

izvirni znanstveni članek
prejeto: 2003-11-14

UDK 711.1:519.17

UPORABNOST TEORIJE GRAFOV KOT METODOLOŠKEGA ORODJA PRI UREJANJU PROSTORA

Manca PLAZAR MLAKAR

Univerza na Primorskem, Znanstveno-raziskovalno središče Koper, SI-6000 Koper, Garibaldijeva 1
e-mail: manca.plazar@zrs-kp.si

IZVLEČEK

Teorija grafov, ki sodi v področje diskretne matematike, omogoča preprosto reševanje nekaterih problemov, ki jih lahko prikažemo kot množico objektov in njihovih medsebojnih povezav. Uporabna je tudi kot metodološko orodje pri urejanju prostora. Avtorica z opisno metodo (študijo primerov) prikaže dva primera uporabe teorije grafov pri krajinskem in prostorskem planiranju: pri načrtovanju poti v krajinskem parku in pri urejanju povezav in porazdelitvi dejavnosti v regionalnem omrežju naselij. V zaključku avtorica strne ugotovitve o prednostih in slabostih uporabe teorije grafov pri urejanju prostora: poglobitvi prednosti metode sta natančnost in preprostost pri reševanju problemov, poglobitva slabost pa poenostavitev problema v procesu matematičnega modeliranja.

Ključne besede: teorija grafov, metodološko orodje, prostorsko planiranje, krajinsko planiranje

L'UTILITÀ DELLA TEORIA DEI GRAFICI COME STRUMENTO METODOLOGICO PER LA SISTEMAZIONE DEL TERRITORIO

SINTESI

La teoria dei grafici che è inclusa nell'ambito della matematica discreta, permette la soluzione di alcuni problemi, che possono essere presentati come un insieme di oggetti e di loro collegamenti reciproci. Viene usata anche come strumento metodologico per quanto riguarda la sistemazione dell'ambiente. L'autrice applicando il metodo descrittivo (lo studio degli esempi) mostra due esempi di uso della teoria dei grafici per quanto concerne la pianificazione paesaggistica e del territorio: la pianificazione del sentiero nel parco regionale e la sistemazione dei collegamenti; la distribuzione delle attività nella rete regionale ed urbana. Nella conclusione l'autrice riassume i vantaggi e gli svantaggi che derivano dall'uso della teoria dei grafici riguardo alla sistemazione del territorio: I vantaggi essenziali del metodo sono la precisione e la semplicità nel risolvere i problemi, il difetto essenziale consiste nella semplificazione del problema nel processo del modello matematico.

Parole chiave: teoria dei grafici, strumenti metodologici, pianificazione del territorio, pianificazione paesaggistica

1. PREDSTAVITEV PROBLEMA

Pri prostorskem, krajinskem ali urbanističnem planiranju pogosto srečujemo naloge, ki obravnavajo objekte in njihove medsebojne povezave. Pri reševanju problemov, kako najti najkrajšo pot med dvema mestoma v zapletenem omrežju, kako sestaviti obhod naravnega parka, pri katerem se po vsaki od 200 poti sprehodimo samo enkrat, ali kako pobarvati zemljevid s samo nekaj barvami, nam je teorija grafov lahko v veliko pomoč, saj omogoča preprosto reševanje opisanih problemov. Teorija grafov, ki sodi v področje diskretne matematike, se ukvarja z objekti in zvezami med njimi (Wilson, Watkins, 1997).

Uporabna je na številnih področjih, od kemije in lingvistike do operacijskih raziskav in družbenih znanosti (Wilson, Watkins, 1997). Omogoča, da se številni problemi iz različnih znanstvenih področij formulirajo in rešujejo na enoten način. Razširjena je uporaba teorije grafov v elektrotehniki in komunikacijskih omrežjih (Končan, 1998), arhitekturi (Škuc, 1996), kemiji (Bončina, 1999; Perdih, 1993), ekonomiji (Parkin, 2000; Parkin, 2001; Trančar, 2000), pri dodeljevanju frekvenc (Šparl, 2001; Kuonen, 1996), v računalništvu (Jerman-Blažič, 1984).

Na področju elektrotehnike in komunikacijskih omrežij (Končan, 1998) je teorijo grafov mogoče uporabiti pri analizi električnih vezij in pri načrtovanju komunikacijskih omrežij. Teorijo grafov je mogoče uporabiti pri sistematičnem določanju zank. Graf vezja vsebuje vse veje in vsa spojišča v vezju. Pri načrtovanju komunikacijskih omrežij je mogoče uporabiti graf, imenovan "*najcenejše vpeto drevo*", ki ga avtor poišče s postopki *Kruskalov algoritem*, *Primov algoritem* in *Floydov algoritem*.

V arhitekturi (Škuc, 1996) je prikazan primer reševanja konkretnih arhitekturnih problemov s pomočjo teorije grafov. S pomočjo grafov je mogoče usklajevati različne zahteve glede združljivosti posameznih prostorov in na podlagi danih omejitev sestaviti tlorisni načrt. Na primeru danega načrta stavbe in plana medsebojnih delovnih obiskov uslužbencev jih je mogoče s pomočjo teorije grafov razporediti po prostorih tako, da je njihova skupna prehojena pot pri delovnih obiskih čim manjša.

Možnosti uporabe teorije grafov v kemiji so zelo široke (Bončina, 1999). Kemijski sestavi se že tako ali tako prikazujejo z diagrami. Razvoj teh diagramov je tesno povezan z razvojem koncepta valence, ki izhaja iz znanega dejstva o kemijskih ekvivalentih elementov. Vodik ima na primer valenco ena, ogljik valenco štiri. Uporaba istega izraza valenca je rezultat povezanosti med kemijo in teorijo grafov. Teorija grafov je izjemno uporabna tudi pri proučevanju in razlaganju izomerizma (molekul z isto kemijsko formulo in različnimi lastnostmi), pri čemer avtorica prikaže metodo štetja z "*drevesi*". Grafi so bili uporabljeni tudi pri mnogih drugih

kemijskih problemih, kot so: predstavitev policikličnih ogljikovodikov z grafi ogljikovih atomov, ki vsebujejo cikle, uporaba idej iz teorije grafov za poimenovanje molekul in za opis molekul v obliki, primerni za shranjevanje v računalniku – matrika grafa soslednosti ogljikovih atomov, uporaba grafov za zapis kemijskih reakcij, kjer točke ustrezajo molekulam, povezave pa reakcijam med temi molekulami, ter reševanje stereokemijskih problemov.

Pri dodeljevanju frekvenc (Šparl, 2001; Kuonen, 1996) je pomemben optimizacijski problem za načrtovanje celičnega sistema za mobilno telefonijo prireditev frekvenc celicam. Ena pomembnejših nalog pri planiranju celičnih omrežij je dodeljevanje frekvenc oddajnikom brez nedovoljene interference. Celične mreže so običajno predstavljene kot podgrafi neskončne trikotniške mreže. Nalogo porazdeljenega dodeljevanja frekvenc se lahko predstavi kot nalogo večbarvanja uteženih heksagonalnih grafov, kjer vektor uteži predstavlja število klicev, ki naj bodo dodeljeni posameznim točkam.

