PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 3
Strani 172–173

Marko Petkovšek:

NAGRADNA NALOGA

Ključne besede: naloga, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/884-Petkovsek.pdf

NAGRADNA NALOGA (v počastitev Ramanujanove stoletnice)

Zapis naravnega števila n v obliki vsote pozitivnih naravnih števil imenujmo *razčlenitev števila n.* Primer: $3 + 1 + 1$ je razčlenitev števila 5. Poiščimo vse razčlenitve števila 5. Pri tem vzemimo, da zapisi, ki se razlikujejo le v vrstnem redu členov, predstavljajo isto razčlenitev. Člene v zapisu uredimo po velikosti, od največjega do najmanjšega:

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Naj bo $R(n)$ število razčlenitev števila n. Pravkar smo ugotovili, da je $R(5) = 7$. Podobno kot $R(5)$ poiščimo prvih nekaj števil $R(n)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	2	3	5	7	11	16	22	30	42

Vrednost $R(0) = 1$ se zdi morda nenavadna, toda število 0 zares ima natanko eno razčlenitev, namreč prazno (brez členov).

Matematični svet slavi letos stoletnico rojstva genialnega indijskega matematika *Srinivase Ramanujana* (1887 – 1920). O njem ste lahko predlani brali v rubriki Bistrovidec (V. Batagelj: Taksi št. 1729, Presek 13 (1985/86) 4, str. 226). Med drugim je Ramanujan (skupaj z angleškim matematikom G.H. Hardyjem) odkril tudi točno formulo za števila $R(n)$. Razumevanje formule je zahtevno, zato je ne bomo navedli, pač pa vas vabimo k računanju teh števil s pomočjo računalnika.

S tvorbo vseh razčlenitev ne pridemo daleč, tudi z računalnikom ne, saj ima npr. število $R(100)$ devet desetiških mest, $R(1000)$ pa že dvaintrideset. Poizkusimo nalogo rešiti tako, da jo posplošimo – včasih je namreč splošnejši problem lažji od posebnega primera. Naj bo torej $R(k, n)$ število vseh tistih razčlenitev števila n, pri katerih največji člen ni večji od k. Kako bi računali števila $R(k, n)$? Če nam to uspe, bomo lahko računali tudi števila $R(n)$, saj je pri $k \geqslant n$ očitno $R(k, n) = R(n)$.

Razčlenitve, katerih največji člen ne presega števila k, lahko razdelimo na tiste, pri katerih je največji člen enak k, in tiste, pri katerih je največji člen manjši od k. Če pri prvih največji člen izpustimo, dobimo razčlenitev števila $n - k$, pri kateri je največji člen spet manjši ali enak k. Torej je prvih ravno $R(k, n-k)$. Pri drugih pa največji člen ne presega števila $k - 1$, torej jih je $R(k-1, n)$. Dobili smo rekurzivno formulo

$$R(k, n) = R(k, n-k) + R(k-1, n)$$

ki velja za $n \geqslant k \geqslant 1$. Ker vemo, da je $R(0, n) = 0$, če je $n \geqslant 1$, in $R(0, 0) = 1$, lahko začnemo računati. Na poti do cilja je še precej težav – a ker je naloga nagradna, prepuščamo nadaljevanje vam.

NALOGA: Izračunajte $R(n)$ za karseda velik n. Pri tem hočemo točno vrednost, torej vse cifre. Poslani izdelek naj vsebuje:

1. števili n in $R(n)$
2. kratko razlago uporabljenega postopka
3. program
4. podatke o računalniku (tip, velikost pomnilnika)
5. podatke, koliko časa je računalnik porabil za računanje števila $R(n)$ iz 1. točke

Pri ocenjevanju pravilnih odgovorov bomo upoštevali:

1. velikost števila n (glede na tip in velikost računalnika)
2. kakovost uporabljenega postopka
3. ličnost programa.

Tudi če se vaš izdelek odlikuje le v eni od teh treh kategorij (npr. niste prišli daleč z n–jem, ste se pa potrudili in napisali ličen program; ali pa ste izračunali $R(n)$ za velik n, medtem ko je program pravo sračje gnezdo), nam ga vsekakor pošljite. Najboljši triji reševalci bodo dobili knjižne nagrade. Izvirno rešitev bomo objavili.

Rok za pošiljanje izdelkov: 1.III. 1988. Na ovojnico poleg naslova pripišite: (za Ramanujan).

Pripomba o terminologiji: S tujo besedo rečemo zapisu števila v obliki vsote *particija.* Nekateri uporabljajo izraz *razbitje,* ki pa ima rahel prizvok nečesa nasilnega. Ker sestavnim delom aritmetičnega izraza, ki ima obliko vsote, rečemo *členi* (prim. izraze *enočlenik, dvočlenik* ipd.), se mi zdi morda še najprimernejši izraz *razčlenitev.*

Marko Petkovšek