

Opoldanska senca v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na treh ravninah



MARIJAN PROSEN

Dolžina opoldanske sence v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na vodoravni ravnini

Zadajmo si nalogo, da izračunamo dolžino s opoldanske sence, ki jo od Sonca osvetljena in v severni pol usmerjena ravna palica z dolžino v meče na vodoravno ravnino (tla) v kraju na severni Zemljini poluti z geografsko širino $\varphi \geq 0$ določenega dne v letu, ko je δ deklinacija Sonca znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitve $-23,5^\circ \leq \delta \leq 23,5^\circ$, kar pomeni, da leži med omenjenima vrednostma. Višinski kot β Sonca opoldne je $\beta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$.

Dolžina s opoldanske sence na vodoravni ravnini je enaka vsoti dolžin senc s_1 in s_2 , torej je:

$$\begin{aligned} s &= v(\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \delta)) \\ &= v \frac{\cos \varphi \cdot \cos(\varphi - \delta) + \sin \varphi \cdot \sin(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi - \delta)} \\ &= v \frac{\cos \delta}{\cos(\varphi - \delta)}. \end{aligned}$$

Dolžino sence hitreje izračunamo po sinusnem izreku

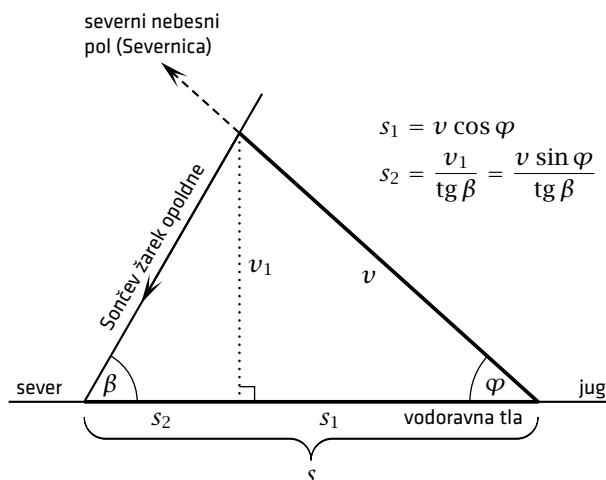
$$\frac{s}{v} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(90^\circ - (\varphi - \delta))}$$

in

$$s = v \frac{\cos \delta}{\cos(\varphi - \delta)}.$$

Zgledi

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) je $s = v / \cos \varphi$ in opoldanska dolžina sence pri znani dolžini palice je odvisna le od geografske širine. Na ekvatorju ($\varphi = 0$)



SLIKA 1.

Dolžina sence palice opoldne je v tem primeru $s = s_1 + s_2$. Kot med palico in vodoravno ravnino je višinski kot severnega nebesnega pola in je enak zemljepisni širini φ kraja, opoldanski višinski kot Sonca pa je $\beta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$.

je $s = v$. Palica je vodoravna, Sončevi žarki pa padajo nanjo pravokotno. Pri nas ($\varphi = 45^\circ$) je $s = v / (\sqrt{2}/2) = v\sqrt{2}$. Na severnem polu ($\varphi = 90^\circ$) pa je opoldanska dolžina sence nedoločena, saj je višinski kot Sonca nič (Sonce je na obzorju).

- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je $s = v \cos \delta / \cos(-\delta) = v$; dolžina sence je vse leto konstantna.
- Na severnem Zemljinem polu je $s = v \cos \delta / \sin \delta = v / \operatorname{tg} \delta$ in je senca vidna samo spomladi ter poleti, ko je Sonce nad obzorjem in doseže ob pletnem Sončevem obratu najmanjšo dolžino (minimum) okoli $2,3v$.





Na splošno se opoldanska dolžina sence $s = v \cos \delta / \cos(\varphi - \delta)$ pri konstantnem φ v času enega leta spreminja od $v \cos 23,5^\circ / \cos(\varphi + 23,5^\circ)$ do $v \cos 23,5^\circ / \cos(\varphi - 23,5^\circ)$. Če npr. vzamemo za $v = 1$ m in $\varphi = 45^\circ$, se dolžina sence spreminja od 1 m (poletni Sončev obrat) do 2,5 m (zimski Sončev obrat).

Dolžina opoldanske sence v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na navpični ravnini

Zapičimo ravno palico v navpično ravnino (steno) vzhod-zahod tako, da je usmerjena proti severnemu nebesnemu polu. Podnožišče palice leži v ravnini na severni strani, vrh palice pa je spuščen na južni. Kot, ki ga oklepa palica z navpično ravnino, je $90^\circ - \varphi$, če je φ severna geografska širina kraja ($\varphi \geq 0$).

