

$\sqrt{\text{matematika}} \geq 1\frac{1}{2}$ v šoli



letnik XXI. (2015) ∞ št 1 $\frac{1}{2}$

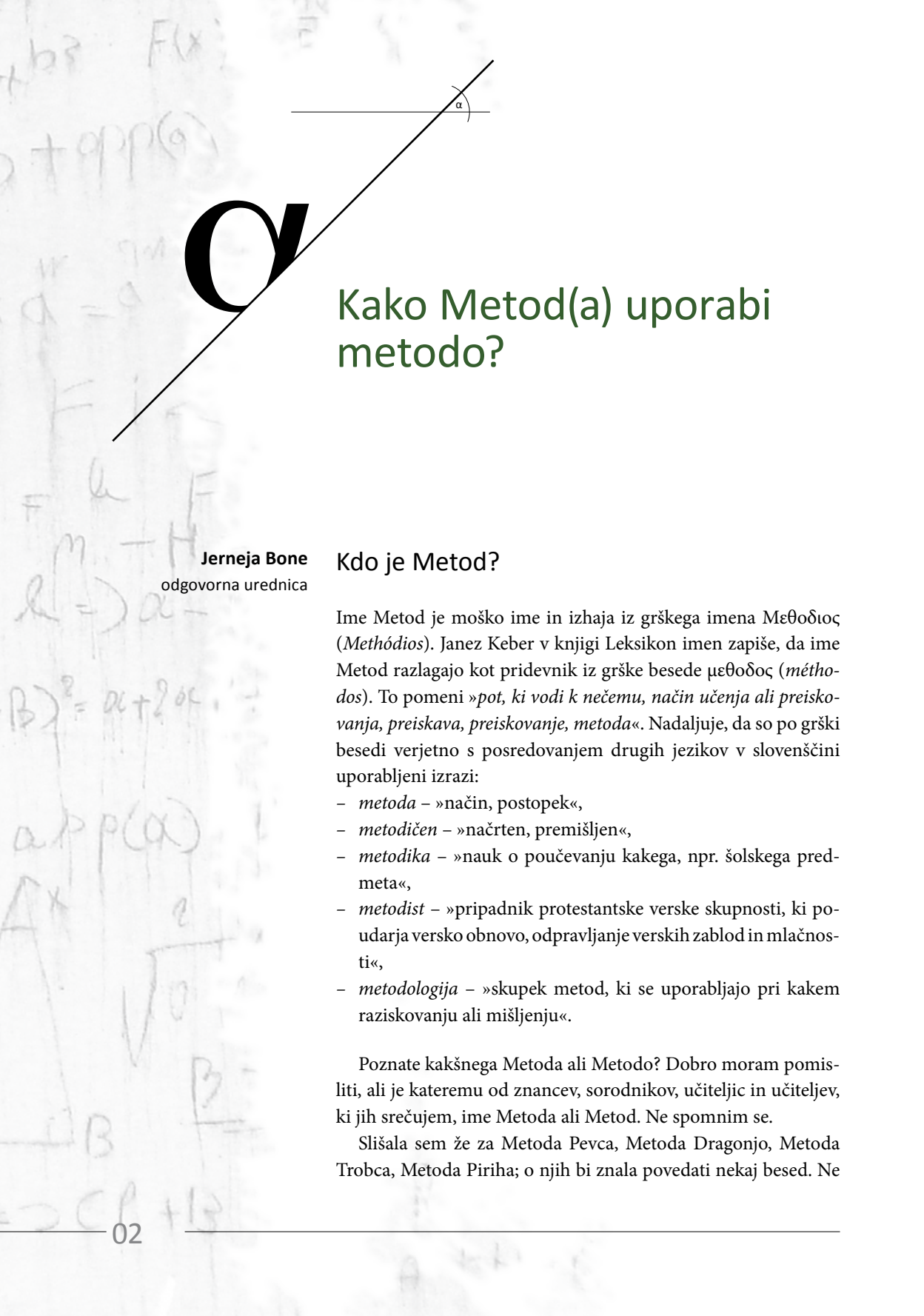


Vsebina

- Jerneja Bone
- 2 **Kako Metod(a) uporabi metodo? (uvodnik)**
Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog
Silva Kmetič
- 5 **Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog**
Mateja Sirnik
- 14 **Metoda napačne predpostavke**
Mojca Suban
- 24 **Metoda postopnega približevanja**
Sonja Rajh
- 31 **Metoda reševanja nazaj**
Sonja Rajh
- 42 **Grafično aritmetična metoda**
Amela Sambolić Beganović
- 50 **Metoda iskanja vzorcev**
Srednja šola
Janez Žerovnik
- 56 **Odvod funkcije brez uporabe limit**
Erik Vrčon
- 63 **Ko dijak postane učitelj**
Novice
Martina Hren
- 66 **Študijski obisk na temo medpredmetnega povezovanja matematike z drugimi predmeti**
Stanislav Južnič
- 74 **Profesorji pisca matematičnih učbenikov Franca viteza Močnika**
Mija Bavcon Venko
- 82 **Obležitev 200-letnice rojstva Franca Močnika**
Anka Brinar
- 86 **Na OŠ Tišina vedno hitreje računamo**
Branka Hrast Debenjak
- 92 **Kako delajo z nadarjenimi dijaki v Srbiji?**
Franc Gosak
- 97 **Matematika na Scientix konferenci**

Contents

<i>Jerneja Bone</i> <i>How Method(s) use methods? (Editorial)</i>	2
Methods of Solving Textual and Problem Tasks	
<i>Silva Kmetič</i> <i>Methods of solving textual and problem tasks</i>	5
<i>Mateja Sirknik</i> <i>The Method of false position</i>	14
<i>Mojca Suban</i> <i>The Method of gradual approximation</i>	24
<i>Sonja Rajh</i> <i>Backward chaining method</i>	31
<i>Sonja Rajh</i> <i>The Arithmetic graphic method</i>	42
<i>Amela Sambolić Beganović</i> <i>The Pattern search method</i>	50
Secondary school	
<i>Janez Žerovnik</i> <i>The derivative of a function without the usage of limits</i>	56
<i>Erik Vrčon</i> <i>When the pupil becomes the teacher</i>	63
News	
<i>Martina Hren</i> <i>Study visit on the theme cross-curricular integration of Mathematics with other subjects</i>	66
<i>Stanislav Južnič</i> <i>Professors of Kt. Franc Močnik writer of mathematical textbooks</i>	74
<i>Mija Bavcon Venko</i> <i>Celebration of the 200th anniversary of the birth of Franc Močnik</i>	82
<i>Anka Brinar</i> <i>On the primary school Tišina we calculate faster and faster</i>	86
<i>Branka Hrast Debenjak</i> <i>How they work with gifted students in Serbia?</i>	92
<i>Franc Gosak</i> <i>Mathematics on the Scientix conference</i>	97



α

Kako Metod(a) uporabi metodo?

Jerneja Bone
odgovorna urednica

Kdo je Metod?

Ime Metod je moško ime in izhaja iz grškega imena Μεθόδιος (*Methódios*). Janez Keber v knjigi Leksikon imen zapiše, da ime Metod razlagajo kot pridevnik iz grške besede μέθοδος (*méthodos*). To pomeni »pot, ki vodi k nečemu, način učenja ali preiskovanja, preiskava, preiskovanje, metoda«. Nadaljuje, da so po grški besedi verjetno s posredovanjem drugih jezikov v slovenščini uporabljeni izrazi:

- *metoda* – »način, postopek«,
- *metodičen* – »načrten, premišljen«,
- *metodika* – »nauk o poučevanju kakega, npr. šolskega predmeta«,
- *metodist* – »pripadnik protestantske verske skupnosti, ki podarja versko obnovo, odpravljanje verskih zablod in mlačnosti«,
- *metodologija* – »skupek metod, ki se uporabljajo pri kakem raziskovanju ali mišljenju«.

Poznate kakšnega Metoda ali Metodo? Dobro moram pomisliti, ali je kateremu od znancev, sorodnikov, učiteljc in učiteljev, ki jih srečujem, ime Metoda ali Metod. Ne spomnim se.

Slišala sem že za Metoda Pevca, Metoda Dragonjo, Metoda Trobca, Metoda Piriha; o njih bi znala povedati nekaj besed. Ne

MATEMATIKA V ŠOLI, letnik 20, številka 1-2, april 2015 | ISSN 1318-010X | **Izdal in založil:** Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, Poljanska 28 | **Predstavniki:** dr. Vinko Logaj | **Uredniški odbor:** Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo, jerneja.bone@zrss.si (odgovorna urednica); Darja Antolin, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta Maribor, darja.antolin@uni-mb.si; dr. Darjo Felda, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, darjo.felda@pef.upr.si; dr. Marjan Jerman, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, marjan.jerman@fmf.uni-lj.si; Sabina Kumer, Solski center Krško – Sevnica, kumer.sabina@gmail.com; dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta Ljubljana, zlatan.magajna@pef.uni-lj.si; mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo sonja.rajh@zrss.si; Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem, simona.vres@guest.arnes.si; dr. Lucija Zeljko, Osnovna šola Sostro, lucija.zeljko@guest.arnes.si; dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija; dr. Jasmina Milinković, Pedagoška fakulteta Beograd, Srbija; dr. Bernat Sebastià Martínez, Univerza Alicante, Španija | **Jezikovni pregled:** Tatjana Ličen | **Izvečki v angleščini:** mag. Gregor Adlešič | **Oblikovanje:** Anže Škerjanec | **Urednica založbe:** Simona Vozelj | **Naslov uredništva:** Zavod RS za šolstvo, OE Nova Gorica (za revijo Matematika v šoli), Erjavčeva 2, 5000 Nova Gorica | **Prelom in tisk:** Design Demšar d. o. o., Present d. o. o. | **Naklada:** 570 izvodov | **Letna naročnina** (4 številke oziroma 2 dvojini): 20,86 EUR za šole in ustanove, 14,19 EUR za posameznike in 13,35 EUR za dijake, študente in upokojenice. | Cena posamezne dvojne številke v prosti prodaji je 13,35 EUR. | **Naročila:** ZRSS – Založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-pošta: zalozba@zrss.si | Revija je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo pod zaporedno številko 568. | Revija Matematika v šoli je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, ZDM – The International Journal on Mathematics Education, Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS) | Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana. | © Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2015 | Vse pravice pridržane. Brez založnikovega pisnega dovoljenja ni dovoljeno nobenega dela revije na kakršenkoli način reproducirati, kopirati ali kako drugače razširjati. Ta prepoved se nanaša tako na mehanske oblike reprodukcije (fotokopiranje) kot na elektronske (snemanje ali prepisovanje na kakršenkoli pomnilniški medij) ter medijske oblike reprodukcije. |

kolofon

morem trditi, da jih dobro poznam. Wikipedija navaja še nekaj znanih Metodov. Po-brskajte po spletu in raziščite. Morda ste že slišali zanje, morda jih celo poznate in o njih veste nekaj več. To so: Metod Bevk, Metod Gabršček, Metod Kumelj, Metod Badjura, Metod Brezigar, Metod Dular, Metod Humar, Metod M. Milač, Metod Turnšek, Metod Benedik, Metod Dolenc, Metod Frlic, Metod Koch, Metod Peternelj, Metod Tomac, Metod Kotnik in edina ženska Metoda Vidmar.

Morda pa je Metod ali Metoda prav vaše ime? Potem ste v veliki verjetnosti nekako povezani z matematiko. Učiteljica matema-tike, ki je poučevala na OŠ Cerkno, je bila Cirila Metoda Močnik in jo v svojem pris-pevku v tej številki omenja njena rojakinja v prispevku o praznovanju 200-letnice rojstva Franca viteza Močnika.

Kaj je metoda?

V Slovarju slovenskega knjižnega jezika (SSKJ) (1994), stran 547–548) najdem za-pisano o besedi metoda naslednje: **metó-**

da -e ž (ô) navadno s prilastkom *oblika načrtnega, premišljenega dejanja, ravnanja ali mišljenja za dosego kakega cilja; način, postopek*: izpopolniti, odkriti novo meto-do; te metode so nezanesljive, zamudne; metode obveščanja, zdravljenja / analitič-na, eksperimentalna metoda; za nazoren pouk uporabljajo avdiovizualno meto-do; knjiž. deduktivna metoda; primerjalna, statistična metoda; raziskovalne, učne me-tode / učiti po zastarelih metodah / de-lovne metode ♦ filoz. fenomenološka me-toda; ped. direktna metoda učenje tujega jezika brez uporabe maternega jezika; me-toda demonstracije; psih. metoda intros-pekcije; šol. črkovalna, glasovalna metoda; globalna ali celostna metoda; konverzacijs-ka metoda; šport. intervalna metoda treni-ranja treniranje tekačev z določenimi pres-ledki za oddih // nav. ekspr. določeno dejan-je, ravnanje ali mišljenje sploh: to so čudne metode; demokratične, revolucionarne me-tode; s tako metodo ne bo prišel daleč / di-plomatske, gangsterske metode / v tem delu ni nobene metode nobenega reda, sistema-tičnosti.

Matematika in metode

V leksikonu Matematika (Duden), založbe Učila, so omenjene:

- *metoda izčrpavanja* – že Arhimedu znana metoda za približno izračunavanje ploščine krivočrtnih likov,
- *metoda odštevanja* – postopek reševanja sistema linearnih enačb,
- *metoda vloženih intervalov* – zaporedje zaprtih intervalov.

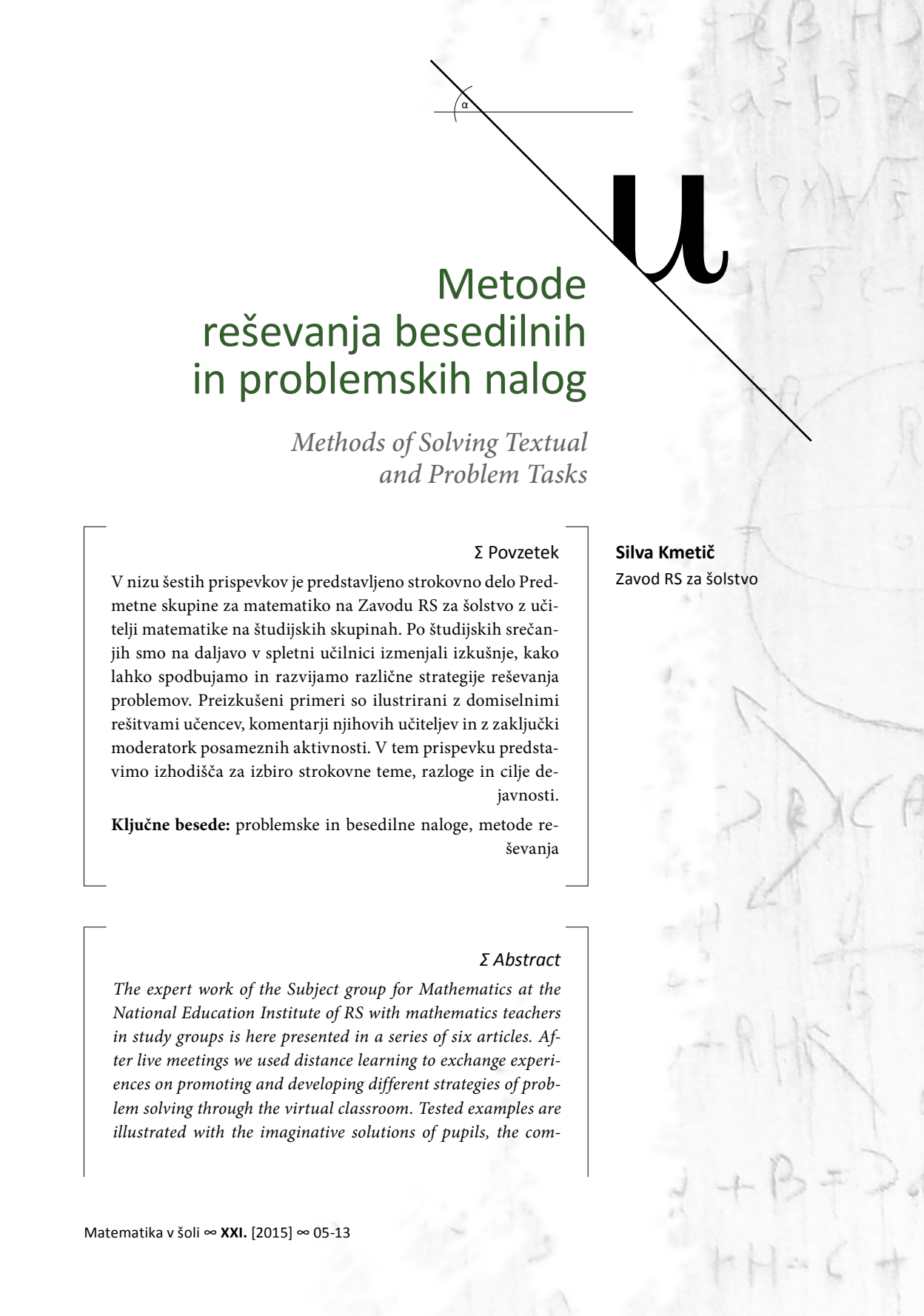
Iskanje po Wikipediji mi razkrije še poimenovanja mnogih drugih metod. Za mnoge od njih priznam, da sem pri branju prvič izvedela zanje. Naj jih nekaj naštejemo: metoda mejnih parov, metoda 360 stopinj, metoda končnih elementov, metoda aktivne množice, metoda območja zaupanja, metoda podpornih vektorjev, metoda z vmesnim jezikom, metoda množice aktivnih omejitev, metoda ocenjevalnega centra, metoda pospešene iteracije, metoda linijskega transeka, metoda navadne iteracije, metoda omejenega koraka, metoda regula falsi ...

