Igra treh barv

Matevž Črepnjak, Tina Sovič

Predstavili bomo Igro treh barv, ki sta jo prva opisala matematika Ehrhard Behrends in Steve Humble v članku Triangle Mysteries, Mathematical Gems and Curiosities, leta 2013 in je dostopen na `www.ehrhard-behrends.de/pdf_zaubern/behrends_humble.pdf`. Igra je precej preprosta, v ozadju pa se skriva zanimiva matematika.

Konfiguracijo enakostraničnega trikotnika bomo sestavili iz pravilnih šestkotnikov tako, da bo vsaka od stranic sestavljena iz štirih pravilnih šestkotnikov (glej sliko 1). Predpostavimo, da je konfiguracija vedno orientirana tako, da ena izmed njenih stranic leži vodoravno zgoraj, posledično je nasprotno oglišče spodaj. Pri takšni orientaciji bomo zgornjo stranico, torej prvo vrsto šestkotnikov, imenovali prva vrstica, tri šestkotnike, ki ležijo tik pod njo, bomo imenovali druga vrstica, preostali dve pa tretja in četrta vrstica, kjer je slednja zgolj oglišče. Opisano konfiguracijo bomo v nadaljevanju imenovali *trikotnik reda 4*. Za poljubno naravno število $n \geqslant 2$ na podoben način definiramo *trikotnik reda* n.

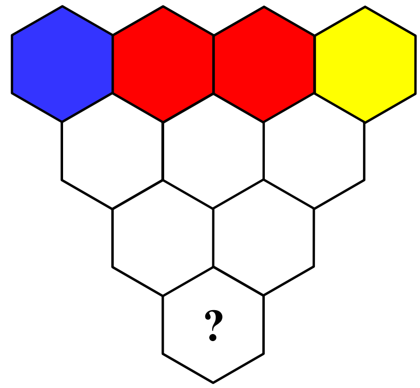
Na voljo imamo tri različne barve, denimo rumeno, modro in rdečo. Trikotnik z njimi pobarvamo tako, da vsakemu šestkotniku priredimo natanko eno izmed barv na način, opisan spodaj.

Prvo vrstico šestkotnikov pobarvamo poljubno. Ena od možnosti je predstavljena na sliki 1.

Barva vsakega nadaljnjega šestkotnika je določena z barvo tistih dveh šestkotnikov, ki ležita v vrstici neposredno nad njim in se ga dotikata. Pravili sta sledeči:

- če sta šestkotnika iste barve, je takšne barve tudi spodnji šestkotnik;
- če sta šestkotnika različnih barv, potem je spodnji šestkotnik tiste barve, ki ne nastopa kot barva šestkotnikov nad njim.

Sedaj si zastavimo naslednji vprašanji: *Ali lahko na podlagi barv prve vrstice v enem koraku (tj. še pred barvanjem preostalih šestkotnikov danega trikotnika) določimo barvo šestkotnika v zadnji vrstici? Ali je barva šestkotnika v zadnji vrstici odvisna od vseh barv prve vrstice ali zgolj od nekaterih izmed njih?*



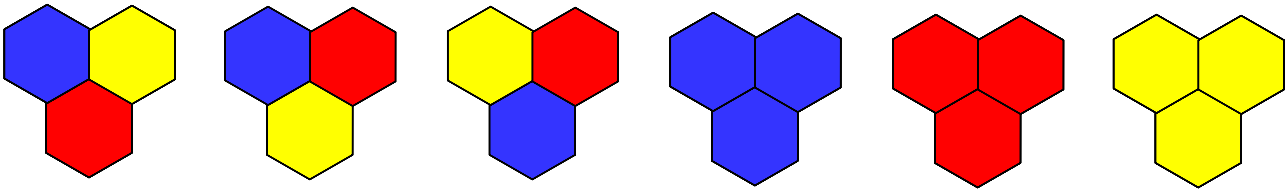
SLIKA 1.
Primer barvanja prve vrstice trikotnika reda 4

Preden odgovorimo na zgornji vprašanji, pobarvajmo trikotnik s slike 1 v celoti.