V računalništvu (Jerman-Blažič, 1984) so prikazane metode za merjenje vzporednosti v računalniških programih, ki za analizo algoritmov uporabljajo programske grafe. Časovne enačbe za vzporedno in zaporedno izvajanje računalniških ukazov so konstruirane za dva modela računalniške arhitekture, krmiljene s pretokom podatkov. Razmerje med enačbami je uporabljeno kot merilo in ocena o obstoječih vzporednostih v računalniškem algoritmu. V kratkem so podane osnovne značilnosti računalnikov, krmiljenih s pretokom podatkov.

Metoda je uporabna tudi pri risanju zemljevidov, reševanju logističnih problemov, problemov razporeditve dejavnosti, distribucije npr. prometa, pri iskanju poti iz labirinta in podobno (Wilson, Watkins, 1997).

Razlog za razširjeno uporabo grafov je nedvomno v njihovi skrajni preprostosti. Graf ali digraf je zelo primeren in naraven način predstavitve informacij o zvezah med objekti – vse, kar je potrebno narediti, je, da se predstavi objekte s točkami, odnose med njimi pa z usmerjenimi (digraf) ali neusmerjenimi (graf) povezavami. Obstaja veliko različnih primerov takih predstavitev (Wilson, Watkins, 1997). V mnogih primerih je slikovna predstavitev vse, kar se potrebuje. Že predstavitev v tako preprosti slikovni obliki je pogosto dovolj, da se dobi vso potrebno informacijo o problemu. Uporaba take predstavitve pomaga poudariti za problem pomembne značilnosti.

Večino problemov, ki se jih lahko rešuje s teorijo grafov, se da opisati na štiri različne načine. Rešuje se lahko eksistenčne probleme (npr.: ali obstaja pot? ali je mogoče podpreti ogrodje?), konstrukcijske probleme (če obstaja, kako se jo da konstruirati?), probleme preštevanja (koliko obstaja in ali jih da prešteti?) in optimizacijske probleme (če jih obstaja več, katera je najboljša?).

K reševanju nalog, ki obravnavajo objekte in njihove medsebojne povezave, se pristopi s pomočjo predlagane

metode. Prvi korak k rešitvi problema je formulacija naloge v takšni obliki, da se jo lahko obravnava s tehnikami teorije grafov. Proces se imenuje matematično modeliranje. Problem se prikaže v obliki točk in njihovih medsebojnih povezav. Ustrezno formulirano nalogo se obravnava s pomočjo teorije grafov.

Uporabnost teorije grafov kot metodološkega orodja pri prostorskem planiranju je prikazana z dvema primeroma: pri načrtovanju krajinskega parka ter pri iskanju najkrajše poti v omrežju naselij. Teorija grafov in sistem matematičnega modeliranja nista podrobno opisana; prikazan je zgolj način njune uporabe v obeh primerih.

2. HIPOTEZA

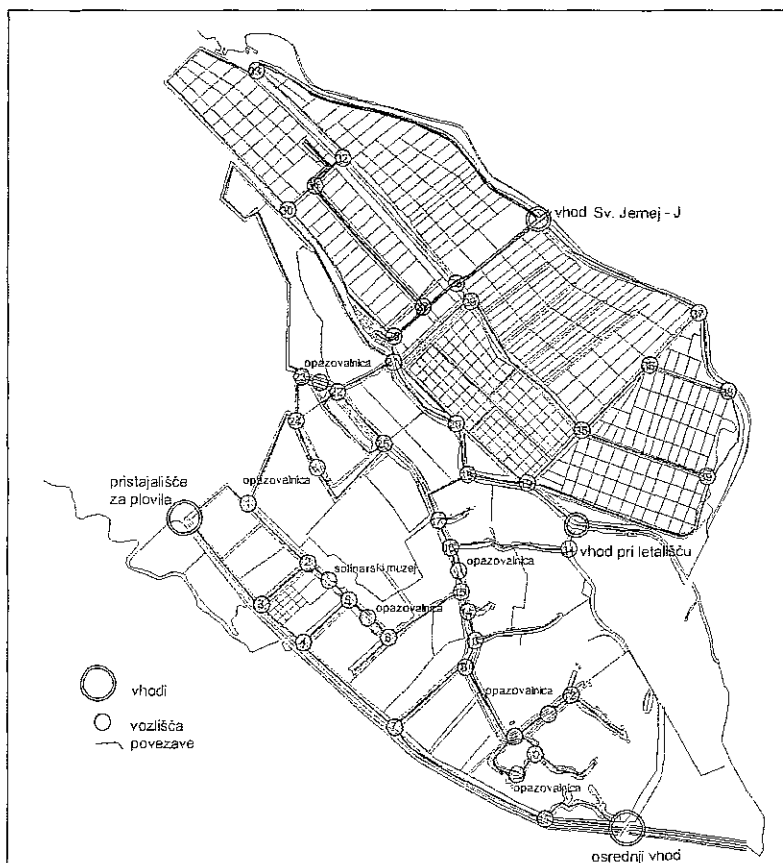
Teorija grafov se zaradi izjemne preprostosti in natančnosti uspešno uporablja na številnih področjih. Teorijo grafov je mogoče uporabiti tudi kot metodološko orodje pri prostorskem planiranju. Primerna je pri obravnavi nalog, ki se ukvarjajo z objekti in povezavami med njimi. Originalni problem se z matematičnim modeliranjem pretvori v obliko, ki se jo lahko obravnava s teorijo grafov. Objekte se predstavi s točkami, odnose med njimi pa z medsebojnimi povezavami.

3. METODA

Uporabnost teorije grafov kot metodološkega orodja pri prostorskem, krajinskem in urbanističnem planiranju je prikazana z dvema primeroma.

Prvi primer predstavlja uporabo teorije grafov pri krajinskem načrtovanju. Uporabnost teorije grafov je prikazana s primerom uporabe pri načrtovanju omrežja poti v krajinskem parku. Iskanje najkrajše poti v omrežju naselij je drugi primer, ki dokazuje uspešnost uporabe predlagane metode.

Primeri sta izbrana tako, da prikažeta čim bolj širok spekter možnosti, ki jih ponuja teorija grafov, in hkrati tako, da z zadostno preprostostjo problema omogočata razumevanje postopkov matematičnega modeliranja (abstrahiranje problema, njegovo pretvorbo v matematični jezik) dejanske problemske situacije in njihovo obravnavo s pomočjo teorije grafov. Vsebinsko sta primera izbrana tako, da vključujeta tako področje krajinskega in urbanističnega načrtovanja kot prostorskega planiranja. Za prikaz uporabnosti teorije grafov bi bilo mogoče izbrati katerikoli drug problem pri urejanju prostora, ki se ga da prikazati s pomočjo točk in njihovih medsebojnih povezav.



