljivo določimo začetek in konec vsakega paketa. Postopek lahko seveda dodaja svoje bite tudi med bite paketa, vendar naj bo skupno število dodanih bitov majhno v primerjavi s številom koristnih bitov v paketu.

NALOGE ZA 3. SKUPINO

1. Ugotovi, **kaj počne** naslednji podprogram! **Preizkusi** ga najprej na primeru!

```
type byte= 0..255;     {osembitna nepredznačena števila }
function KajStorim(a,b : byte): byte;
var
  stevec: byte;
  rezultat: byte;
  premik: byte;
begin
  rezultat:= 0;
  premik:= 0;
  for stevec:= 1 to 8 do begin
    premik:= 2*premik + (a div 128);
    a:= (a mod 128) * 2;
    rezultat:= 2*rezultat;
    if b <= premik then begin
      premik:= premik - b;
      rezultat:= rezultat + 1;
    end; { if }
  end; { if }
  KajStorim:= rezultat;
end; { KajStorim }
```

2. Napiši podprogram *Parse*, ki prebere izraz in ga izpiše z oklepaji glede na prioriteto operatorjev. Izraz sestavljajo simboli:

<*operator*>, <*clen*> in <*konec*> (simbol za konec izraza).

Izraz je zaporedje simbolov:

<*clen*> <*operator*> <*clen*> <*operator*> $\cdots$ <*clen*> <*konec*>

Na razpolago imamo naštevni tip *SymDef*, ki definira simbole:

SymDef = (sClen, sOp, sKonec);

Podprogram *GetSym* vrne v spremenljivko *Sym* tip naslednjega simbola v zaporedju. Če ima spremenljivka *Sym* vrednost *sClen*, se v spremenljivki *Ch* nahaja znak, ki označuje člen; če ima spremenljivka *Sym* vrednost *sOp*, se v spremenljivki *OpPri* nahaja število, ki označuje prioriteto operatorja (nižja številka označuje višjo prioriteto), v spremenljivki *Ch* pa znak, ki označuje operator. Če bi bilo možno postaviti oklepaje na več enakovrednih načinov (operatorji z enako prioriteto), potem so vse inačice enako pravilne – izberemo poljubno.

Primer:

Če v izrazih uporabljamo operatorje s prioritetami:

$+$	$-$	$*$	$\uparrow$
3	3	2	1

mora podprogram *Parse* izpisati za vsak *vhodni izraz* ustrezni *izpisani izraz*:

vhodni izraz	izpisani izraz
$a+b$	$(a+b)$
$a+b*c$	$(a+(b*c))$
$a*b+c$	$((a*b)+c)$
$a+b\uparrow c*d$	$(a+((b\uparrow c)*d))$
$a+b+c$	$((a+b)+c)$ ali $(a+(b+c))$

Uporabljaj naslednje zgoraj opisane spremenljivke in podprograme:

```
var
  Sym: SymDef;
  Ch: char;
  OpPri: integer;

procedure GetSym; external;
```

3. **Napiši podprogram**, ki dobi na vhodu izvorni niz znakov in vzorec ('wild-card') ter njuni dolžini. Podprogram naj vrne *true*, če izvorni niz ustreza vzorcu. Vzorec sestavljajo znaki, ki morajo biti enaki znakom v izvornem nizu; znaka '∗' in '?' v vzorcu imata poseben pomen: '∗' pomeni nič, enega ali poljubno znakov v izvornem nizu; '?' pomeni poljuben znak. Lahko predpostaviš, da se znaka '∗' in '?' ne pojavita v izvornem nizu znakov.

Primeri:

'2124123124'	ustreza	'∗123∗124∗'
'1234567'	ustreza	'12∗34∗7'
'111222333'	ustreza	'1∗2∗3'
'12321'	ne ustreza	'123?∗2'

4. Pri prenašanju podatkov med dvema računalnikoma lahko prihaja do motenj na komunikacijski zvezi. Da kljub temu zagotovimo zanesljiv prenos, običajno podatke (npr. zaporedje znakov) grupiramo v bloke (npr po 256 znakov), vsak blok pa opremimo z dodatno informacijo, ki omogoča prejemnemu računalniku ugotoviti morebitne napake v bloku. Prejemni računalnik lahko oddajnemu potrdi pravilen sprejem vsakega bloka, ali pa zahteva njegovo ponovitev.

Pravilom (algoritmu), po katerih se ravnata oba računalnika pri medsebojni komunikaciji in opisu blokov (dolžina bloka, dodatna informacija), pravimo **protokol**.

Če je oddaljenost med računalnikoma relativno majhna in hitrost prenašanja podatkov ne posebno velika, potem se sprotno potrjevanje (ali zahtevanje ponovitve) vsakega bloka obnese.

Radi bi prenašali podatke od računalnika v Evropi do računalnika v Ameriki. Pošta nam je zagotovila hitro komunikacijsko zvezo (približno milijon bitov na sekundo) prek geostacionarnega telekomunikacijskega satelita (oddaljenega od površine Zemlje dobrih 38.000 km, čas potovanja elektromagnetnega valovanja do satelita in nazaj je približno 1/4 sekunde).

Ali bo naš preprost protokol še vedno učinkovit? Zakaj? Predlagaj učinkovitejši protokol! Premisli tudi, ali zanesljivost prenosa (verjetnost napake / znak) vpliva na optimalno dolžino blokov.

Primož Gabrijelčič

KRIŽANKA NOBELOVI N

SESTAVIL MARKO BOKALIČ	ARHEOLOŠKO NAJDIŠČE V EGIPTU	LEV, D. SZ, 1962	NASAD PRI HIŠI	PIANIST BERTONCELJ	BOŽJI POPOTNIK	OSNOVNA MERA	TENISAČICA GARRISON		PESNIK ŠOPOV	KANADSK VELEMESTO
LOUIS, ZDA, 1968								OTOK V MOLUKIH		
GUGLIELMO, ITALIJA, 1909								LEON, ZDA, 1972		
SIVA KRHKA KOVINA								REKA V MONGOLIJI MAX, VON, NEMČIJA, 1914		
ROMAN DRNOVŠEK			JEAN-BAPTIST, FRANCIJA, 1926	PERGAMSKI KRALJ SL. PISATELJ (FRAN)					FIZIKALNA KOLIČINA MORSKI PTIČ	
ŠPICA PRI KOLESU							REKA V ŠVICI DLAKE POD NOSOM			
IZUMITELJ ŽARNICE Z NITKO					RAZTELEŠEVALEC	NOVOTVORBE				
	RJAVA OKSIDNA PLAST NA ŽELEZU ILJA, SZ, 1958					DODATNI PRORAČUN CVETO TRAMPUŽ				
JAMES, ZDA, 1925 VZDEVEK SRB. SLIKARJA PETRA KRIŽANIČA								MESTO V JUŽNI FRANCIJI REŠETO		
KDOR SE UČI SAM IN DELA IZPITE										VULKAN SICILI STAR SLOVA
IGRALKA LEIGH						MILANO	RIMSKA BOGINJA JEZE PETER LEGIŠA			
EMIL NAVINŠEK			ARTUR, ZDA, 1927							
ROBERT KOCH			NAKLONJENOST IN PODPORA KAKE VIŠJE SILE							

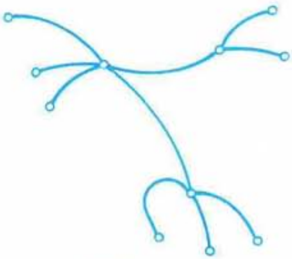
IAGRAJENCI ZA FIZIKO I.

ANGLEŠKI MATEMATIK (GEORGE)	MEMBRANA	NIKALNICA			VOTLO PLOVNO TELO	LEONHARD EULER	DELEŽ DRUŽABNIKA	ZAPOREDJE ZNAKOV	NOVEJŠI RENAULTOV TIP	GLOBOKA NEZAVEST
			RUSSEL ALEKSANDER	MAX, NEMČIJA, 1918						
				SREDSTVO ZA SPRIJEMANJE / ITAL. LUKA						
		ŠVED. IME FIN. MESTA TURKU / ŠKOT. ROD. SKUPNOST				SLOVENKI VIOLONIST (IGOR) / PAVLOVA				
			OBER / RIMSKA BOGINJA PLODNOSTI					OLGA ARNUŠ / FRITS, NIZOZEMSKA, 1953		
	HENDRIK, NIZOZ. 1902 / ALFRED, FRANCIJA 1966								GEORGE PAGET, ANGLIJA, 1937	AVAGADRO AMEDEO
PJOTR, L., SZ, 1978 / SUNG-DAO, KIT.-ZDA, 1957							GRŠKA ČRKA / POLJSKA CVETICA			
					ZLATNIK	KREPKA ŽIVAL / IGRALKA MIRANDA				
		IME DVEH LEVIH PRITOKOV ODRE	SKLADATELJ HAČATURJAN	USTRELJEN ITALIJANSKI FAŠIST. POLITIK (GALEAZZO)						DESNI PRITOK SENE
				MOČNO SUKNO ZA PLAŠČE / KRAJ PRI OPATIJI						
IZPOVEDNO PESNIŠTVO							GRŠKA ČRKA			
LEO, JAPONSKA, 1973							GRŠKA BOGINJA JUTR. ZARJE			
INDIJA, 1930								NEON		

EULERJEVA FORMULA ZA RAVNINSKE GRAFE

V sestavku si bomo ogledali eno od lastnosti ravninskih grafov. Kaj je ravninski graf? Odgovorimo čisto na kratko: *Ravninski graf* je množica točk v ravnini in povezav med njimi, ki se ne sekajo. Graf je *povezan*, če so vse točke grafa med seboj povezane, kar pomeni, da se lahko po povezavah sprehodimo od katerekoli točke grafa do poljubne točke grafa.

Za graf definirajmo še pojem *območja*: Območja so med seboj tuji si deli ravnine, ki so ograjeni s povezavami grafa. Povezanemu grafu, katerega povezave ne razdelijo ravnine na več območij, rečemo *drevo*. Povejmo to še drugače: Poljubni točki, ki ne ležita na grafu, lahko povežemo z neko potjo (krivuljo), ki ne seka nobene povezave.



Slika 1

Na sliki 1 je primer drevesa. Če je graf, drevo imamo (po definiciji drevesa) eno samo območje. To območje je neomejeno. Na sliki 2 je primer povezanega grafa, ki razdeli ravnino na tri območja.

Slika 2

Število območij bomo označili z $\mathcal{O}$, število povezav s $\mathcal{P}$ in število točk grafa s $\mathcal{T}$.

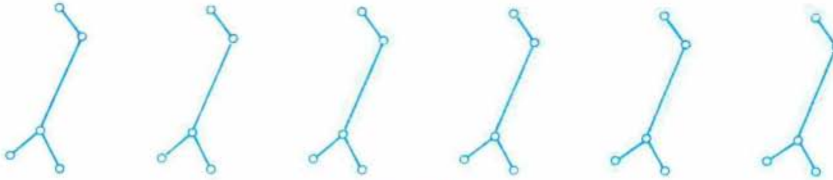
Trditev *(Eulerjeva formula)*. Za povezan ravninski graf velja enakost

$$\mathcal{O} = 2 + P - T$$

Dokaz: Najprej dokažimo, da velja formula za drevesa. Vsako drevo ima eno območje. Kako bi prešteli povezave? Prešteli jih bomo tako, da bomo naše drevo pobarvali. Najprej pobarvajmo eno točko. Nato pobarvajmo povezavo od naše začetne točke do katerekoli sosednje točke in nato točko, ki leži na koncu te povezave. Tako nadaljujemo. Vedno začnemo v neki že pobarvani točki, nato pobarvamo povezavo in točko na njenem koncu. Ta postopek se ustavi le, ko iz vsake že pobarvane točke izhajajo same pobarvane povezave.