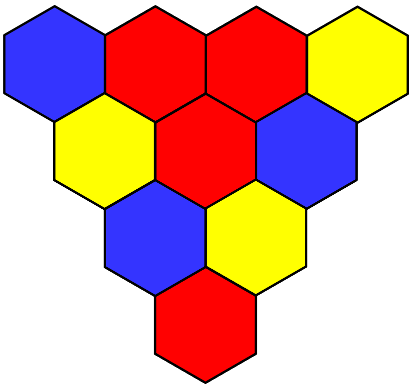
Ugotovimo, da je šestkotnik na dnu trikotnika rdeče barve. Oglejmo si barve oglišč dotičnega trikotnika. Prvi in zadnji šestkotnik prve vrstice smo pobarvali z modro in rumeno barvo. Skupaj določata rdečo barvo, kar je natanko barva šestkotnika v zadnji vrstici. Gre za naključje? Poskusimo prvo vrstico pobarvati drugače. Hitro ugotovimo, da je barva oglišča v zadnji vrstici spet barva, ki jo določata preostali dve oglišči trikotnika. Izkaže se, da je odgovor na obe zastavljeni vprašanji pritrdilen in velja naslednje: Barvo nepobarvanega oglišča na dnu trikotnika lahko v enem koraku določimo že na podlagi barv preostalih dveh oglišč. Trditev lahko dokažemo s seznamom vseh možnih barvnih kombinacij prve vrstice. Mi bomo trditev dokazali s pomočjo aritmetike. Tak dokaz je za nas bolj zanimiv, saj ga lahko posplošimo tudi na trikotnike višjega reda.

Najprej vsaki izmed barv priredimo natanko eno od števil 0, 1 in 2 tako, da je vsaka barva na enoličen način opredeljena s številom. Predpostavimo, da rumeni barvi priredimo število 0, modri barvi število 1 in rdeči barvi število 2. Barvanje bomo sedaj lahko predstavili v obliki računske operacije.

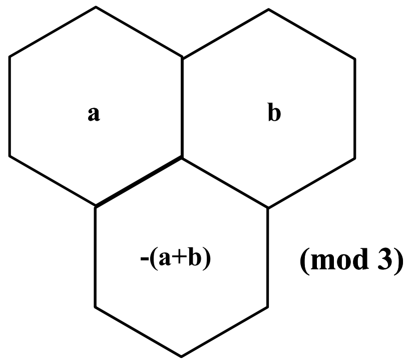
Ker s kombinacijo dveh barv s seznama spet dobimo barvo z istega seznama, bomo množico prireje-



SLIKA 2.
Barvanje z uporabo zgoraj zapisanih pravil



SLIKA 3.
Trikotnik s slike 1 pobarvan v celoti

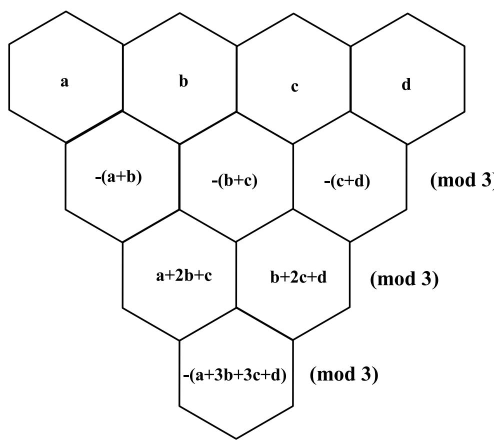


SLIKA 4.
Barvanje kot računska operacija

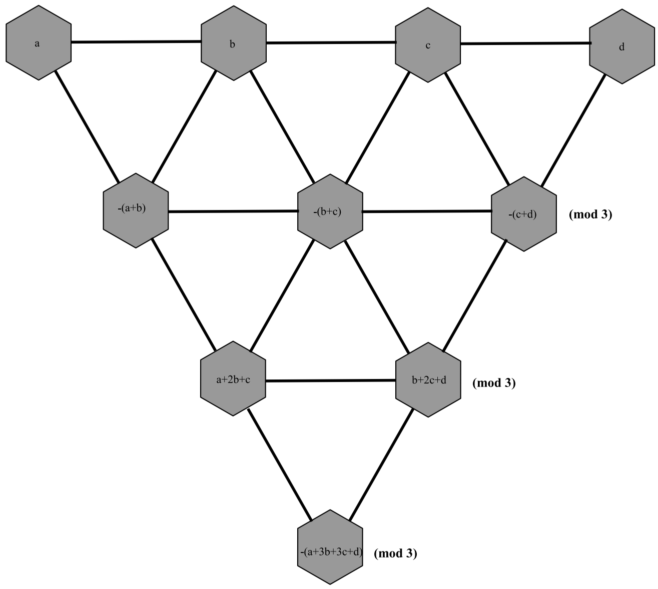
nih števil $\{0, 1, 2\}$ opremili s t. i. seštevanjem po modulu 3. Gre za sistem aritmetike celih števil, kjer se števila ponovno vrtijo v krogu, ko dosežejo določeno vrednost, ki se imenuje *modul*. Števili sta kongruentni po modulu n, kar zapišemo $a \equiv b \pmod{n}$, če je $a - b = nk$ za neko celo število k. Tako je npr. $2 + 2 \equiv 1 \pmod{3}$, saj je $4 - 1 = 3 \cdot 1$. Vrnimo se k barvam, ki smo jim na enoličen način priredili števila. Opazimo, da barvi a in b določata barvo, ki ji pripada število $-(a + b) \pmod{3}$. Bralec lahko zapisano enostavno preveri s pomočjo slike 2.