Sl. 1: Shema solin z vrisanimi potmi, opazovalnicami, muzejem, vhodi.

Fig. 1: Schema of the salt pans with marked paths, observation points, entrances, and the museum.

4.1.2 Oblikovanje omrežja točk in povezav

Prvi del naloge predstavlja oblikovanje omrežja poti in opazovalnic v krajinskem parku. Vanj vodijo štirje vhodi: osrednji, pri letališču, pri J ter pristajališče za plovila. Poti se lahko spelje le po širokih nasipih in po cesti. Šest zapuščenih solinarskih hiš je mogoče preurediti v opazovalnice. Poti morajo med sabo smiselno povezati vse štiri vhode, solinarski muzej ob kanalu Grassi in vseh šest opazovalnic. Križišča poti se označi z vozliščnimi točkami.

4.1.3 Z matematičnim modeliranjem do prikaza grafa

S pomočjo matematičnega modeliranja se omrežje točk (vhodi, muzej, opazovalnice, vozlišča) in povezav prikaže z grafom. S tem se problem abstrahira do te mere, da se ga lahko obravnava s pomočjo teorije grafov.

Graf G ima 58 točk in 74 povezav. Stopnje točk so prikazane z d.

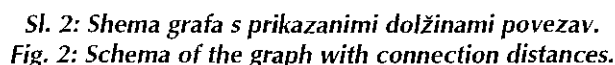
Graf G:

$n = 58$

$$m = 74$$
$$d = (1, 1, \bar{1}, 1, 1, \bar{1}, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \\ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \\ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5).$$

Po lemi o rokoivanju je vsota stopenj točk 148 enaka polovici $m = 74$.

Graf je povezan, saj po definiciji obstaja pot med poljubnima točkama grafa G .



4.1.4 Določitev obhoda solin

Drugi del naloge predstavlja določitev takšnega obhoda solin, pri katerem bi se obiskovalec sprehodil po vsaki od 74 poti samo enkrat. Tak obhod bi omogočil obiskovalcem prijeten, ravno prav dolg sprehod po parku, med katerim bi si lahko ogledali vse znamenitosti.

S pomočjo teorije grafov se lahko preveri, ali je tak obhod sploh mogoče sestaviti.

Imenuje se enostavni obhod. Graf, ki bi ustrezal postavljenim zahtevam, bi bil Eulerjev graf, saj je po definiciji tisti povezan graf, v katerem obstaja enostavni obhod, na katerem so vse povezave grafa. Tak obhod se imenuje Eulerjev obhod.

Po izreku 6.1. je povezan graf G Eulerjev natanko takrat, ko ima vsaka točka sodo stopnjo. Če je G Eulerjev, potem ima vsaka točka sodo stopnjo, je potrební pogoj. Če ima vsaka točka sodo stopnjo, potem je G Eulerjev, je zadostni pogoj.

Graf G , ki ponazarja shemo solin, ima točke lihe stopnje, torej ni Eulerjev graf. V njem potemtakem ne obstaja enostavni obhod, na katerem bi bile vse povezave grafa.

Odgovor na vprašanje, ali je mogoče določiti tak obhod solin, da se obiskovalec sprehodi po vseh poteh in po vsaki le enkrat, je torej negativen.

4.1.5 Določitev najkrajših poti med štirimi vhodi

Tretji del naloge predstavlja določitev najkrajših poti med štirimi vhodi v krajinski park: med osrednjim vhom (GV), vhomom pri letališču (VS), vhomom pri J. (VJ) ter pristajališčem za plovila (P). Vsaka pot mora vključevati obisk v solinarskem muzeju (S). Razdalje med temi vhodi so kar precejšnje in zaradi velikega števila križišč poti slabo pregledne, kar zlasti nekoliko starejšim

obiskovalcem in otrokom onemogoča ogled parka. Z določitvijo najkrajših poti med štirimi vhodi, ki bi vključevale tudi obisk muzeja, bi se po eni strani povečalo obisk v muzeju, po drugi strani pa skrajšalo sprehode po parku, ki so za velik del obiskovalcev predolgi.

Graf ima toliko točk in povezav, da se da pri tej nalogi pomagati si z razdelitvijo grafa na posamezne sklope – podgrafe. Graf je tako sestavljen, da se že po hitri presoji lahko ugotovi, kateri podgraf ne more vsebovati najkrajših poti, zato se ga izloči in obravnava le podgraf, v katerem se nahajajo najkrajše poti.

Išče se povezave med štirimi vhodi, poti pa morajo vključevati točko S (solinarski muzej). Išče se torej najkrajše povezave med točkami P in GV, P in VJ, P in VS, GV in VJ, GV in VS ter VJ in VS, ki vključujejo S.

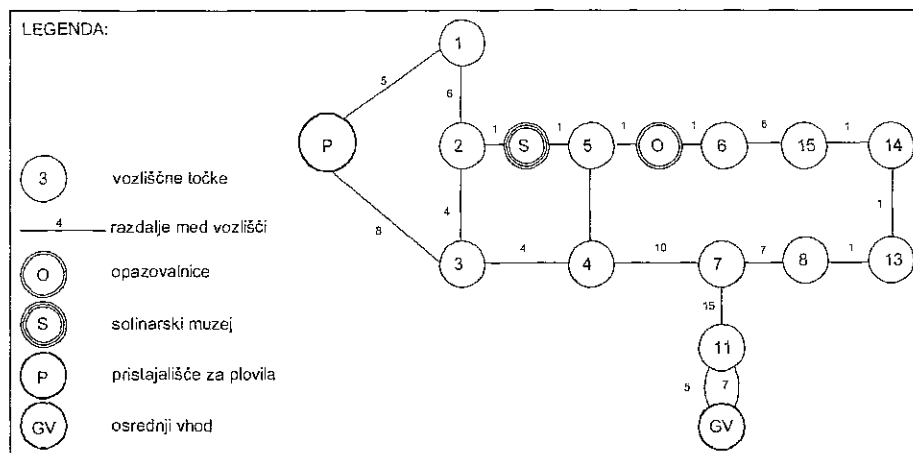
Ker se dejansko išče najkrajše poti med vhodi in S, se lahko problem zastavi kot iskanje unije najkrajših poti med vhodi in S. Ker mora vsaka pot vsebovati S, se lahko dejansko poišče najkrajše poti med P in S, GV in S, VJ in S ter VS in S. V naslednjem koraku posamezne odseke poti med sabo združujemo z unijo poti. Paziti moramo le, da se posamezna odseka ne prekrivata, saj potem unija ni več pot.

Prve tri najkrajše poti: med P in GV, P in VJ, P in VS, se je poiskalo z *algoritmi najkrajših poti*. Tako se je našlo tudi najkrajše poti med P in S, GV in S, VJ in S ter VS in S.

Druge tri najkrajše poti, GV in VJ, GV in VS ter VJ in VS, se je poiskalo z unijo najkrajših poti med P in S, GV in S, VJ in S ter VS in S. Pri tem se je preverilo, ali se poti ne križajo.