Trdimo, da je tedaj pobarvan ves graf. Za dokaz privzemimo nasprotno; potem obstaja na grafu neka še nepobarvana točka T. Izberimo poljubno že pobarvano točko P na grafu. Ker je graf povezan, obstaja zaporedje točk grafa $P = P_0, P_1, \ldots, P_n = T$ in povezav med njimi. Naj bo k največji tak indeks, da je točka P_k že pobarvana, P_{k+1} pa ni pobarvana. Potem povezava med P_k in P_{k+1} še ni pobarvana (ker smo hkrati z vsako povezavo pobarvali tudi njeno končno točko), toda to nasprotuje dejstvu, da gredo iz vsake že pobarvane točke same pobarvane povezave.

Oglejmo si primer takega barvanja drevesa na sliki 3.



Slika 3

Ali se lahko pri tem postopku zgodi, da je točka na koncu povezave, ki jo barvamo, že pobarvana? To se ne more zgoditi, kajti v tem primeru bi do te točke prišli po dveh različnih poteh. Enkrat smo tja že prišli, saj je točka že pobarvana. Sedaj smo zopet tam in to po drugi poti. Ti dve poti pa bi ograjali del ravnine, imeli bi vsaj dve območji in graf ne bi bil drevo. Na ta način do konca pobarvamo $\mathcal{T} - 1$ povezav in $\mathcal{T} - 1$ točk. Imamo torej eno območje, $\mathcal{T} - 1$ povezav in $\mathcal{T}$ točk (še tisto prvo). Eulerjeva formula velja, saj je $1 = 2 + (\mathcal{T} - 1) - \mathcal{T}$.

Naj sedaj graf ni drevo. Potem obstajta vsaj dve območji. Eno od teh je gotovo omejeno. Naj ga omejujejo povezave med točkami T_0, T_1, $T_2, \ldots, T_k = T_0$. Če odstranimo povezavo med T_0 in T_1, se število območij in število povezav zmanjša za eno. Točki T_0 in T_1 pa sta še vedno povezani s potjo $T_1, T_2, \ldots, T_k = T_0$. Zato je preostali graf še vedno povezan. V tem novem grafu je $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} - 1$ območij, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} - 1$ povezav in $\mathcal{T}$ točk. Če graf še ni drevo, enak korak kot prej naredimo še enkrat. Spet sta se števili območij in povezav zmanjšali za ena. Delajmo to tako dolgo, dokler graf ne postane drevo. Recimo, da je bilo potrebo odstaniti k povezav. Povezav je sedaj $\mathcal{P}_k = \mathcal{P} - k$, območij pa $\mathcal{O}_k = \mathcal{O} - k$. Ker je graf sedaj drevo, velja

$$\mathcal{O}_k = 2 + \mathcal{P}_k - \mathcal{T}.$$

Če vstavimo $\mathcal{P}_k$ in $\mathcal{O}_k$, dobimo

$$\mathcal{O} - k = 2 + \mathcal{P} - k - \mathcal{T} ,$$

kar je isto kot

$$\mathcal{O} = 2 + \mathcal{P} - \mathcal{T} .$$

Eulerjeva formula je tako dokazana.

Pripomba: Eulerjevo formulo in posamezne korake v dokazu lahko dokažemo na veliko načinov. Teorija grafov, to je spoznavanje lastnosti grafov in njihova uporaba, je zelo razvita matematična smer. Tudi bralci Preseka so se z grafi že srečali. Tiste, ki jih zanima več in bi radi o grafih kaj več izvedeli, napotimo v Presekovo knjižnico h knjižici: D. Bajc, T. Pisanski, *Najnujnejše o grafih*, ki je izšla kot 6. številka Preseka leta 1985.

Mirko Dobovišek

TURNIR

V bohinjskih hribih je že tri dni tako lilo, da še nosu nisi mogel pomoliti iz koče. Za nameček je oskrbnik zaradi nevihte izklopil še televizijo. Kakšen dolgčas! V svoj lastni rep bi se grizel, če bi ga imel!

Matevž in Matjaž sta namesto tega sklenila odigrati turnir v dami. Izmislila sta si naslednja pravila:

1. Odigrala bosta deset iger, pri čemer neodločene ne štejejo.
2. Zmagovalec posamezne igre dobi točko. Dodatno točko dobi, če je v igri odvzel nasprotniku več kakor eno damo. Poraženec ne dobi nobene točke, ne glede na to, koliko dam je odvzel.
3. Zmagovalec turnirja bo tisti, ki bo zbral več točk.

Turnir sta predčasno zaključila, ker se je izkazalo, da je Matjaž turnir že izgubil, čeprav je dobil več posamičnih iger kot Matevž. Po kateri igri se je to zgodilo, če sta imela tedaj skupaj 13 točk. Koliko iger je dobil vsak?

Marija Vencelj

NALOGE

DVA NEORTODOKSNA KRIPTOGRAMA

Kriptogram, ki ni čisto običajen, imenujemo neortodoksen kriptogram. Med njimi si oglejmo dva precej zanimiva.

1. Črka S naj pomeni poljubno sodo cifro (0, 2, 4, 6, 8), črka L pa poljubno liho cifro (1, 3, 5, 7, 9). To, da smo vse lihe cifre označili z L, seveda še ne pomeni nujno, da so vse lihe cifre v kriptogramu med seboj enake. En L lahko na primer pomeni 1, drugi L recimo 5 in tako naprej. Isto velja tudi za sode cifre. Kriptogram predstavlja le običajno pisno množenje dveh celih števil. Poiščite ju! Problem ima eno samo rešitev.

```
  S S L · L L
 ------------
  S L L
  S L S L
 ------------
L L L L L
```

2. V tem kriptogramu črka P pomeni enomestno praštevilo, t.j. eno od cifer 2, 3, 5, 7. Za P torej lahko vstavljamo različne cifre, da so le praštevila. Kriptogram je spet množenje in ima eno samo rešitev.

```
  P P P · P P
 ------------
P P P P
  P P P P
 ------------
P P P P P
```

Izbral *Mirko Dobovišek*

VRIŠI PRAVOKOTNIK

V dani trikotnik z ostrima kotoma ob osnovnici vriši pravokotnik z dano diagonalo d tako, da bosta dve oglišči ležali na osnovnici, dve pa na drugih dveh trikotnikovih stranicah.

Marija Vencelj

PLAVAJOČE KAPLJICE

Znano je, da se vodna gladina vede kot napeta prožna opna. Na njej zato plavajo tudi telesa, ki so gostejša od vode. Plavajoče britvice, šivanke in kovinski opilki lepo ponazarjajo to lastnost vodne gladine.

Če želimo povečati površino vodne gladine za ΔS, opravimo pri tem delo

$$A = \gamma \Delta S.$$

Koeficient γ je značilen za posamezno tekočino in ga imenujemo *površinska napetost*. Za vodo pri sobni temperaturi je njegova vrednost $72 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm^{-1}}$. Če torej povečamo površino vodne gladine za en kvadratni meter, opravimo pri tem delo 72 mJ. To delo je možno v celoti dobiti povrnjeno, ko površino spet zmanjšamo na prejšnjo velikost.

Sile zaradi površinske napetosti nasprotujejo povečanju površine. Za drobne kapljice so površinske sile prevladujoče, zato imajo v ravnovesni legi obliko krogle, torej telesa, ki ima pri dani prostornini najmanjšo možno površino. Zanimivo je, da tudi vodne kapljice lahko plavajo na vodni gladini. Največkrat jih opazimo pri veslanju, ko na zračni blazini drsijo po mirni gladini. Ko se ustavijo, kmalu utonejo in jih zato ne moremo podrobno opazovati. Zračna plast med kapljico in gladino se namreč hitro stanjša do debeline prašnih delcev, ki jih na vodni gladini ne manjka. Ti delci naredijo most med kapljico in gladino in kapljica utone.

Čas, v katerem se debela zračna plast pod kapljico stanjša na debelino L, ocenimo iz enačbe

$$t = \frac{9R\eta}{16\rho g L^2},$$

kjer je R polmer kapljice, η viskoznost zraka, ρ gostota vode in g težni pospešek. Enačbo uporabimo le kot približek, natančno pa pravzaprav opisuje tanjšanje zračne plasti med vzporednima, togima okroglima ploščama s polmerom R. Zračna plast med kapljico in gladino ni enakomerno debela, polmer te plasti pa je v splošnem manjši od polmera kapljice. Gladina in kapljica tudi nista togi, lahko ju je spraviti v gibanje. Če vstavimo v zgornjo enačbo tele podatke:

$$R = 1\ \mathrm{mm}$$

$$\eta = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Nsm}^{-2}$$
$$\rho = 10^{3}\ \mathrm{kgm}^{-3}$$
$$g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$$

in ocenimo končno debelino zračne plasti, kjer pričakujemo vpliv prašnih delcev, z

$$L = 10^{-6}\ \mathrm{m}\ ,$$

dobimo

$$t = 1\ \mathrm{s}\ .$$

To se sklada z opazovanji mirujočih kapljic. Gibajoča se kapljica pa živi bistveno dlje, ker se njena zračna blazina pri gibanju obnavlja. Mimogrede povejmo, da zgornja enačba napoveduje zelo dolgo življenjsko dobo plavajočih kapljic, če na vodni gladini in na površini kapljic ni prašnih delcev ali drobnih površinskih valov.

Življenjsko dobo kapljic lahko bistveno podaljšamo, če vzbudimo na gladini stoječe valove s kratko valovno dolžino v primerjavi s premerom kapljic. Valovi obnavljajo zračno blazino med kapljico in gladino. To storimo tako, da nalijemo vodo v zvočnik, ki ga prej zaščitimo s tanko plastično folijo. Zvočnik napajamo z izmenično napetostjo s spremenljivo frekvenco in amplitudo. Zadošča že napetost z omrežno frekvenco 50 Hz, ki jo dobimo iz zvezno nastavljivega transformatorja (variaka) ali - še varneje - iz šolskega malonapetostnega vira izmenične napetosti. Vodi dodamo malo tekočega detergenta za pomivanje posode. Življenjska doba kapljic je odvisna od amplitude stoječih valov (slika 1 na IV strani ovitka). V najboljšem primeru smo opazovali kapljico, ki je živela več minut. Povprečna življenjska doba se toliko podaljša, da kapljice in njihove lastnosti lahko zelo natančno opazujemo. Opazili smo, da ni mogoče vnaprej napovedati, katera kapljica bo živela dolgo in katera ne. Vse kaže, da je utapljanje kapljic naključno, podobno kot radioaktivni razpad atomskih jeder.

