Dotikajoče se krožnice in središčni razteg

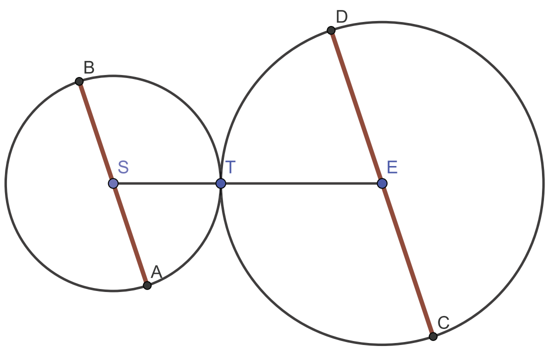
↓↓↓
Peter Legiša
→

Trije problemi

V tem prispevku bomo tri probleme o dotikajočih se krožnicah najprej rešili elementarno, nato pa dva med njimi ponovno z uporabo preproste geometrijske transformacije, imenovane središčni razteg. Kot bomo videli, je ta druga metoda večkrat bolj elegantna in tudi naravna.

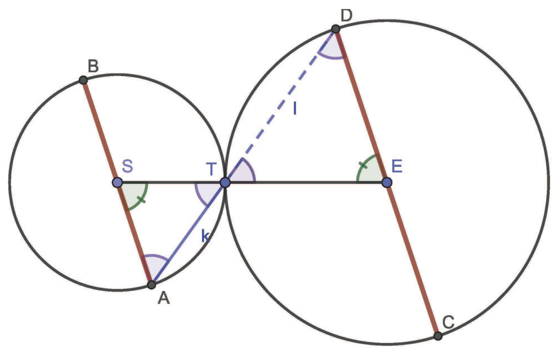
Leta 1802 je bil na univerzi Cambridge na pomembnem izpitu, imenovanem *Mathematical Tripos*, zastavljen ([1, str. 12–13]) kot srednje težak naslednji problem.

1. Imamo dve krožnici, ki se dotikata v točki T. Narišemo dva vzporedna premera, AB in CD teh krožnic kot na sliki 1. Dokažimo, da daljici AD in BC potekata skozi dotikališče T.



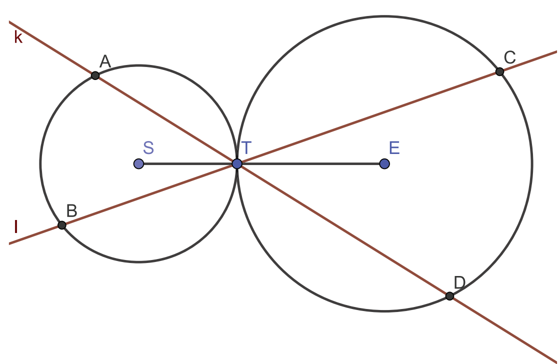
SLIKA 1.
Vzporedna polmera dotikajočih se krožnic

Rešitev. Vemo, da središči S, E obeh krožnic in dotikališče T ležijo na isti premici. Ker sta premera AB in CD vzporedna, oklepata skladna kota s premico skozi točke S, T, E. To smo označili z zeleno



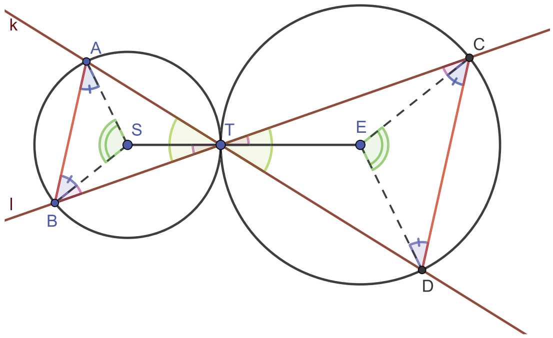
SLIKA 2.
Trikotnika ΔAST in ΔDET sta enakokraka.

barvo na sliki 2. Trikotnika ΔAST in ΔDET sta enakokraka. Kota med krakoma sta skladna. Denimo, da merita α stopinj. Zato sta skladna tudi kota ob osnovnici obeh trikotnikov – oba merita $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Tako sta kota $\angle STA$ in $\angle ETD$ skladna. To pa pomeni, da točke A, T, D ležijo na isti premici. Enako vidimo, da B, T, C ležijo na isti premici.



SLIKA 3.
Premici k, l gresta skozi dotikališče krožnic.