Izračunajmo dolžino sence s , ki jo opoldne od Sonca osvetljena v severni nebesni pol usmerjena ravna palica z dolžino d meče na navpično ravnino (steno) v kraju z geografsko širino φ določenega dne v letu, ko je deklinacija δ Sonca znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitev $-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$. Sonce je opoldne na jugu.

Dolžino s opoldanske sence te palice na navpični ravnini izračunamo po sinusnem izreku $s/d = \sin(90^\circ + \delta) / \sin(\varphi - \delta)$ in

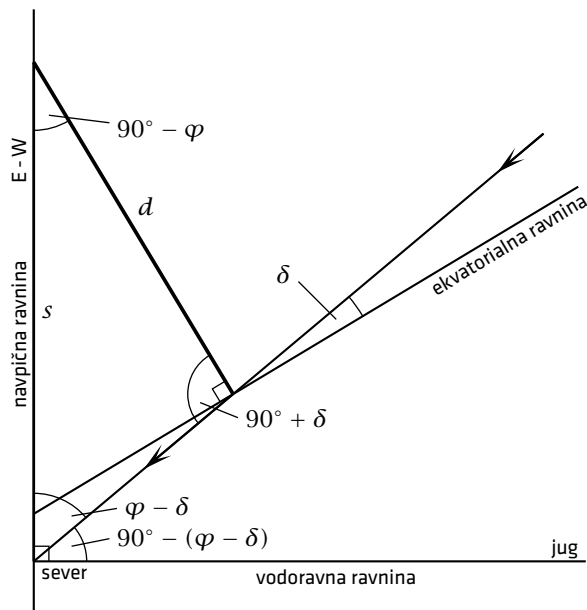
$$s = d \frac{\cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)};$$

za $(\varphi - \delta) = 0 \rightarrow \varphi = \delta$ je dolžina sence neopredeljena.

Dolžina sence se med letom spreminja. Odvisna je od kraja φ in letnega časa, kar pove deklinacija δ Sonca, ki se med letom spreminja. Poleti so sence daljše kot pozimi.

Zgledi

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) sledi $s = d / \sin \varphi$. Dolžina sence je pri znani dolžini palice odvisna le od kraja φ . Za $\varphi = 0$ (ekvator) je senca nedoločena, saj se Sonce za kraje na ekvatorju ta dan giblje od vzhoda do zahoda natanko po nebesnem ekvatorju in je opoldne navpično. Za $\varphi = 45^\circ$ (približno v naših krajih) je $s = d\sqrt{2}$. Za $\varphi = 90^\circ$ je $s = d$ in dolžina palice se projicira sama vase, kadar je pač Sonce nad obzorjem.



SLIKA 2.

Dolžina opoldanske sence s , ki jo od Sonca osvetljena in v severni nebesni pol usmerjena ravna palica z dolžino d meče v kraju z geografsko širino φ na navpično ravnino vzhod-zahod. Opoldanski višinski kot Sonca je $90^\circ - (\varphi - \delta)$, kot med smerjo Sončevega žarka opoldne in navpično ravnino pa je $(\varphi - \delta)$. Poleti je $\delta > 0$, pozimi je $\delta < 0$, ob enakonočjih pa $\delta = 0$.

- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je $s = d \cos \delta / \sin(-\delta) = -d / \tan \delta$. Dolžina sence je odvisna le od δ . Če je $\delta = 0$, je senca nedoločena. Vemo že, če je $\delta > 0$, ne pride do sence, za $\delta < 0$ pa pride (od jesenskega do spomladanskega enakonočja, torej vso jesen in zimo).
- Na severnem Zemljinem polu ($\varphi = 90^\circ$) velja $s = d \cos \delta / \cos \delta = d$ za vse leto, ko je Sonce nad obzorjem (spomladi in poleti).

Na splošno se opoldanska dolžina sence s pri konstantnem φ v času enega leta spreminja od $d \cos(-23,5^\circ) / \sin(\varphi + 23,5^\circ)$ do $d \cos 23,5^\circ / \sin(\varphi - 23,5^\circ)$. Za $\varphi > 23,5^\circ$ je vedno zvezna krivulja, razen na severnem Zemljinem polu ob enakonočjih. Če npr. vzamemo $d = 1$ m in $\varphi = 45^\circ$, se dolžina sence spreminja od 1 m (zimski Sončev obrat) do 2,5 m (poletni Sončev obrat).