4.1.5.1 Pot med P in GV

Pri iskanju najkrajše poti med P in GV se je priredilo smiselni podgraf. Išče se po algoritmu najkrajših poti v podgrafu.



Sl. 3: Shema podgrafa P-GV.
Fig. 3: Schema of subgraph P-GV.

Tabela 1: Algoritem najkrajših poti med P in GV.**Table 1: Algorithm of the shortest routes between P and GV.**

točke	P	1	2	3	S	4	5	O	6	15	14	13	8	7	11	GV
P	0	5		8												
1		5	11													
2			11	12	12											
S ¹ , 3				12	12		13									
5,4						17	13	14						27		
O								14	15							
6									15	21						
15										21	22					
14											22	23				
13												23	24			
8													24	31		
7														27	42	
11															42	47
GV																47

¹Izbere se pot preko S zaradi zahteve, da pot mora vključevati S.

Najkrajša pot od P do GV in obratna, ki vključuje S, je pot P-1-2-S-5-4-7-11-GV dolžine 47.

Rezultat se lahko izrabi tudi za prikaz najkrajše poti od P do S in od GV do S. Najkrajša pot od P do S je P-1-2-S dolžine 12. Najkrajša pot od GV do S je GV-11-7-4-S, dolžine 35.

4.1.5.2 Pot med P in VJ

Pri iskanju najkrajše poti med P in VJ se je priredilo smiselni podgraf. Išče se po algoritmu najkrajših poti v podgrafu.

Najkrajša pot od VJ do P (in obratna), ki vključuje S, je pot VJ-28-27-26-30-23-24-1-2-S-5-4-3-P, dolžine 91.

Rezultat se lahko uporabi tudi za prikaz najkrajše poti od VJ do S. Hkrati se prepriča, ali je pot najkrajša pot P-S, do katere se je prišlo v točki a, enaka tukaj dobljeni najkrajši poti med P in S.

Najkrajša pot od P do S v tem primeru je P-3-4-5-S, dolžine 17. Najkrajša pot od VJ do S je VJ-28-27-26-30-23-24-1-2-S, dolžine 74. Kot je videti, je bilo potrebno izbrati novo najkrajšo pot med P in S, ker povezave 1-2-S vključuje že najkrajša pot med VJ in S.

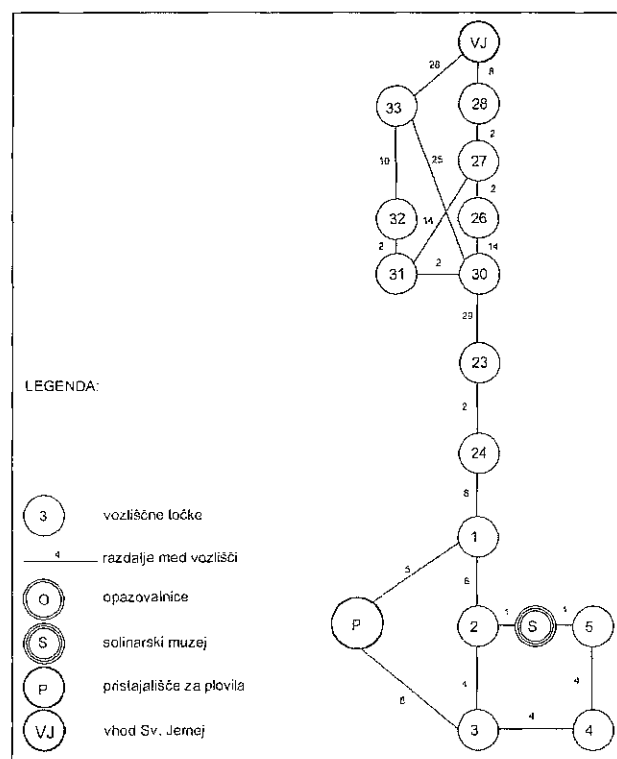
**Sl. 4: Shema podgrafa P-VJ).****Fig. 4: Schema of subgraph P-VJ).**

Tabela 2: Algoritem najkrajših poti med P in V_j .

Table 2: Algorithm of the shortest routes between P and VJ .

[illegible]

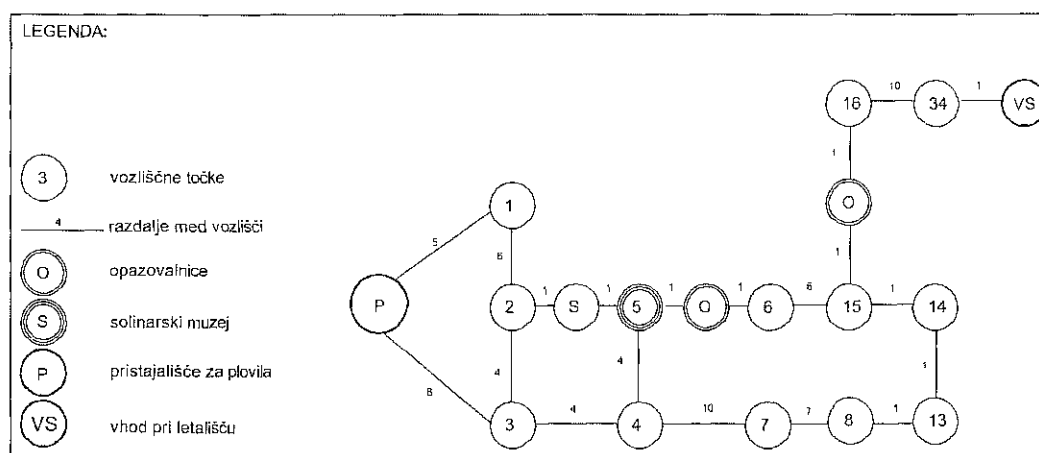
¹Pot je potrebno nadaljevati preko točke 30, saj povezava 30-23 predstavlja začetek mostu do P. Izbere se manjši začasni potencial, torej 26. ²Izbrati je potrebno pot 1-2 in ne 1-P, ker je treba vključiti še S. ³Izbrati je treba večji začasni potencial, ker vključuje še S.

4.1.5.3 Pot med P in VS

Pri iskanju najkrajše poti med P in VS se je priredilo smiselni podgraf. Išče se po algoritmu najkrajših poti v podgrafu.

Najkrajša pot od VS do P (in obratna), ki vključuje S, je pot VS-34-16-O-15-6-O-5-S-2-1-P, dolžine 34.

Rezultat se lahko uporabi tudi za prikaz najkrajše poti od VS do S. Hkrati se prepriča, ali je to najkrajša pot P-S, do katere se je prišlo v točki 4.1.5.1, enaka tukaj dobljeni najkrajši poti med P in S. Najkrajša pot od P do S v tem primeru je P-1-2-S, dolžine 12 in je enaka najkrajši poti iz točke 4.1.5.1. Najkrajša pot od VS do S je VS-34-16-O-15-6-O-5-S, dolžine 22.



