

Ročno korenjenje

↓↓↓

VID KAVČIČ

→ Danes v šoli kvadratne korene števil večinoma računamo s pomočjo žepnih računal, včasih pa so se že v osnovni šoli učili določiti kvadratni koren ročno po posebnem postopku, ki ga lahko najdemo v starih učbenikih, uporabljal pa ga je tudi tudi Napierov mehanski računski stroj v 17. stoletju. V članku bomo ta postopek predstavili in utemeljili, hkrati pa bomo nakazali njegove posplošitve in ga primerjali z drugimi metodami za korenjenje.

Predstavitev algoritma za računanje kvadratnega korena

Algoritem za ročno korenjenje bomo najprej prikazali na konkretnem primeru števila 189225.

- Številko razdelimo na tri razdelke po dve števki: 18|92|25. Najprej določimo največje naravno število, katerega kvadrat je manjši ali enak najbolj levemu razdelku. To je jasno število 4, saj je $4^2 \leq 18$. Desno od enačaja zapišemo 4, pod prvi razdelek pa vrednost $4^2 = 16$, ki jo odštejemo in pod črto zapišemo ostanek 2, ki mu pripišemo naslednji razdelek.

$$\sqrt{18|92|25} = 4$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 2 \ 92 \end{array}$$

- Dobljeno število je 292, dvakratnik dosedanjega rezultata pa $2 \cdot 4 = 8$. Zdaj s poskušanjem določimo največjo števko, ki jo lahko zapišemo na črtici, da velja neenakost $292 \geq 8 \cdot \underline{\quad}$. Z nekaj računanja ugotovimo, da je $292 \geq 83 \cdot 3 = 249$ in $292 < 84 \cdot 4 = 336$, torej je iskana števka 3, ki jo napišemo na črtici in še pri novem vmesnem rezultatu 43. Vrednost 249 odštejemo od 292 in dobljenemu ostanku 43 pripišemo naslednji raz-

delek 25, da dobimo 4325.

$$\sqrt{18|92|25} = 43$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 2 \ 92 \geq 83 \cdot 3 \\ 2 \ 49 \\ 43 \ 25 \end{array}$$

- Zdaj ponovimo prejšnji korak. Dvakratnik dosedanjega rezultata je $2 \cdot 43 = 86$. Na črtici zapišemo največjo števko, za katero velja $4325 \geq 86 \cdot \underline{\quad}$. Tokrat je to števka 5, saj je $865 \cdot 5 = 4325 \leq 4325$. Števko 5 dodamo tudi v vmesni rezultat, da dobimo 435. Ker velja $865 \cdot 5 = 4325$, dobimo pri odštevanju ostanek 0, kar pomeni, da smo s korenjenjem zaključili. Končni rezultat je torej 435.

$$\sqrt{18|92|25} = 435$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 2 \ 92 \geq 83 \cdot 3 \\ 2 \ 49 \\ 43 \ 25 \geq 865 \cdot 5 \\ 43 \ 25 \\ 0 \end{array}$$

Kvadratni koren decimalnega števila določimo podobno, le z nekaj izjemami. Korenjenec razdelimo na razdelke po dve števki od decimalne vejice proti levi in proti desni. Preden obravnavamo prvi razdelek desno od vejice, v rezultat za enačaj postavimo decimalno vejico. Če ima razdelek na skrajni desni le eno števko, mu pripišemo še števko 0. Poglejmo si ta postopek na primeru števila 1,5129.

$$\sqrt{1,51|29} = 1,23$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \ 51 \geq 22 \cdot 2 \\ 44 \\ 7 \ 29 \geq 243 \cdot 3 \\ 7 \ 29 \\ 0 \end{array}$$

Ker smo dobili ostanek 0, je algoritem končan. Iskani rezultat je 1,23, kar je natanko kvadratni koren števila 1,5129.