Dokažimo torej, da barvi prvega in zadnjega šestkotnika v trikotniku reda 4 vedno določata barvo šestkotnika v zadnji vrstici. Predpostavimo, da smo prvo vrstico trikotnika pobarvali z barvami a, b, c in d ter izračunajmo barvo šestkotnika v zadnji vrstici.

Kot rezultat (glej sliko 5) dobimo število $-(a + 3b + 3c + d)$, ki je kongruentno številu $-(a + d)$ po modulu 3. Pri tem smo, med drugim, upoštevali dej-



SLIKA 5.
Izračun barve šestkotnika v zadnji vrstici trikotnika reda 4



SLIKA 6.
Trikotniki reda 3^n+1 v trikotniku reda $3^{n+1}+1$ z opazovanimi oglišči

stvo, da za poljubna cela števila x, y, x' in y' velja: če je $x \equiv x'$ (mod 3) in $y \equiv y'$ (mod 3), tedaj je $x+y \equiv x'+y'$ (mod 3). Izračunano število torej pripada barvi, ki jo določata a in d, le-ta pa je neodvisna od preostalih barv v trikotniku. S tem smo dokazali, da je v igri treh barv barva oglišča na dnu trikotnika reda 4 res določena le z barvo oglišč iz prve vrstice in jo lahko določimo še preden prepoznamo barve preostalih šestkotnikov.

Na tem mestu se pojavi vprašanje, ali zapisano velja le za trikotnike reda 4. Seveda velja za trikotnike reda 2, saj smo seštevanje barv tam vpeljali (glej sliko 2), vendar s poskušanjem lahko pridemo do sklepa, da za trikotnike reda 3, 5, 6, 7, 8 in 9 to ne velja.

Izkaže se, da trditev velja za vse trikotnike reda 3^n+1, kjer je n poljubno naravno število. Zapisano dokažimo s pomočjo *matematične indukcije*. Pred tem se spomnimo, da gre za metodo dokaza, ki poteka v dveh korakih in se običajno uporablja pri dokazovanju dane trditve za vsa naravna števila. Prvi korak, imenovan *baza indukcije*, je dokaz trditve za prvo naravno število, ki naj bi trditvi zadoščalo. Sledi *indukcijski korak*, v katerem predpostavimo, da trditev velja za poljubno izbrano naravno število n in jo dokažemo za $n+1$.

Da je baza indukcije izpolnjena, smo razmislili zgoraj. Za indukcijski korak izberimo poljubno naravno število n in predpostavimo, da za trikotnik reda 3^n+1 trditev velja, tj. barva oglišča v vrstici 3^n+1 je natanko določena z barvo oglišč iz prve vrstice. Dokažimo, da ta trditev velja tudi za trikotnik reda $3^{n+1}+1$.

Trikotnik reda $3^{n+1}+1$ je sestavljen iz trikotnikov reda 3^n+1 na način, kot kaže slika 6, kjer so narisana le oglišča teh trikotnikov. Zanimajo nas samo trikotniki, ki so orientirani na način, zapisan zgoraj. Poljubno pobarvajmo prvo vrstico trikotnika reda $3^{n+1}+1$. Denimo, da smo oglišča trikotnikov reda 3^n+1, ki ležijo v prvi vrstici trikotnika reda $3^{n+1}+1$, pobarvali z barvami a, b, c in d, kot prikazuje slika 6.

Ker je v vsakem izmed trikotnikov reda 3^n+1 po indukcijski predpostavki barva oglišča na dnu trikotnika določena z barvo preostlih dveh oglišč, lahko izračunamo barvo šestkotnika, ki leži v zadnji vrstici trikotnika reda $3^{n+1}+1$. Analogno, kot smo to storili v trikotniku reda 4, tudi tukaj pridemo do rezultata $-(a+3b+3c+d)$, kar je kongruentno številu $-(a+d)$ po modulu 3. S tem je trditev dokazana.

Ob koncu dodajmo, da lahko podobno, kot smo vpeljali pravila v igri treh barv, vpeljemo pravila za barvanje trikotnikov z uporabo dveh barv. Razmisli, kakšna pravila bi bila smiselna v tem primeru in kateri trikotniki bi s tem postali zanimivi.

× × ×