Dolžina opoldanske sence v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na ekvatorialni ravnini

Palico z dolžino oz. višino v zapičimo navpično v ekvatorialno ravnino tako, da njen vrh kaže v severni nebesni pol. Izračunajmo dolžino s opoldanske sence, ki jo od Sonca osvetljena palica, usmerjena proti severnemu nebesnemu polu, meče na ekvatorialno ravnino v kraju s severno geografsko širino $\varphi > 0$ določenega dne v letu, ko je deklinacija δ Sonca znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitev $-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$.

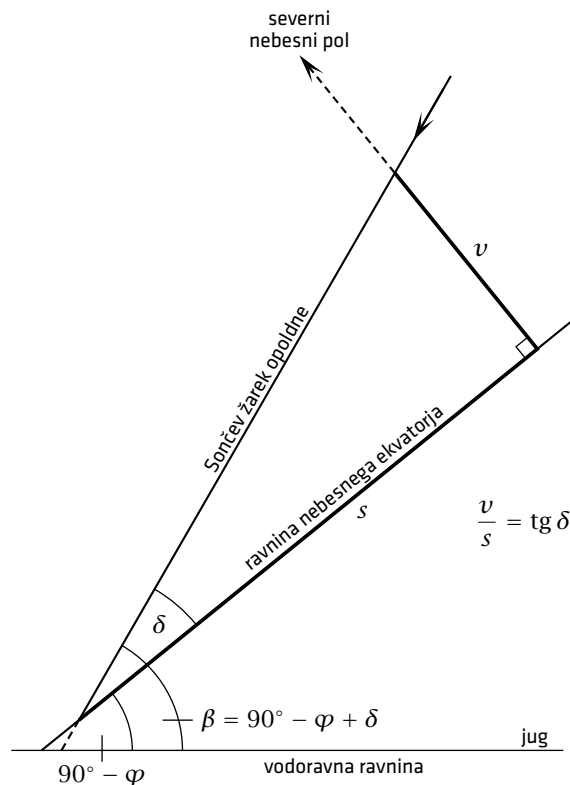
Ekvatorialna ravnina oklepa z vodoravno kot $(90^\circ - \varphi)$. V njej leži nebesni ekvator, po katerem se navidezno giblje Sonce ob enakonočjih. Sonce je opoldne na jugu. V tem primeru je opoldanska dolžina sence

$$s = \frac{v}{\operatorname{tg} \delta}$$

in je neodvisna od φ kar pomeni, da se v vseh krajih severne geografske širine enako spreminja. Za negativne vrednost δ pa senca ni definirana, saj sence preprosto ni (glej sliko 3).

Zgledi

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) je dolžina sence palice neopredeljena za vse φ .
- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je palica usmerjena vodoravno proti severnemu nebesnemu polu. Sence so le, če je $\delta > 0$, to je od spomladi do jeseni. Ob spomladanskem enakonočju je neopredeljena, nato se senca krajša in ob poletnem Sončevem obratu doseže najmanjšo vrednost (minimum $v / \operatorname{tg} 23,5^\circ = 2,3v$), nato se veča do neopredeljenosti ob jesenskem enakonočju. Jeseni in pozimi pa sence ni (ni vidna), saj za $\delta < 0$ ni definirana.
- Na severnem Zemljinem polu ($\varphi = 90^\circ$) je palica usmerjena navpično proti severnemu polu in je ob spomladanskem enakonočju neopredeljena. Nato se krajša do najmanjše vrednosti $2,3v$ ob poletnem Sončevem obratu, daljša se do neopredeljenosti ob jesenskem enakonočju, potem pa Sonca sploh ni na spregled in sence ni, saj je Sonce pod obzorjem vso jesen in zimo. Nato se zadeva ponovi.



SLIKA 3.

V tem primeru je opoldanska dolžina sence $s = v / \operatorname{tg} \delta$ in je ob enakonočju neopredeljena. Definirana je le za pozitivne δ , saj samo tedaj pride do sence. Opazujemo jo lahko le od spomladanskega do jesenskega enakonočja, kar velja za vse kraje na severni Zemljini poluti.