Kapljice naredimo tako, da močno povečamo amplitudo valov na gladini. Kapljice nastajajo takrat, ko imamo občutek, da voda vre. Nato amplitudo zmanjšamo do mere, ki zagotavlja najdaljšo življenjsko dobo. Z nekaj vaje lahko prav dobro nadziramo število novorojenih kapljic. Te kapljice imajo skoraj enake polmere. Večje kapljice dobimo po zlivanju manjših. Njihovi polmeri so od 1 do 2 mm, največje pa merijo tudi 5mm. Tako velike kapljice so zaradi teže sploščene.

Za tvorbo kapljice je treba opraviti nekaj dela. Gladina s kapljico ima nekaj večjo površino kot nemotena gladina s potopljeno kapljico. Plavajočo kapljico obravnavamo kot posebno vzbujeno stanje vodne gladine. Energijo tega vzbujenega stanja izračunamo, če vemo za kolikšno površino ΔS je gladina s kapljico večja od površine nemotene gladine:

$$W_k = \gamma \Delta S.$$

Največji delež odpade na rovaš površine same kapljice, zato ocenimo velikostno stopnjo W_k takole:

$$W_k = \gamma 4\pi R^2.$$

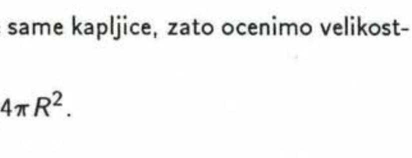
Za kapljico s polmerom 1 mm dobimo

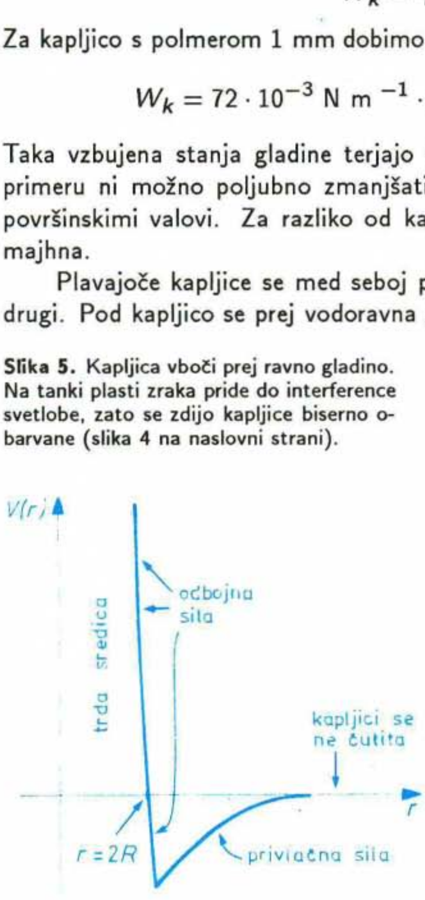
$$W_k = 72 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N\ m}^{-1} \cdot 12,6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 = 2\mu\ \mathrm{J}\ .$$

Taka vzbujena stanja gladine terjajo torej energijski obrok, ki ga v našem primeru ni možno poljubno zmanjšati. Gladino pa lahko vzbudimo tudi s površinskimi valovi. Za razliko od kapljic je energija valov lahko poljubno majhna.

Plavajoče kapljice se med seboj privlačijo, če se dovolj približajo druga drugi. Pod kapljico se prej vodoravna gladina vdre. Vdolbina pritegne drugo

Slika 5. Kapljica vboči prej ravno gladino. Na tanki plasti zraka pride do interference svetlobe, zato se zdijo kapljice biserno obarvane (slika 4 na naslovni strani).





Slika 6. Potencialna energija dveh enako velikih kapljic v odvisnosti od razdalje r med njunima središčema. Na velikih razdaljah se kapljici ne čutita, na razdaljah, ki so primerljive s premerom kapljic, se kapljici privlačita, na manjših razdaljah pa se kapljici močno odbijata. Diagram je podoben tistemu, ki velja za silo med nukleonoma, če se ne menimo za elektrostatično silo med protonoma.

kapljico, da se združita. Ko prideta kapljici tako blizu, da se dotikata, se začneta odbijati. Vzrok temu je spet površinska napetost. Pri približevanju se kapljici deformirata in povečata s tem svojo površino, kar ne gre brez opravljenega dela. Dotikajoči se kapljici pa se radi zlijeta, saj se pri tem sprosti nekaj dela površinskih sil. Večja kapljica ima namreč manjšo površino kot obe kapljici, iz katerih je nastala, skupaj. Zlivanje kapljic je prav tako naključno kot njihovo utapljanje. Gručo dveh kapljic smo opazovali tudi več minut, pri čemer se je utapljanje izkazalo celo bolj verjetno kot zlivanje. Prav zanimivo je opazovati življenje večje gruče kapljic (slika 2 na IV. strani ovitka). Prej enako velike kapljice postanejo čez čas različno velike, dokler ne preživi le ena. Ko utone še ta, se po gladini razširi koncentrični val, zadnja sled izginule kapljice. Z valom odpotuje pretežni del energije, ki smo jo porabili za njen nastanek. Če v gruči dveh kapljic (slika 3 na IV. strani ovitka) ena utone, pri tem močno odrine drugo. Sami poskusite razložiti, zakaj pride do tega. Zgodi pa se, da pri utopitvi nastane nova, manjša kapljica, ki se z veliko hitrostjo zapodi po gladini.

Obliko vdrte gladine (slika 5) ne preblizu kapljice se da izračunati. Obliko gladine kar natančno lahko opišemo s funkcijo

$$\frac{e^{-\frac{r}{\mu}}}{\sqrt{r}},$$

kjer parameter $\mu = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ imenujemo doseg sile med kapljicama. Z že znanimi podatki dobimo

$$\mu = 3 \text{ mm} .$$

Doseg sile je torej primerljiv z velikostjo kapljic.

Medsebojno privlačno in odbojno silo ponazorimo v diagramu, kjer namesto sile med kapljicama rišemo raje potencialno energijo kapljic v odvisnosti od razdalje r med njunima središčema (slika 6). Zaradi privlačne sile vidimo na razdaljah $r > 2R$ negativno potencialno energijo, pri razdaljah, ki so manjše od premera kapljic, pa zaradi močne odbojne sile potencialna energija strmo raste. Podoben diagram opisuje silo med nevtronom in protonom ali med dvema nevtronoma, le da so razdalje za 12 velikostnih stopenj manjše. Nukleona se privlačita, če sta na razdalji, ki je primerljiva z njunima premeroma ($2R_n = 10^{-15}$m), sicer pa se silovito upirata prodoru v svojo notranjost. Sili, ki eksponentno pojema na večjih razdaljah od delcev, pravimo *sila kratkega* *dosega*. Nukleone v atomskih jedrih drži skupaj sila kratkega dosega, ki pa je tako močna, da se upira elektrostatični sili med protoni. Elektrostatična sila je *sila dolgega dosega*, saj je obratno sorazmerna s kvadratom razdalje med nabitima delcema.

Andrej Likar

Literatura

[1] F. Demšar, *Plavajoče kapljice in sorodni površinski pojavi*, diplomsko delo, FNT - Oddelek za fiziko, julij 1982

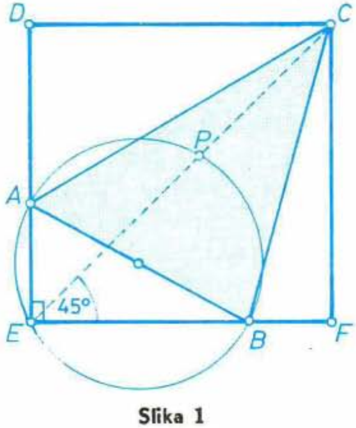
[2] *Water droplets that float on water*, Scientific American, avgust 1973

[3] F. Demšar, *Plavajoče in potopljene kapljice*, Presek **11** (1983/84) 86-93

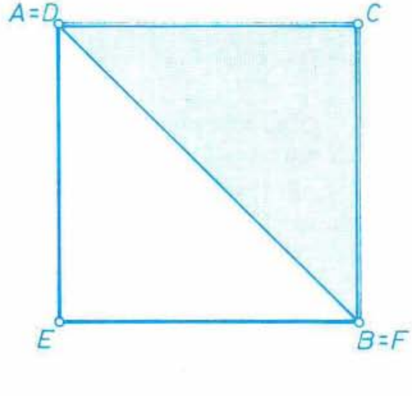
OČRTAJ KVADRAT – Rešitev s str. 20

Naloga seveda ni nujno rešljiva. Na zahtevan način prav gotovo ne bomo mogli očrtati kvadrata trikotniku s topim kotom pri C. Če pa naloga ima rešitev, lahko razberemo pot do nje s skice na sliki 1. Ker je kot $\sphericalangle AEB$ pravi, leži oglišče E na krožnici s premerom AB. Natančneje - če naj bo kvadrat trikotniku očrtan - leži E na tisti polkrožnici $\widehat{AB}$, ki leži na nasprotnem bregu premice $p(A, B)$ kot točka C. Pri rešljivi nalogi poteka diagonala CE po notranjosti kota $\sphericalangle AEB$, torej seka tudi nasprotno polkrožnico, denimo v točki P. Ker je $\sphericalangle PEB = 45°$, je P razpolovišče te polkrožnice. S pomočjo točke P kvadrat zlahka konstruiramo.

Po tej poti se zatakne le v primeru, če je $P = C$, to je v primeru



Slika 1



Slika 2

enakokrakega pravokotnega trikotnika. Toda takemu trikotniku lahko kvadrat zelo preprosto očrtamo (slika 2).

Kaj pa splošnejša naloga, pri kateri dopuščamo, da A in B ležita na nosilkah tistih kvadratovih stranic, ki ne gresta skozi C? Koliko je tedaj rešitev pri poljubno danem trikotniku ABC? Koliko, če je trikotnik pravokoten z različnima katetama, in koliko, če je enakokrak in pravokoten?

Marija Vencelj

DELITEV PLENA ali TEŽAVE SE ZAČNO ŠELE PO ROPU – Rešitev s str. 21

Nalogo boste zlahka rešili, če boste prebrali članek Problem treh vrčev in trilinearne koordinate v prejšnji številki Preseka. Res je, da v zastavljeni nalogi nastopajo štirje vrči, vendar nalogo lahko prevedemo na dva problema s po tremi vrči. Najprej pustimo ob strani 7-litrski vrč in poskušamo z ostalimi tremi vrči odmeriti količino 8 litrov. V oznakah iz članka to pomeni, da moramo v problemu [24; 24, 13, 11] priti iz točke (24, 0, 0) v tako točko na robu operacijskega področja, ki bo imela eno koordinato enako 8. Imamo tri pare takih točk:

$$(8,5,11),\quad (8,13,3)$$
$$(5,8,11),\quad (16,8,0)$$
$$(3,13,8),\quad (16,0,8)$$

Posamezni točki, ki smo ju zapisali v paru, povezuje eno samo prelivanje (v prvem paru npr. drugo posodo napolnimo iz tretje). Torej vodijo do iskanih točk kvečjemu tri bistveno različne poti, ki jih poiščite sami. Naloga je rešljiva, ker so števila 24, 13 in 11 tuja in se lahko povežeta poljubni dve točki operacijskega območja.