Zakaj tak naslov?

Prvi del dvojne številke revije Matematika v šoli 21. letnika, ki jo imate v rokah, je namenjen **metodam reševanja besedilnih in problemskih nalog**. Poznate katero? Seznanjate z raznolikimi metodami reševanja besedilnih in problemskih nalog svoje učence? Če ste odgovorili z morda, redko, ne vem, mogoče pa to počnem ..., bo prvih 50 strani namenjenih prav vam.

Čeprav nobeni izmed članic Predmetne skupine za matematiko na Zavodu RS za šolstvo ni ime Metoda, smo se z metodami reševanja besedilnih nalog v šolskem letu 2010/11 veliko ukvarjale, z željo, da vašim učencem pomagajo na poti do dobrega reševalca matematičnih problemov. V prvih šestih prispevkih vam prikažemo razloge za uporabo različnih metod reševanja in jih razložimo.

Zato vas vabim, da bodimo vsi mi tisti Metodi in Metode, ki bomo predstavljene metode reševanja besedilnih in problemskih nalog v prispevkih spoznali in jih vnašali ter uporabljali pri pouku.



Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog

*Methods of Solving Textual
and Problem Tasks*

Σ Povzetek

V nizu šestih prispevkov je predstavljeno strokovno delo Predmetne skupine za matematiko na Zavodu RS za šolstvo z učitelji matematike na študijskih skupinah. Po študijskih srečanjih smo na daljavo v spletni učilnici izmenjali izkušnje, kako lahko spodbujamo in razvijamo različne strategije reševanja problemov. Preizkušeni primeri so ilustrirani z domiselnimi rešitvami učencev, komentarji njihovih učiteljev in z zaključki moderatorok posameznih aktivnosti. V tem prispevku predstavimo izhodišča za izbiro strokovne teme, razloge in cilje dejavnosti.

Ključne besede: problemske in besedilne naloge, metode reševanja

Silva Kmetič

Zavod RS za šolstvo

Σ Abstract

The expert work of the Subject group for Mathematics at the National Education Institute of RS with mathematics teachers in study groups is here presented in a series of six articles. After live meetings we used distance learning to exchange experiences on promoting and developing different strategies of problem solving through the virtual classroom. Tested examples are illustrated with the imaginative solutions of pupils, the com-

ments of their teachers and the conclusions of the moderators of individual activities. Starting points for the selection of an expert topic and the reasons and objectives of the activity are presented in this paper.

Keywords: *problem and textual tasks, methods for problem solving*

α Uvod

Predstavili bomo del dejavnosti, ki jih je izvedla Predmetna skupina za matematiko na ZRSŠ v sodelovanju z učitelji matematike v šolskem letu 2010/11. Nekaj mesecev zapored smo predstavili po eno metodo za reševanje problemov in predlagali preizkus v razredu. Učitelji so metode reševanja preizkušali, 118 učiteljev pa je svoje izkušnje v obliki poročila tudi oddalo v spletni učilnici študijske skupine za matematiko v osnovni šoli. V razpravo so se vključevali tudi drugi učitelji s posameznimi komentarji in s svojimi izkušnjami z reševanjem problemskih nalog. Prejeli smo tudi nekaj dodatnih zanimivih besedilnih oz. problemskih nalog. Besedilne naloge oz. probleme so reševali učenci od 6. do 9. razreda v okviru rednega ali dodatnega pouka matematike.

V slovenski praksi poučevanja matematike so besedilne naloge zelo pogoste in razmejitev pojmov besedilna in problemska naloga ni povsem jasna. To je tudi razlog za krovno temo študijskih srečanj v šolskih letih 2010/11 in 2011/12 *Od besedilnih do problemskih nalog*.

Cilji dela na daljavo na temo *Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog* so bili:

- razviti strokovno razpravo o poučevanju reševanja besedilnih oziroma problemskih nalog,

- izmenjati različne izkušnje in s tem bogatiti poučevalno prakso,
- ustvariti nabor v praksi preizkušenih problemskih nalog,
- strokovno uživati ob proučevanju miselnih procesov naših učencev ...

Na študijskih srečanjih smo raziskovali, kaj bi bila smiselna definicija besedilne oz. problemske naloge, kaj lahko vpliva na uspešnost reševanja besedilnih nalog, kaj še lahko naredimo pri svojem pouku drugače ... Začeli smo z vlogo jezika in konteksta, nato smo se posvetili klasifikaciji besedilnih nalog glede na posamezno računsko operacijo in njen razvojni vidik. Spoznanja ob teh dejavnostih naj bi vodila do odločitev o potrebni diferenciaciji pouka pri razvijanju sposobnosti reševanja besedilnih oz. problemskih nalog.

Nadaljevanje srečanj v živo je bilo delo na daljavo, ki smo ga izpeljali v dveh smereh:

1. v analizo uspešnosti učencev pri uporabi računskih operacij v enostavnih besedilnih nalogah¹,
2. v spodbujanje uporabe različnih metod reševanja problemskih nalog (objavljeno v spletni učilnici za osnovno šolo).

V tem in v naslednjih petih prispevkih predstavljamo samo rezultate druge točke.

¹ Objavljeno v spletni učilnici študijske skupine za matematiko za osnovno šolo.

β Nekaj iz teorije

V literaturi lahko najdemo veliko prispevkov, povezanih z besedilnimi in problemskimi nalogami. Zanimiv je že problem definicije, kaj je problemska in kaj besedilna naloga ter kaj njihova funkcija v izobraževanju matematike. Izognili se bomo teorijam in raziskavam ter se v tem in v naslednjih petih prispevkih² osredotočili samo na izvedene dejavnosti, za katere smo menili, da bi se lahko trajneje in pozitivno odzrcalile v učni praksi. Lotili smo se načinov reševanja besedilnih oziroma problemskih nalog.

Najpogosteje se v poučevalni praksi omenja metoda ključnih besed. Učenci izpišejo podatke in podčrtajo ključne besede, ki jih povežejo z računsko operacijo; npr. glagol 'povečati', povežejo z operacijo seštevanja in 'ima manj' z odštevanjem. Drugi pogosti napotek je: 'Narišite po besedilni nalogi sliko'. Splošnim napotkom o natančnem branju se doda še katera od različic seznama napotkov po Polyi (1985): Razumevanje problema, izdelava načrta reševanja, izvajanje načrta reševanja in pogled nazaj. Osredotočili smo se na drugo in tretjo točko s seznama zato, da učenci obogatijo svoje izkušnje pri reševanju in niso usmerjeni samo v uporabo formule oz. v reševanje z enačbo. Menimo, da je omenjeni nabor metod ob navodilu *izpiši podatke* preskromen, morda celo kdaj zavaja, npr. metoda ključnih besed, ali pa zavira napredovanje učenca pri razvoju problemskih znanj, če ne zna nastaviti enačbe. V besedilni nalogi zapisano *dati nekaj* lahko pomeni v matematičnem opisu *seštevanje* ali *odštevanje*. Naslednja pogosta dejavnost je *pravično*

deliti, ki tudi otrokom lahko pomeni poleg želene možnosti *deliti na enake dele* drugačen način delitve.

Namen uporabe besedilnih nalog je raznolik. Z besedilnimi nalogami razvijamo in preverjamo matematično terminologijo (zapiši in izračunaj vsoto produkta in količnika danih števil ...), uporabo računskih operacij v enostavnih in sestavljenih nalogah ter v različnih kontekstih, torej razvijamo zmožnost povezovanja in prenosa znanja, pojmov, postopkov, metod in spretnosti. Učenci prepoznavajo različne ključne besede za dejavnosti s količinami, ki se prevedejo v računске operacije z merskimi števili in merskimi enotami. Z razvojem matematičnih vsebin se tudi kontekst nalog bogati, številom v matematičnem kontekstu se najprej priključi količina *število konkretnih stvari* (svinčnikov, igrač, zabojev, dogodkov ...), nato količine, ki jih ne moremo ugotavljati s štetjem, ampak z merjenjem. To so naloge, ki vključujejo dolžino, maso, čas, količine, povezane z denarjem, ploščino, prostornino, hitrost ... torej njihova merska števila in merske enote.

V primerih reševanja kompleksnih ali za učenca celo problemskih nalog pričakujemo, da bo učenec pri reševanju uporabil matematični opis, sprva nastavljen aritmetični izraz, pozneje pa algebrskega oziroma enačbo. Osredotočeni smo na končni cilj pouka matematike, ki se razbere iz preglednice (Preglednica 1), kjer so izpisani bistveni standardi znanja, povezani z reševanjem besedilnih in problemskih nalog. 'Podporni' standardi znanja niso povezani samo z reševanjem problemskih nalog. Na primer cilji kot *ocenijo rezultate in meritve* (ugotovijo smiselni približek) so pomembno znanje za uspešno reševanje problemov. V vsakem triletju so opredeljeni tudi z ustreznim standardom, ki

2 Metoda napačne predpostavke, metoda reševanja nazaj, grafično aritmetična metoda, metoda postopnega približevanja, metoda iskanja vzorcev.

	Prvo vzgojno-izobraževalno obdobje	Drugo vzgojno-izobraževalno obdobje	Tretje vzgojno-izobraževalno obdobje
Standard znanja	– reši besedilne naloge iz vsakdanjega življenja	– reši matematične probleme in probleme iz vsakdanjega življenja, – pri reševanju (besedilnih) problemov uporablja različne bralne strategije ter kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih, – uporablja različne strategije pri reševanju problemov, povezanih z obsegom in ploščino, – opiše problemsko situacijo z matematičnim jezikom;	– uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja, – pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom, – pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih, – se kritično opredeli do interpretiranih podatkov, – opiše problemsko situacijo z izrazom ali enačbo;
'Podporni' standardi znanja	– pozna in uporablja računske operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje ter njihove lastnosti, – poišče manjkajoči člen pri računih seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja, – bere podatke iz preglednic in prikazov, – predstavi zbrane podatke, – prepozna, nadaljuje in oblikuje vzorec, – pozna matematično terminologijo.	– pozna in uporablja matematično terminologijo, – uporablja žepno računalno, – smiselno zaokroži število, – razlikuje med obsegom in ploščino, površino in prostornino, – meri, zapiše, pretvarja in računa z merskimi količinami, – ...	– matematični jezik uporablja pri sporazumevanju, – uporablja pojem spremenljivke, računa z algebrskimi izrazi, – življenjske situacije prikaže z modeli, – izrazi neznanko iz matematičnih formul, – prepozna odnose med količinami in jih uporablja v problemskih situacijah, – ...

[Preglednica 1] Nekateri standardi, ki jih pokrivamo z reševanjem problemskih nalog (Učni načrt, Program osnovna šola, MATEMATIKA, 2008/2011).

pa ga ni v preglednici. Zaradi preglednosti navajamo samo najočitneje povezane z reševanjem besedilnih in problemskih nalog.

Reševanje problemov je proces razvoja in iskanje strategij, skratka za učenca 'nabiranje' izkušenj, ki traja in mora biti postopno, zato standarda, **opiše problemsko situacijo z izrazom ali enačbo**, ne smemo pričakovati prehitro. Bogate izkušnje bodo učenca pripeljale do uspešnega reševalca, ki uporablja pri reševanju problemov tako formalne kot neformalne matematične metode. Če učenec

ne zna rešiti problema matematično 'elegančno', ga spodbujamo k uporabi drugih matematično manj formalnih strategij. Te morda ne dajo vseh rezultatov ali pa postopek ni splošen, kar pomeni, da ne zagotavlja rešitve za vsak podoben problem. Če se učenec zaveda pomanjkljivosti takšnih postopkov, je s tem prav tako obogatil svoje matematične znanje. Tudi izkušeni reševalci matematičnih problemov ne znajo rešiti vsakega problema. Če ne najdejo matematične formalne poti, se odločajo za drugačne pristope, da vsaj vidi-

jo, ali rešitev obstaja. V šolski matematiki so običajno vsi problemi rešljivi. Učitelj rešitev in pot pozna in razloži svoj način reševanja, kar pa vedno ne zagotavlja razvoja miselnih procesov posameznemu učencu.

Z dejavnostmi v spletni učilnici smo želeli spodbuditi ozaveščanje mogoče uporabe različnih strategij reševanja. Metod reševanja načeloma ne poučujemo, ampak jih spodbujamo, ko je potrebno. Ko učenec ne zna rešiti naloge po 'formalizirani' poti, ga usmerimo k metodi, ki jo bo lahko sam razvil in izpeljal ter z dejavnim ukvarjanjem s problemi sčasoma tudi formaliziral svojo pot reševanja z aritmetičnim izrazom ali z enačbo. Z vprašanji spodbujamo razmišljanje in dejavnosti učencev:

Ali lahko oceniš rezultat?

Poskusi s predvidenim rezultatom in sklepaj s konca (nazaj).

Poskusi na slepo (z naključno izbranim številom ...).

Tako lahko učenec poglobi razumevanje problema in morda dobi idejo, kako začeti, kar je običajno največja zadrega učencev. Pomagata tudi vprašanji:

Ali bi znal nalogo rešiti z drugačnimi podatki?

Ali bi znal rešiti podobno nalogo?

γ O metodah reševanja besedilnih in problemskih nalog

Besedilno oziroma problemsko nalogo običajno rešujemo z uporabo Descartove t. i. algebrske metode reševanja od zaključnih razredov osnovne šole dalje. Zanj je značil-

no, da poiščemo znane količine ali podatke in neznane količine (neznanke ali spremenljivke) ter odnose med podatki in spremenljivkami. Najpomembnejši odnos omogoča zapis enačbe oz. enačb (odvisno od števila neznank) in nato sledi reševanje enačbe. Rešitev enačbe preverimo glede na besedilo naloge, saj je mogoče, da smo napačno sestavili ali rešili enačbo, nato interpretiramo rešitev v kontekstu in napišemo odgovor ali poročilo.

Poglejmo si za ilustracijo tri različne postopke reševanja iste naloge: z enačbo, z aritmetičnimi izrazi in s kombinacijo metod.

Primer: Ribiči in ribe

Trije ribiči so skupaj ulovili 29 rib. Začeli so pripravljati ribjo enolončnico. Prvi je za enolončnico prispeval 5 svojih rib, drugi 4 ribe in tretji 2 ribi. Vsem je ostalo enako število rib. Koliko rib je ulovil vsak izmed njih?

Rešitev: 11, 10, 8

Učenec 9. razreda (Slika 1) je za neznanke x izbral število rib posameznega ribiča po kuhanju enolončnice, ko je ribičem ostalo enako število rib. Z algebrskimi izrazi je opisal ulov posameznega ribiča ter nadaljeval enačbo po besedilu naloge.

Učenec je nalogo uspešno rešil in s tem izkazal, da z razumevanjem uporablja jezik algebre pri reševanju tovrstnih besedilnih nalog.

Algebrska metoda je samoumevna za nekoga, ki ima za seboj več let učenja matematike. Učenci pa se z reševanjem besedilnih nalog srečajo veliko prej, kot so sposobni razumeti pojem neznanke ali spremenljivke, pojem enačbe, algebrske postopke reševanja enačb in sistemov enačb.

SWUPAJ... 29 rib

1... 5x

2... 4x

3... 2x

$$5 + x + 4x + 2x = 29$$

$$5x + 4x + 2x = 29$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

$$1... 5 + x = 5 + 6 = 11$$

$$2... 4 + x = 4 + 6 = 10$$

$$3... 2 + x = 2 + 6 = 8$$

} NA KONCU
USEM 6

ODK: Prvi je imel 11 rib, drugi 10, tretji pa 8.

[Slika 1] Uspešna uporaba algebrske metode

Učenec 7. razreda (Slika 2) je uspešno rešil nalogo z opisom realne situacije z aritmetičnimi izrazi. Z elegantnim postopkom izkazuje, da razume aritmetične izraze in dobljene rezultate računskih operacij.

Učenec razume pojem enakosti oziroma ekvivalentnosti med številskimi izrazi in pravilno uporablja matematične simbole za zapis svojih sklepov. 'Obšel' je pojem neznanka oz. spremenljivka.