Postopek lahko strnjeno predstavimo s koraki:





- Število razdelimo na razdelke po dve števki, od decimalne vejice levo in desno. Najbolj levi razdelek je v primeru lihega števila števk enomesten. Če je potrebno, decimalna števila z ničlo dopolnimo tako, da ima sodo decimalalk.
- Poiščemo največje enomestno število, katerega kvadrat je manjši ali enak številu v prvem razdelku. To je prva števka korena. Njen kvadrat odštejemo od števila v prvem razdelku ter ostanku pripišemo drugi razdelek. Dobljenemu številu bomo rekli zahtevek.
- Poiščemo največjo tako števko, ki je lahko dopisana dvakratniku dosedanjega rezultata, da bo dobljeno število, pomnoženo s to isto števko, manjše ali enako zahtevku. Dobljeno števko zapišemo za enačaj kot drugo števko rezultata. To števko pomnožimo s številom, ki ima to isto števko pripisano, dobljeni rezultat pa odštejemo od zahtevka in dobimo nov ostanek.
- Novemu ostanku pripišemo števki v naslednjem razdelku in postopek nadaljujemo.
- Če porabimo vse razdelke in v zadnjem koraku dobimo ostanek 0, smo izračunali točno vrednost korena začetnega števila. V nasprotnem primeru pa lahko postopek nadaljujemo do zelene natančnosti, tako da zadnjemu ostanku in vsem naslednjim pripisujemo po dve ničli, ki nam določata dodatno mesto v rezultatu.

Utemeljitev algoritma

Za utemeljitev algoritma definirajmo posplošeni desetiški sestav. Vsako naravno število $N \in \mathbb{N}$ lahko v *posplošenem desetiškem sestavu* izrazimo kot

$$\begin{aligned} N &= \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} \\ &= 10^{n-1} \cdot a_1 + 10^{n-2} \cdot a_2 + \dots + 10^1 \cdot a_{n-1} + \\ &\quad 10^0 \cdot a_n, \end{aligned}$$

kjer velja $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Posplošeni desetiški sestav se torej od običajnega razlikuje v tem, da lahko za števke vzamemo poljubna naravna števila (vključno z 0), ne pa le cela števila od 0 do 9. Seveda tak sestav ne omogoča enoličnega zapisa števila, vendar ga bomo pri samem dokazu potrebovali.

Poskusimo algoritem najprej utemeljiti na primeru korenjenja kvadrata dvomestnega naravne-

ga števila $\overline{x_1 x_2}$:

$$\begin{aligned} (\overline{x_1 x_2})^2 &= (10x_1 + x_2)^2 = 100x_1^2 + 20x_1x_2 + x_2^2, \\ &= 100x_1^2 + x_2 \cdot (20x_1 + x_2), \\ &= 100x_1^2 + x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2}. \end{aligned}$$

Zadnji izraz razjasni algoritem, ki v tem primeru sestoji iz dveh faz. V prvi fazi je treba poiskati enolično določeno števko x_1 , ki predstavlja desetice rezultata korena. Nadalje je treba določiti enice, tj. števko x_2 , ki nastopa v drugem členu izraza, s katerim smo zapisali korenjenec, torej v $x_2 \cdot (20x_1 + x_2) = x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2}$. Zapis desno od enačaja utemeljuje postopanje iz algoritma; to, kar imamo v dozdajšnjem rezultatu (v tem primeru je to x_1), množimo z 2, potem pa iščemo tako števko x_2 , ki jo moramo dopisati števki $2x_1$, da bo dobljeno število, pomnoženo s to isto števko x_2 , dalo število, ki bo zajelo ostanek, ki ga nismo zajeli s prvim členom, tj. $100x_1^2$.

Utemeljitev algoritma zdaj posplošimo na korenjenje kvadrata n -mestnega števila. V tem primeru se bomo sklicali na naslednjo enakost, ki velja za poljubna realna števila in jo lahko bralci preverijo s pomočjo matematične indukcije:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n 2x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j. \end{aligned}$$

S pomočjo zgornje enakosti lahko kvadrat poljubnega naravnega števila preoblikujemo v naslednji zapis.

Izrek 1. (Enakost za ročno korenjenje) Naj bo $\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n}$ poljubno naravno število, zapisano s števki v desetiškem sestavu, kjer velja $x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ in $x_1 \neq 0$. Potem velja

$$\begin{aligned} (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n})^2 &= \\ &= 10^{2n-2} x_1^2 + 10^{2n-4} x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2} + 10^{2n-6} x_3 \cdot \\ &\quad \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2})) x_3} + \dots + \\ &\quad + x_n \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1}})) x_n}. \end{aligned}$$