2. Na sliki 3 imamo spet dve krožnici s središčema S in E, ki se dotikata v točki T. Premici k, l potekata skozi T in sekata prvo krožnico zaporedoma v točkah A, B in drugo krožnico zaporedoma v točkah D, C kot na sliki 4. Dokažimo, da sta tetivi AB in CD vzporedni. (Tudi ta problem je iz [1, str. 203].)

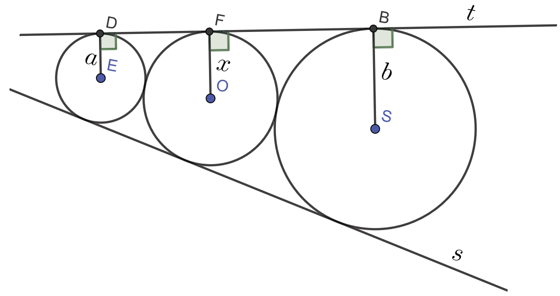


SLIKA 4.
Na sliki imamo več enakokrakih trikotnikov.

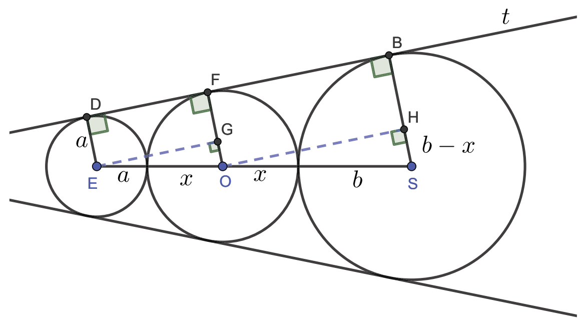
Rešitev. Oglejmo si sliko 4. Kota $\angle STB$ in $\angle ETC$ sta skladna. Trikotnika ΔTBS in ΔTCE sta enakokraka. Zato sta prej omenjenima kotoma skladna tudi $\angle TBS$, $\angle TCE$ (rdeča barva). Kota $\angle ASB$ in $\angle CED$ sta središčna kota z enako velikim obodnim kotom z vrhom pri T. Torej sta tudi skladna (dvojni zeleni lok). Trikotnika ΔASB in ΔCED sta spet enakokraka. Ker imata enako velik kot pri vrhu, imata tudi skladna kota ob osnovnici: to sta modro označena kota $\angle SBA$ in $\angle ECD$. Torej sta tudi kota $\angle TBA$ in $\angle TCD$ skladna. Daljici AB in CD oklepata enak kot s premico l, torej sta vzporedni.

3. Tri krožnice se dotikajo od zunaj in imajo dve skupni tangenti kot na sliki 5. Polmer najmanjše krožnice je a, polmer največje b. Koliko znaša polmer x srednje krožnice?

Rešitev. Tangenta t se dotika najmanjše krožnice v točki D, srednje v točki F, največje v točki B. Središče E najmanjše krožnice je za $a = |DE|$ oddaljeno od premice t (in od druge skupne tangente s). Podaljšajmo tangenti s, t do presečišča A kot na sliki 9. Točka E je središče kroga, včrtanega kotu s krakoma s in t. Zato leži na simetrali p kota med tangentama



SLIKA 5.
Narisani so polmeri do dotikališč.



SLIKA 6.
Modri črtkani črti sta vzporedni tangenti t.

z vrhom v A. Enako velja za središči O, S preostalih krožnic. Točke E, O, S so torej kolinearne.

Na sliki 6 vzporednica skupni tangenti t skozi središče E najmanjše krožnice seka polmer OF srednje krožnice v točki G. Vzporednica skupni tangenti t skozi središče O srednje krožnice seka polmer SB velike krožnice v točki H. Pravokotna trikotnika ΔEOG in ΔOSH imata paroma vzporedne stranice in sta tako podobna. Zato je

- $|OG| : |EO| = |SH| : |OS|$

ali

- $$\frac{x-a}{x+a} = \frac{b-x}{b+x}.$$

Znebimo se ulomkov:

- $x^2 + bx - ax - ab = -x^2 + bx - ax + ab$

in od tod $2x^2 = 2ab$. Tako je

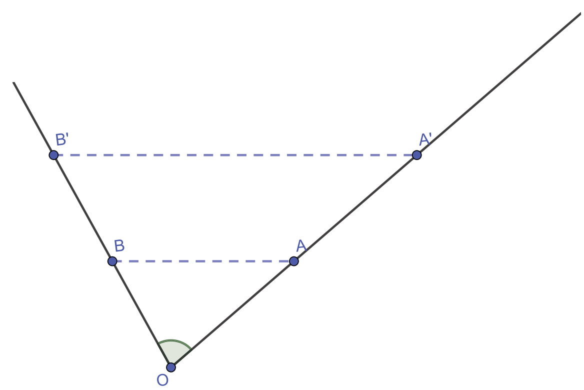
- $x = \sqrt{ab}$.