Nekateri učenci razvijajo svoje strategije reševanja nalog. Učenec 8. razreda (Slika 3)

je predpostavil, da imajo na začetku vsi ribiči enako število rib, in sicer 9. Število 9 bi lahko bilo naključno, približek tretjine od 29 ali pa povezano s številom 18, ki pomeni število rib, ki niso v enolončnici. Zaradi zapisa ostanka 2 v rešitvi, lahko potrdimo drugo domnevo. V drugem koraku reševanja je učenec svoj poskus uspešno popravil glede na napačen izid prvega poskusa. Učenčev postopek bi lahko umestili k metodi reševanja s konca, metodi napačne predpostavke in k metodi izboljšanih poskusov.

$$29 - (5 + 4 + 2) = 29 - 11 = 18$$

$$18 : 3 = 6$$

$$6 + 5 = 11$$

$$6 + 4 = 10$$

$$6 + 2 = 8$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ -11 \\ \hline 18 \end{array}$$

ODK: Prvi ribič je ulovil 11 rib, drugi 10 rib, tretji pa 8 rib.

[Slika 2] Eleganten opis problema s številskimi izrazi.

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 2. \quad 3. \\
 \begin{array}{r} 9 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ -4 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ -2 \\ \hline 7 \end{array} \quad \text{od 1} \quad \begin{array}{r} 8 \\ -2 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ -4 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ -5 \\ \hline 6 \end{array}
 \end{array}$$

Dva ribič sta je ulovila
 11, drugi jih je ulovil 10 in
 tretji jih je ulovil 8.

[Slika 3] Način reševanja je kombinacija različnih metod

Nobeden od učencev pa na viden način ne preizkuša pravilnosti rešitve.

Učencem, ki ne razumejo naloge, najprej pomagamo nalogo razumeti. Preverimo, kakšno je njihovo razumevanje problema, nato pa jih usmerjamo z vprašanji. Če ne znajo izdelati načrta reševanja in začeti reševati naloge, ker še ne znajo zanesljivo uporabljati aritmetike oziroma algebre za opise problemskih situacij, lahko pomagamo z namigi in usmeritvami k uporabi drugih postopkov reševanja npr.:

- metoda napačne predpostavke,
- metoda reševanja nazaj,
- grafično-aritmetična metoda,
- metoda postopnega približevanja,
- metoda iskanja vzorcev ...

Ko se odločimo, da bomo spodbujali reševanje nalog z različnimi strategijami, naj bi bile dane problemske naloge tako zahtevne, da jih učenci z že znanimi postopki ne znajo rešiti. To pomeni, da morajo učenci v dani učni situaciji:

1. biti v zadregi, kako sploh začeti,
2. problemsko situacijo razumeti, predvsem kontekst, če gre za kontekstualizirano nalogo,
3. imeti potrebno matematično znanje.

Notranji učni pogovor učenca naj bi bil, kje in kako začeti reševati, kaj vem, kaj bi moral vedeti, kaj lahko izračunam, kolikšna bi lahko bila rešitev, lahko uporabim katero

izmed možnosti, kot so sistematično poskušanje, sklepanje s konca ...

Učitelj naj bi dal izhodiščni namig za reševanje, in ne navodil za reševanje. Predvidevati je treba, da bodo nekateri učenci reševali problem drugače, torej uporabili svojo metodo. Ti naj bodo spodbujani pri reševanju po lastni poti.

8 Primeri vprašanj, ki spodbujajo razmišljanje v procesu reševanja problemske naloge

Na začetku

Ali razumeš problem? Poznaš vse pojme, besede?

Kaj moraš izračunati?

Kaj se moraš vprašati?

Opiši problem s svojimi besedami.

Nariši sliko, diagram, uredi podatke ...

Kateri pripomoček boš uporabil?

Poskusi drugače.

Ali lahko napoveš rezultat?

Kako pa boš to zapisal?

Katere podatke imaš? Ali imaš dovolj podatkov? Kaj želiš izvedeti?

Poišči 'skrite' podatke.

...

Za tiste, ki so obtičali

Kaj si naredil do zdaj?
Kaj bi ti lahko pomagalo rešiti problem?
Primerjajte svoje delo v skupini.
...

Posredovanje učitelja med reševanjem

Kaj pa misliš s tem?
Zakaj si se odločil, da boš to napravil tako?
Razloži, kako si razmišljal?
Misliš, da to velja tudi za druga števila (like ...)?
Misliš, da to velja splošno?
...

Po koncu dejavnosti

Kako si prišel do odgovora?
Preveri svoje rezultate. Ali si našel vse rešitve?
Kako si preveril svoj rezultat?
Razloži svoj postopek.
Kaj pa je bistveno?
Kje pa lahko to uporabimo?
Kaj bi drugič napravil drugače?
Kaj pa, če bi začel tako?
...

ε Za konec

Po uvodnem strokovnem delu v živo se je sodelovanje z učitelji in med njimi nadaljevalo v spletni učilnici. Spletna učilnica se je izkazala kot uporabno okolje in delo na daljavo primerna oblika dela, ker so učitelji lahko preizkus v razredu načrtovali v skladu s svojo letno pripravo.

Izbrani primeri, predstavljeni v naslednjih petih prispevkih, so dragocena zakladnica

miselnih procesov učencev, komentarji učiteljev pa bogatijo naša skupna strokovna prizadevanja. Oddana poročila učiteljev so bila ponazorjena večinoma z uspešnimi potmi do rešitev. Za didaktiko pouka matematike so pomembne tudi delno uspešne in napačne poti, ki nam razkrivajo, s katerimi težavami se srečujejo učenci. V prihodnje bi si želeli, da učitelji objavljajo tudi neuspele poskuse, z dodano analizo zmot in napačnih predstav ter s posredovanjem učitelja, ki so učenca pripeljale prek ovir na poti reševanja.

Izkazalo se je, da je uporaba drugih metod reševanja manj učinkovita, ko učenci že znajo uporabljati za reševanje problemov enačbe. Iz zapisanega, ki sledi temu uvodnemu prispevku, lahko sklepamo, da učenci, preden spoznajo reševanje problemov z enačbami, pogosteje uporabljajo različne metode, da imajo težave s pravilnostjo zapisov aritmetičnih in algebrskih enakosti in da jih sistematično delo z veliko poskusi ne razveseljuje, torej težijo k elegantnejšim in matematično zgoščenim postopkom reševanja.

Delo na daljavo je spremljalo tudi nekaj napak, ki so jih opazili tako učenci kot učitelji, jih smiselno odpravili, vključili v razpravo ali pa nadgradili.

Ključni namen ukvarjanja z reševanjem besedilnih in problemskih nalog je povečati število zagnanih reševalcev matematičnih problemov. V matematiko vstopajo učenci s svojim delom, s samostojnim odkrivanjem matematičnih zakonitosti in strategij reševanja problemov.

Če na tej poti lahko učencem svetuje učitelj, bodo morda napredovali uspešneje in hitreje ali pa izboljšali odnos do predmeta. Učitelji smo pri tem lahko uspešnejši, če delimo svoje izkušnje in ideje.

Pri branju naslednjih petih prispevkov o reševanju matematičnih problemov opazimo, da se pri reševanju različne metode mnogokrat prepletajo. Iste metode srečamo v literaturi tudi pod drugačnimi imeni. Obstaja še več metod, kot na primer:

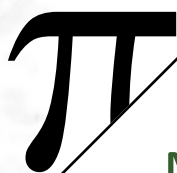
- Različni pogledi
- Reševanje lažjega, analognega primera
- Pomoč z ekstremnimi primeri
- Vizualizacija problema
- Ugibanje, poskušanje in testiranje

- Izčrpavanje (vseh) možnosti
- Organizirati podatke
- Logično sklepati
- ...

V reviji Matematika v šoli je bilo na to temo že objavljenih veliko prispevkov, na osnovi katerih lahko bogatimo svoje pedagoške izkušnje. Vabljeni še k branju priročnika (Suban, Kmetič in drugi, 2013), kjer sta *reševanju problemov* in *modeliranju* namenjeni dve obsežni poglavji različnih avtorjev.

η Literatura

1. Magajna, Z. (2003): Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike, Matematika v šoli. Letnik 10, št. 3/4 (2002/2003), str. 129–138.
2. Polya, G. (1985): Kako rešujemo matematične probleme, DMFA Slovenije Ljubljana.
3. Suban, M., Kmetič, S. in drugi (2013): Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi, Matematika.



Metoda napačne predpostavke

The Method of False Position

Mateja Sirnik

Zavod RS za šolstvo

Σ Povzetek

V članku je predstavljena metoda napačne predpostavke, ki je lahko ena od metod reševanja problemskih nalog. Metoda napačne predpostavke je predstavljena prek različnih nalog, ki so jih učitelji preizkušali pri pouku matematike. Poleg omenjene metode pri posameznih nalogah pogledamo še preostale načine reševanja, ki so mogoči in poskušamo ozavestiti pomen poznavanja različnih strategij reševanja problemskih nalog.

Ključne besede: problemske naloge, strategije reševanja, metoda napačne predpostavke

Σ Abstract

This paper describes the method of false position, which can be one of the methods for solving problem tasks. The method of false position is presented through a variety of tasks that teachers have been testing at Mathematics lessons. Besides the aforementioned method, we also take a look at the remaining possible methods of solution in the case of individual tasks and try to raise awareness of the importance of understanding various strategies for solving problem tasks.

Keywords: problem tasks, problem solving strategies, method of false position

α Predstavitev metode napačne predpostavke

Metoda napačne predpostavke se omenja že na Rindovem in Moskovskem papirusu, ki izvirata približno iz 1850 let pred našim štetjem. Oba papirusa sta se zaradi suhega podnebja zelo dobro ohranila.

Po Slovarju slovenskega knjižnega jezika je predpostavka *mnenje oziroma trditev, ki se v danem primeru sprejme za izhodišče ne glede na resničnost*.

Ideja te metode je naslednja: predpostavimo, da je poljubno izbrano število rešitev danega problema. Rezultat izvedene operacije iz naloge na izbranem številu nam pove, kolikokrat je izbrano število večje oziroma manjše od rešitve naloge. Na osnovi tega odnosa popravimo začetno predpostavko in pridemo do rešitve.

Na Rindovem papirusu se omenja naslednja naloga:

Naloga 1 – Neznano število I

Če nekemu številu dodamo četrtno tega števila, dobimo 15. Izračunaj to število.

Rešitev: Neznano število je 12.

Danes bi se lotili naloge z reševanjem enačbe. V tistih časih pa so uporabili metodo napačne predpostavke. Uporabimo jo tudi mi.

Predpostavimo, da je neznano število 4. Potem je četrtna tega števila 1. Ko neznani številu dodamo četrtno tega števila, dobimo 5. To je kar trikrat premalo, zato bomo za neznano število vzeli trikrat več in poskusili znova.

Tokrat naj bo neznano število 12. Četrtna od 12 je 3. Če številu 12 dodamo četrtno števila 12, dobimo 15, kar smo želeli. Torej smo našli neznano število, ki je 12.

Ta metoda se pojavlja v literaturi pod različnimi imeni. Zanj je značilno, da začnemo s konca, uganemo rezultat ali pa si ga izmislimo in preprosto preizkusimo. S postopkom poskusov in napak ali s postopkom izboljšanih poskusov pridemo do rešitve.

S tem postopkom želimo doseči več kot le rešitev naloge. Pričakujemo, da bo učenec s svojo izkušnjo problem ponotranjil, dosegel razumevanje in nalogo rešil na matematični način. Nekateri lahko to naredijo takoj, drugi pa po več izkušnjah. V devetem razredu lahko učenci v takem procesu spoznajo, kaj so znani podatki, kaj je neznanka, kako zapisati enakost oziroma enačbo, kako preveriti pravilnost rezultata.

Zgoraj omenjeno nalogo in druge smo ponudili učiteljem kot izhodišče za preizkus metode napačne predpostavke pri pouku matematike.

β Reševanje naloge Neznano število I

V nadaljevanju navajamo nekatere ugotovitve učiteljev ob delu z učenci in primere reševanja besedilnih nalog s pomočjo omenjene metode.

1. način reševanja

Predstavljamo primer reševanja dveh učencev (Slika 1, Slika 2), ki sta izbrala drugačni metodi.

Učiteljica, ki je učence v 8. razredu pri dodatnem pouku seznanila z metodo napačne predpostavke, je zapisala:

Ob tem jim nisem dala nobenih drugih navodil, ampak sem pustila, da se sami lotijo naloge na način, ki se ga najprej spomnijo oz. ki jim je najbližji. Večina učencev se je naloge lotila z metodo poizkušanja in po nekaj poskusih našla pravilno rešitev.

$$\begin{array}{l} 5: \left(\begin{array}{c|c} 15 & 125\% \\ \hline 3 & 25\% \end{array} \right) : 5 \\ 4: \left(\begin{array}{c|c} 12 & 100\% \end{array} \right) : 4 \end{array}$$

[Slika 1] Reševanje učenca, ki je prišel do pravilne rešitve s sklepanjem na podlagi odstotkov.

Učenec je nalogo rešil z znanjem odstotkov in pravilnim sklepanjem:

Število 15 je enako 125 % iskanega števila, potem je naredil sklep, da je 25 % enako številu 3 ter nadalje sklepal, da je celota 100 % enaka 12.

Vidimo, kako učenec domiselno uporablja svoje matematično znanje pri reševanju matematičnih problemov.

2. način reševanja, nepravilen

$$\begin{array}{l} x + \frac{1}{4} = 15 \\ x = 15 - \frac{1}{4} \\ x = 11,25 \end{array}$$

[Slika 2] Reševanje učenca, ki ni dobil pravilne rešitve, ker je naredil napako pri zapisu enačbe.

Z učenci smo se pogovorili o njihovem načinu razmišljanja in reševanja, nato pa sem jim na kratko predstavila metodo napačne predpostavke.

Vidimo, da ima učenec težave pri zapisu enačbe in pri odštevanju racionalnih števil ($15 - \frac{1}{4}$) je izračunal kot $15 - 4 + 0,25 = 11,25$, kjer izkazuje zanimivo miselno zmedo.

Reševanje naloge – Neznano število II

Naloga 2 – Neznano število II

Sedmina vsote nekega števila in števila 3 je 5. Za katero število to velja?

Rešitev: Število 32.

Ena od učiteljic je zapisala:

Učencem sem najprej predstavila metodo napačnega predpostavljjanja. Odločili so se, da bodo med nalogami v učbeniku sami izbrali tako, za katero so prepričani, da bi jo znali z metodo napačne predpostavke samostojno rešiti.

Ob skupnem predpostavljjanju in postopnem nakazovanju rešitve so do rezultata prišli vsi učenci. Pri samostojnem delu pa so nekateri naleteli na naslednje težave:

- Niso vedeli, kako bi nalogo začeli reševati, ker so že od prej poznali postopek reševanja enačb in niso mogli sprejeti drugačnega načina razmišljanja.
- Zanimarili so del besedila »vsota števila in števila 3«, tako da niso dobili pravilne rešitve.
- Trije učenci niso razumeli naslednjega dela naloge: »sedmina vsote nekega števila in števila 3« in so potrebovali dodatne usmeritve.

Preizkus so vsi naredili pravilno.

Samostojno je devet učencev pravilno zapisalo enačbo in jo tudi pravilno rešilo. Ker praviloma rešimo veliko podobnih besedilnih nalog, učenci nimajo težav pri zapisu enačb in tudi ne pri samem reševanju.

Iz opisanega sledi, da vsiljevanje postopka reševanja ni smiselno. Z drugimi metodami reševanja besedilnih nalog naj bi učence opremili z namenom, da jih bodo uporabili, kadar ne znajo primera rešiti z nastavitvijo

aritmetičnih oziroma algebrskih izrazov in enačb ali sploh ne vedo, kako se naloge lotiti.

8 Reševanje naloge Stroški prevoza

Naloga 3 – Stroški prevoza

Skupni stroški prevoza treh vrst avtomobilov iz tovarne letno znašajo 32100 €. Razmerje stroškov je 2 : 7 : 6. Izračunaj stroške prevoza za vsako vrsto avtomobilov posebej.

Rešitev: 4280 €, 14980 €, 12840 €

Ena izmed učiteljic je pri dodatnem pouku v 8. razredu učencem dala omenjeno nalogo, ki jo lahko rešimo z metodo napačne predpostavke. V svojem poročilu je zapisala:

Preden sem jim to metodo razložila, so nalogo rešili sami na svoj način. Zanimalo me namreč je, ali bo kdo uporabil metodo napačne predpostavke. To se ni zgodilo. Vseh 12 učencev je nalogo rešilo na način, ki je spodaj skeniran (Slika 3).