Na splošno se torej dolžina sence $s = v / \operatorname{tg} \delta$ za vse kraje na severni Zemljini poluti v času enega leta spreminja enako: od neopredeljene vrednosti ob enakonočjih do najmanjše vrednosti $v / \operatorname{tg} 23,5^\circ$ ob poletnem Sončevem obratu. Če npr. vzamemo $v = 1$ m in $\varphi = 45^\circ$, se dolžina sence spreminja od neopredeljene vrednosti do 2,3 m (poletni Sončev obrat).

Naloge

Pri risanju grafov velja omejitev $-23,5^\circ \leq \delta \leq 23,5^\circ$. Zato jih rišite od točke do točke. Pomagajte si z astronomskimi efemeridami *Naše nebo*, ki jih vsako leto izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (tu dobite podatke za deklinacijo Sonca)





in žepnim računalom. Grafe narišite za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Vsakič sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo $\delta | s$ in nato narišete graf.

Seveda grafe lahko skicirate, s čimer si ustvarite samo kakovostno sliko poteka senc. Grafe smiselno komentirate.

1. naloga

- Narišite graf $s = \cos \delta / \cos(45^\circ - \delta)$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske v severni pol usmerjene ravne palice na vodoravna tla v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$, to je približno tako kot pri nas.
- Narišite graf $s = \cos \delta / \cos(-\delta)$, ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence metrske v severni nebesni pol usmerjene palice na vodoravna tla v krajih na ekvatorju.
- Narišite graf $s = \cos \delta / \sin \delta$, ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence omenjene metrske palice na vodoravna tla na severnem Zemljinem polu. Upoštevajte samo $s > 0$, ko je Sonce nad obzorjem.

Rešitve

- V času enega leta se dolžina sence spreminja približno od okoli 1 m (minimum) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek dolžine sence med letom, je zvezna, to je nepretrgana.
- V času enega leta se dolžina sence ne spreminja in je vse leto konstantna 1 m.
- V času enega leta se dolžina sence spreminja od neopredeljene vrednosti do minimalne 2,3 m (ob poletnem Sončevem obratu). Opazujemo jo lahko le spomladi in poleti; jeseni in pozimi pa sence ni, saj je Sonce pod obzorjem.

2. naloga

- Narišite graf $s = \cos \delta / \sin(45^\circ - \delta)$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja dolžina sence metrske v severni nebesni pol usmerjene ravne palice na navpično ravnino vzhod-zahod v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$, to je približno tako kot pri nas.

- Narišite graf $s = \cos \delta / \sin(-\delta) = -1 / \tan \delta$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence v severni nebesni pol usmerjene metrske ravne palice v ekvatorskih krajih na navpično ravnino. Upoštevajte le $s > 0$.
- Narišite graf $s = \cos \delta / \sin(90^\circ - \delta)$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence v severni nebesni pol usmerjene metrske palice na severnem Zemljinem polu na navpično ravnino. Upoštevajte samo $s > 0$.
- Ravno palico z dolžino d zapičimo v navpično ravnino vzhod-zahod tako, da leži v smeri sever-jug (podnožišče palice na ravnini je na severu, vrh na jugu) in oklepa z vodoravno ravnino kot $90^\circ - \varphi$ (palica leži v ekvatorialni ravnini).

Izračunajte dolžino najdaljše sence, ki jo od Sonca osvetljena palica z dolžino $d = 1$ m v naših krajih $\varphi = 45^\circ$ opoldne meče na navpično ravnino. Razpravljajte o rezultatu. Narišite graf, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence tako naklonjene metrske ravne palice na navpično ravnino v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$ (približno tako kot pri nas): $s = \sin \delta / \sin(45^\circ - \delta)$: $[s = d \sin \delta / \sin(\varphi - \delta) \rightarrow s = \sin 23,5^\circ / \sin 21,5^\circ = 1,09 \text{ m}]$

Rešitve

- V času enega leta se dolžina sence palice spreminja približno od 1 m (minimum ob zimskem Sončevem obratu) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek dolžine sence med letom, je zvezna.
- V času enega leta se dolžina sence palice spreminja od nedoločene vrednosti ob enakonočjih do 2,3 m (minimum) ob zimskem Sončevem obratu. Senco lahko opazujemo le v jesenskem in zimskem času, spomladi in poleti pa je ni, saj se Sonce giblje po nebu za steno.
- V času enega leta se dolžina sence ne spreminja, meri 1 m, in to od spomladanskega do jesenskega enakonočja (spomladi in poleti), jeseni in pozimi pa sence sploh ni, saj se Sonce giblje pod obzorjem.