Sl. 5: Shema podgrafa P-VS.
Fig. 5: Schema of subgraph P-VS.

Tabela 3: Algoritem najkrajših poti med P in VS.
Table 3: Algorithm of the shortest routes between P and VS.

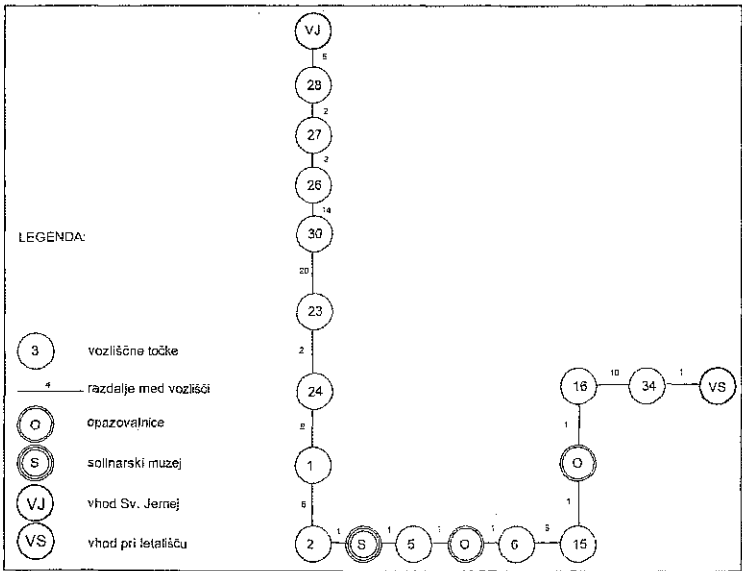
točke	VS	34	16	O	15	14	13	8	7	4	6	O	5	S	1	2	3	P
VS	0	1																
34		1	11															
16			11	12														
O				12	13													
15					13	14					19							
14						14	15											
13							15	16										
8								16	23									
7									23	33								
4										33			37				37	
5												38	37	38				
O											39	38						
6											19	20						
O												20	21					
5									25				21	22				
S														22		23		
2															29	23	27	
3																	27	35
1															29			34
P																		34

4.1.5.4 Pot med GV in VJ

Najkrajšo pot med GV in VJ se izbere z unijo najkrajših poti med GV in S ter VJ in S, saj je najkrajša pot od GV in VJ, ki vključuje S, seštevek najkrajše poti med GV in S ter S in VJ. Pri tem se preveri, če se obe najkrajši poti ne križata.

Najkrajša pot od GV do S je GV-11-7-4-5-S, dolžine 35. Najkrajša pot od VJ do S je VJ-28-27-26-30-23-24-1-2-S, dolžine 74. Poti se ne križata, ker nimata skupnih povezav.

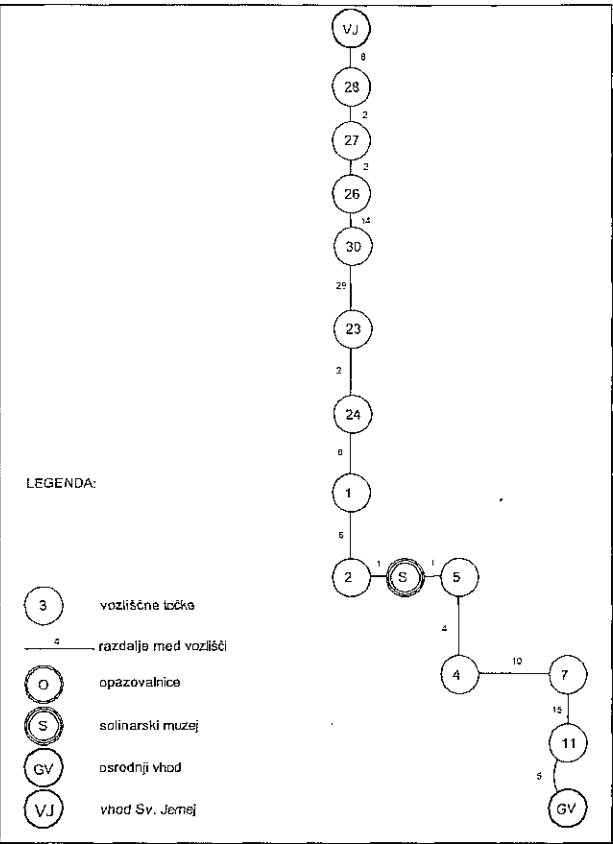
Najkrajša pot med GV in VJ je torej GV-11-7-4-5-S-2-1-24-23-30-26-27-28-VJ, dolžine 109.



Sl. 6: Shema podgrafa GV-VJ.
Fig. 6: Schema of subgraph GV-VJ.

4.1.5.5 Pot med VS in VJ

Najkrajšo pot med VS in VJ se izbere z unijo najkrajših poti med VS in S ter VJ in S, saj je najkrajša pot od VS in VJ, ki vključuje S, seštevek najkrajše poti med VS in S ter S in VJ. Pri tem se preveri, ali se obe najkrajši poti ne križata.



Sl. 7: Shema podgrafa VS-VJ.
Fig. 7: Schema of subgraph VS-VJ.

Najkrajša pot od VS do S je VS-34-16-O-15-6-O-5-S, dolžine 22. Najkrajša pot od VJ do S je VJ-28-27-26-30-23-24-1-2-S, dolžine 74. Poti se ne križata, ker nimata skupnih povezav (lahko pa bi imeli skupno vozlišče). Najkrajša pot med VS in VJ je torej VS-34-16-O-15-6-O-5-S-2-1-24-23-30-26-27-28-VJ, dolžine 96.

4.1.5.6 Pot med VS in GV

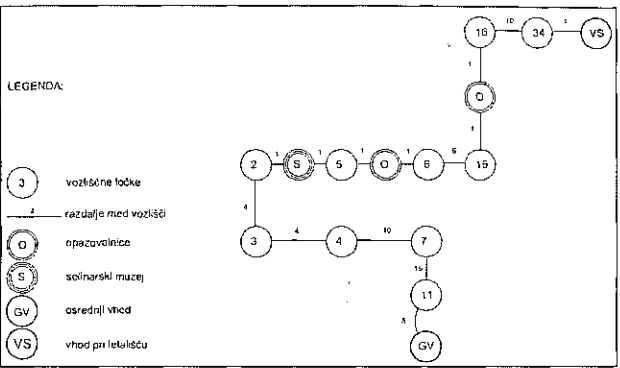
Najkrajšo pot med VS in GV se izbere z unijo najkrajših poti med VS in S ter GV in S, saj je najkrajša pot od VS in GV, ki vključuje S, seštevek najkrajše poti med VS in S ter S in GV. Pri tem se preveri, če se obe najkrajši poti ne križata.

Najkrajša pot od VS do S je VS-34-16-O-15-6-O-5-S, dolžine 22. Najkrajša pot od GV do S je GV-11-7-4-5-S,

dolžine 35.