$32100 : 15 = 2140$
 $2140 \cdot 2 = 4280$
 $2140 \cdot 7 = 14980$
 $2140 \cdot 6 = 12840$
 Stroški prevoza so:
 1 avto = 4280 €
 2 avto = 14980 €
 3 avto = 12840 €

[Slika 3] Reševanje naloge Stroški prevoza brez uporabe metode napačne predpostavke

Nato sem jim razložila, kako bi to nalogo rešili z metodo napačne predpostavke. Nad to metodo niso bili preveč navdušeni – zdelo se jim je pretežko. Zato sem jim še enkrat ta postopek razložila na lažji nalogi in mnenje o tej metodi so hitro spremenili. Pravijo, da pa je številske besedilne naloge lahko reševati po tej metodi.

Ta primer potrjuje izkušnjo predhodnega. V osmem razredu učenci take naloge že rešujejo z razmerji, zato jim je bil predstavljeni način reševanja težji. Z omenjeno metodo bi lahko pomagali učencem, ki razmerij ne razumejo oziroma jih ne znajo v danem primeru uporabiti ali pa bi uporabo te metode na tej nalogi spodbujali že prej, ko razmerij še sploh ne poznajo.

Poglejmo zapis ene izmed učiteljic, ki je pri dodatnem pouku matematike reševala naloge z metodo napačne predpostavke in zapisala:

Metodo smo uporabili in pokomentirali kar na prvem primeru, ki je naveden v forumu. Učenci so omenili, da to metodo že uporabljajo, predvsem pri tekmovanju iz znanja matematike za Vegovo priznanje – KENGURU. Ko smo reševali naloge s tekmovanj prejšnjih let, sem jih prosila, naj bodo pozorni, kdaj uporabljajo to metodo.

O metodi se lahko pogovorimo tudi brez rabe besede predpostavka. Uporabimo učencem znane besede: možna rešitev, predvidimo rezultat, uganimo rešitev in jo preizkusimo. Primerno nalogo s tekmovanja Matematični kenguru, pa lahko uporabimo za opredelitev metode, torej za uvodni mobilizacijsko-motivacijski primer.

ε Reševanje naloge Preizkus znanja

Naloga 4 – Preizkus znanja

Tine je pri preizkusu dosegel eno tretjino možnih točk, Ana pa eno četrtno možnih točk. Števili doseženih točk v njunih preizkusih se razlikujeta za 3. Koliko možnih točk je bilo pri preizkusu? Koliko točk je dosegel Tine in koliko Ana?

Rešitev: Tine 12 točk, Ana 9 točk

Svet matematičnih čudes 7, Delovni zvezek, DZS, stran 60/naloga 8

1. način reševanja

Ulomka $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{4}$ je učenec razširil na skupni imenovalc 12.

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \text{ in } \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Pogledal je, kolikšna je razlika teh dveh števil, oziroma kakšen je števec razlike števil.

Ker je razlika doseženih točk v preizkusih 3, mora biti števec 3-krat večji, s tem pa tudi imenovalc (razširjanje).

$$\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

Ugotovitev: možnih točk je 36.

Sledilo je samo še preračunavanje točk za Tineta ($\frac{1}{3}$ od 36 = 12) in za Ano ($\frac{1}{4}$ od 36 = 9).

2. način reševanja

Pri reševanju naloge z metodo napačne predpostavke bi lahko kombinirali grafično metodo. Predpostavimo, da ima pisni preizkus 12 točk, ker v tem primeru vemo, koliko je četrtna in tretjina točk. Skupno število točk predstavimo z 12 kvadratki in pobarvajmo število točk, ki sta jih dosegla Tone in Ana (Slika 4).



[Slika 4] Reševanje naloge Preizkus znanja v kombinaciji z grafično metodo

Vidimo, da se skupno število točk razlikuje za 1 kvadrat, kar so tri točke. Torej je skupno število vseh točk --12 kvadratov enako 36 točkam.

Ena od učiteljic je v forumu spletne učilnice zapisala:

Ta metoda je bila čisto spontano preizkušena oziroma opažena pri nivojskem pouku matematike v 7. razredu v skupini 3. nivoja. Reševali smo besedilne naloge o enačbah iz učbenika Svet matematičnih čudes 7, Delovni zvezek, DZS, stran 60/naloga 8. Reševanja naloge sem se sama lotila z enačbo. En učenec pa je svoje reševanje sošolcem predstavil, kot je predstavljeno pri 1. načinu reševanja. Tudi drugi učenci so pri nadaljnjih nalogah, ne da bi podrobno poznali tak način reševanja, uporabljali to metodo. Ko sem jih povprašala, kje še lahko uporabljajo tak način reševanja, so hitro ugotovili: Kenguru!

Iz predstavljenega sledi, da si učenci pomagajo pri reševanju z različnimi strategijami in ne uporabljajo le reševanja z enačbo. Pri reševanju z enačbo, kjer je x skupno število točk, zapišemo

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 3.$$

Reševanje naloge Ribe

Naloga 5 - Ribe

Ribič je ujel ribo. Prijatelji so ga vprašali, koliko tehta. Rekel jim je, da ima rep 1 kg, glava tehta toliko kot rep in polovica trupa, trup pa tehta toliko kot glava in rep skupaj. Koliko tehta riba?

Rešitev: 8 kg

Poglejmo zapis ene izmed učiteljic:

Omenjena metoda je bila predstavljena učencem pri dodatnem pouku pri matematike. Metoda se jim je zdela kar domača, kajti veliko primerov s tekmovanja na šolskem nivoju rešujejo na tak način.

Reševali smo primere, navedene v vašem dokumentu, in bili so dokaj spretni pri reševanju. Se pa primeri reševanj bistveno ne razlikujejo od že predstavljenih, zato bom predstavila reševanje druge naloge.

Zastavila pa sem jim še dodatno nalogo:

Nalogo so rešili presenetljivo hitro. Večina jih je po metodi napačne predpostavke zapisala možno maso celotne ribe in potem ugotavljala, ali se izjave, zapisane v nalogi, ujemajo z njihovo predpostavko. Vseh 8 učencev je nalogo rešilo samostojno, a na različne načine. Pokazalo se je, da jim je največji problem zapis enačbe oziroma postopka, do rešitve pa so vsi zelo hitro prišli.

Podajam pa primer učenke (Slika 5), ki je nalogo rešila s premislekom, in sicer:

1. način reševanja

G T R
 $R + \frac{1}{2}$ 1 kg

GLAVA: $R + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

Trup mora biti sodo število.

Predpostavimo:

1.) $T = 2$, potem $G = 1 + \frac{1}{2}$
 $G = 1.5$
 $G = 2.5 \text{ kg}$, bo pa ni res, ker
 $T = G + R$
 $2 = 2 + 1$

Zato predpostavimo:

2.) $T = 4$, potem $G = 1 + \frac{1}{2}$
 $G = 1.5 \text{ kg}$

Sledi: $T = G + R$
 $4 = 3 + 1$
 $4 \text{ kg} = 4 \text{ kg}$

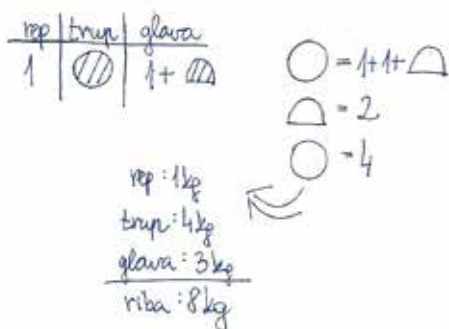
Torej riba tehta 8 kg.

[Slika 5] Primer reševanja s premislekom

Učenka je sklepala, da je trup ribe sodo število. Ta sklep je najbrž naredila zato, da je posledično masa glave naravno število. Kljub tej »napačni« predpostavki je prišla do pravega rezultata, ker je v rešitvi naloge masa trupa res sodo število.

Poglejmo si še strategijo reševanja te naloge, kjer si pomagamo s slikovno reprezentacijo (Slika 6).

2. način reševanja



[Slika 6] Reševanje s pomočjo slikovne reprezentacije

Naloge bi se seveda lahko lotili reševati na algebrski ravni kot zapis enačbe z eno nezanko ali kot sistema enačb z dvema nezankama.

Še ena naloga o ribah:

Naloga 6 – Masa ribe

Glava ribe predstavlja $\frac{1}{3}$ mase cele ribe, rep ribe $\frac{1}{4}$ mase cele ribe, trup ribe pa ima maso 30 dag. Koliko je masa cele ribe?

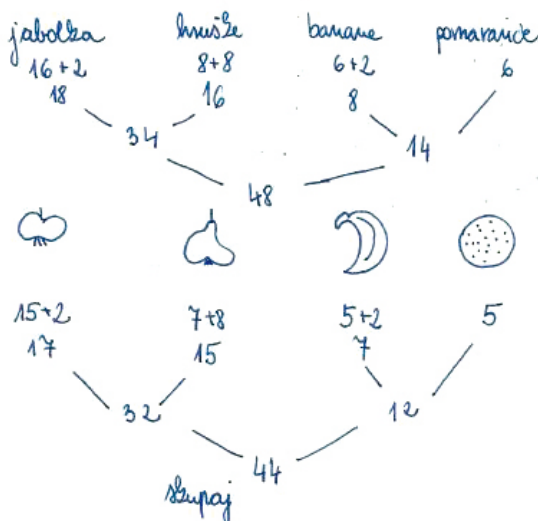
Rešitev: Masa ribe je 72 dag.

Reševanje naloge Sadje

Naloga 7 - Sadje

Oče je na trgu kupil jabolka, hruške, pomaranče in banane. V košari ima skupaj 44 sadežev. Število jabolk je za 2 večje od števila hrušk, število hrušk je za 8 večje od števila banan, število banan je za 2 večje od števila pomaranč. Koliko je hrušk v košari?

Rešitev: 15



[Slika 7] Primer rešitve z metodo napačne predpostavke

Učenec je v predstavljenem primeru (Slika 7) kombiniral metodo napačne predpostavke z grafično aritmetično metodo.

Učenec je najprej predpostavil, da je oče kupil 6 pomaranč, potem izračunal število banan (8), hrušk (16) in jabolk (18) ter število vseh sadežev (48). Ker je bilo število vseh sadežev za 4 preveliko, je sklepal, da je posamezne vrste sadja za en sadež manj. Tako je ponovil izračun pri petih pomarančah in dobil pravi rezultat. Iz grafične ponazoritve je lepo razviden način razmišljanja učenca.

λ Reševanje naloge Ograja

Naslednjo nalogo lahko učenci rešujejo v sedmem in osmem razredu in neuspešne pri reševanju spodbudimo k uporabi metode napačne predpostavke:

Naloga 8 - Ograja

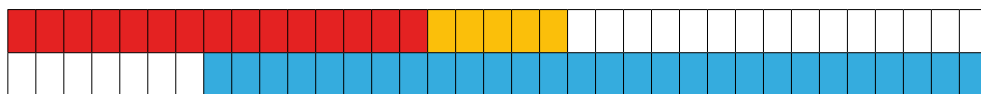
Ana in Blaž barvata ograjo. Ana barva eno stran ograje, Blaž pa drugo stran. Začeta vsak na svojem koncu. Ana dopoldne prebarva $\frac{3}{7}$ svoje strani ograje, popoldne pa še $\frac{1}{4}$ od preostanka svoje strani, Blaž pa v celem dnevu prebarva $\frac{4}{5}$ svoje strani ograje. Na koncu dneva je 15,6 m ograje pobarvanih z obeh strani. Kako dolga je ograja?

Rešitev: 42 m

1. način reševanja

Predpostavimo, da je ograja dolga 70 m, v tem primeru bomo hitro izračunali sedmino in petino celotne dolžine.

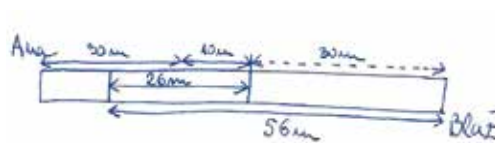
Ana pobarva dopoldne 30 m ograje ostane ji še 40 m. Popoldne pobarva še 10 m.



[Slika 9] Grafična upodobitev ograje in njeno barvanje

Na njeni strani je tako še 30 m nepobarvane ograje.

Blaž pobarva v celem dnevu 56 m ograje. Koliko ograje je pobarvane z obeh strani, vidimo na sliki (Slika 8).



[Slika 8] Količina pobarvane ograje z obeh strani

Z obeh strani je pobarvanih 26 m ograje. Sklepamo lahko, da je predpostavljena dolžina ograje prevelika.

Dolžina ograje [m]	Dolžina ograje pobarvana z obeh strani [m]
70	26
7	2,6
42	15,6

S sklepanjem, kot je prikazano v preglednici, pridemo do rešitve 42 m.

2. način reševanja

Že v začetku si pomagamo z grafično upodobitvijo. V nalogi imamo sedmino in petino, zato si ograjo razdelimo na 35 polj. In z vsake strani pobarvajmo del, ki ga je pobarvala Ana in Blaž.

Iz slike (Slika 9) vidimo, da je 13 polj pobarvanih iz obeh strani, kar je 15,6 m. Torej eno polje meri

$$15,6 \text{ m} : 13 = 1,2 \text{ m}$$

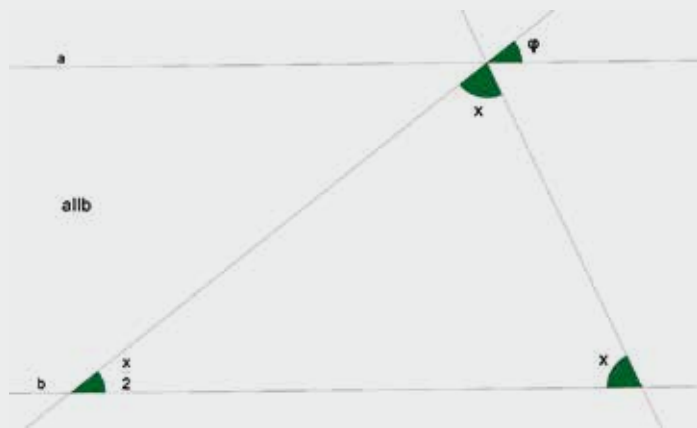
$$\text{in celotna ograja } 1,2 \text{ m} \cdot 35 = 42 \text{ m.}$$

Ta način reševanja lahko dopolnimo tako, da učenci dobijo trak s 35 polji.

μ Reševanje naloge Velikost kotov

Naloga 9 – Velikost kotov

Izračunaj velikost kota na spodnji sliki.



Rešitev: $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$

Opisano geometrijsko nalogo ne uvrščamo med besedilne naloge, kljub temu pa jo lahko rešimo z metodo napačne predpostavke. Za reševanje po tej metodi morajo učenci poznati:

- vsoto notranjih kotov v trikotniku,
- lastnosti kotov z vzporednimi kraki.

Torej nalogo lahko rešijo na omenjen način v sedmem razredu, medtem ko bodo v devetem razredu zaradi preprostosti naloge in zapisa enačbe najverjetneje nalogo hitreje rešili z enačbo.

π Sklep

Za spodbujanje reševanja s predpostavljeno rešitvijo je ključno, da znamo postaviti učencem ustrezno vprašanje.

Večina učiteljev je v spletni učilnici z nami delila opise svojih ugotovitev po iz-

vedeni uri, kjer so učenci reševali ponujene naloge o skupnih stroških prevoza oz. kako izračunati neznano količino. Nekateri učitelji so preizkusili tudi nekaj drugih nalog iz različnih učbenikov in drugih virov. Učitelji so metodo preizkušali raznoliko: od 6. do 9. razreda, v homogenih oziroma heterogenih učnih skupinah, pri dodatnem pouku, pri pripravah na tekmovanje ali pri delu z nadarjenimi učenci.

Prevladovala sta dva različna pristopa:

- Učitelji so najprej razložili metodo na eni od nalog, potem so učenci samostojno reševali izbrane naloge.
- Učencem so razdelili naloge, ki so jih poskusili samostojno rešiti. Nato so skupaj z učenci pogledali načine reševanja in pri tem izpostavili metodo napačne predpostavke. Pri nadaljnjem reševanju nalog so jim svetovali, naj uporabijo opisano metodo.

Naloga	Vprašanje	Razred, za katerega je naloga dovolj zahtevna*
Naloga 1 – Neznano število I	Katero število bi lahko rešilo nalogo? Preizkusi. Zakaj si izbral število 4? Ali bi lahko izbrali tudi število 5? Ali bi bilo smiselno izbrati število 8?	5. razred, 6. razred, 7. razred
Naloga 3 – Stroški prevoza	S kolikokrat manjšim zneskom bi bilo smiselno pričeti? Ali lahko približno oceniš najnižji strošek pre- voza? Znaš preizkusiti?	5. razred, 6. razred, 7. razred
Naloga 5 –Masa ribe	Oceni maso ribe. Ali lahko določiš še katero od lastnosti števila, s katerim bi bilo smiselno poskusiti, ali nalogo reši?	6. razred, 7. razred
Naloga 8 – Ograja	Katera dolžina ograje bi bila možna rešitev? Oceni dolžino ograje in preveri svojo oceno. Izberi poljubno dolžino ograje in jo preveri po besedilu naloge.	7. razred, 8. razred

*Ali za individualno delo posameznih učencev.