Dokaz. Levo stran izraza najprej preoblikujemo s pomočjo prejšnje enakosti:

$$\begin{aligned} & \cdot (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n})^2 \\ &= (10^{n-1} \cdot x_1 + 10^{n-2} \cdot x_2 + \dots + 10^1 \cdot x_{n-1} + x_n)^2 \\ &= 10^{2n-2} \cdot x_1^2 + 10^{2n-4} \cdot x_2^2 + \dots + 10^2 \cdot x_{n-1}^2 + \\ & \quad + x_n^2 + 2 \cdot 10^{2n-3} x_1 x_2 + 2 \cdot 10^{2n-4} x_1 x_3 + \dots + \\ & \quad + 2 \cdot 10^{n-1} x_1 x_n + 2 \cdot 10^{2n-5} x_2 x_3 + \\ & \quad + 2 \cdot 10^{2n-6} x_2 x_4 + \dots \\ & \quad + 2 \cdot 10^{n-2} x_2 x_n + \dots + 2 \cdot 10^1 x_{n-1} x_n \end{aligned}$$

Sedaj moramo spretno združevati in izpostavljati. Člene združujemo tako, da izpostavimo enako desetiško potenco. Poleg tega v i -tem koraku združimo člene, ki vsebujejo $x_1, x_2, \dots, x_i$. Na ta način dobimo desno stran izraza, kot smo želeli.

$$\begin{aligned} & \cdot = 10^{2n-2} x_1^2 + 10^{2n-4} x_2 \cdot (20x_1 + x_2) + \\ & \quad + 10^{2n-6} x_3 \cdot (200x_1 + 20x_2 + x_3) + \dots + \\ & \quad + x_n \cdot (2 \cdot 10^{n-1} x_1 + 2 \cdot 10^{n-2} x_2 + \dots + \\ & \quad + 2 \cdot 10 \cdot x_{n-1} + x_n) \\ &= 10^{2n-2} x_1^2 + 10^{2n-4} x_2 \cdot \overline{(2x_1) x_2} + 10^{2n-6} x_3 \cdot \\ & \quad \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2})) x_3} + \dots + x_n \cdot \\ & \quad \cdot \overline{(2 \cdot (\overline{x_1 x_2 \dots x_{n-1}})) x_n}. \end{aligned}$$

Iz dokazane trditve zdaj neposredno sledi pravilnost algoritma za korenjenje naravnih števil, ki so popolni kvadrati. Ta algoritem lahko posplošimo na algoritem za korenjenje realnih števil, katerih koren ima končen decimalni zapis. Tako decimalno število D pomnožimo z desetiško potenco 10^{2k} za dovolj velik $k \in \mathbb{N}$, da dobimo naravno število N , ki ga že znamo koreniti. Da dobimo koren prvotnega decimalnega števila, torej $\sqrt{D}$, moramo $\sqrt{N}$ le še deliti z 10^k . S tem smo utemeljili postopek za korenjenje decimalnih števil, opisan na začetku članka.

Pozorni bralec je seveda opazil, da s tem nismo utemeljili njegove pravilnosti tudi za iskanje približkov kvadratnih korenov tistih števil, katerih koreni nimajo končnega decimalnega zapisa.

Kot zanimivost povejmo, da lahko na podoben način izpeljemo tudi algoritem za kubične ali višje korene. Postopek za kubični koren je denimo predstavljen tudi v Močnikovih učbenikih, algoritmi za ko-

rene višjih stopenj pa so za praktično rabo prezahtevni.

Zaključek

Poleg opisanega algoritma obstaja še precej drugih metod za računanje (približkov) korenov števil. V dobi brez žepnih računal so imele veliko vlogo (Vegove) *logaritemske tablice*. Z njimi si lahko pomagamo tudi pri iskanju približka n -tega korena danega števila s pomočjo obrazca $\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n} \ln a}$, pri čemer vrednost $\ln a$ razberemo iz logaritemskih tabel.

Poleg metode z *neskončnimi verižnimi ulomki* in *Taylorjevega razvoja* je zanimiva tudi *Newtonova numerična metoda*. Slednja sloni na iskanju ničel funkcije in temelji na odvodih, torej vsebini iz višje matematike. Če iščemo ničle funkcije $f(x) = x^2 - a$, v resnici korenimo število a . Ta primer Newtonove numerične metode se imenuje Babilonska metoda, tudi Heronova metoda, saj jo je grški matematik Heron v svojem delu *Metrika* objavil že v prvem stoletju našega štetja.