Najkrajša pot med VS in GV bi bila torej VS-34-16-O-15-6-O-5-S-4-7-11-GV, če se povezava 5-S ne bi dvakrat ponovila, zaradi česar sta poti nezdržljivi, saj njuna unija ni več pot. Poišče se drugo najkrajšo pot med GV in S, ki nima povezave 5-S. Sta dve možnosti: GV-11-7-4-3-2-S, dolžine 37 in GV-11-7-4-3-P-1-2-S, dolžine 54. Izbere se prvo možnost, ki je krajša, poleg tega pa ne prečka točke P.

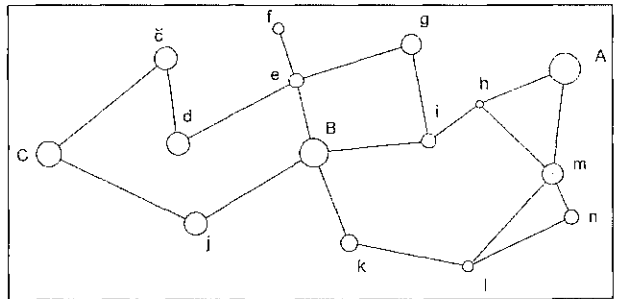
Najkrajša pot med VS in GV je torej VS-34-16-O-15-6-O-5-S-2-3-4-7-11-GV, dolžine 61.



Sl. 8: Shema podgrafa VS-GV.
Fig. 8: Schema of subgraph VS-GV.

4.2 Načrtovanje stikov v omrežju naselij

V razvejanem regionalnem omrežju petnajstih naselij je potrebno poiskati najkrajše poti med kraji A, B in C. Med temi tremi kraji je potrebno poiskati najprimernejšega za gradnjo nove osnovne šole. Kriterij izbora je dostopnost do vseh ostalih štirinajstih naselij v regiji. Izbere se kraj, do katerega je seštevek vseh ostalih poti najkrajši.



Sl. 9: Shema regionalnega omrežja naselij.
Fig. 9: Schema of the regional network of settlements.

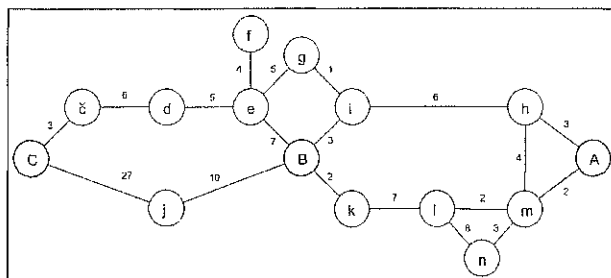
4.2.1 Naloga

Prvi del naloge predstavlja prikaz omrežja naselij in njihovih medsebojnih povezav s pomočjo grafa. Naselja

se prikaže s točkami, povezave med naselji pa z ne-usmerjenimi povezavami. Drugi del naloge predstavlja iskanje najkrajših poti med kraji A, B in C. Išče se s pomočjo *algoritma najkrajših poti*. Tretji del naloge je najbolj kompleksen. S pomočjo *algoritma najkrajših poti* se išče povezave med kraji A, B in C in ostalimi naselji. Za določitev najugodnejšega položaja nove šole v enem od treh krajev se sešteje dolžine najkrajših poti za vse tri primere.

4.2.2 Oblikovanje omrežja točk in povezav in prikaz grafa F z matematičnim modeliranjem

Prvi del naloge predstavlja prikaz omrežja naselij in njihovih medsebojnih povezav s pomočjo grafa. Naselja se prikaže s točkami, povezave med naselji pa z ne-usmerjenimi povezavami. S pomočjo matematičnega modeliranja se omrežje točk (naselja) in povezav prikaže z grafom.



Sl. 10: Shema grafa s prikazanimi dolžinami povezav.
Fig. 10: Schema of the graph with connection distances.

Graf F ima 15 točk in 19 povezav. Stopnje točk so prikazane z d.

Graf F:

$n = 15$

$m = 19$

$d = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4)$.

Po lemi o rokovanju je vsota stopenj točk 38 enaka polovici $m = 19$.

Graf je povezan, saj po definiciji obstaja pot med poljubnima točkama grafa F.

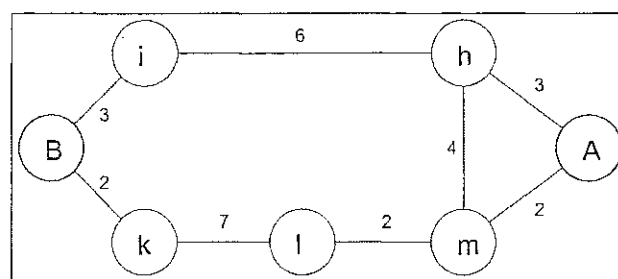
4.2.3 Določitev najkrajših poti med naselji A, B in C

Drugi del naloge predstavlja iskanje najkrajših poti med kraji A, B in C. Pomagati se da z *algoritmom najkrajših poti*.

Graf F se razdeli na smiselne podgrafe, saj ima graf F veliko točk in povezav. Graf F je tako sestavljen, da se da že po hitri presoji ugotoviti, kateri podgraf ne more vključevati najkrajših poti med štirimi kraji.

4.2.3.1 Pot med A in B

Pri iskanju najkrajše poti med A in B je bil prirejen smiselni podgraf.



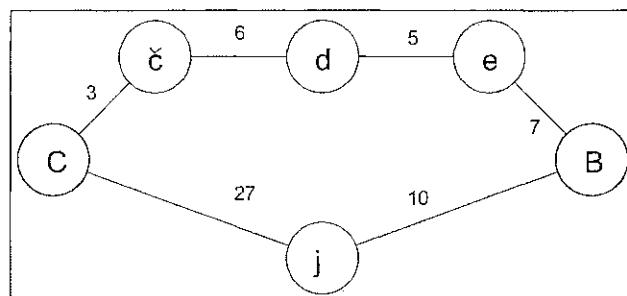
Sl. 11: Shema podgrafa A-B.

Fig. 11: Schema of subgraph A-B.

Ugotovitev je, da najkrajše poti ni potrebno iskati z algoritmom, saj že prireditev smiselnega podgrafa jasno pokaže, da obstajata le dve možni poti od A do B: A-h-i-B, dolžine 12 in A-m-l-k-B, dolžine 13. Najkrajša pot med A in B je torej pot A-h-i-B, dolžine 12.

4.2.3.2 Pot med B in C

Tudi pri iskanju najkrajše poti med B in C je bil prirejen smiselni podgraf B-C.



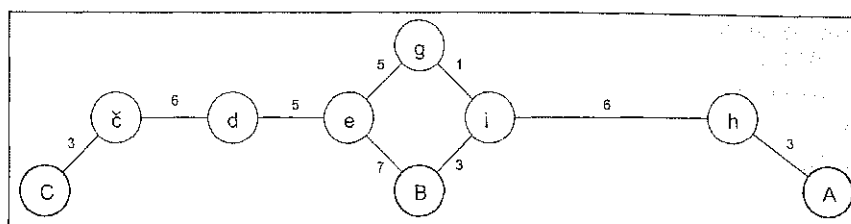
Sl. 12: Shema podgrafa B-C.