Iz predstavljenih izdelkov in refleksij učiteljev vidimo, da učencem, ki znajo zastavljeni problem rešiti na svoj način, nov način reševanja lahko povzroči pojmovno zmedo. Metodo je smiselno spodbujati pri učencih, ki so pri zastavljenem problemu neuspešni in jim jezik algebre dela težave. Če želimo, da bi vsi učenci reševali nalogo z metodo napačne predpostavke, mora biti zastavljena problemska naloga za vse nerešljiva z njim znanimi metodami. V tem primeru morajo učenci

najprej priti do spoznanja, da sami ne znajo s svojimi pristopi rešiti zastavljene problemske situacije.

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljem Barbari Fir, Aniti Nemec, Metki Jemec, Tini Kelc, Nevenki Baskar, Darji Strah, Mojci Štor, Igorju Koser, ki so v šolskem letu 2010/11 z nami delili svoje izkušnje z metodo napačne predpostavke v spletni učilnici.

Φ Viri

1. Sanja Varošaneč: Neke metode reševanja problemskih zadatka. Poučak, letnik 4, št. 13, 2003.
2. Marjan Jerman: Zgodovina reševanja polinomskih enačb. Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 57, št. 5, 2010.



Metoda postopnega približevanja

The Method of Gradual Approximation

Mojca Suban

Zavod RS za šolstvo

Σ Povzetek

V članku je predstavljena ena izmed metod za reševanje besedilnih in problemskih nalog – metoda postopnega približevanja. Osnovna ideja in princip metode sta ponazorjena na primerih nalog in z njihovim reševanjem. Pri posameznih nalogah so dodani primeri reševanja nalog različno uspešnih učencev od 6. do 9. razreda skupaj z njihovimi izdelki. Vključene so tudi ugotovitve, ki so jih zapisali učitelji po izvedenih urah, v katerih so učenci reševali naloge z uporabo obravnavane metode.

Ključne besede: metoda postopnega približevanja, besedilna naloga, problemska naloga

Σ Abstract

The paper presents one of the methods for solving textual and problem tasks - the method of gradual approximation. The basic idea and principle of this method are illustrated through examples of tasks and their solving. Individual tasks are illustrated by examples of pupils from the 6th to 9th grade of different levels of success and by their products. Included are also the findings of teachers written after the execution of lessons where students solved tasks using the method of gradual approximation.

Keywords: the method of gradual approximation, text task, problem task

α Predstavitev metode postopnega približevanja

Metoda postopnega približevanja je sestavljena iz niza poskusov, s katerimi pridemo do rešitve zastavljenega problema. V vsakem od poskusov se poskuša popraviti napaka, ki je nastala v prejšnjem poskusu. Pri tem se napaka navadno zmanjšuje in pri vsakem naslednjem poskusu smo bliže pravilni rešitvi. Metoda je najbolj nazorno prikazana s preglednico, kamor se vpisujejo posamezni poskusi.

Metoda je preprosta in je včasih zanemarljena, vendar je primerna za starostno stopnjo, ko učenci še ne obvladajo formalnega reševanja enačb (pred 9. razredom). Primer-na je kot ena izmed začetnih metod reševanja besedilnih in problemskih nalog, pozneje pa se učenec postopoma seznani tudi z drugimi učinkovitimi metodami.

Naloga 1 - Razporejanje v sobe

Na izlet je odšlo skupaj 32 deklic in dečkov. Deklice so bile razporejene v dvoposteljne, dečki pa v triposteljne sobe. Za namestitev deklic je bila potrebna ena soba več kot za namestitev dečkov. Koliko deklic in koliko dečkov je bilo na izletu?

Rešitev: Na izletu je bilo 18 dečkov in 14 deklic.

Reševanje s preglednico

Glede na podatke število deških sob ne more biti večje od 10. To število tudi ne more biti liho, saj bi bilo v tem primeru tudi število fantov liho. Od tod bi bilo tudi število deklic liho (kot razlika sodega števila in lihega), kar pa bi pomenilo, da deklic ni mogoče namestiti v dvoposteljne sobe. Torej je število deških

sob 2, 4, 6, 8 ali 10. Za stolpce v preglednici izberemo število deških sob, število dekliških sob, število dečkov, število deklic in skupno število deklic in dečkov.

Število deških sob	Število dekliških sob	Število dečkov	Število deklic	Skupno število deklic in dečkov
2	3	6	6	12
4	5	12	10	22
6	7	18	14	32
8	9	24	18	42
10	11	30	22	52

[Preglednica 1] Reševanje naloge Razporejanje v sobe s preglednico

Zahtevam ustreza tretji poskus. Na izletu je bilo 18 dečkov in 14 deklic.

β Reševanje naloge Kroglice

Naloga 2 - Kroglice

V vreči so male in velike kroglice. Mala kroglica tehta 5 g, velika pa 11 g. Koliko malih in koliko velikih kroglic je lahko v vreči, kjer tehtajo vse kroglice skupaj 153 g?

Rešitev: Naloga ima tri različne rešitve: V vreči je lahko 13 velikih in 2 mali kroglici, 3 velike in 24 malih kroglic ali 8 velikih in 13 malih kroglic.

Primeri reševanja učencev

Učenci so reševali nalogo s preglednico. Praviloma so v stolpce zapisovali: število manjših kroglic, število večjih kroglic, skupno maso majhnih kroglic, skupno maso večjih kroglic

in skupno maso vseh kroglic. Nekaj primerov izdelkov učencev je bilo tudi takih, da zasledimo drugačen vrstni red stolpcev. V enem primeru pa zasledimo še en stolpec *skupno število kroglic*, ki je dodan na koncu. Večji izziv predstavlja zapisovanje odgovora oziroma ugotovitve, ki sledi iz zapisov v preglednici.

<i>š. kroglic m.</i>	<i>š. kroglic v.</i>	<i>š. g m.k.</i>	<i>š. g v.k.</i>	<i>š. g skupaj</i>
2	5	10	55	65
3	8	15	88	103
7	11	35	121	156
8	7	40	77	117
8	9	40	99	139
10	7	50	77	127
24	3	120	33	153

[Slika 1] Izdelek učenca 7. razreda ob reševanje naloge Kroglice

1. primer reševanja

Nalogo je reševal učenec 7. razreda pri dodatnem pouku iz matematike. Njegov izdelek prikazuje precej pogosto napako, da ob nesistematičnem zapisovanju učenci spregledajo več rešitev. Želeli bi si tudi, da učenec zapiše svoje ugotovitve in odgovor na zastavljeno vprašanje, ne da samo konča z zapisi v preglednici. Sklepamo lahko, da je zapise v preglednici končal, ker je prišel do prve rešitve, predstavljene v zadnji vrstici preglednice.

Učitelj je kot prednosti te metode je izpostavil, da z njeno uporabo ne izpustimo katere od rešitev, da je zapisovanje različnih možnosti v preglednici jasno in sistematično, z uporabo vzorca pa lahko pridemo do rešitve hitreje.

2. primer reševanja

Učenka 6. razreda je na koncu zapisala, kaj je s preglednico ugotovila oziroma kaj je rešitev naloge.

<i>š. kroglic po 5 g</i>	<i>š. kroglic po 10 g</i>	<i>skupna masa majhnih kroglic</i>	<i>skupna masa velikih kroglic</i>	<i>skupna masa vseh kroglic</i>
20	11	100 g	121 g	221 g
19	10	95 g	110 g	205 g
18	9	90 g	99 g	189 g
17	8	85 g	88 g	173 g
16	7	80 g	77 g	157 g
17	6	85 g	66 g	151 g
2	13	10 g	143 g	153 g
12	3	60 g	33 g	93 g
60	3	300 g	33 g	333 g
24	3	120 g	33 g	153 g
13	8	65 g	88 g	153 g
01.: v meš. je 13 velikih in 2 mali kroglice.				
02.: v meš. je 24 malih in 3 velike kroglice.				
03.: v meš. je 13 malih in 8 velikih kroglic.				

[Slika 2] Izdelek učenke 6. razreda ob reševanje naloge Kroglice

Št. malih kr.	Teža malih kr.	Št. velikih kr.	Teža velikih kr.	Skupaj
6	30 g	5	55 g	85 g
5	25 g	6	66 g	91 g
6	30 g	7	77 g	107 g
7	35 g	6	66 g	101 g
8	40 g	7	77 g	117 g
7	35 g	8	88 g	123 g
9	45 g	8	88 g	153 g

V vreči je 9 malih kroglic in 8 velikih kroglic.

[Slika 3] Izdelek učenke 8. razreda ob reševanje naloge Kroglice

3. primer reševanja

Učenka 8. razreda je reševala nalogo s preglednico, prehitro pa se je zadovoljila z rešitvijo, ki ni prava in ne edina. Učenka je napačno seštel 45 in 88, kar je 133, in ne 153.

Učiteljica je dodala, da so nalogo reševali tisti učenci, ki so predčasno rešili naloge pri urah poglavja Pitagorov izrek. Opazila je, da so učenci pri samostojnem reševanju motivirani za delo in da so jim naloge, ki jih rešujejo po predlagani metodi, izziv.

4. primer reševanja

Učenci 3. nivoja v 8. razredu so si metodo reševanja naloge izbrali sami. Njihova učiteljica je povzela njihove strategije reševanja:

Od 10 učencev sta 2 učenca poiskala vse tri možnosti. Zapisala sta le rešitve, reševanje je potekalo v njunih glavah.

Drugi so poiskali samo 1 možnost. 4 učenci so dobili rešitev 24 malih in 3 velike, 2 učenca 13 velikih in 2 mali in 1 učenec 13 velikih in 2 mali.

Ti učenci so prišli do rešitev s poskušanjem in z uporabo pravila za deljivosti s številom 5. Na svoj način so uporabili metodo postopnega približevanja. Ker je ne poznajo, ni bilo korektnega zapisa, ampak le pomožni računi in tudi le 2 učenca sta poiskala vse možnosti. To metodo bodo spoznali v 9. razredu pri sklopu Enačbe.

male	velike	
1. 24 · 5 g	+ 3 · 11	= 153 g
2. 2 · 5 g	+ 13 · 11	= 153 g
3. 13 · 5 g	+ 8 · 11 g	= 153 g

1. možnost · 24 malih, 3 velike
2. možnost · 2 malih, 13 velikih
3. možnost · 13 malih, 8 velikih

[Slika 4] Izdelek učenca 8. razreda tretjega nivoja ob reševanje naloge Kroglice

Priložila je tudi nekaj izdelkov, kjer so zapisi na papirju skopi, v glavah pa se je dogajalo veliko več. Postavlja se izziv za bolj kakovostne opise reševalnih poti.

Primerjava reševanja naloge v 6. in 8. razredu

Navajamo ugotovitve učiteljice, ki je izvedla primerjalno analizo reševanja naloge v 6. in 8. razredu:

Metodo reševanja besedilnih in problemskih nalog s postopnim približevanjem sem preizkusila v oddelku 6. razreda in v 8. razredu tretje nivojske skupine.

Učencem sem razdelila listke, na katerih sta bila po dva od danih petih primerov te metode reševanja. Prosila sem jih, da poskušajo naloge rešiti sami. Zanimalo me je namreč, na kakšen način se bodo lotili reševanja.

V oddelku 6. razreda so si iznajdljivejši učenci pomagali z risanjem, s poskušanjem, vendar je le sedmim od 26 uspelo razrešiti po en primer. Imeli so kar dosti težav. V množici števil, pogojev in podatkov se niso znali organizirati. Tako smo zgledni primer te metode rešili skupaj. Z natančnim branjem in upoštevanjem pogojev smo oblikovali preglednico, s katero so nato učenci lažje ugotavljali smiselnost rešitev.

Naslednje primere so potem učenci reševali sami. Nekateri so z natančnim branjem takoj prepoznali spremenljivke in pogoje ter z oblikovanjem preglednice niso imeli težav, nekateri učenci pa so se v množici spremenljivk izgubili. Težave so imeli že pri oblikovanju preglednice. Z dodatno razlago in pojasnili so oblikovali preglednico in s sistematičnim poskušanjem prišli do rešitve.

Večini učencem je bila metoda postopnega približevanja smiselna, sistematična in pregledna. Motilo jih je le-to, da je zamud-

na. Uspešnejši učenci pa so seveda to trditev argumentirali s tem, naj malo premislijo o rešitvi in naj ne delajo nepotrebnih primerov. Učenci so bili v večini zadovoljni, ker so dane primere rešili. Sama pa mislim, da je za to starostno stopnjo metoda postopnega približevanja zelo primerna.

V oddelku 8. razreda tretje nivojske skupine učenci niso imeli težav z razumevanjem besedilnih nalog. Večina učencev je tudi sama prišla do rešitev danih primerov. Predvsem so si pomagali z risanjem, s premislekom in poskušanjem. Uporabljali so tudi metodo postopnega približevanja, vendar pa je bil njen zapis zelo nepregleden. Nekateri učenci, ki obiskujejo dodatni pouk, pa so se naloge lotili z oblikovanjem enačbe.

Tako smo skupaj naredili zgledni primer, kjer sem jih opozorila na oblikovanje preglednice, v kateri bo njihova pot reševanja veliko preglednejša in bolj sistematično zapisana.

Večina učencev ni imela težav z oblikovanjem preglednice za dane primere, vseh jim je bila urejenost zapisa postopka reševanja. Večina pa jih je bila mnenja, da je ta metoda preveč zamudna, tako da smo dva primera rešili tudi z oblikovanjem enačbe, kar pa je bilo nekaterim še preveč zahtevno.

Pri teh dveh urah je bilo razvidno, da učenci 6. razreda ne poznajo veliko strategij, metod reševanja problemskih nalog. Pomagajo si z risanjem, ugibanjem, poskušanjem, vendar se večina učencev izgubi v množici podatkov in se ne zna orientirati, v kateri smeri smo bliže rešitvi.

V tretji nivojski skupini osmega razreda je bilo drugače. Večina učencev je primere reševala z velikim veseljem. Težava je bila res le v organizaciji in preglednosti postopka reševanja. Tudi metoda postopnega približevanja se jim je zdela smiselna, pregledna, le malo zamudna.

Zanimivo je, da so uspešnejši učenci svetovali tistim, ki se jim zdi metoda zamudna, naj 'malo premislijo o rešitvi in ne delajo nepotrebnih primerov'. Med izdelki res ni zaslediti primera, kjer bi učenec s premislekom že na začetku omejil število kroglic, npr. manjših ne more biti več kot 30, večjih pa ne več kot 13.

γ Reševanje naloge Cevi

Naloga 3 - Cevi

Za gradnjo 270 m vodovodnega omrežja so uporabili 82 ravnih cevi. Na voljo so bile 3 metrske in 5 metrske cevi. Koliko krajših in koliko daljših cevi so uporabili (brez rezanja)?

Rešitev: Uporabili so 70 cevi z dolžino 3 metre in 12 cevi z dolžino 5 metrov.

Primer reševanja

Navajamo primer reševanja učenca, ki je zanimiv zato, ker je jasno zapisal, s katero strategijo je izboljševal svoje poskuse. Sklepali bi lahko, da se najverjetneje pri pouku matematike namenja vidiku sporočanja in sistematičnega zapisovanja postopka reševanja (ne zgolj izračuni) nekaj časa in pozornosti. Nekoliko so nerodni zapisi v preglednici, saj bi bilo pregledneje, če bi iz prvega stolpca nastala dva stolpca: število 3-metrskih cevi in *skupna dolžina 3-metrskih cevi*. Podobno tudi v drugem stolpcu.

Za vsak odvzem 5-metrške cevi in za vsako dodano 3-metrsko cev se skupna dolžina skrajša za 2 m.

3-metrške cevi	5-metrške cevi	skupaj	
65 : 195 m	17 : 85 m	280 m	X
75 : 225 m	7 : 35 m	260 m	X
66 : 198 m	16 : 80 m	278 m	X
68 : 204 m	14 : 70 m	274 m	X
70 : 210 m	12 : 60 m	270 m	✓

[Preglednica 2] Reševanje naloge Cevi s preglednico

Pri skupni dolžini 280 m je skupna dolžina predolga za 10 m. Zato dodamo pet 3-metrskih cevi in odvezamemo pet 5-metrskih cevi, da se bo skupna dolžina skrajšala za 10 m (ker je $5 \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ m}$).

Odgovor: Za skupno dolžino 270 m vodovodnega omrežja porabimo skupno 82 cevi, in sicer 70 z dolžino 3 m in 12 z dolžino 5 m.

δ Reševanje naloge Gosi in mačke

Naloga 4 – Gosi in mačke

Na dvorišču so gosi in mačke. Vse skupaj imajo 36 glav in 100 nog. Koliko je gosi in koliko mačk?

Rešitev: Na dvorišču je 22 gosi in 14 mačk.

