PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 2
Strani 108–109

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Šemrl:

RAZRED S-TRIKOTNIKOV

Ključne besede: matematika, analiza.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/14/826-Milosevic-Semrl.pdf

RAZRED S-TRIKOTNIKOV

Poznamo več razredov trikotnikov, ki imajo kakšno določeno lastnost, s pomočjo katere lahko zanje dokažemo mnoge druge lastnosti. Tako na primer za pravokotne trikotnike velja, da je kvadrat hipotenuze enak vsoti kvadratov katet. Mi bomo obravnavali razred S–trikotnikov, ki imajo nekaj zanimivih lastnosti.

DEFINICIJA. Trikotnik s stranicami a, b, c ($a < b < c$) je S–trikotnik natanko tedaj, ko so njegove stranice členi aritmetičnega zaporedja. To pomeni obstoj takega pozitivnega števila d, da velja $b = a + d$ in $c = a + 2d$.

IZREK 1. Vsak S–trikotnik zadošča relaciji $v_b = 3r$, kjer smo z v_b označili višino na stranico b in s črko r polmer včrtanega kroga.

Dokaz. Vsak S–trikotnik zadošča relaciji

$$a + c = 2b \tag{1}$$

in zato velja

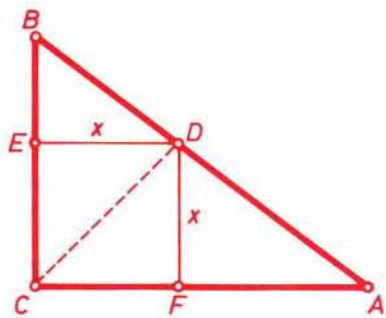
$$2s = a + b + c = (a + c) + b = 3b \tag{2}$$

Ker je ploščina trikotnika enaka $P = (1/2)b.v_b = r.s$, dobimo $v_b = (2rs)/b$. Ta relacija nam da skupaj z enačbo (2) željeni rezultat.

IZREK 2. Naj bo S–trikotnik pravokoten. Potem je kvocient radija včrtanega kroga s stranico kvadrata, ki je včrtan v trikotnik tako, da je eno njegovo oglišče na hipotenuzi, dve stranici pa na katetah (glej sliko), enak 7/12.

Dokaz. Označimo stranico včrtanega kvadrata z x. Ploščina trikotnika ABC je enaka vsoti površin trikotnikov ACD in BCD, tako da velja $(1/2)\ ab = (1/2)\ bx + (1/2)ax$. Od tod sledi $x = ab/(a + b)$. Ker je $r = P/s = ab/(a + b + c)$, dobimo

$$r/x = (a + b)/(a + b + c) \tag{3}$$



Pitagorov izrek, uporabljen skupaj z relacijo (1), nam pove, da je $b = (4/3)a$ in $c = (5/3)a$. Torej iz (3) sledi: $r/x = 7/12$. S tem je izrek dokazan.

S–trikotniki imajo še nekaj zanimivih lastnosti. In ker vam bo prav gotovo v veselje, če jih boste dokazali sami, vam te lastnosti podajamo v obliki nalog.

1. Dokažite, da za vsak S–trikotnik veljajo sledeče relacije:

a) $a.c = 6.R.r$

b) $(s-a)(s-c) = 3r^2$

c) $(c-a)^2 = 8r(R-2r)$

kjer smo z R označili polmer očrtanega kroga.

2. Če je S–trikotnik pravokoten, potem je razlika njegove najdaljše in najkrajše stranice enaka premeru včrtanega kroga.

3. Določite medsebojno razmerje stranic S–trikotnika, katerega ploščina je enaka 3/4 ploščine enakostraničnega trikotnika z istim obsegom.

4. Kolikšne so stranice pravokotnega S–trikotnika, če je

a) njegova površina 24,

b) njegov obseg 96,

c) višina na hipotenuzo 21,6?

Dragoljub M. Milošević
Prevedel *Peter Šemrl*