Fig. 12: Schema of subgraph B-C.

Ugotovitev je, da najkrajše poti ni potrebno iskati z algoritmom, saj že prireditev smiselnega podgrafa jasno pokaže, da sta le dve možni poti od B do C: B-e-d-č-C, dolžine 21 in B-j-C, dolžine 37. Najkrajša pot med B in C je torej pot B-e-d-č-C, dolžine 21.

4.2.3.3 Pot med A in C

Prirejen je bil smiselni podgraf. Povezava A-m-l-k-B je bila izpuščena, saj se je ugotovilo, da je daljša od povezave A-h-i-B, ki je sestavni del podgrafa A-C. Prav tako se je smiselno izpustilo povezavo B-j-C, saj je dokazano daljša od povezave B-e-d-č-C, prav tako dela tega podgrafa.



Sl. 13: Shema podgrafa A-C.
Fig. 13: Schema of subgraph A-C.

Tudi pri podgrafu A-C najkrajše poti ni bilo treba iskati z algoritmom, saj se je s pomočjo grafičnega prikaza smiselnega podgrafa ugotovilo, da gre ponovno le za dve možni poti med A in C: razcep i-g-e, dolžine 6 ali razcep 1-B-e, dolžine 10. Najkrajša pot med A in C je A-h-i-g-e-d-č-C, dolžine 29.

4.2.4 Določitev najugodnejšega položaja nove šole v krajih A, B ali C glede na prometno povezanost z omrežjem naselij

Najugodnejši položaj nove osnovne šole v krajih A, B ali C je določen glede na seštevek oddaljenosti vseh krajev od vsakega od krajev A, B in C.

4.2.4.1 Oddaljenost od kraja A

Bližnje točke se lahko določi s pomočjo grafa. Pomagajo ugotovitve najkrajših razdalj med A, B in C.

	B	C	č	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	Seštevek najkrajših poti
Odd.	12	21	18	12	7	11	4	9	3	10	2	9	11	14	187

4.2.4.2 Oddaljenost od kraja B

Bližnje točke se lahko določi s pomočjo grafa. Pomagati se da z ugotovitvami najkrajših razdalj med A, B in C.

	A	C	č	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	Seštevek najkrajših poti
Odd.	12	29	26	20	15	19	10	9	3	22	11	4	2	5	143

Ugotoviti se da, da je kraj B primernejši za postavitev nove šole od kraja A, saj je vsota najkrajših razdalj posameznih krajev krajša do kraja B.

4.2.4.3 Oddaljenost od kraja C

	B	A	č	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	Seštevek najkrajših poti
Odd.	29	21	3	9	14	18	19	38	32	27	31	38	23	26	328

Razdaljo C-h se npr. dobi kot unijo najkrajših poti C-B in B-h = 38.

Ugotovi se lahko, da je kraj C najmanj primeren za postavitev nove šole. Najprimernejši je kraj B, saj je vsota najkrajših razdalj posameznih krajev do njega najmanjša.

5. REZULTATI IN RAZPRAVA

Teorijo grafov je mogoče uporabiti pri načrtovanju prostora. Metoda je bila preizkušena v dveh primerih. Pri načrtovanju krajinskega parka Sečoveljskih solin je bila želja najti tak obhod krajinskega parka, da bi se

obiskovalec sprehodil po vsaki od 74 poti parka samo enkrat, ter najkrajše povezave med štirimi vhodi v park, ki vključujejo obisk v solinarskem muzeju. S pomočjo matematičnega modeliranja je problem poenostavljen, abstrahiran in prikazan v obliki grafa. Vozlišča, opazovalnice, vhodi in solinarski muzej so prikazani s toč-

kami, poti med njimi pa z neusmerjenimi povezavami. S pomočjo izreka 6.1 (Wilson, Watkins, 1997) je bilo dokazano, da v krajinskem parku ni mogoče sestaviti zahtevanega obhoda, saj graf s točkami lihe stopnje ni Eulerjev graf, v katerem bi obstajal enostavni obhod. Najkrajše povezave med posameznimi vhodi, ki vključujejo obisk v solinarskem muzeju, so poiskane s prireditvijo smiselnih podgrafov in algoritmi najkrajših poti.

V drugem primeru, pri načrtovanju stikov v omrežju naselij, se je iskalo najkrajše poti med kraji A, B in C. Med temi tremi kraji je bilo potrebo izbrati najprimernejšega za gradnjo nove osnovne šole po kriteriju trajnosti – najkrajših dostopov iz ostalih naselij regionalnega omrežja. Tudi tu je problem s pomočjo matematičnega modeliranja poenostavljen, abstrahiran in prikazan v obliki grafa. Naselja so prikazana s točkami, povezave med njimi pa z neusmerjenimi povezavami. Najkrajše povezave med kraji A, B in C so bile poiskane s prireditvijo smiselnih podgrafov. Že slikovni prikaz je bil dovolj nazoren, tako da algoritma najkrajših poti ni bilo potrebno uporabiti. S podobnim postopkom so bile izračunane razdalje posameznih krajev do A, B in C, seštete in kot najprimernejšo lokacijo za postavitev nove osnovne šole je bil predlagan kraj B, saj je bila vsota najkrajših razdalj posameznih krajev do njega najkrajša.

Ugotoviti se da, da je teorija grafov lahko v veliko pomoč pri prostorskem planiranju pri reševanju problemov, ki se jih lahko prikaže s točkami in povezavami med njimi. Ugotovi se lahko, da teorija grafov res ponuja izjemno natančne in preproste metode pri rešitvi prostorskih problemov, ki so bili do sedaj rešljivi le s poskušanjem in ugibanjem. V članku so prikazane zgolj nekatere možnosti uporabe teorije grafov, ki seveda predstavljajo le "vrh ledene gore" možnosti, ki jih ponuja.

Prednost uporabe grafov je v njihovi skrajni preprostosti. S pomočjo matematičnega modeliranja se problem toliko poenostavi, da ga lahko prikažemo v obliki točk in njihovih medsebojnih povezav. Rekli bi lahko, da se ga prenese iz realnega v matematični prostor. Ko je problem prikazan v tej obliki, se ga obravnava s pomočjo algoritmov. Poglavitna prednost metode je natančno, hitro in zanesljivo reševanje nekaterih vprašanj, ki so bila do zdaj možna le s poskušanjem in ugibanjem. Avtorica meni, da je teorija grafov uporabna kot metodološko orodje pri prostorskem načrtovanju. Primerna je predvsem zaradi natančnosti in relativne preprostosti uporabe.