Pri metodi najprej ugibamo vrednost korena x_0 . Natančnejšo vrednost korena dobimo iz izraza:

$$\cdot x_{i+1} \equiv \frac{\frac{a}{x_i} + x_i}{2}.$$

Dobljen približek nato ponovno vstavimo v zgornjo enačbo, da dobimo še boljšega, in tako naprej do iskane natančnosti.

Zgoraj navedene metode korenjenja so bodisi matematično zahtevnejše, saj temeljijo na vsebinah iz višje matematike (neskončne vrste, limite, odvodi), bodisi podajo zgolj približek. Algoritem, obravnavan v članku, pa operacijo korenjenja zreducira na osnovni operaciji množenja in odštevanja, hkrati pa je vsaka številka, ki jo na podlagi algoritma dobimo, točna. Zavedati pa se moramo, da je algoritem v primerjavi z npr. Taylorjevim razvojem ali numeričnimi metodami počasnejši, zato sta slednji ustreznejši za sodobna računalna.

Naj zaključim, da je prispevek nastal na osnovi raziskovalne naloge z naslovom *Ročno korenjenje*, ki sem jo v šolskem letu 2019/20 napisal pod mentorstvom mojega nekdanjega profesorja matematike Tilna Šetine, ki je s svojimi nasveti in predlogi pripomogel tudi pri nastajanju tega članka.





Naloge bralcu

1. Ročno koreni:

(a) $\sqrt{2989441}$

(b) $\sqrt{9,8596}$

(c) $\sqrt[8]{5764801}$

2. Poišči prvih 5 decimalnih mest $\sqrt{2}$.

3. Dana števila zapiši v običajnem desetiškem stavu.

(a) $\overline{1(23)4(56)7(89)}$

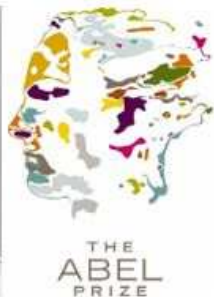
(b) $\overline{(123)(45)(6789)}$

(c) $\overline{(12)345(67)89}$

Literatura

- [1] »Ručno« izračunavanje kvadratnog korena, dostopno na <http://forum.matemacija.com/viewtopic.php?f=46&t=317>, ogled 19. 5. 2023.
- [2] *Methods of computing square roots*, dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots, ogled 19. 5. 2023.
- [3] F. Močnik, *Aritmetika za učiteljska*, Kleinmayr & Bamberg, Ljubljana, 1885.

× × ×



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

× × ×

EDMO 2023

↓↓↓

ANA META DOLINAR IN LUKA HORJAK

→ V Portorožu je od 13. do 19. aprila 2023 potekala 12. Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO). Na tekmovanju je sodelovalo 213 tekmovalk iz 54 držav (do 4 najboljša srednješolska dekleta iz vsake države). Vključno z vodji ekip, koordinatorji (ocenjevalci), prostovoljci, organizatorji ipd. je bilo udeležencev dogodka 504. To je bil največji tovrstni dogodek v Sloveniji od leta 2006 naprej, ko smo v naši državi gostili Mednarodno matematično olimpijado.

Organizacija, potek

Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO) je namenjena spodbudi deklet k pripravi in udeležbi na matematičnih tekmovanjih, saj je razmerje spolov na drugih tekmovanjih zelo neuravnoteženo – deklet je na olimpijadah, kot je Mednarodna matematična olimpijada, le okoli 10 %. EDMO dekletom da motivacijo za pripravo na tekmovanja na višji ravni ter služi kot dogodek, kjer si lahko dokažejo, da so sposobne reševanja olimpijskih nalog. Poleg tega olimpijada tudi pripomore k ustvarjanju prijateljstev med dekleti s podobnimi interesi, kar dekletom, ki na svoji šoli med ljubitelji matematike morda vidijo le fante, pokaže, da niso edine s tem hobijem. Poleg tega pa lahko na EDMO dekleta spoznajo tudi uspešne matematičarke, ki jim lahko služijo kot vzornice.

Slovenija na EDMO sodeluje vsako leto od leta 2013. V teh letih je Slovenijo zastopalo 28 deklet, nekatera celo trikrat ali štirikrat.

Letos je EDMO organizirala Slovenija pod okriljem DMFA Slovenije.