Središčni razteg v ravnini in prostoru

Po domače središčni razteg pomeni razteg (ali pomanjšanje) za isti faktor v vseh smereh.

Definicija. Vzemimo od 0 različno število k. V ravnini fiksirajmo točko O. Poglejmo si transformacijo, ki vsaki točki A priredi tako točko $A' = f(A)$, da velja:

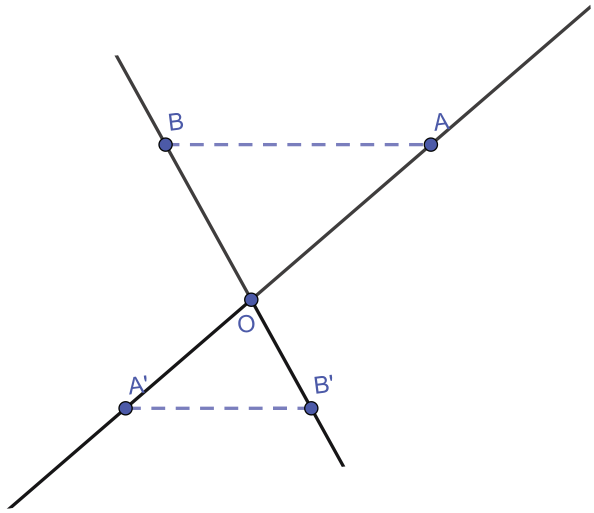
1. Razdalja med O in A' je razdalja med O in A, pomnožena s $|k|$: $|OA'| = |k||OA|$.
2. Če je $k > 0$, leži točka A' na poltraku p iz O skozi A.
3. Če je $k < 0$, leži točka A' na komplementu poltraka p, torej spet na premici skozi O in A, ampak na drugi strani točke O kot A.



SLIKA 7.
Središčni razteg s faktorjem $k = 2$

Na sliki 7 imamo središčni razteg s faktorjem 2, na sliki 8 pa s faktorjem -0,7.

Tej transformaciji rečemo *središčni razteg* (s tujo besedo *homotetija*) f s faktorjem k in s središčem (središčno točko) O. Seveda je $O' = O$, tako da razteg ohranja svoje središče. Če je $k = -1$, je naš razteg *zrcaljenje* preko točke O. Vsak razteg s faktorjem $k < 0$ lahko zapišemo kot sestav raztega s faktorjem $|k|$ in zrcaljenja preko središča.



SLIKA 8.
Središčni razteg s faktorjem $k = -0{,}7$.

Postavimo pravokotni koordinatni sistem z izhodiščem v točki O. Če sta (x, y) koordinati točke A, sta (kx, ky) koordinati točke A'. Funkcija f je bijektivna preslikava ravnine nase in njen inverz je dan s $f^{-1}(x, y) = (k^{-1}x, k^{-1}y)$. Inverzna preslikava je središčni razteg z istim središčem in s faktorjem $1/k$.

Če je s poljubna premica skozi središče O in B točka na s, leži tudi $B' = f(B)$ na s. Funkcija f preslika premico s bijektivno nase. Torej homotetija ohranja premice skozi svoje središče. Za $k \neq 1$ sicer razteg f premakne vsako točko na premici s, razen točke O, a preslikana točka ostane na s.

Vzemimo zdaj trikotnik ΔOAB kot na sliki 7. Razteg f ga preslika na trikotnik $OA'B'$. Oba trikotnika imata enak kot pri oglišču O in velja

- $|OA'| : |OB'| = |k||OA| : |k||OB| = |OA| : |OB|$.

Zato je trikotnik $\Delta OA'B'$ podoben prvotnemu. Trikotnika ΔOAB in $\Delta OA'B'$ imata paroma skladne kote. Zato sta daljici AB in $A'B'$ vzporedni. Velja še

- $|A'B'| = |k||AB|$.

Od tod sledi:

Središčni razteg trikotnik preslika na trikotnik z vzporednimi stranicami, torej paroma skladnimi koti. Oba trikotnika sta zato podobna.