Nalogo so učenci reševali z metodo postopnega približevanja. Upoštevali so, da imajo gosi po 2 nogi, mačke pa po 4 ter postopoma iskali rešitve z zmanjševanjem oziroma povečevanjem števila gosi ali mačk. Ob tem je treba upoštevati skupno število glav.

Reševanje v preglednici:

število gosi	število mačk	število		skupaj glav	skupaj nog	
		nog gosi	nog mačk			
10	26	20	104	36	124	//
16	20	32	80	36	112	//
17	19	34	76	36	110	//
18	18	36	72	36	108	//
20	16	40	64	36	104	//
22	14	44	56	36	100	✓

[Preglednica 3] Reševanje naloge Gosi in mačke s preglednico

Odgovor: Na dvorišču je 22 gosi in 14 mačk.

Naloge, kjer se uporablja metoda postopnega približevanja, se pojavljajo že v učbenikih od 4. razreda dalje. Ne da bi posebej razlagali to metodo, jo učenci hitro usvojijo in tudi uporabljajo. Enako metodo se dostikrat uporablja tudi pri nekaterih nalogah pri logiki.

ε Za konec

Predstavljeni so izdelki in reševanja različno uspešnih učencev, ki so jih reševali od 6. do 9. razreda.

Pristopi k obravnavi metode v razredu so bili raznoliki:

- V nekaterih primerih so učitelji metodo najprej razložili (na rešenem zgledu naloge z namestitvijo v sobe) in potem spodbudili učence k njeni uporabi pri nadaljnjih nalogah. Od tu naprej zasledimo, da so v nadaljevanju učenci reševali naloge samostojno na učnih listih ali pa je učenec s podporo sošolcev nalogo reševal pri tabli.
- V nekaterih primerih so učitelji opozorili, naj si učenci pred samostojnim reševanjem nalog ogledajo rešen zgled na listu z nalogami, in metode niso razlagali frontalno.
- Nekaj primerov je bilo takih, da učitelji učencev niso posebej usmerili v konkretno metodo reševanja, ampak so jim pustili prosto pot. Ko so učenci nalogo rešili,

η Vir

1. Zdravko Kurnik: Posebne metode reševanja matematiških problema (2010). Element Zagreb.

so si skupaj ogledali še metodo postopnega približevanja (npr. za izhodišče so vzeli rešitev učenca, ki je to metodo samostojno uporabil).

Kot pripomoček so učenci v nekaterih primerih uporabljali žepno računalno, kar je bilo posebej poudarjeno.

Dodatni nalogi za uporabo metode postopnega približevanja

Naloga 5 - Palčke

Pri uri geometrije so učenci iz palčk enake dolžine sestavljali trikotnike in kvadrate. Uporabili so 300 palčk in sestavili 92 likov. Koliko trikotnikov in koliko kvadratov so sestavili učenci?

Rešitev: Sestavili so 68 trikotnikov in 24 kvadratov.

Naloga 6 – Zmnožek treh števil

Zmnožek treh števil je 270. Katera števila so to, če je zmnožek prvega in tretjega števila enak 30, zmnožek drugega in tretjega pa 135?

Rešitev: To so števila 2, 9 in 15.

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljem Tomažu Pavlakoviču, Petri Kastelic, Vilmi Moderc, Barbari Knez, Urški Božič, Darji Strah in Mariji Ahčin, ki so v šolskem letu 2010/11 z nami delili svoja razmišljanja in izdelke učencev v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko.



Metoda reševanja nazaj

Backward Chaining Method

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljeno reševanje besedilnih nalog po metodi reševanja nazaj. Na začetku je metoda reševanja nazaj predstavljena na primeru reševanja ene izmed nalog. V nadaljevanju je nekaj primerov reševanja iste naloge, pa tudi nekaterih drugih, ki so jih učenci reševali po metodi nazaj.

Ključne besede: besedilne naloge, metode reševanja, reševanje nazaj

Sonja Rajh

Zavod RS za šolstvo

Σ Abstract

The paper presents the solving of textual tasks through the use of the backward chaining method. At first, the method of backward chaining is presented on an example of solving one of the tasks. Furthermore, alternate examples of solving the same tasks are given as well as other tasks which pupils managed to solve with help of the backward chaining method.

Keywords: textual tasks, methods for problem solving, backward chaining

α Predstavitev metode reševanja nazaj

Po tej metodi začnemo nalogo reševati pri zadnjem podatku in po sosedlju dogodkov s konca proti začetku. Metodo reševanja nazaj si oglejmo ob primeru reševanja naslednje naloge:

Naloga 1 – Košara sliv

Zjutraj je mama pripravila košaro s slivami za tri hčere. Najstarejša hči je prva opazila košaro s slivami in pojedla tretjino sliv. Ko je srednja hči opazila košaro s slivami, je pojedla tretjino preostalih sliv. Najmlajša hči je zadnja opazila košaro s slivami in pojedla tretjino sliv, ki so ostale v košari. V košari je na koncu ostalo 8 sliv. Koliko sliv je mama pripravila v košaro?

Rešitev: Mama je v košaro položila 27 sliv.

Opis načina reševanja

Začnimo nalogo reševati pri dogodku, ki se je zgodil zadnji: Najmlajša hči je vzela iz košare tretjino sliv in ostalo jih je osem. To pomeni, da je osem sliv enako dvema tretjinama sliv, ki so bile v košari, preden si je postregla najmlajša hči. Od tod sklepamo, da je tretjina sliv enaka 4 (kar je dobila najmlajša hči) in da je bilo v košari 12 sliv ($3 \cdot 4$ ali $8 + 4$), preden si je postregla najmlajša hči.

Naredimo naslednji korak. Najmlajša hči je torej našla košaro z dvanajstimi slivami. Teh 12 sliv ji je pustila srednja hči, potem ko je pojedla eno tretjino od sliv, ki jih je sama našla v košari. Dve tretjini sliv, ki jih je našla srednja hči, je torej 12, ena tretjina pa 6. To pomeni, da je srednja hči v košari našla 18 sliv.

Na enak način sklepamo pri najstarejši hčeri. Ko je iz košare pojedla tretjino sliv, jih je ostalo 18. To pomeni, da je 18 sliv enako dvema tretjinama vseh sliv na začetku. Devet sliv je enako eni tretjini, sedemindvajset sliv pa trem tretjinam. Torej je mama v košaro pripravila 27 sliv.

S tem smo nalogo rešili po metodi reševanja nazaj. **Najprej smo reševali dogodek, ki se je zgodil zadnji in se korak za korakom približevali prvemu dogodku.**

Učenec, ki že obvlada tehniko reševanja enačb, lahko nalogo reši na naslednji način:

Označimo z x skupno število sliv, ki jih je mama pripravila v košaro. Najstarejša hči je pojedla $\frac{1}{3}x$ sliv, zato je ostalo v košari $\frac{2}{3}x$ sliv. Srednja hči je pojedla tretjino preostalih sliv, to je $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}x$. V košari je ostalo $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{4}{9}x$ sliv. Najmlajša hči je pojedla tretjino preostalih sliv, to je $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{4}{27}x$, ostalo pa jih je $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{8}{27}x$ oziroma 8 sliv. Zapišemo enačbo:

$$\frac{8}{27}x = 8.$$

Rešitev enačbe je $x = 27$. Torej je mama dala v košaro 27 sliv.

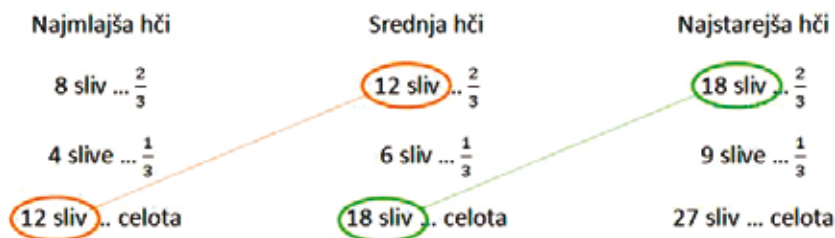
In še preizkus:

Najstarejša je pojedla $\frac{1}{3}$ od 27 sliv = 9 sliv.
Ostalo je $27 - 9 = 18$ sliv.

Srednja hči je pojedla $\frac{1}{3}$ od 18 sliv = 6 sliv.
V košari je ostalo $18 - 6 = 12$ sliv.

Najmlajša je pojedla $\frac{1}{3}$ od 12 sliv = 4 slive.
V košari je ostalo $12 - 4 = 8$ sliv.

Hčerke so pojedle $9 + 6 + 4 = 19$ sliv.
Mama je pripravila 27 sliv, hčerke so jih pojedle 19, torej jih je ostalo $27 - 19 = 8$ sliv.



[Slika 1] Pretipkano reševanje učenca

β Reševanje naloge Košara sliv

Načini reševanja

1. način reševanja

Učenec je nalogo sistematično, v treh korakih, reševal po metodi reševanja nazaj. Naredil je 3 sklepne račune, v katerih je izračunal število sliv, ki jih je v košari našla posamezna hči. Ta podatek je potem uporabil v naslednjem koraku (za naslednjo hčer).

Tako so razmišljali tudi drugi učenci in nalogo reševali zelo podobno. Le da so bili zapisi pri nekaterih učencih matematično nekorektni. Npr.: Napačen zapis enakosti $8 = \frac{2}{3}$.

Na sliki 2 je prikazano, kako je učenec 8. razreda reševal nalogo v treh korakih od zadnjega dogodka proti prvemu. Spremenljivko je v vsakem koraku označil z x , kjer $x = \frac{3}{3} = 1$ predstavlja celoto, torej število sliv, ki jih je v košari našla posamezna hči.

$$\begin{array}{l}
 8 = \frac{2}{3} \\
 x = \frac{3}{3}
 \end{array}
 \quad
 x = \frac{8 \cdot \frac{3}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{8 \cdot 1}{\frac{2}{3}} = 8 : \frac{2}{3} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

$$\begin{array}{l}
 12 = \frac{2}{3} \\
 x = \frac{3}{3}
 \end{array}
 \quad
 x = \frac{12 \cdot \frac{3}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{12 \cdot 1}{\frac{2}{3}} = 12 : \frac{2}{3} = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$$

$$\begin{array}{l}
 18 = \frac{2}{3} \\
 x = \frac{3}{3}
 \end{array}
 \quad
 x = \frac{18 \cdot \frac{3}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{18 \cdot 1}{\frac{2}{3}} = 18 : \frac{2}{3} = 18 \cdot \frac{3}{2} = 27$$

[Slika 2] Reševanje naloge s slivami v treh korakih

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} = 8 & \frac{2}{3} = 12 & \frac{2}{3} = 18 \\ \frac{1}{3} = 4 & \frac{1}{3} = 6 & \frac{1}{3} = 9 \\ \frac{3}{3} = 12 & \frac{3}{3} = 18 & \frac{3}{3} = 27 \end{array}$$

[Slika 3] Reševanje naloge s slivami po metodi nazaj

Njegova učiteljica je zapisala:

»Naloga je učencem povzročala kar precej težav, večina jih je dobila rezultat 216 sliv, kar pa žal ni bilo pravilno. Učenec, ki je nalogo rešil pravilno, je svoje razmišljanje sošolcem še podrobneje razložil, jaz pa sem jim predstavila metodo reševanja nazaj.«

Oglejmo si še krajši zapis reševanja naloge (slika 3), v katerem so zapisani le bistveni podatki:

Na sliki 3 je ponazorjeno reševanje učenca v treh korakih po metodi reševanja nazaj. Ugotavljamo, da je učenec problem razumel in ga ustrezno reševal. Zapisi enakosti so sicer nepravilni, kot pri večini poslanih izdel-

kov učencev, kar pa reševalcev očitno ne zavrača pri sklepanju.

2. način reševanja

Naslednji način razmišljanja je zelo podooben prvemu, le zapis je drugačen. Učenec 8. razreda je nalogo reševal v treh korakih, od zadnjega dogodka proti prvemu.

Učenec je najprej zapisal ugotovitev za vsako hčer in potem utemeljil, kako je to izračunal. Zapisi so enostavni in pravilni.

3. način reševanja

Učenci so si bistvene podatke iz naloge zapisovali in ponazarjali na različne načine. Eden od njih je predstavljen na spodnji shemi (slika 5).

12 sliv je ostalo za najmlajšo hčer, saj velja $8 : 2 = 4$ in $4 + 8 = 12$.

18 sliv je ostalo za srednjo hčer, saj velja $12 : 2 = 6$ in $6 + 1 = 18$.

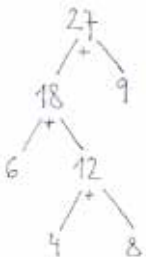
27 sliv je ostalo za najstarejšo hčer, saj velja $18 : 2 = 9$ in $9 + 18 = 27$.

[Slika 4] Pretipkano reševanje učenca



[Slika 5] Pretipkano reševanje učenca

Učenec je kratko, jedrnato in sistematično predstavil svoj način razmišljanja. Nalogo je začel reševati pri najmlajši hčerki, ki je v košari pustila 8 sliv ($\frac{2}{3}$ od tistih, ki jih je našla v košari), pojedla pa 4 slive ($\frac{1}{3}$ od tistih, ki jih je našla v košari). To pomeni, da je najmlajša hči našla v košari 12 sliv ($8 + 4$), kar ustreza količini sliv, ki jo je v košari pustila srednja hči. Na podoben način je razmišljal in zapisoval za srednjo in najstarejšo hčer ter na koncu ugotovil, da je bilo v začetku doganjanja v košari 27 sliv.



[Slika 6] Reševanje z drevesnim prikazom

Podobno je učenec 7. razreda na »eleganten« način z drevesnim prikazom (slika 6) ilustriral uvodno opisovanje reševanja te naloge z metodo nazaj. Izognil se je uvajanju spremenljivk in zapisovanju enačb oziroma enakosti.

Zapisoval je od spodaj navzgor, torej po besedilu naloge od konca proti začetku. S

pomočjo preglednega zapisa lahko v vsakem koraku sproti naredimo miselni preizkus pravilnosti reševanja.

4. način reševanja

Učenka 9. razreda je nalogo, ki poteka v treh korakih, reševala z uporabo treh enačb in treh neznank. V vsaki enačbi je neznanko označila z drugim indeksom. Iz grafičnega ponazoritve pa sklepamo o njenem razmišljanju: zelo spretno uporablja ne le metodo reševanja nazaj (začela je spodaj desno z osmimi slivami, ki so ostale, in reševala nalogo nazaj proti vrhu sheme), ampak tudi grafično-aritmetično metodo reševanja besedilnih nalog (saj si je količino sliv ponazorila z različno visokimi pravokotniki pri količini sliv, ki jih je v košari našla najmlajša hči, kjer je lepo razvidno razmerje med $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$ sliv v košari).

Iz sheme lahko preberemo število sliv, ki jih je dobila posamezna hči, in preverimo rešitev, saj je $9 + 6 + 4 + 8 = 27$.

Njena učiteljica je zapisala:

»Kot vidimo, je učenka 9. razreda uporabila enačbe. Seveda je to smiselno, saj so se naučili uporabljati enačbe v besedilnih nalogah. Pozna se tudi večja sistematičnost reševanja kot pri učencih 8. razreda. Učenka pri vsaki nalogi tudi grafično upodobi potek reševanja.«

Najstarejša	Srednja	Najmlajša	
9			$x_3 = 27$
	6		$x_2 = 18$
		4	$x_1 = 12$
		8 ostalo	

$$\frac{2}{3} x_1 = 8$$

$$x_1 = \frac{8 \cdot 3}{2}$$

$$x_1 = 12$$

$$\frac{2}{3} x_2 = 12$$

$$x_2 = \frac{12 \cdot 3}{2}$$

$$x_2 = 18$$

$$\frac{2}{3} x_3 = 18$$

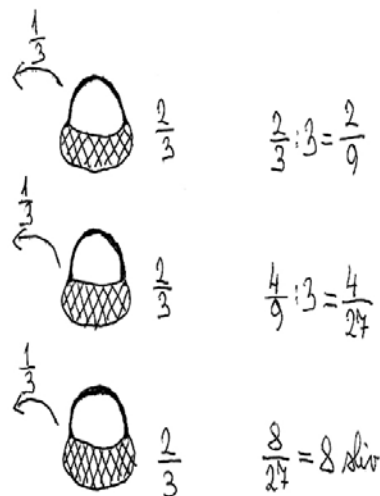
$$x_3 = \frac{18 \cdot 3}{2}$$

$$x_3 = 27$$

[Slika 7] Pretipkano reševanje učenca

5. način reševanja

Nekateri učenci, ki niso poznali metode reševanja nazaj, so nalogo uspešno rešili tudi tako, da so začeli reševati pri prvem dogodku, postopoma računali deleže sliv za posamezno hčer, in na koncu s sklepanjem rešili enostavno enačbo.



