PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 4
Strani 242–243

Olga Arnuš:

O TREH HIŠAH IN TREH VODNJAKIH

Ključne besede: matematika, diskretna matemtika, graf.

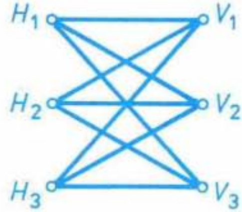
Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/902-Arnus.pdf

O TREH HIŠAH IN TREH VODNJAKIH

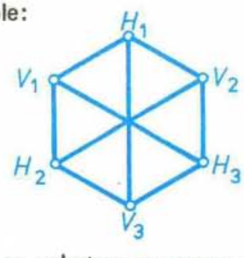
Prebivalci treh hiš so imeli na voljo tri vodnjake. Ker so bili le-ti z vodo različno oskrbovani, so se lastniki hiš odločili, da bodo od vsake hiše speljali pot k vsakemu vodnjaku. To bi radi naredili tako, da se poti ne bi križale. Ali je to mogoče?

Matematični model za predstavitev te naloge je **graf.** Preprosto povedano: graf je določen, če poznamo neko množico (njene elemente bomo imenovali kar točke) in če so nekateri pari teh točk v določenem odnosu (takemu odnosu pravimo povezava). Graf lahko ponazorimo tako, da točke kakorkoli narišemo v ravnini, povezavo pa ponazarja kar črta med točkama (ni nujno daljica). In še to: tu nas bodo zanimali le grafi, pri katerih ni usmerjenih povezav (ni važno, katera točka je začetna in katera končna). Graf bomo imenovali **povezan,** če je mogoče iz poljubne točke priti po povezavah v katerokoli drugo točko.

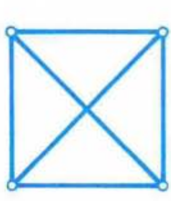
Našemu uvodnemu problemu ustreza naslednji graf:

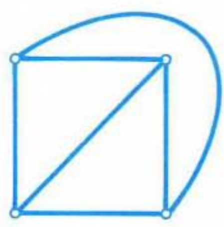


Narišemo ga lahko tudi takole:



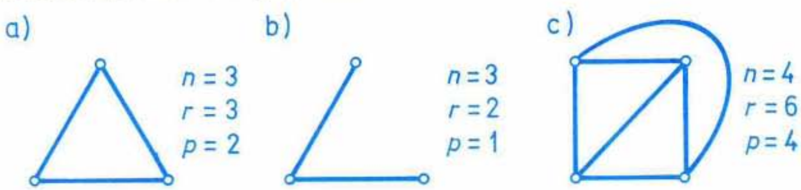
V obeh primerih vidimo, da se nekatere povezave sekajo. Zanima nas, ali je ta graf mogoče narisati tudi tako, da se povezave ne bi sekale, kar bi bila rešitev našega začetnega problema. To lahko na primer naredimo pri naslednjem grafu:





Grafom, ki jih lahko narišemo v ravnini tako, da se noben par povezav ne seka, pravimo **ravninski** ali **planarni grafi.** Oglejmo si neko lastnost teh grafov.

Planarni graf razdeli ravnino na p polj. Iz enega polja lahko pridemo v drugo le, če sekamo povezavo ali gremo skozi točko grafa. Naj ima planarni graf n točk in r povezav. Nekaj zgledov:



Eden najstarejših izrekov iz teorije grafov je Eulerjev izrek za planarne grafe. Tole pravi:

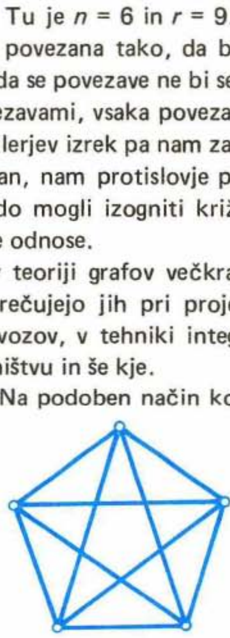
Če ima povezan planarni graf n točk, r povezav in p polj, potem je $n + p = r + 2$.

Zgornji primeri izrek potrjujejo. Dokaz pa zahteva več znanja iz teorije grafov, zato ga bomo opustili. Bralci ga lahko najdejo v knjigi D. Cvetkovića Teorija grafova i njene primene, nekaj predznanja pa bodo dobili v knjižici Najnujnejše o grafih, ki sta jo napisala D. Bajc in T. Pisanski in je izšla v Presekovi knjižnici leta 1985.

Vrnimo se k našemu uvodnemu grafu, kjer smo povezovali hišice z vodnjaki, in si ga oglejmo. Tu je $n = 6$ in $r = 9$. Iz obeh slik se da ugotoviti, da nobena trojica točk ni povezana tako, da bi oblikovala trikotnik. Če bi lahko ta graf narisali tako, da se povezave ne bi sekale, bi bilo vsako polje omejeno z najmanj štirimi povezavami, vsaka povezava pa meji na dve polji. Zato je $r \geqslant 4p/2$ ali $p \leqslant 9/2$. Eulerjev izrek pa nam za p da vrednost $p = r + 2 - n = 5$. Ker je naš graf povezan, nam protislovje pove, da graf ni planaren. Prebivalci treh hišic se ne bodo mogli izogniti križanju poti, zato bodo morali paziti na dobre medsosedske odnose.

S planarnimi grafi se v teoriji grafov večkrat srečamo. Uporaba pa sega tudi na druga področja. Srečujejo jih pri projektiranju cestnih omrežij, če izključujemo možnost nadvozov, v tehniki integriranih vezij, pri izvedbi nekaterih mehanizmov v strojništvu in še kje.

In še naloga za bralce. Na podoben način kot zgoraj je mogoče dokazati, da graf na sliki ni planaren.



Olga Arnuš