Sedaj vrč, v katerem je odmerjenih 8 litrov, odložimo. Z drugima dvema vrčema in z doslej neuporabljenim 7-litrskim nato razdelimo še preostalo tekočino. Če smo npr. v prvem delu zaključili v točki (8, 5, 11), moramo še v problemu [16; 13, 11, 7] priti iz točke (5, 11, 0) v tako točko z roba operacijskega območja, ki ima koordinato 8. Tudi to je možno, ker so spet števila 13, 11 in 7 tuja. Brez težav boste nalogo sami pripeljali do konca tako v tem primeru, kakor tudi v ostalih, ki slede iz prvega dela.

Poglejte tudi, kako je z rešitvami, če na prvem koraku namesto 7-litrske posode izločite katero od večjih dveh.

Marija Vencelj

100 LET PEANOVIH AKSIOMOV

Leta 1891 je italijanski matematik in logik Guiseppe Peano (1858-1932) objavil aksiome za naravna števila, ki jih po njem imenujemo *Peanovi aksiomi*. V resnici jih je povzel po nemškem matematiku Richardu Dedekindu (1831-1916), ki jih je tri leta prej objavil v svojem delu *Kaj so in čemu služijo števila*. Torej bi bilo bolj pošteno, če bi jih imenovali Dedekind-Peanovi, če že ne kar Dedekindovi aksiomi.

Poglejmo jih!

1. 1 je naravno število.
2. Vsako naravno število n ima natanko enega naslednika n' ($n' = n+1$).
3. 1 ni naslednik nobenega števila.
4. Če je $m' = n'$, potem je $m = n$ (če sta naslednika enaka, sta tudi števili enaki).
5. Vsaka množica, v kateri je 1 in ki z vsakim številom n vsebuje tudi n', vsebuje vsa naravna števila.

Prvi štirje so tako preprosti, da nimamo česa dodati. Tudi peti je razumljiv. Pove, da množica, ki mu ustreza, vsebuje število 1, pa njegovega naslednika 2 in nato 3 kot naslednika števila 2 itd. Očitno pride na ta način sčasoma vsako naravno število na vrsto, torej vsebuje taka množica res vsa naravna števila. Srednješolci poznate ta aksiom pod imenom *načelo popolne ali matematične indukcije*. Je zelo močno dokazovalno sredstvo v matematiki. Če dokažemo, da velja neka lastnost za število 1 in da velja za naslednika n', kakor hitro velja za število n, potem lahko na njegovi osnovi sklepamo, da velja ta lastnost za vsa naravna števila.

Denimo, da bi radi dokazali trditev, da so vsa števila oblike $7^{n+2}+8^{2n+1}$, kjer je n poljubno naravno število, deljiva s številom 57. Za $n = 1$ trditev velja, ker je

$$7^3 + 8^3 = 855 = 15 \cdot 57.$$

Za $n = 2$ je vrednost izraza petmestno število, za $n = 3$ že sedemmestno. Očitno je, da bi bilo deljivost s 57 zamudno preverjati celo za posamezen in niti ne velik n. S Peanovim petim aksiomom bomo preverjanje hitro opravili za vsa naravna števila naenkrat. Za $n = 1$ smo trditev že dokazali. Dokazati moramo še: če število 57 deli $7^{n+2} + 8^{2n+1}$, potem deli tudi število $7^{n'+2} + 8^{2n'+1}$, kjer je $n' = n + 1$. Poglejmo:

$$7^{n'+2} + 8^{2n'+1} = 7^{n+3} + 8^{2n+3} = 7(7^{n+2} + 8^{2n+1}) + 57 \cdot 8^{2n+1}.$$

Drugi sumand na desni ima faktor 57, prvi sumand je s 57 deljiv po predpostavki. Torej je število res deljivo s 57.

Na strani 83 vas čaka za spremembo še geometrijska naloga, pri kateri tudi lahko uporabite načelo popolne indukcije.

Verjetno vas je zgornja naloga prepričala o pomenu petega aksioma. Kaj pa prvi štirje? Tako preprosti so, da se zdi, da bi lahko shajali tudi brez njih.

Vendar je pomembna tudi skupna vloga vseh petih aksiomov. Z njimi namreč lahko izpeljemo vso teorijo naravnih števil, vse pomembne lastnosti njihove strukture. Če razen tega za neko množico ugotovimo, da ustreza Peanovim aksiomom, potem smemo sklepati, da imajo njeni elementi lastnosti naravnih števil. Pravimo tudi, da je opazovana množica izomorfna množici naravnih števil.

Dandanes uporabljamo aksiomatsko metodo skoraj na vseh matematičnih področjih: v verjetnostni teoriji, teoriji grup, matematični logiki, teoriji množic ... Pravimo, da je v določeni teoriji podan *sistem aksiomov*. To je sistem odnosov, katerega osnovni elementi so:

- aksiomi;
- pravila, s katerimi lahko izpeljemo nove odnose;
- izpeljani odnosi, v matematiki so to izreki, leme, posledice ...

Pri tem mora sistem aksiomov izpolnjevati določene pogoje. Biti mora *neprotisloven*, kar pomeni, da z istimi aksiomi ni mogoče priti do sklepa, da je neka trditev hkrati resnična in neresnična. Poleg tega mora biti sistem tudi *popoln*, to je, v njem mora biti vse potrebno za izoblikovanje teorije ali strukture, na katero se nanaša. Lepo je tudi, da ni presežka aksiomov, čeprav ni nič hudega, če se to zgodi. V praksi to zadnje pomeni, da je v sistem vključen tudi tak aksiom, do katerega lahko pridemo iz preostalih aksiomov, da torej aksiomi med seboj niso *neodvisni*. Prav tako je zaželeno, da je v sistemu kar najmanj aksiomov, ki naj bodo čimbolj preprosti.

Pomen aksiomov v znanosti je prvi opazil starogrški učenjak in filozof Aristotel (384-322 p.n.š.), ki je položil temelje številnim znanstvenim panogam. Sodil je, da morajo biti na vseh znanstvenih področjih izjave in izreki, ki so sami po sebi očitni in jih ni treba dokazovati, temveč so podlaga in dajejo najbistvenejše na področju posamezne vede.

V matematiki je prvi sistem aksiomov postavil Evklid (3. stol. p.n.š.) v svojih *Elementih*. Nanaša se na geometrijo in je bilo moč z njim izpeljati vse dotlej znane geometrijske ugotovitve. Ustrezno geometrijo po njem imenujemo evklidska geometrija.

Skoraj vsi Evklidovi, pa tudi številni aksiomi kasnejših dni so preprosti in razumljivi. Dolgo je nasploh veljalo, da so aksiomi očitne resnice, same po sebi tako jasne, razvidne in logične, da jih ni mogoče dokazati s še bolj preprostimi izreki. Dandanes ni več nujno tako. V sodobni matematiki so aksiomi temeljne, izhodne trditve, ki jih vzamemo kot pravilne, četudi niso ne dokazane in ne ravno očitne. Aksiome postavljajo na podlagi izkušenj, potem ko se nabere dovolj znanja in spoznanj z nekega matematičnega področja. Tedaj poskušajo matematiki to znanje sistematizirati tako, da ga oblikujejo v sistem aksiomov. Včasih nastanejo novi aksiomi in sistemi aksiomov tudi zato, da bi premostili težave, ki so se pojavile v dotedanjem aksiomatskem sistemu določenega področja.

Marija Vencelj

RAČUN Z ZNAKI

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{ABC} & - & \mathrm{DEF} & = & \mathrm{GHA} \\
- & & + & & - \\
\mathrm{IJ} & + & \mathrm{CH} & = & \mathrm{DCF} \\
\hline
\mathrm{HBI} & - & \mathrm{FGE} & = & \mathrm{DCG}
\end{array}
$$

V gornjem računu nadomesti vsak znak s svojo števko, tako da bo veljalo vseh šest enačb. Seveda se nobeno število ne začne s števko 0. Koliko različnih rešitev ima naloga?

Martin Juvan

NALOGE

MOJSTER R.A. SKRIJE ŠAHOVSKO FIGURO V ŽEP

Gospod R.A. je dober šahist, sicer pa tudi moj kolega. Ko sem mu nekoč pokazal knjigo Raymonda Smullyana[1], se je navdušeno začel ukvarjati z retrogradno šahovsko analizo in kmalu postal pravi mojster. Kar naprej me je zalagal s problemi, ki jih je sam sestavil, toda tak antitalent, kot sem jaz, je imel bore malo uspeha pri reševanju. Nekoč sva se sprehajala po šahovskem klubu in si ogledovala pozicije na različnih deskah. Nenadoma se je R.A. ustavil in skril neko figuro z mize v žep. Seveda je bil tako hiter, da sploh nisem opazil, katera figura je to bila. Nato se je odmaknil in pokazal naslednjo pozicijo:

"Če se ne motim, dragi Lovrečič, se mi zdi, da niste videli, kaj sem spravil v žep. Na tej deski manjka zdaj ena figura. Katere barve je, če predpostaviva, da ni beli kmet?" je z nasmeškom vprašal R.A.

"Preveč ste bili spretni, da bi kaj videl," sem odvrnil. "Hmm ... mislim, da je ta problem zame pretežek. Za katero figuro pravzaprav gre?"

To vprašanje sem postavil bolj sebi kot njemu, toda njegove oči so začele švigati sem ter tja, kmalu zatem pa je rekel:

"Vzemiva, da beli lahko rokira. Seveda ne moreva zanesljivo vedeti, ali je v tej partiji rokada še mogoča, pa vendar predpostaviva, da je tako. Potem se dá ugotoviti ne le barvo manjkajoče figure, marveč tudi katere vrste je. Torej, Lovrečič?"

Mozganje mi je vzelo kar precej časa. Problem sem rešil, vendarle z majhno R.A.-jevo pomočjo. Bralec naj kar sam preizkusi svoje sposobnosti reševanja retrogradnih šahovskih problemov, kot neobvezen dodatek pa naj poišče partijo, ki je privedla do gornje pozicije, seveda z dodano manjkajočo figuro, ki zgoraj ni narisana.

Marko Lovrečič Saražin

---

[1] R. Smullyan. *Šahovske skrivnosti Sherlocka Holmesa*, DZS, Ljubljana 1986, 161 str.

VRTENJE JE ČUDNA REČ

Kaj se zgodi, če telo zavrtimo za 360° okoli izbrane osi? Na prvi pogled je zadeva jasna: nič. Pa vendar! Temelj znanstvenega dela je, da se nobena stvar ne zdi samoumevna.

Razmislimo torej o vprašanju vrtenja za polni kot. Če zadevo gledamo z očmi geometra, je pravzaprav res isto, če telo (ali kakršen koli geometrijski objekt) zavrtimo za 360°, ali pa ga pustimo kar pri miru. Učeno bi temu rekli, da je rotacija za polni kot ekvivalentna identiteti. Namesto geometrijskega vzemimo fizikalno telo. Geometrijsko telo je kar precejšnja idealizacija. Fizikalno telo pa ima dve pomembni lastnosti:

- L1 sestavlja ga več točkastih pod-teles (recimo molekul ali atomov), ki ne spreminjajo svoje medsebojne razdalje;
- L2 v prostor med posameznimi točkastimi podtelesi ni mogoče vdreti z drugim telesom brez hudih posledic, kot so deformacije ali celo razpad.