[Slika 8] Sklepanje učenca je zelo podobno sestavljanju enačbe

Na sliki 8 je prikazano, kako je učenec 8. razreda, ki še ne zna reševati enačb z ekvivalentnim preoblikovanjem, uspešno izpeljal celoten postopek reševanja z enačbo, ki je opisan v uvodu. Z risanjem košar in s stranskimi računi si je ponazoril postopek.

Njegova učiteljica je povzela postopek reševanja:

»Razmišljal je tako: Če je prva pojedla eno tretjino, jih ostane še dve tretjini. Druga je torej od teh dveh tretjin pojedla tretjino. Torej moramo deliti s tri. Dobil je dve devetini. Podobno tudi za zadnjo hčer. Ko je prišel do ulomka z imenovalcem 27, je ugotovil, da je v košari 27 sliv.

Ko je naredil preizkus, je videl, da je razmišljal pravilno.«

Učenec je dejansko sklepal od začetka, in ne s konca naloge. Tako je povezal podatek 8 z odnosi na podlagi dejanj in ugotovil, da preostalih 8 sliv v košari predstavlja $\frac{8}{27}$ vseh sliv, ki jih je v začetku položila mama v košaro. Iz tega pa je izračunal (s sklepanjem ali z enačbo), da je mati dala v košaro 27 sliv.

1 Reševanje Naloge s števili

Naloga 2 – Naloga s števili

Če neko število delimo z 20, dobljenemu količniku prištejemo 175, vsoto pomnožimo s 4, dobimo število 1340. Poišči neznano število.

Rešitev: Začetno neznano število je 3200.

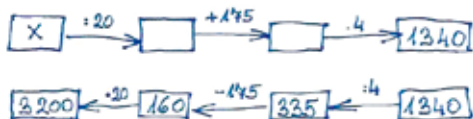
Načini reševanja

Načini reševanja naloge s števili so bili zelo različni. Ena izmed učiteljic, ki nam je poslala rešene naloge svojih učencev, je zapisala:

»Nalogo sem dala učencem pri dodatnem pouku v 7., 8. in 9. razredu. Zanimalo me je, kako se bodo istega problema lotili učenci z različnim predznanjem. V sedmem razredu se jih je nekaj lotilo reševati s pomočjo diagrama. Ko sem jih vprašala zakaj, so rekli, da se tega postopka spomnijo še iz nižjih razredov. V osmem razredu so se je v večini lotili reševati z metodo reševanja nazaj, nekateri tudi z diagramom. V devetem pa so bolj ali manj uspešno sestavili enačbo in jo rešili.«

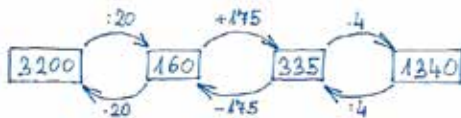
1. način reševanja

Nalogo s števili so učenci najpogosteje reševali s pomočjo diagramov oziroma načinov reševanja s pomočjo različnih diagramov smo od učiteljev prejeli največ.



[Slika 9] Reševanje Naloge s števili

Učenec 6. razreda je nalogo na sliki 9 reševal z dvema diagramoma. V prvi vrstici si je ustvaril diagram po besedilu »naprej«, računanje v spodnji vrstici pa je izvajal po metodi reševanja nazaj, tako da je uporabil nasprotno/inverzno računsko operacijo. Tako učenci pogosto rešujejo enačbe, preden spoznajo postopek z ekvivalentnim preoblikovanjem enačb.



[Slika 10] Reševanje z diagramom

Tudi ta učenec je nalogo na sliki 10 reševal s pomočjo diagrama, v katerem zgornji del ponazarja besedilo naloge, spodnji del pa postopek računanja nazaj z uporabo nasprotno/inverzne računske operacije.

Kar nekaj učencev je nalogo rešilo na podoben način. Ena izmed učiteljic je zapisala:

»Učenci so nalogo reševali samostojno. Pri nekaterih učencih so vidni pomožni računi, nekateri učenci so zapisali izraz, nekateri so delali z diagramom, spet drugi pa so matematični izraz zapisali nepravilno, in sicer tako, kot so razmišljali.«

2. način reševanja

$$\begin{aligned} x : 20 &= y + 175 = z \cdot 4 = 1340 \\ z &= 1340 : 4 & y &= 335 - 175 & x &= 160 \cdot 20 \\ z &= 335 & y &= 160 & x &= 3200 \\ 3200 : 20 &= 160 + 175 = 335 \cdot 4 = 1340 \end{aligned}$$

[Slika 11] Reševanje naloge po metodi reševanja nazaj s pomočjo treh neznank

Učenec 8. razreda je pri reševanju naloge na sliki 11 uvedel 3 neznanke in računal njihove vrednosti. Razvidno je, da učenec razume nalogo in sistematično zapisuje postopek reševanja, ki ga pripelje do pravilne rešitve. Pravilnost dobljene rešitve tudi preizkusi.

Svoje sklepe pa matematično napačno zapisuje, saj zapisane enakosti (v prvi in zadnji vrstici) ne veljajo.

Njegova učiteljica je zapisala:

»Preizkus sem izvedla v 8. razredu z učenci 3. nivoja pri redni uri pouka matematike. Samo izvedbo sem si za-mislila takole:

1. ura – predstavitev metod (katerih sem si sama naredila pred tem povzetek (METODA NAPAČNE PREDPOSTAVKE, METODA REŠEVANJA NAZAJ in GRAFIČNO-ARITMERIČNA METODA) in prikazati primere reševanja nalog z uporabo ene izmed metod. Ta ura se je razvlekla še na drugo šolsko uro.

2. ura oz. 3. ura – individualno reševanje nalog. Učenci si sami izberejo iz nabora nalog vsaj 3 naloge, ki jih poizkusijo rešiti. Zaželeno je, da uporabijo za reševanje katero izmed predstavljenih metod.

Že pri predstavitvi metod so učenci povedali, da so že v preteklosti sami prišli do katere izmed predstavljenih metod reševanja, vendar niso vedeli, da ima ta način reševanja naloge ime. Pri samem reševanju primerov naloge so pri vsaki metodi veliko komentirali in spraševali.

Predstavitve teh metod se jim je zdela zelo zanimiva in uporabna tudi v prihodnje. Učenci so bili mnjenja, da bi jih morali učitelji s temi metodami spoznati že v nižjih razredih, saj bi jim bilo precej lažje pri pouku matematike.«

3. način reševanja

Učenci 9. razreda so nalogo večinoma reševali z enačbo. Neznano število so označili z x .

$$\left(\frac{x}{20} + 175\right) \cdot 4 = 1340$$

$$\frac{x}{5} + 700 = 1340$$

$$\frac{x}{5} = 640$$

$$x = 3200$$

Odgovor: Začetno neznano število je 3200.

Preizkus: Če število 3200 delimo z 20 dobimo 160. Če temu količniku 160 prištejemo 175, dobimo 335. Če to vsoto 335 pomnožimo s 4, dobimo 1340.

[Slika 12] Pretipkano reševanje učenca

8 Reševanje naloge Mesečni stroški

Naloga 3 – Mesečni stroški

Družina mesečno potroši za hrano $\frac{3}{5}$ skupnih prihodkov, za stanarino $\frac{1}{4}$ preostanka in za plačilo elektrike $\frac{1}{3}$ končnega ostanka. Ko poravnava vse omenjene stroške, ji ostane 384 €. Koliko je mesečni prihodek družine?

Odgovor: Mesečni prihodek družine je 1920 €.

Načini reševanja

Nalogo Mesečni stroški so učenci reševali zelo podobno kot uvodno Nalogo s slivami. Presenetljivo je, da so vsi učenci v vsakem koraku dosledno zapisovali denarne enote. Res pa je, da so zapisi nekaterih enakosti matematično napačni.

1. način reševanja

elektrika	stanarina	hrana
$\frac{1}{3} = ?$	$\frac{1}{4} = ?$	$\frac{3}{5} = ?$
$\frac{2}{3} = 384 \text{ €}$	$\frac{3}{4} = 576 \text{ €}$	$\frac{2}{5} = 768 \text{ €}$
$\frac{1}{3} = 192 \text{ €}$	$\frac{1}{4} = 192 \text{ €}$	$\frac{1}{5} = 384 \text{ €}$
$\frac{3}{3} = 576 \text{ €}$ končni ostanek	$\frac{4}{4} = 768 \text{ €}$ preostanek	$\frac{3}{5} = 1152 \text{ €}$
		$\frac{5}{5} = 1920 \text{ €}$

Odgovor: Mesečni prihodek družine Novak znaša 1920 €.

[Slika 13] Pretipkano reševanje učenca

Učenec 8. razreda je sam odkril metodo reševanja nazaj in z njeno pomočjo sistematično rešil nalogo, kot je lepo razvidno iz slike 13. Zapisal je odgovor, ni pa naredil preizkusa.

Tudi v tem primeru reševanja vidimo težave učencev pri pravilnem matematičnem sporočanju, torej zapisovanja enakosti. Vidimo pa, da sistematično zapisuje denarne enote.

Njegova učiteljica je zapisala:

»Učencem pred reševanjem nisem razložila metode, saj sem želela videti, ali bodo sami prišli do zastavljenega cilja.«

2. način reševanja

Devetošolec je nalogo na sliki 14 reševal z enačbo. Mesečni prihodek družine je označil z x .

Hrana	Stanarina	Elektrika	
$\frac{3}{5}x$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{1}{10}x$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}x = \frac{1}{10}x$	
Ostane	Ostane	Ostane	
$\frac{2}{5}x$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{3}{10}x$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10}x = \frac{1}{5}x$	384 €
		$\frac{1}{5}x = 384 \text{ €}$	
		$x = 1920 \text{ €}$	

Preizkus:

Hrana	Stanarina	Elektrika
$\frac{3}{5}$ od 1920 € = 1152 €	$\frac{1}{4}$ od 768 € = 192 €	$\frac{1}{3}$ od 576 € = 192 €
Ostane	Ostane	Ostane
1920 € - 1152 € = 768 €	768 € - 192 € = 576 €	576 € - 192 € = 384 €
Hrana + stanarina + elektrika + ostanek = 1152 € + 192 € + 192 € + 384 € = 1920 €		

[Slika 14] Pretipkano reševanje učenca

$$384 \text{ €} \rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} = 192 \text{ €} \right) \frac{3}{3} = 1 = 576 \text{ €} \rightarrow \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} = 192 \text{ €} \right) \frac{4}{4} = 1 = 568 \text{ €} \rightarrow \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} = 384 \text{ €} \right) \frac{5}{5} = 1 = 1920 \text{ €}$$

[Slika 15] Pretipkano reševanje učenca

3. način reševanja

Učenec 9. razreda je na sliki 15 uporabil »diagram poteka«, v katerega je vpisoval tudi stranske račune. Nekateri zapisi so matematično nepravilni, a učenec v tem (za nas nepreglednem) zapisu sledi rdeči niti in tako pripelje nalogo do pravilne rešitve. Računal je po metodi reševanja nazaj in izhajal iz zneska, ki je ostal na koncu, ter se postopoma približeval znesku, ki ga je družina imela na začetku, preden so poravnali omenjene stroške.

€ Reševanje naloge Nakup knjig

Naloga 4 – Nakup knjig

Marko je kupil tri knjige. Za plačilo prve knjige je porabil $\frac{1}{5}$ celotnega zneska, za drugo $\frac{3}{7}$ preostalega denarja in za tretjo $\frac{3}{5}$ denarja preostalega po nakupu prvih dveh knjig. Domov je prišel s tremi knjigami in 16 €. Koliko denarja je imel pred nakupom knjig?

Odgovor: Pred nakupom knjig je imel 87,50 €.

Načini reševanja

1. način reševanja

Učenec 9. razreda je nalogo razumel in suvereno izpeljal postopek po metodi reševanja nazaj v treh korakih, kot je prikazano na sliki 16. V vsakem koraku je izračunal ceno knjige in ostanek denarja ter ta dva zneska seštel, da je dobil ostanek po nakupu prejšnje knjige.

Manjka preizkus. Tako kot pri večini izdelkov učencev je neustrezen tudi zapis enakosti, npr. $\frac{2}{5} = 16 \text{ €}$. Zanimivo pa je, da večina učencev pri reševanju te naloge dosledno zapisuje enoto za €. Morda bi jih morali opozoriti le še na to, da zapišejo znesek na dve decimalni mesti (centi so stotine).

η Za konec

Žal nimamo izdelkov učencev, ki so ubrali napačno pot reševanja, ali pa so pravilno razmišljali, a naredili računsko napako in tako prišli do napačne rešitve, ali pa so celo obtičali v postopku in niso znali naprej. Zanimivo bi bilo analizirati njihove poti reševanja.

Tretja knjiga

$$\frac{2}{5} = 16 \text{ €}$$

$$\frac{3}{5} = 24 \text{ €}$$

$$16 \text{ €} + 24 \text{ €} = 40 \text{ €}$$

Druga knjiga

$$\frac{4}{7} = 40 \text{ €}$$

$$\frac{3}{7} = 30 \text{ €}$$

$$40 \text{ €} + 30 \text{ €} = 70 \text{ €}$$

Prva knjiga

$$\frac{4}{5} = 70 \text{ €}$$

$$\frac{1}{5} = 17,5 \text{ €}$$

$$70 \text{ €} + 17,5 \text{ €} = 87,5 \text{ €}$$

Pred nakupom knjig je imel 87,5 €.

[Slika 16] Pretipkano reševanje učenca

Opažamo, da učenci niso delali preizkusov, pa tudi odgovori na vprašanja so redki. Mor-da so jih učenci naredili, a jih učitelji reše-vanjem niso priložili, saj so mislili, da nas zanima samo pristop k reševanju problema.

Naloge so pri rednem pouku ali pa pri dodatnem pouku reševali učenci od 6. do 9. razreda. V večini primerov so učenci naj-prej sami reševali ponujene naloge na polju-ben način. Šele potem so učitelji s pomočjo učenca, ki je nalogo uspešno rešil po metodi reševanja nazaj, predstavili to metodo.

Učitelji so pri pouku z učenci reševali še druge naloge z metodo reševanja nazaj. Nekatere naloge so oddali v spletno učilni-co. Učenci so pri tej metodi pokazali zelo inovativne pristope k reševanju problemov, večina jih je znala tudi sistematično zapisati postopek reševanja. Zanimivo je, da so učen-ci intuitivno uporabljali navedene metode

reševanja, na ta način razmišljali, čeprav jih učitelji pred reševanjem teh nalog z na-vedenimi metodami niso seznanili. Nekate-ri učenci so za reševanje uporabili celo več navedenih metod hkrati. Ob zapisih ugotav-ljamo pogosto napačne matematične zapise, predvsem pri rabi znaka za enakost. Ugotav-ljamo, da bo treba izdelati različne aktivnos-ti za razvijanje zmožnosti pravilnega mate-matičnega sporočanja, v kar je vključen tudi simbol =.

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljem: Aniti Nemec, Virág Tadina Bence, Jožici Knez, Sonji Str-gar, Simoni Sobotič, Mileni Čakš Karpov, Petri Šuman, Patriciji Kramberger Rom, Vinku Zobec, Leu Čelofiga, ki so v šolskem letu 2010/11 delili svoja razmišljanja in izdelke učencev v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko.

✂ Vir

1. Sanja Varošane: Neke metode reševanja problemskih zadataka. Poučak, letnik 4, št. 13, 2003.



Grafično-aritmetična metoda

The Arithmetic Graphic Method

Sonja Rajh

Zavod RS za šolstvo

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljena grafično aritmetična metoda reševanja besedilnih nalog. Na začetku je metoda opisana, nato pa je prikazanih nekaj mogočih načinov reševanja izbranih nalog s to metodo. Reševanje učencev je podkrepljeno z mnenji učiteljev.

Ključne besede: besedilne naloge, metode reševanja, grafično aritmetična metoda

Σ Abstract

The paper presents the arithmetic graphic method for solving textual tasks. The method is described at the beginning; next, some of the possible methods for solving selected tasks through this method are presented. The pupils' approaches to solving are accompanied by teachers' opinions.

Keywords: textual tasks, the methods of solving problems, the arithmetic graphic method

α Predstavitev grafično-aritmetične metode

Grafično-aritmetična metoda ponazori matematično nalogo s slikovnim gradivom, ki pomaga učencem pri razumevanju problema in jih vodi na poti do rešitve. Koristnost metode se kaže v tem, da sam način sklepanja podpira sklepanje pri reševanju nalog z Descartovo algebrsko metodo (z zapisom enačbe).

Naloga 1 – Tri števila

Vsota treh števil je 3946. Prvo število je 4-krat manjše od drugega, tretje pa za 4 večje od drugega. Poišči ta števila.

Rešitev: Ta števila so 438, 1752 in 1756.