Poleg prednosti uporaba teorije grafov kot metodološkega orodja seveda prinaša tudi nekaj pomanj-

kljivosti. Predvsem zahteva nekaj osnovnega znanja diskretne matematike, področja, v katerega sodi. Proces matematičnega modeliranja, ključen pri formulaciji naloge v obliko, ki se jo obravnava s teorijo grafov, ima določene omejitve in originalni problem lahko posname zgolj do določene stopnje. Druga omejitev metode je, da je kvantitativna in ne kvalitativna. Z njo se da zajeti osnovni problem brez posameznosti (lahko se prikaže dolžino poti, ne pa neprehodnosti ali lepega razgleda). Zaradi tega so številni problemi preveč kompleksni in je zanje model z grafi preveč enostaven. Pri reševanju kompleksnih problemov s številnimi, tudi subjektivnimi ali kvalitativnimi vidiki, je metoda manj uporabna. Pri urejanju omrežja poti v solinah na primer se lahko v matematični model vključi dolžino poti, ne more pa se lepote razgleda ali pretežkega vzpona. Če se na primer želi modelirati pretok prometa po cestah majhnega mesta, potem je potrebno upoštevati še toliko dodatnih dejavnikov (kot so hitrost prometa, ozka grla, prometne nesreče), da je vsak zaključek, ki se ga naredi iz grafa, neustrezen za opis dejanskega stanja. Seveda tudi vključitev subjektivnih dejavnikov v proces modeliranja ostaja eden od izzivov, ki jih bo mogoče reševati v prihodnje.

Teorija grafov je uporabna tudi v drugih znanostih, povezanih s prostorskim planiranjem. Široke možnosti ponuja zlasti v socioloških znanostih, pri iskanju uravnoveščenosti in simetričnosti odnosov (Wilson, Watkins, 1997). Uporabna je pri načrtovanju porazdelitve in izključenosti prometnih tokov, v elektrotehniki in komunikacijskih omrežjih (Končan, 1998), arhitekturi (Šmuc, 1996), kemiji (Perdih, 1993), ekonomiji (Trančar, 2000), pri dodeljevanju frekvenc (Šparl, 2001; Kuonen, 1996), v računalništvu (Jerman-Blažič, 1984) in sploh povsod, kjer obstajajo problemi, ki se jih lahko prikaže kot množico točk in njihovih medsebojnih povezav.

Teorija grafov je hitro razvijajoče se področje diskretne matematike, ki ponuja vedno nove možnosti praktične uporabe. Tudi zaradi tega je morda smiselno uvesti nekatere preprostejše metode, ki jih ponuja, tudi na področje prostorskega planiranja. Seveda so vse možnosti še odprte. V prihodnje bo potrebno predvsem skušati vključiti tudi subjektivne dejavnike v proces matematičnega modeliranja.

ZAHVALA

Zahvaljujem se prof. dr. Alešu Založniku, ki me je kot mentor spodbujal na poti v svet grafov in mi ponujal trdno teoretično oporo pri pripravi tega članka.

APPLICABILITY OF GRAPH THEORY AS OF A METHODOLOGICAL IMPLEMENT IN SPATIAL PLANNING

Manca PLAZAR MLAKAR

University of Primorska, Science and Research Centre of Koper, SI-6000 Koper, Garibaldijska 1
e-mail: manca.plazar@zrs-kp.si

SUMMARY

Graph theory is highly applicable as a methodological implement in spatial planning. As part of discrete mathematics it deals with objects and connections between them. It enables a simple solution of problems occurring during planning, which can be presented as a multitude of points and their interconnections and have been till now solvable merely through guesswork.

The author presents two cases of spatial planning in which the graph theory was used. In the planning of Sečovlje Salina Nature Park she attempts to find a specific round of the park that would require a visitor to walk along each of the 74 paths, each only once, as well as the shortest links between the four entrances to the park, which must include a visit to the Museum of Salt-making. With the aid of mathematical modelling, she presents the problem in the form of a graph: intersections, viewing platforms, entrances, Museum of Salt-making with points, and paths between them with undirected linkages. She proves that no required round can be delineated in the park, for in the graph with points of odd degree a simple round is not possible. The shortest linkages between separate entrances, which include a visit of the Museum of Salt-making, are established through arrangement of logical sub-graphs and with algorithms of the shortest paths.

In the second case, i.e., planning of contacts and distribution of activities in the network of settlements, the author looks for the shortest paths between places A, B and C. Amongst these places, the most suitable one is to be chosen for the construction of a new primary school according to the constancy criterion – the shortest accesses from other regional network settlements. The problem is presented with the aid of mathematical modelling in the shape of a graph: the settlements with points and the connections between them with undirected linkages. The shortest connections between places A, B and C are obtained through arrangement of logical sub-graphs. But the graphic presentation itself was so evident that no algorithm of the shortest paths was necessary. With a similar procedure, the distances of separate settlements to places A, B and C are calculated and then added up. The author proposes place B as the most suitable locality for the construction of a new school, as the sum of shortest distances of separate settlements to it was the lowest.

In the conclusion, the author presents her assessments of the advantages and weaknesses of the graph theory as a methodological implement. It is exceptionally applicable in the solving of those problems in spatial planning that can be presented as a multitude of points and their interconnections, for it offers highly accurate and simple methods in solving the problems that have till now been solvable merely through guesswork. The major deficiency of this method is simplification of the problem in the process of mathematical modelling.

Key words: graph theory, methodological implement, spatial planning, landscape planning

VIRI IN LITERATURA

Bončina, M. (1999): Zgodovinski razvoj teorije grafov. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta in Fakulteta za matematiko in fiziko.

Jerman-Blažič, B. (1984): Uporaba programskih grafov pri ugotavljanju vzporednosti v računalniških algoritmihi. Informatica 2/84. Ljubljana, Slovensko društvo Informatika, 20-23.

Končan, T. (1998): Uporaba teorije grafov v elektrotehniki in komunikacijskih omrežjih. Ljubljana, Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani.

Kuonen, P. (1996): Graph theory applied to mobile network optimization. Elektrotehniški vestnik, 2/96. Ljubljana, Elektrotehniška zveza Slovenije, 69-72.

Perdih, M. (1993): Uporaba teorije grafov pri reševanju nekaterih stereokemijskih problemov. Ljubljana, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Ljubljani.

Plazar Mlakar, M., Mlakar, A. (2000): Prostorski ureditveni posegi v Krajinskem parku Sečoveljske soline. Annales 10/00. Koper, Zgodovinsko društvo za južno Primorsko – Znanstveno-raziskovalno središče Republike Slovenije Koper, 263-280.

Šmuc, V. (1996): Uporaba teorije grafov v arhitekturi. Ljubljana, Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani.

Šparl, P. (2001): Uporaba teorije grafov za naloge dodeljevanja frekvenc. Občni zbor Društva matematikov,

fizikov in astronomov Slovenije, 53/01. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 45.

Trančar, V. (2000): Tehnična analiza delnic in njena uporaba v praksi. Maribor, Ekonomsko-poslovna fakulteta Maribor.

Wilson, R., Watkins, J. (1997): Uvod v teorijo grafov. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.