3. naloga

- Narišite graf $s = 1 / \operatorname{tg} \delta$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske v severni pol usmerjene ravne palice na ekvatorialno ravnino v poljubnem kraju severne geografske širine (tudi v tistem z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$, približno tako kot pri nas).

Krivulja ni zvezna, ob enakonočjih je pretrgana in vsako leto doseže minimum 2,3 m (ob poletnem Sončevem obratu).

- Izračunajte dolžino najkrajše sence, ki jo od Sonca osvetljena navpična palica z višino $v = 1$ m v naših krajih s $\varphi = 45^\circ$ meče na ekvatorialno ravnino. Senca je definirana, ko jo opazujemo, za $\delta > 0$. Razpravljajte o rezultatu: $[s = v \sin(\varphi - \delta) / \sin \delta \rightarrow s = \sin 21,5^\circ / \sin 23,5^\circ = 0,68 \text{ m}]$

Narišite ali samo skicirajte graf, ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske navpične palice na ekvatorialno ravnino v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$ (približno pri nas): $s = \sin(45^\circ - \delta) / \sin \delta$.

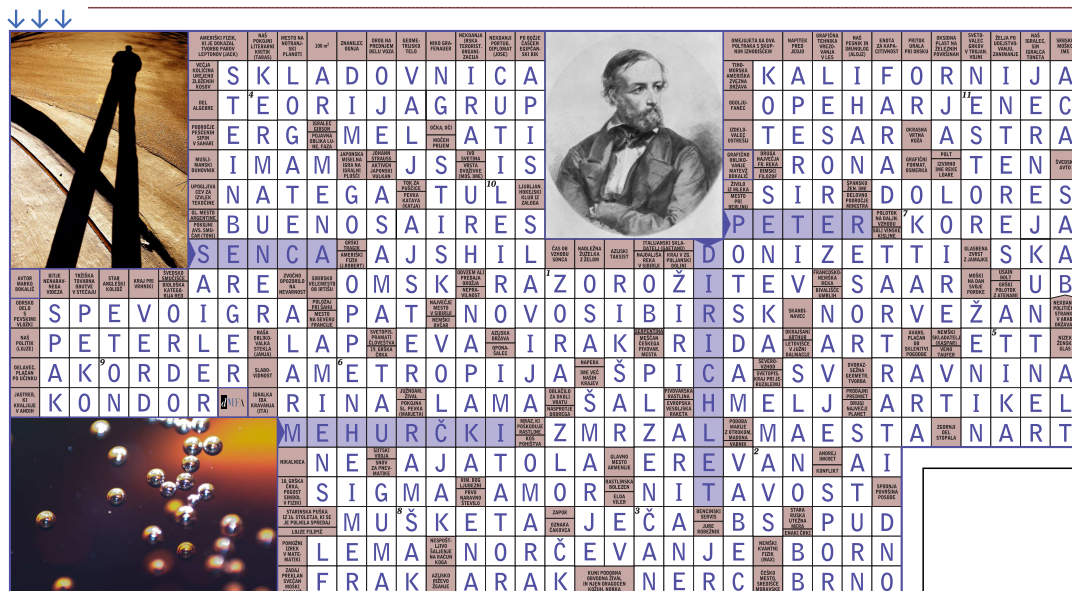
- Izračunajte dolžino najkrajše sence, ki jo od Sonca osvetljena vodoravna palica z dolžino $d = 1$ m v naših krajih s $\varphi = 45^\circ$ meče na ekvatorialno ravnino. Senco opazujemo le, ko je $\delta > 0$. Razpravljajte o rezultatu: $[s = d \cos(\varphi - \delta) / \sin \delta \rightarrow s = \cos 21,5^\circ / \sin 23,5^\circ = 2,33 \text{ m}]$

Narišite ali samo skicirajte graf, ki prikazuje, kako se med letom spreminja dolžina sence metrske vodoravne palice na ekvatorialno ravnino v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$ (približno kot pri nas): $s = \cos(45^\circ - \delta) / \sin \delta$.

Literatura

- [1] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2006.
- [2] M. Prosen, *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica 3, DMFA – založništvo, Ljubljana 1978.
- [3] M. Prosen, *Ukvarjanje s senco*, Presekova knjižnica 39, DMFA – založništvo, Ljubljana 2003.

× × ×



**REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 45/1**

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka je **Začetek šole**. Izmed pravih rešitev so bili izžrebani SUZANA AVŠIČ iz Mirna, KAREL RANKEL iz Kranja in ALEN ĐUDARIĆ iz Celja, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×