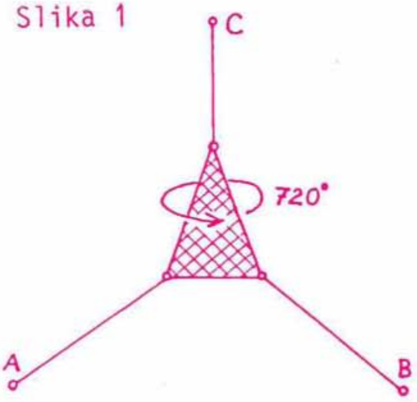
Telo z lastnostjo (L1) imenujemo *togo telo*. Togemu telesu z dodatno lastnostjo (L2) pa bomo rekli *trdno telo*.

Zahtevajmo od trdnega telesa še več, namreč da ni izolirano, ampak je povezano z realno okolico. Za naravna telesa je to razumljivo. Tudi Zemlja, ki "visi" v praznem prostoru, ni ločena od okolice, saj je s sončnim sistemom povezana z gravitacijsko silo. Naredimo model: trikotna ploščica naj bo s tremi elastičnimi nitmi privezana na fiksno okolico, kot je to prikazano na sliki 1.

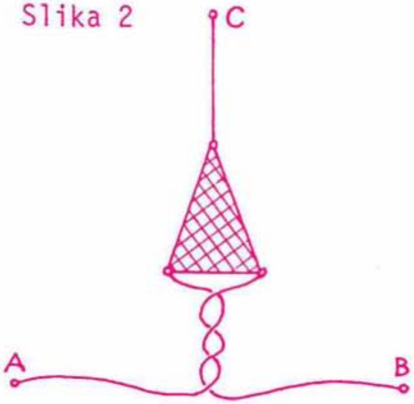
Zavrtimo ploščico za polni obrat okrog simetrijske osi. Rezultat: ploščica je res v prvotni legi, dve vrvici pa sta brezupno prepleteni. Naj počnemo karkoli, vrvic ni mogoče razplesti, razen če bi šli z eno vrvico *skozi* ploščico, kar pa ni združljivo s predpostavko, da je ploščica trdno telo; prav tako tudi ne dovolimo, da bi šla vrvica preko točk A, B in C, ki predstavljajo okolico. Ta poskus nam jasno pokaže, da za trdno telo zavrtitev za polni kot ni enakovredna mirovanju. Povezave telesa z okolico se pri takem vrtenju spremenijo.

Sedaj pa, s to novo izkušnjo, postavimo izzivalno vprašanje: kaj se zgodi, če telo zavrtimo za $2 \cdot 360° = 720°$. Prva misel je, da se odnos (fiziki pravijo raje *interakcija*, to je medsebojno vplivanje) telesa in okolice še bolj zaplete. Ampak, ali nismo rekli na začetku, da ni nič res samoumevnega! Ponovimo isti poskus kot prej in sledimo slikam 1 - 6. Izid poskusa je res presenetljiv, vrvice se popolnoma razpletejo. Z nekaj tuhtanja in praskanja po glavi ugotovimo

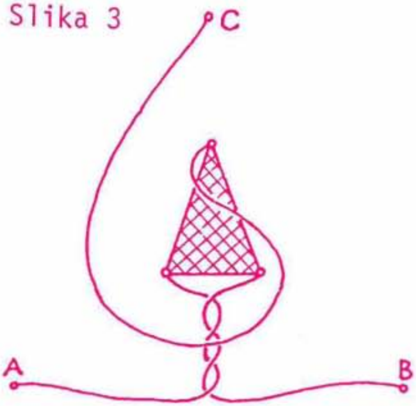
Slika 1



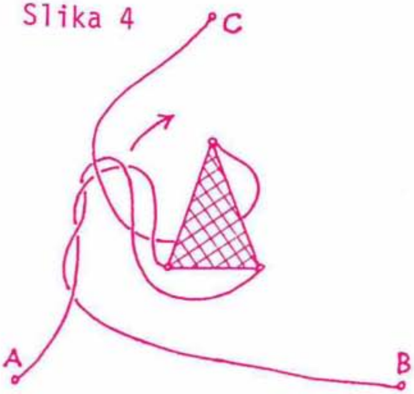
Slika 2



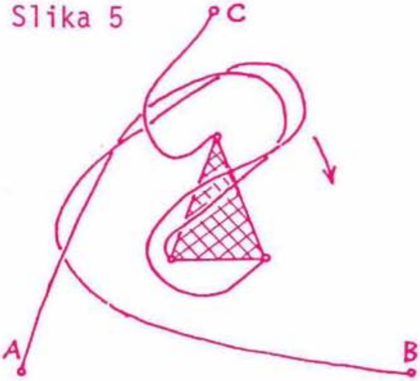
Slika 3



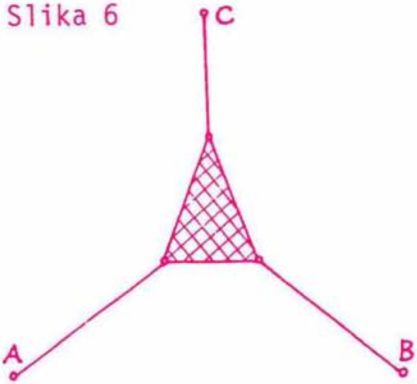
Slika 4



Slika 5



Slika 6



celo, da število vrvic sploh ni pomembno, vedno lahko samo z zvijanjem in raztegovanjem dobimo začetno situacijo. Vrtenje, ki nam telo resnično vrne v prvotno *stanje*, je torej vrtenje za 720°.

Kolikor je znano, sta to prva opazila angleški fizik P.A.M. Dirac in švicarski fizik W. Pauli. Dirac je skušal opisati gibanje elektrona, kar mu je komaj šestindvajsetletnemu tudi uspelo leta 1928 z enačbo, v kateri je združil kvantno mehaniko in specialno teorijo relativnosti, dve temeljni fizikalni teoriji našega časa. Elektron se zdi podoben vrtavki, njegova vrtilna količina v izbrani smeri - ki pravzaprav ni čisto prava vrtilna količina, pa ji zato raje rečemo *spin* - je polovica osnovne enote. Pauli je pokazal, da se mora elektron zavrteti za dvojni polni kot, da se povrne v prvotno stanje.

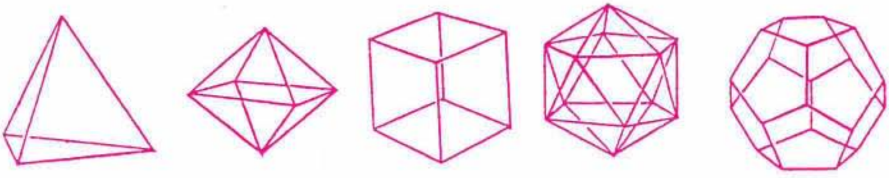
Omenimo še eno podobnost med trdnim telesom in elektronom. Za dve trdni telesi velja, da ne moreta biti hkrati na istem kraju; pravimo, da ne moreta imeti istih prostorsko-časovnih koordinat. Za elektrone pa velja tako imenovana Paulijeva prepoved, da v atomu ne moreta biti dva elektrona v popolnoma istem stanju (tudi W. Pauli je ta zakon formuliral leta 1925 še zelo mlad, komaj petindvajsetleten).

Obeh podobnosti ne kaže preveč poudarjati, da bi si elektrona ne začeli predstavljati napačno. Silita pa nas k domnevi, da obstajata sorodna geometrijska opisa trdnega telesa in elektrona. Kaj več se ne da na kratko povedati, kajti taki geometriji ne zadostujejo realna števila, celo kompleksna ne. Uporabljati moramo precej bolj "eksotična" števila, ki jih imenujemo *hiperkompleksna* števila.

Anton Cedilnik

OPRAVIČILO BRALCEM

V prvi letošnji številki Preseka je tiskarski škrat zrcalno zasukal prvo sliko v članku Platonovi poliedri, tako da je le pod kocko napisano pravo ime. Čeprav ste napako gotovo že opazili in popravili, objavljamo pravilno sliko.



tetraeder oktaeder kocka ikozaeder dodekaeder

REŠITVE NALOG

VZPOREDNICA - Rešitev s str. 45

1. Iz podobnosti trikotnikov NAP in KMP oziroma LNR in BMR dobimo zvezi

$$|MP| : |PA| = |MK| : |NA| \,, \quad |MR| : |RL| = |BM| : |LN|$$

Ker sta podobna tudi trikotnika BMK in LNA, velja

$$|BM| : |MK| = |LN| : |NA|$$

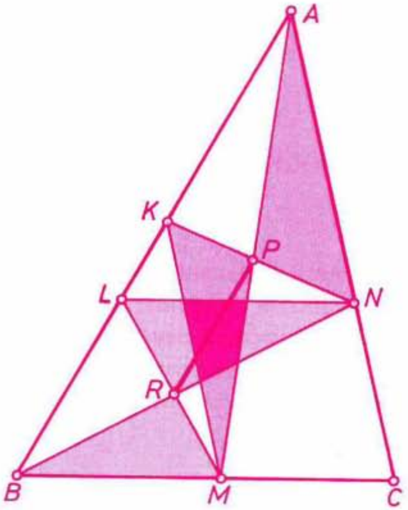
torej tudi

$$|BM| : |LN| = |MK| : |NA|$$

Seveda je potem

$$|MP| : |PA| = |MR| : |RL|$$

in zato po Talesovem izreku $PR \parallel AB$.



2. Iz podatkov takoj izračunamo $|AL| = (2/3)7cm$.
Upoštevajmo, da je

$$\frac{|PR|}{|AL|} = \frac{|MP|}{|MP| + |PA|} = \frac{1}{1 + |PA|/|MP|} = \frac{1}{1 + |NA|/|MK|}$$

$$|NA| = (2/3)|CA|, \quad |MK| = (1/2)|CA|$$

pa dobimo najprej $|PR|/|AL| = 3/7$ in nato še $|PR| = 2$ cm.

Boris Lavrič

ZLOŽENKA

Besede KOCKA, MINOR, MINUS, MONOM in SINUS razvrstite vodoravno v kvadrat tako, da bo na diagonali pojem iz matematike.

Stavra V. Radojković

KJE JE NAPAKA?

Verjetno ste že srečali kompleksna števila, če drugje ne, vsaj pri reševanju kvadratne enačbe.

Kompleksna števila lahko zapišemo na več načinov. Običajno je i število, za katerega velja $i^2 = -1$. Tedaj je $\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$ množica kompleksnih števil.