→

Če je k faktor raztega f, ta razteg krožnico s polmerom r in s središčem S preslika na množico točk, ki so za $|k|r$ oddaljene od $S' = f(S)$. Slika krožnice je torej spet krožnica s polmerom $|k|r$ in s središčem S'.

Od tod sledi:

Trditev. Središčni razteg ohranja vsako premico skozi središče raztega. Premico, ki ne poteka skozi središče raztega, preslika na vzporedno premico. Daljico preslika na vzporedno daljico.

Središčni razteg s faktorjem k vse razdalje pomnoži s $|k|$.

Središčni razteg ohranja kote in trikotnik preslika na podoben trikotnik.

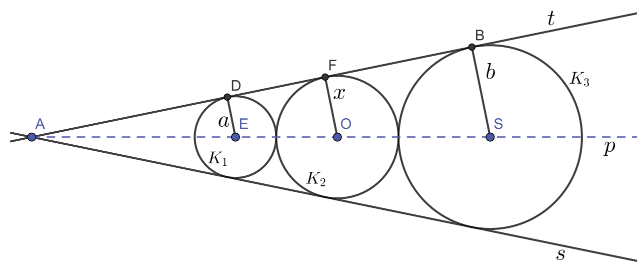
Središčni razteg f s faktorjem k nam krožnico s polmerom r in s središčem S preslika na krožnico s polmerom $|k|r$ in s središčem $f(S)$.

Ponovni pogled na drugo in tretjo nalogo

Poglejmo si stanje na sliki 3. Če je u razmerje polmerov večjega in manjšega kroga, nam središčni razteg f s faktorjem $m = -u$ in s središčno točko T preslika točko S na točko E in tako manjšo krožnico na večjo. Ohranja premici k, l in zato točko A, ki je presečišče leve krožnice in premice k, preslika na presečišče desne krožnice in premice k, torej na točko D. Po enakem premisleku f preslika B na C. Tako f preslika tetivo AB na tetivo DC. Ker f daljico preslika na vzporedno daljico, je dokaz končan.

Na povezavi [2] imamo interaktivno sliko, zasnovano na sliki 3. Število m lahko z drsnikom spreminjamo od -1 do -2. Vidimo, kaj središčni razteg s faktorjem m in s središčem v T naredi z levo krožnico in tetivo AB na njej. Preslikana tetiva ostaja vzporedna originalu. Za primeren m se pokrije s tetivo DC druge krožnice: $A'B' = DC$.

Poglejmo si še enkrat tretjo nalogo (slika 5). Podaljšajmo tangenti s, t do presečišča A kot na sliki 9. Točke E, O, S so enako oddaljene od obeh tangent in tako ležijo na simetrali p kota med tangentama z vrhom v A. Središčni razteg f s središčem A in s faktorjem $k = x/a > 1$ ohranja premico p. Malo krožnico K_1 s polmerom a ta razteg preslika na krožnico s polmerom x in s središčem na p. Ker se mala krožnica dotika obeh tangent in f ohranja tangenti, ima tudi preslikana krožnica natanko eno skupno točko s premico s in natanko eno skupno točko s premico t. Edina taka krožnica s polmerom x pa je srednja krožnica K_2. Torej f preslika K_1 na K_2.



SLIKA 9.
Tangenti se sekata v A.

Središčni razteg f nam unijo krožnic K_1 in K_2 preslika na sestav dveh večjih krožnic s središčema na p, ki imata natanko eno skupno točko in se obenem dotikata obeh tangent. Tako se $f(K_1) = K_2$ in $f(K_2)$ dotikata. Obe preslikani krožnici se tudi dotikata premic s, t. Tako je edino mogoče, da je $f(K_2) = K_3$. Zato je $b = kx = x^2/a$ in od tod $x = \sqrt{ab}$.

Naredili smo še animacijo [3]. Na njej imamo drsnik za število k, ki se lahko giblje od 1 do 2. Vidimo lahko, kaj razteg s središčno točko A in s faktorjem k naredi s sestavom levih dveh krožnic na sliki 9. Za primeren k dobimo desni krožnici na sliki 9. To ilustrira gornjo diskusijo.

Literatura

[1] J. L. Heilbron *Geometry Civilized, History, Culture, and Technique*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[2] *Animacija središčnega raztega krožnice in njene tetive v Geogebri*, dostopno na `www.geogebra.org/m/xwbfmyus`, ogled 12. 10. 2021.

[3] *Animacija središčnega raztega unije krožnic, ki se dotikata v Geogebri*, dostopno na `www.geogebra.org/m/zpchn8vd`, ogled 12. 10. 2021.

× × ×