Če je $z = a + ib$ komplesno število, označimo z $\Re(z) = a$, $\Im(z) = b$ in $\bar{z} = a - ib$. $\Re(z)$ je *realna komponenta*, $\Im(z)$ je *imaginarna komponenta*, $\bar{z}$ pa je k z *konjugirano* kompleksno število. Očitno veljata zvezi

$$z + \bar{z} = 2\Re(z) \text{ in } z - \bar{z} = 2i\,\Im(z).$$

Kompleksno število z je pravzaprav par realnih števil:

$$z = a + ib \leftrightarrow (a, b).$$

Torej si lahko predstavljamo kompleksna števila kot točke ravnine. Število a je abscisa, b ordinata ustrezne točke. (To sta ločeno odkrila Gauss in Argand na začetku devetnajstega stoletja.) Če je pripadajoča točka za ρ oddaljena od koordinatnega izhodišča in oklepa daljica med izhodiščem in točko kot ϕ s pozitivnim poltrakom abscisne osi, imamo za kompleksna števila polarni zapis:

$$a = \rho\ \cos\phi;\ \ b = \rho\ \sin\phi.$$

V polarnem zapisu lahko z uporabo adicijskih izrekov za trigonometrične funkcije ugotovimo, da produktu kompleksnih števil pripada kot, ki je vsota faktorjem pripadajočih kotov. To je Euler uporabil za definicijo:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Tako na primer velja zveza:

$$e^{i\phi}e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)},$$

namesto $z = a + ib$ pa lahko zapišemo

$$z = a + ib = \rho e^{i\phi}.$$

Zdaj pa si poglejmo naslednji sklep. Radi bi videli, ali je *realno* število

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi}$$

večje, enako ali manjše od 2.

Lahko začnemo s predpostavko

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} \geq 2,$$

kar je isto kot

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} - 2 \geq 0.$$

Opazimo, da velja

$$(e^{\frac{i\phi}{2}} - e^{\frac{-i\phi}{2}})^2 = e^{i\phi} + e^{-i\phi} - 2.$$

Od tod bi mogoče kdo sklepal, da je neenačba, s katero smo začeli, prava.

Toda

$$\Re(e^{i\phi}) = \cos\phi \leq 1,$$

torej

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = e^{i\phi} + \overline{e^{i\phi}} = 2\Re(e^{i\phi}) \leq 2.$$

Ko združimo oba sklepa, dobimo:

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2.$$

To pa gotovo ne velja za vse kote ϕ.

Kje smo se zmotili?

Med kompleksnimi števili ni vsak kvadrat pozitiven, četudi je realen!

Monique Gradolato

RACIONALNI SINUSI KOTOV V TRIKOTNIKU

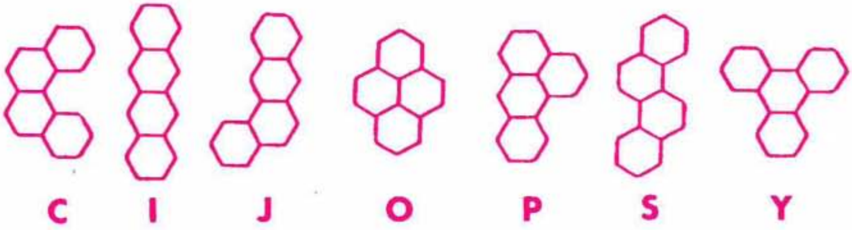
Naj bodo v trikotniku $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ racionalna števila. Dokaži, da se v tem primeru tudi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ racionalna števila!

(Narobe ni vselej res. Zgled: enakostranični trikotnik.)

Ivan Vidav

IGRA REALGAR

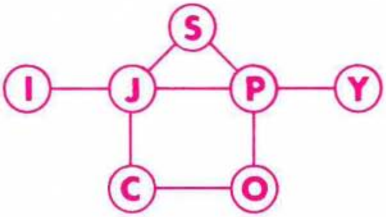
Igra je sestavljena iz sedmih likov in igralnega polja. Liki predstavljajo vse možne kombinacije povezav štirih pravilnih šestkotnikov, zato so njihove površine enake. Bralec pa naj ugotovi, ali velja to tudi za njihove obsege (1. naloga). Like poimenujemo z njim podobnimi črkami (glej sliko 1).



Slika 1.

Vsak lik lahko s premikom enega od šestkotnikov na sosednje mesto spremenimo v vsaj enega izmed ostalih. Vse te osnovne pretvorbe med liki so prikazane na sliki 2.

Za zgled vzemimo lik **I**. Iz njega lahko dobimo lik **J** s premikom enega samega šestkotnika, za nastanek likov **S**, **P** ali **C** sta potrebni dve potezi, najbolj pa je lik **I** tuj likoma **O** in **Y**. Za medsebojno pretvorbo potrebujemo v teh primerih kar po tri premike šestkotnikov. Koliko premikov šestkotnikov je potrebno za nastanek lika **Y** iz lika **C** (2. naloga)?



lik	vsi položaji	rešljivi
C	23	19
I	8	5
J	33	17
O	15	14
P	44	31
S	18	17
Y	9	9
skupaj	150	112

Slika 2. **Tabela 1.**

Igralno polje je sestavljeno iz devetindvajsetih pravilnih šestkotnikov in ima eno od oblik, pri katerih je obseg najmanjši. Ko je naloga rešena, to je tedaj, ko je nanj položenih vseh sedem likov, ostane en šestkotnik nepokrit.

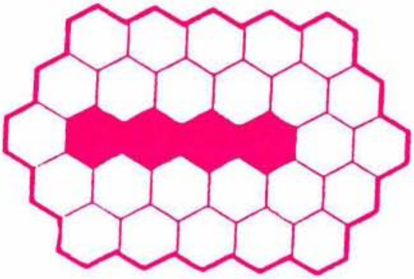
Pri določanju števila rešitev ni šlo brez računalnika, saj je rešitev presenetljivo veliko - kar dvestopetindvajset. Pri tem niso upoštevana zrcaljenja, ki bi to število še povečala. Koliko rešitev bi imela igra, če bi upoštevali tudi vsa zrcaljenja (3. naloga)?

Vsak lik lahko položimo na igralno polje v različnih položajih. Najmanj množnosti imamo pri liku **I**, največ pa pri liku **P**. Prvega lahko položimo na igralno polje v osmih različnih legah, drugega pa kar v štiriinštiridesetih. Vendar moramo upoštevati, da nekateri položaji rešitve onemogočajo. Teh je približno četrtina.

Število možnih položajev posameznih likov prikazuje tabela 1.

Ta števila kažejo, da nudi igra igralcu številne možnosti in kombinacije, pa tudi mnogo zank in stranpoti. Zahteva namreč geometrijsko predstavo in spomin, pa tudi zbranost ter vztrajnost. Poglejmo si nekaj nalog.

Pri prvem tipu nalog je lega enega lika določena vnaprej, igralec mora vstaviti preostalih šest. Tovrstnih nalog je sto dvanajst in imajo različno število rešitev: od ene do dvesto trinajst. Na sliki 3 je prikazana naloga, ki ima šest rešitev. Bralec naj poskuša najti vsaj eno od njih (4. naloga).

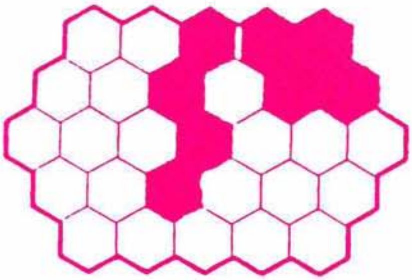


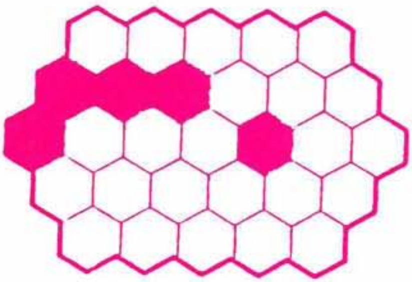
Slika 3.

Slika 4.

Težji so problemi, pri katerih je vnaprej določen šestkotnik, ki mora ostati nepokrit. Naloga je rešljiva za katerikoli šestkotnik na igralnem polju. Na sliki 4 je prikazana naloga z enajstimi rešitvami. Poskušajte najti vsaj eno (5. naloga).

Spet drugačni so problemi, kjer sta vnaprej določeni legi dveh likov ali lega enega lika in šestkotnik, ki mora ostati nepokrit. Tovrstnih nalog je veliko, saj vsebuje vsaka rešitev enaindvajset različnih parov likov in še sedem parov nepokritega šestkotnika ter enega lika. Primera takih nalog sta podana na slikah 5 in 6 (imata eno oziroma dve rešitvi). Bralec naj poskusi rešiti še ta dva problema (nalogi 6 in 7).





Slika 5. **Slika 6.**

Od kod igri nenavadno ime **realgar**? Imenuje se po rdečeoranžni rudnini, ki kristalizira v prizmatskih kristalih. Njena posebnost je, da je občutljiva na svetlobo, da na svetlem razpada, da se njene kristalne oblike spreminjajo. V igri realgar pa pri reševanju različnih nalog pod igralčevimi prsti nastajajo in razpadajo različne oblike iz geometrijsko pravilnih likov.

Za konec še vprašanje: Z množico likov **I** lahko popolnoma pokrijemo ravnino. Ali to velja tudi za ostale like (naloga 8)?

Igro je izdala Državna založba Slovenije. Igralnemu polju z raznobarvnimi ploščicami je priložena tudi knjižica z dvesto petindvajsetimi nalogami in rešitvami. Te so izbrane tako, da prikazujejo vse možne kombinacije ploščic na igralnem polju. Prikazani so tudi vsi nerešljivi problemi.

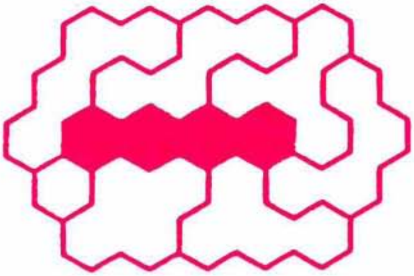
Rešitve nalog:

1. Najmanjši obseg ima lik **O** (14 robov), obseg lika **P** je za dva robova daljši, obsegi ostalih likov pa merijo po 18 robov.

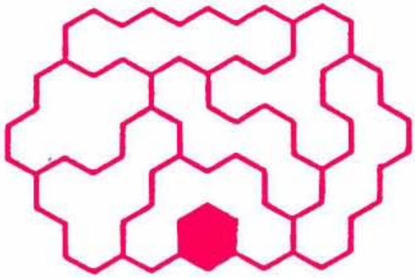
2. Trije premiki.

3. Igralno polje ima dve osi simetrije, torej bi bilo število rešitev štirikrat večje (900).

4. Glej sliko 7.

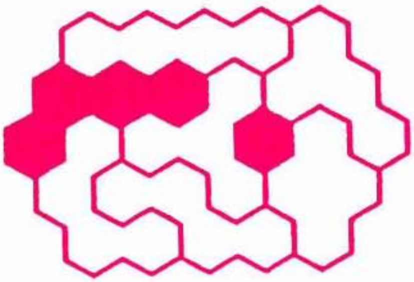


5. Glej sliko 8.



6. Glej sliko 9.

7. Glej sliko 10.



8. Velja.

Primož Pirnat

$\mathbf{tg}\,\frac{\alpha}{2} + \mathbf{tg}\,\frac{\beta}{2} + \mathbf{tg}\,\frac{\gamma}{2} = 2$

Dokaži, da je v trikotniku eden od notranjih kotov α, β, γ top, če velja zveza

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 2.$$

Ivan Vidav

TANGRAM V ČASU IN PROSTORU

V uvodu k neki zbirki kitajskih ugank in miselnih iger iz začetka prejšnjega stoletja je zapisano med drugim tudi tole: *"O izvoru in o starosti tangrama, ki mu na Kitajskem pravimo tudi 'ch'i ch'ae pan' ali 'sedem ploščic spretnosti', ni žal ničesar znanega. Prav tako nam ostaja neznan tudi avtor te igre."*

In pri tem je ostalo vse do današnjega dne. Začetki tangrama, te zanimive kitajske igre, so namreč še zmeraj zaviti v meglo. Bržkone bodo ostali za vedno nepojasnjeni.

Ena izmed redkih, vsaj do neke mere oprijemljivih metod, ki se nam ponuja v pomoč pri raziskovanju izvora te igre, je etimologija - veda o izvoru besed.

Etimološko lahko sklepamo takole: beseda *ch'i ch'ae* izvira iz obdobja vladavine kitajske dinastije Chou (beri: Ču) (730 - 330 pr.n.št.). Pomeni običaj vdevanja niti skozi šivanko s sedmimi ušesi na sedmi dan sedmega meseca v letu. Kdor pri tem **uspe**, ta bo srečen v prihodnosti, so verjeli Kitajci.

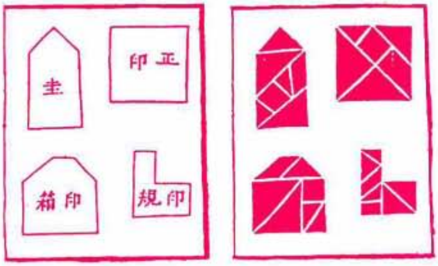
Američan **Peter Van Note** vidi vso reč raje v nekoliko bolj žgečkljivi optiki. Njegova etimološka razlaga se opira na sinonim besede *tan*. Ta beseda namreč pomeni sicer posamezno tangramsko ploščico, hkrati pa v kitajskem jeziku označuje tudi prostitutke v družinah, ki so nekoč živele v čolnih ob obalah kitajskih rek. Igra tangram naj bi bila v svoji izvirni obliki predvsem v kratkočasje tem dekletom.

Prva ohranjena knjiga, v kateri je omenjen tangram, je bila na Kitajskem natisnjena šele leta 1813 *Ch'i Ch'ao t'u ho-pi* ali *Zbrani primeri sestavljanke iz sedmih delčkov)*. V njenem uvodu pa je omenjena knjiga o tangramu, ki naj bi bila natisnjena še leto dni prej. Skorajda gotovo pa je, da so bile knjige o tangramu pisane že tudi pred tem časom.

Prve kitajske knjige o tangramu so bile praviloma razdeljene na dve poglavji. V prvem delu so bile zastavljene uganke, v drugem pa objavljene njihove rešitve. Običajno je tako še danes. Vendar pa so bili prvotni kitajski tangramski problemi za razliko od današnjih zmeraj opremljeni tudi s pripadajočimi ideogrami. Ti so imeli vlogo nekakšnega komentarja. Takšnim dodatnim komentarjem se na Kitajskem niso odrekali niti ob najbolj abstraktnih likih, ki so imeli na videz morda celo izključno geometrijski pomen (kvadrat, pravokotnik, trikotnik...).

Posebej zanimivi in pomensko večplastni so bili tisti problemi, ki so vsebovali kompozicije dveh ali celo več tangramskih figur (vsaka izmed figur je bila sestavljena seveda še zmeraj iz vseh sedmih tangramskih ploščic). Kakor je to v kitajski kulturi nasploh v navadi, imajo njihove slike poleg razvidnega motiva tudi globji simbolični pomen. To pomeni, da je lahko Evropejec ob reševanju zapletenejših originalnih problemov v veliki meri prikrajšan za lepoto njihove celostne ideje. Prav lahko se mu pripeti, da je morebiti sploh ne razume.

Iz knjige *Zbrani primeri sestavljanke iz sedmih delčkov*

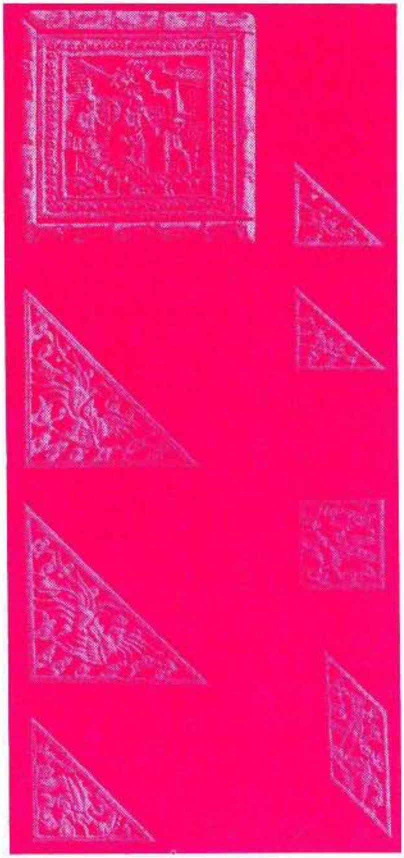


Igra se je s Kitajske nato prav neverjetno hitro razširila tudi na Zahod. Že leta 1815 so jo z opaznim navdušenjem igrali v Angliji, Nemčiji, Franciji, Italiji, Avstraliji in v Ameriki.

Seveda so bile prve zahodnjaške knjige o tangramu v precejšnji meri le kopije originalnih kitajskih. Nekatere so šle v tem svojem navdušenju celo tako daleč, da so prevzele tudi vse napake iz kitajskih originalov.

V začetku so se pionirski reševalci tangramskih problemov v Evropi ukvarjali z njimi več ali manj le tako, da so občudovali zbirke prav neverjetnih in nadvse domiselnih podob v knjigah. In, verjemite, zares so imeli kaj videti! Tangramski problemi v neki francoski knjigi iz leta 1820 so izgledali tako, kot jih lahko vidite na spodnji strani prejšnje strani.

To, da so izrisali tudi notranjost tangramskega lika, je povsem originalna evropska domislica in kaže pač na okus reševalcev pa tudi sestavljalcev tangramskih problemov tedanjega časa.



Leta 1903 je **Sam Loyd**, znameniti ameriški publicist in sestavljalec problemov s področja rekreacijske matematike, s svojo knjigo *Osma Tanova knjiga* posegel tudi na področje tangrama.

V njej je objavil celo vrsto nadvse duhovitih originalnih tangramskih likov. Dodal pa je zgodbo, po kateri naj bi bila igra tangram stara vsaj 4000 let. Ker je bil Loyd izjemna in v zgodovini najbrž tudi neponovljiva avtoriteta na svojem področju, so bralci takrat zlahka verjeli tej njegovi šali, ki si jo je notorično hudomušni avtor privoščil na njihov račun.

Po Loydu bi naj legendarni in napol božanski kitajski pisec **Tan** pred 4000 leti napisal sedem knjig o tangramu. V njih naj bi popisal vse, kar je o tej igri sploh mogoče povedati. In šele s tem podatkom Loydova šala zares pridobi na teži! Kajti s svojo "osmo knjigo" naj bi se potemtakem Loyd postavil prav ob bok legendarnemu Kitajcu Tanu.

Loydova šala se je seveda obdržala le toliko časa, dokler ni po objavi njegove knjige prišla iz Kitajske vest, da tam pač nihče ne pozna nikakršnega "legendarnega" pisca Tana.

S tangramom so se aktivno ukvarjale tudi nekatere znamenite osebnosti. Tako lahko na zgornji sliki občudujete komplet tangramskih ploščic ameriškega pisatelja **Edgarja Allana Poea**.

Vilko Domajnko

REŠITVE NALOG

MALA ZBIRKA NALOG LEONARDA FIBONACCIJA - Rešitve iz P XVIII/5, str. 290

Oglejmo si najprej rešitve vseh dvanajstih nalog:

1. 36 ljudi bi za sajenje dreves potrebovalo $\frac{4400 \cdot 30}{1000 \cdot 4} = 33$ dni.

2. Iskani števili sta 0 in $\frac{19}{20}$.

3. Po enem letu dobimo 144 parov zajcev.

4. Možakar je v sadovnjaku nabral 382 jabolk.

5. Po sto letih bo vloga varčevalca narastla na kar 1048576 denarjev.

6. Mož je razdelil 36 zlatnikov med svojih 6 sinov.

7. Vzeti je treba uteži po 1, 2, 4, 8 in 16 (ali pa tudi 15) kilogramov. Zelo zanimiv je odmev na to nalogo, ki je bil objavljen v lanski 6. številki Preseka na strani 331.

8. Mož je kupil 9 vrabcev, 10 divjih golobov in 11 domačih golobov.

9. Besedilo omenja enačbo $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$, ki je v tako zapisani obliki zares ni več težko preveriti.

10. Iskani ulomek je $\frac{41}{12}$.

11. Recimo, da je pri sporu prvi nagrabil x, drugi y, tretji pa z denarja. Glede na njihove deleže je torej treba razrešiti nedoločeni sistem enačb

$$
\begin{aligned}
18u &= 24x + 4y + 2z \\
18u &= 9x + 42y + 3z \\
18u &= 18x + 12y + 96z .
\end{aligned}
$$

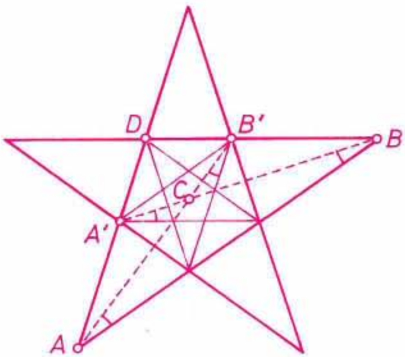
Pri tem je u začetna količina denarja. Rešitve so: $x = \frac{33}{47}u, y = \frac{13}{47}u, z = \frac{1}{47}u$. Deleži so celoštevilski, če je $u = 282k$, kjer je k naravno število. Pri tem smo že upoštevali, da mora biti število u deljivo s 6. Za $k = 1$ so torej ti deleži $141, 94$ in 47 (recimo da zlatnikov).

12. Z uporabo ustrezne numerične metode (priporočamo tangentno metodo) dobimo rešitev $x = 1,3688081078213726\ldots$

Odločili smo se, da knjižni nagradi podelimo *Alenki Planinc* iz Kozjega in *Nataši Hočevar* iz Velenja. Prva je izredno lepo rešila prav vse naloge, druga pa je bila najuspešnejša v "svoji kategoriji" osnovnošolcev. Čestitamo.

Vilko Domajnko

Z GEOMETRIJSKIM ZAPOREDJEM OD ATOMA DO GALAKSIJE — Rešitev s str. 60



Zaporedje polmerov zvezd bomo označevali takole

$$\ldots r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$$

Pri tem absolutna vrednost indeksa označuje število vrisovanj, če je indeks negativen, če je pozitiven pa število vgnezdenj. Na sliki je $\overline{AC} = r_0$ in $\overline{A'C} = r_{-1}$. Dolžino daljice $\overline{AB}$ označimo z a_0, dolžino $\overline{A'B'}$ pa z a_{-1}. Potem, ko določimo kote v zvezdi, vidimo, da sta si triktonika ABC in $B'A'C$ zaradi paroma skladnih kotov podobna, in lahko zapišemo

$$\frac{r_0}{r_{-1}} = \frac{a_0}{a_{-1}}$$

Zaradi podobnosti trikotnikov ABD in $A'B'D$ ter enakosti $\overline{A'B'} = \overline{AA'}$ pa velja

$$\frac{a_0}{a_{-1}} = \frac{a_0 - a_{-1}}{a_0 - 2a_{-1}}$$

Od tod dobimo za količnik $k = \frac{a_0}{a_{-1}} > 1$ enačbo $k^2 - 3k + 1 = 0$, iz nje pa njegovo vrednost $k = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Velikosti polmerov zvezd rastejo v geometrijskem zaporedju in velja

$$r_l = r_m \cdot k^{l-m}; l, m \in Z$$

Za odgovor na prvi del vprašanja moramo sedaj poiskati najmanjši n, za katerega velja $\frac{r_0}{k^n} \leq r_{atom}$, za drugi del vprašanja pa najmanjši N, za katerega velja $r_0 k^N \geq r_{galaksija}$. Števili lahko določimo korakoma, z zaporednim potenciranjem količnika k s pomočjo kalkulatorja, kdor pa je seznanjen z logaritmi, mu to sploh ne bo delalo težav

$$n \geq \frac{\log r_0 - \log r_{atom}}{\log k}$$

$$N \geq \frac{\log r_{galaksija} - \log r_0}{\log k}$$

In še rezultat: $n \geq 20$, $N \geq 55$.

Ciril Pezdir

TEST ZA DVOJČKE – Rešitev s str. 7

Najprej naj bo število $n > 2$ liho, torej oblike $n = 2k + 1$, $k \in \mathcal{N}$. Seveda tedaj števili $n - 1$ in $n + 1$ nista obe hkrati praštevili, saj sta sodi in različni. Dokažimo, da za noben $k \in \mathcal{N}$ število

$$2[2(2k-1)! + k + 2] = 4(n-2)! + n + 3$$

ni deljivo s $4k(k+1) = n^2 - 1$, in kriterij bo potrjen za lihe $n > 2$.

Denimo, da velja $2k(k+1) \mid 2(2k-1)! + k + 2$. Potem k deli $2(2k - 1)! + 2$, zaradi $k \mid (2k-1)!$ pa tedaj $k \mid 2$. Treba je le še preveriti, da trditev drži za $k = 1$ in $k = 2$, kar pa prepustimo bralcu.

Naj bo zdaj število $n > 2$ sodo. Po Wilsonovem izreku je $n-1$ praštevilo natanko takrat, kadar $n - 1$ deli $(n-2)! + 1$. Upoštevajmo, da velja

$$4(n-2)! + n + 3 = 4[(n-2)! + 1] + n - 1$$

in da je $n-1$ lih, pa vidimo, da je $n-1$ praštevilo natanko takrat, kadar deli $4(n-2)! + n + 3$.

Spet uporabimo Wilsonov izrek. Število $n + 1$ je praštevilo natanko takrat, kadar $n+1$ deli $n! + 1$, torej zaradi lihosti števila $n+1$ točno takrat, ko je

$$n+1 \mid 4(n!+1) + (n+1)(n^2+n-4) = (n-1)n[4(n-2)! + n + 3]$$

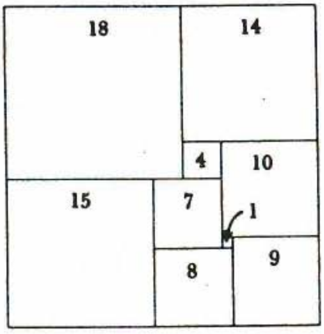
Ker so števila $n-1$, n in $n+1$ paroma tuja, je ta pogoj enakovreden pogoju $(n+1) \mid 4(n-2)! + n + 3$.

Torej sta $n-1$ in $n+1$ hkrati praštevili tedaj in le tedaj, kadar $n^2 - 1$ deli $4(n-2)! + n + 3$, dokaz pa je s tem končan.

Boris Lavrič

TANGRAM – Rešitev s str. 63

ROČNA SPRETNOST IN ŠE KAJ – Rešitev s str. 49



ZELO STROKOVNA KRIŽANKA – Rešitev s str. 31

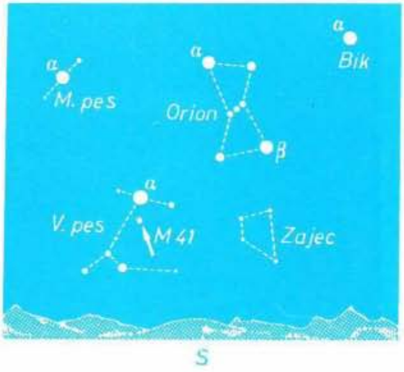
Vilko Domajnko

KAKO VELIKA JE BETELGEZA

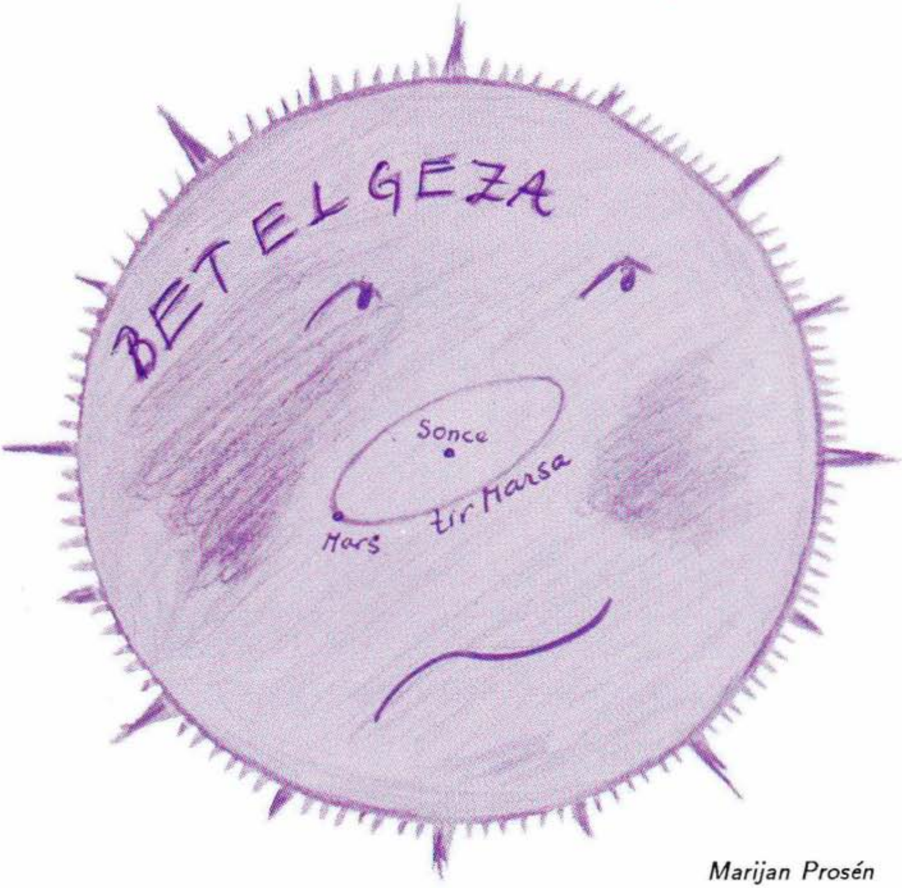
Meritve z zvezdnim interferometrom na gori Wilson (glej prispevek na str. 14 v prejšnji številki Preseka) so pokazale, da je zvezda Betelgeza (α Oriona) strahotno velika, to je kar okoli 1000-krat večja od Sonca.

Betelgeza pripada posebni skupini zvezd - *nadorjakinjam*. Če bi postavili Sonce v središče te zvezde, bi planet Mars z lahkoto krožil v njeni notranjosti.

Slika 1. Lega zvezde Betelgeze (α) v ozvezdju Oriona.

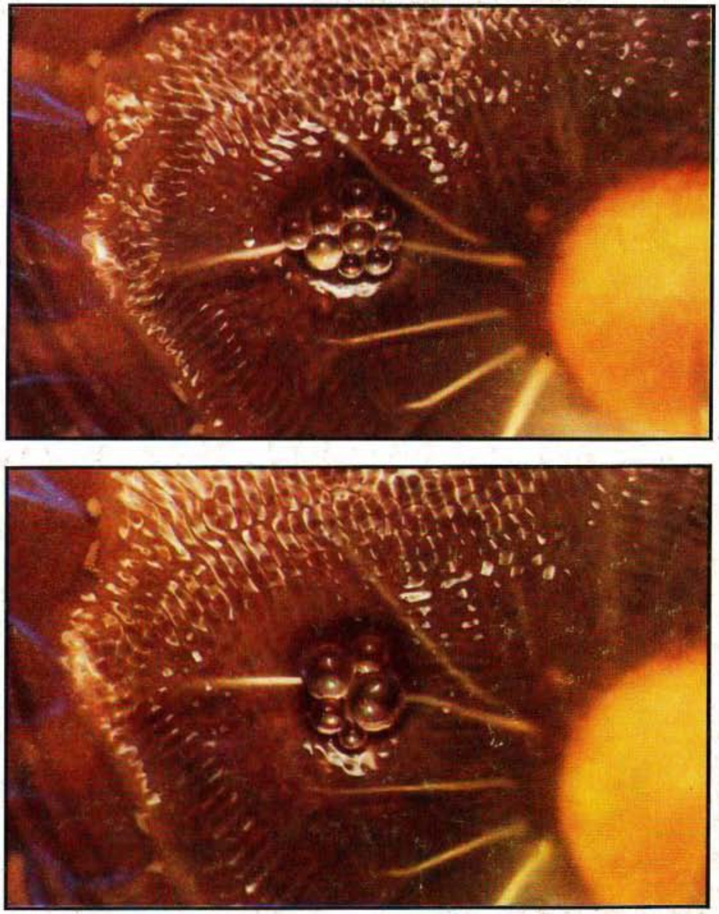


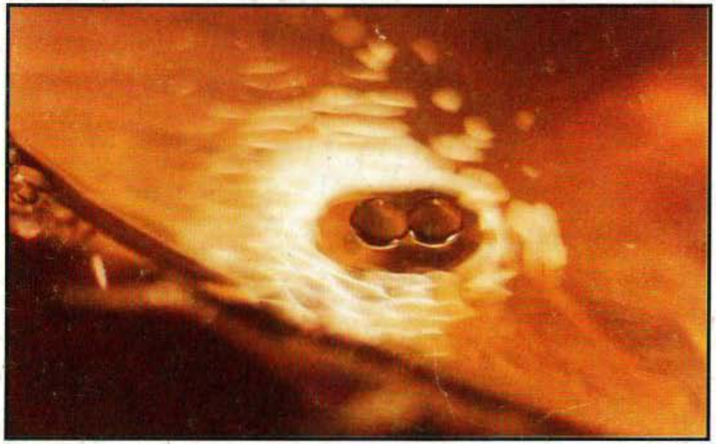
Slika 2.



Marijan Prosén

Slika 1. Večja amplituda stoječih valov podaljša življenje gruče. (levo)
Slika 2. Gruča devetih kapljic (a), ki se čez čas zlijejo v večje kapljice (b).





Slika 3. Dve enako veliki kapljici, sprijeti v gručo.