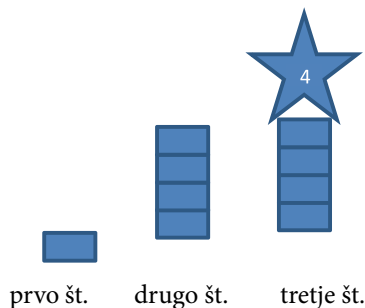
Opis načina reševanja

Ugotovimo, da je prvo število najmanjše. To število ponazorimo s pravokotnikom (ali kakšno drugačno grafično upodobitvijo):



Lik je torej nadomestil neznanko. Drugo število je štirikrat večje od prvega, zato ga grafično prikažemo kot stolpec štirih takih pravokotnikov. Tretje število je za 4 večje od drugega, zato ga grafično predstavimo kot drugo število, ki mu dodamo simbol, ki predstavlja število 4.

Dobimo naslednjo sliko:



Vsota vseh treh števil je 3946. Grafično je to prikazano kot $1 + 4 + 4 = 9$ enakih pravokotnikov in en simbol (zvezda), ki predstavlja število 4. Torej 9 pravokotnikov določa število $3946 - 4 = 3942$. Zato vsak pravokotnik predstavlja število $3942 : 9 = 438$.

Zdaj lahko odgovorimo na vprašanje. Prvo število je enako 438, drugo število je $4 \cdot 438 = 1752$, tretje število je enako $1752 + 4 = 1756$.

Pri preizkusu samo še seštejemo ta tri števila. $438 + 1752 + 1756 = 3946$.

Učenec, ki usvoji reševanje besedilne naloge z grafično-aritmetično metodo, lahko na ta način preide na reševanje besedilnih nalog z zapisom enačb. Pri tej metodi gre skozi iste faze kot pri reševanju z enačbami: ugotavlja znane in neznane količine ter odnose med njimi. V prvem primeru so količine predstavljene grafično, v drugem pa kot algebrski izrazi.

Grafična metoda je torej mogoča spodbuda za tiste, ki jim je jezik algebre še pretežak in miselno lažje manipulirajo z narisanimi objekti.

Rešimo nalogo še z zapisom enačbe: Namesto slikovnega prikaza prvo število označimo z x . Potem je drugo število $4x$, tretje pa $4x + 4$. Njihova vsota je 3946. Zapišimo enačbo in jo rešimo:

$$x + 4x + (4x + 4) = 3946$$

$$9x + 4 = 3946$$

$$9x = 3942$$

$$x = 438$$

Vidimo, da je postopek reševanja enak prejšnjemu, le da imamo namesto igre s pravokotniki tukaj opravka s spremenljivko x .

β Reševanje naloge Lubenice

Naloga 2 – Lubenice

Masa prve lubenice ja za 2 kg manjša od mase druge lubenice in petkrat manjša od mase tretje lubenice. Masa prve in tretje lubenice skupaj je dvakrat večja od mase druge lubenice. Koliko je masa vsake lubenice.

*Rešitev: Lubenice imajo mase
1 kg, 3 kg in 5 kg.*

Načini reševanja

1. način reševanja

V sledečem zapisu na sliki 1 je učenec 8. razreda podobno kot v prejšnjem predstavljenem primeru ponazoril prvo, drugo in tretjo lubenico. Sestavil je zapis, ki zelo spominja na enačbo, le da je spremenljivko označil s kvadratom. Tudi način reševanja spominja na reševanje enačb. Ta učenec bo v 9. razredu lažje razumel postopek reševanja enačb z ekvivalentnim preoblikovanjem, saj je postopek sam ugotovil.

masa prve lubenice $\square$

masa druge lubenice..... $\square + 2 \text{ kg}$,

masa tretje lubenice..... $\square \square \square \square \square$.

masa prve in tretje lubenice skupaj je dvakrat večja od mase druge lubenice

$\square \square \square \square \square$ $\square + 2 \text{ kg}$

$\square + 2 \text{ kg}$

Velja: $\square \square \square \square = 4 \text{ kg}$

$\square = 1 \text{ kg}$.

maso prve lubenice.....1 kg

masa druge lubenice..... 1 kg + 2 kg = 3 kg

masa tretje lubenice5 kg

Preizkus:

masa prve in tretje lubenice skupaj 1 kg + 5 kg = 6 kg je dvakrat večja od mase druge lubenice, $2 \cdot 3 \text{ kg} = 6 \text{ kg}$

[Slika 1] Pretipkano reševanje učenca z dodanimi komentarji o postopku njegovega reševanja

Njegova učiteljica je zapisala:

»Nalogo z lubenicami smo reševali z učenci iz osmega razreda v heterogeni skupini. Zraven grafično aritmetične metode sem se odločila, da bom uporabila še ponazoritev s pomočjo enotskih kock. Ob koncu reševanja sem učencev zastavila še nekaj vprašanj in s pomočjo odgovorov prišla do naslednjega sklepa:

- Grafično-aritmetična metoda je učenecem pomagala pri razumevanju obeh problemskih nalog,
- pri razumevanju in predstavi je večini celo bolj pomagala predstavitev z enotskimi kockami,
- učenci niso imeli težav pri prehodu iz grafično-aritmetične naloge na zapis z enačbo,
- večina učencev meni, da zdaj bolje razumejo reševanje besedilnih nalog,
- na tak način bi se še lotili reševanja problemskih nalog.«

Poleg nalog, ki smo jih ponudili za reševanje ob predstavitvi te metode, so učitelji z učenci našli še precej drugih nalog, ki so jih reševali po grafično-aritmetični metodi. Z grafično aritmetično metodo so učenci rešili tudi naloge, za katere smo predvidevali, da jih bodo reševali pa kakšni drugi metodi. V nadaljevanju je zapisanih nekaj nalog, ki so nam jih poslali učitelji.

γ Reševanje naloge Sadje

Naloga 3 – Sadje

Oče je na trgu kupil jabolka, hruške, pomaranče in banane. V košari ima skupaj 44 sadežev. Število jabolk je za 2 večje od števila hrušk, število hrušk je za 8 večje od števila banan, število banan je za 2 večje od števila pomaranč. Koliko je hrušk v košari?

Rešitev: V košari je 15 hrušk.

Načini reševanja

jabolka	hruške	banane	pomaranče	skupaj
				44
2	2	2		
8	8			
2				

$$\begin{aligned}
 & \bullet + \bullet + \bullet + \bullet + 24 = 44 \\
 & \bullet + \bullet + \bullet + \bullet = 20 \\
 & \bullet = 5
 \end{aligned}$$

Hruške:

$$\bullet + 2 + 8 = 5 + 2 + 8 = 15$$

Odgovor: V košari je 15 hrušk.

[Slika 2] Pretipkano reševanje učenca

Učenec 8. razreda je nalogo Sadje na sliki 2 v bistvu reševal s pomočjo enačbe (čeprav je zapis malo drugačen, kot smo navajeni), v kateri je spremenljivko označil s krogcem.

Izhajal je iz števila pomaranč, kar je označil s krogcem. Ker je število banan za 2 večje od števila pomaranč, je krogcu (ki označuje število pomaranč) dodal število 2. Ker je število hrušk za 8 večje od števila banan, je oznakam za število banan (krogec in število 2) dodal še število 8. Ker je število jabolk za 2 večje od števila hrušk, je oznakam za število hrušk (krogec + 2 + 8) prištel še število 2.

Potem je upošteval to, da je število vseh sadežev v košari enako 44, in sestavil zapis, ki zelo spominja na enačbo (štirje krogci + 24 = 44). Učenec je ob sliki sam ugotovil postopek reševanja enačb. Pri reševanju je enačbe ekvivalentno preoblikoval.

Učenec pa ni izračunal števila drugih sadežev niti ni naredil preizkusa, da bi tako preveril svojo rešitev.

8 Reševanje naloge Riba

Naloga 4 – Riba

Glava ribe predstavlja tretjino mase cele ribe, rep ribe četrtno mase cele ribe, trup ribe pa ima maso 30 dag. Koliko je masa cele ribe?

Odgovor: Masa cele ribe je 72 dag.

Načini reševanja

1. način reševanja

Ena izmed učiteljic, ki je z učenci reševala nalogo Ribe, je zapisala:

»Učencem sem zadnje dni pouka ponudila naloge v reševanje brez kakšnega posebnega navodila. Rekla sem samo, naj

poskusijo naloge rešiti in čim bolj opisati način razmišljanja oziroma reševanja. Najprej sem to naredila v 9. razredu. Na naši šoli imamo heterogene skupine, naloge pa so reševali različni učenci. Kot sem pričakovala, je nalogo večina rešila z enačbo, le dva sta se je lotila malo drugače.

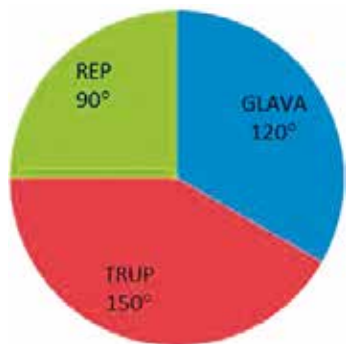
Popolnoma drugače pa je bilo v 6. razredu, kjer sem nalogo ponudila le najuspešnejšim učencem. Le eni učenki je uspelo rešiti nalogo, in še to na zelo izviren način. Ker smo se zadnje ure učili o krogu in krožnici in smo to povezali z obdelavo podatkov ter s tortnim prikazom, je poskušala po tej poti, in kot je razvidno iz njenega izdelka, ji je to tudi uspelo.«

Učenka 6. razreda se je reševanja naloge lotila tako kot je navedeno v sliki 3.

V navedenem primeru reševanja v sliki 3 je učenka na zelo izviren način ponazorila nalogo s slikovnim gradivom, in to na drugačen način, kot smo predstavili z uvodnim primerom. Njen način je za nalogo Ribe bolj ustrezen in ji je pomagal pri razumevanju problema.

Učenka je pri reševanju problemske naloge uspešno povezala znanje o ulomkih, krožnem izseku, središčnem kotu ... Tako je v tortnem diagramu s krožnimi izseki najprej ponazorila glavo in rep ribe. Vedela je, da tretjino ponazori s krožnim izsekom s središčnim kotom 120° , četrtno pa s središčnim kotom 90° . Za krožni izsek, ki je ostal za trup, je izmerila ali pa izračunala velikost središčnega kota. Tako je ugotovila, da maso trupa ponazori s krožnim izsekom, katerega središčni kot meri 150° .

Iz podatka, da maso 30 dag ponazorimo s krožnim izsekom s središčnim kotom 150° , je izračunala, da maso 1 dag ponazorimo s krožnim izsekom s središčnim kotom 5° .



$$150^\circ = 30 \text{ dag}$$

$$120 : 5 = 24 \text{ dag}$$

$$150 : 30 = 5$$

$$90 : 5 = 18 \text{ dag}$$

$$30 + 24 + 18 = 72$$

Odgovor:

Masa cele ribe je 72 dag.

$$\frac{1}{3} \text{ od } 72 = 72 : 3 = 24$$

$$\frac{1}{4} \text{ od } 72 = 72 : 4 = 18$$

[Slika 3] Pretipkano reševanje učenke

Potem kotu 120° ustreza 24 dag (kar je masa glave), kotu 90° pa masa 18 dag (masa repa). Ko je seštela mase trupa, glave in repa, je dobila 72 dag. Na koncu je zapisala odgovor in naredila še preizkus, ter tako preverila, ali je tretjina od 72 res 24 (masa glave) in četrtnina od 72 res 18 (masa repa).

Učenka je nalogo inovativno rešila. Uspešno je uporabila znanje v novi, čisto drugačni situaciji, kar nam je tudi cilj: učence naučiti povezovati znanje, uporabiti znano v novih situacijah.

Motijo le neustrezni zapisi enakosti $150^\circ = 30 \text{ dag}$ in $120 : 5 = 24 \text{ dag}$.

2. način reševanja

$$\text{Glava ribe} \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 4 = 24$$

$$\text{Rep ribe} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 3 = 18$$

$$\text{Trup ribe} \quad 30 = \frac{5}{12} \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 5 = 30$$

$$\frac{1}{12} = 6 \quad 30 : 5 = 6 \quad 24 + 18 + 30 = 72$$

Odgovor: Masa cele ribe je 72 dag.

[Slika 4] Pretipkano reševanje učenke

Učenka 8. razreda je ulomka, ki predstavlja maso glave in maso repa ribe, razširila na skupni imenovalc, da je ugotovila, da ji do celote (do $\frac{12}{12}$) manjka še $\frac{5}{12}$, kar je masa trupa ribe. In če $\frac{5}{12}$ mase ribe predstavlja 30 dag, potem $\frac{1}{12}$ mase ribe predstavlja 6 dag. S pomočjo tega podatka je izračunala maso za glavo, rep in trup ribe ter na koncu vse skupaj seštela, da je dobila skupno maso ribe, to je 72 dag.

Iz zapisov na sliki 4 je razvidno, da ima tudi učenka 8. razreda težave pri zapisih enakosti: $30 = \frac{5}{12}$ in $\frac{1}{12} = 6$.

Njena učiteljica je poleg izdelka učenke poslala še pripis:

»V preteklem šolskem letu sem poučevala matematiko v 8. razredu (III. nivo) in 9. razredu (II. nivo). V zadnjem tednu pred poletnimi počitnicami, ko smo imeli ocene že zaključene, smo si z učenci pogledali različne primere reševanja problemskih nalog. Učencem sem razdelila učne liste, na katerih so bile predstavljene 4 različne metode reševanja problemskih nalog.

S pomočjo rešenega primera so potem samostojno rešili svojo nalogo. V 8. razredu so naloge reševali zelo dobro. Bili so zainteresirani za delo, reševanje jim je bilo v veselje. Hitro so rešili naloge, zato smo potem dodatno reševali še naloge iz učbenika za deveti razred – poglavje uporaba enačb v problemskih nalogah. Zanimivo se mi je zdelo to, da skoraj vsi učenci v 9. razredu take vrste nalogo skušajo rešiti z zapisom enačbe, le kakšen posameznik se znajde in nalogo reši na svoj oz. drug način.»

ε Reševanje naloge Zbiralnik vode

Naloga 5 – Zbiralnik vode

Če odtočimo iz polnega zbiralnika $\frac{2}{3}$ vode, od ostanka zopet $\frac{2}{3}$, nam ostane 84 litrov vode. Koliko litrov drži zbiralnik?

Odgovor: Zbiralnik drži 756 litrov.

Način reševanja

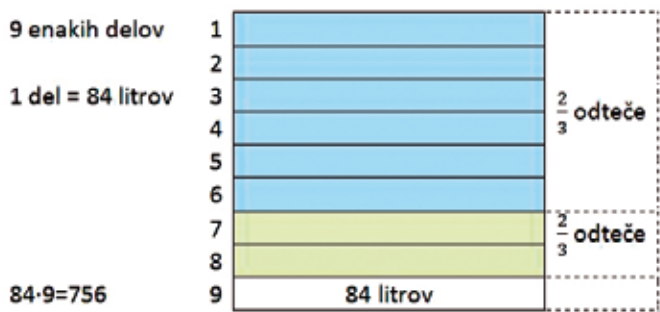
Iz zapisa v sliki 5 razberemo, da je učenka 8. razreda ugotovila, da če hoče ponazoriti $\frac{2}{3}$ od ostanka vode, torej $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, mora

zbiralnik razdeliti na devetine. Zelo nazor-
no je ponazorila svoj način reševanja naloge. Količino vode, ki smo jo najprej odtočili, je obarvala z modro barvo, količino vode, ki smo jo naknadno odtočili, pa je obarvala z zeleno barvo. Količina vode, ki je ostala na koncu, je ostala nepobarvana. Ta količina, 84 l, predstavlja $\frac{1}{9}$ polnega zbiralnika. In če en del predstavlja 84 l, potem 9 enakih delov predstavlja $9 \cdot 84 \text{ l} = 756 \text{ l}$. Tako je izračunala prostornino celotnega zbiralnika.

Žal pa se je pri prepisovanju zmotila in tako v odgovoru zapisala napačno vrednost. Zapisala je, da zbiralnik drži 765 l, čeprav je izračunala 756 l.

η Za konec

Učenci so pri reševanju problemskih nalog uporabljali zelo inovativne pristope reševanja in s tem dokazali razumevanje problema, ki so ga reševali. Ugotavljamo pa, da imajo učenci težave pri uporabi matematičnega jezika, zlasti pri zapisovanju matematičnih enakosti ($150^\circ = 30 \text{ dag}$ in $\frac{1}{12} = 6$), kar je razvidno pri obeh rešenih primerih naloge Riba.



Odgovor: Zbiralnik drži 765 litrov vode.

[Slika 5] Pretipkano reševanje učenke

S pomočjo grafično-aritmetične metode so nekateri učenci reševali naloge, ki so omenjene pri drugih metodah reševanja besedilnih nalog. Vizualnim tipom učencev pomaga, da si besedilno nalogo grafično oz. vizualno predstavijo, ker jim to pomaga pri reševanju, vendar to še ni nujno grafično-aritmetična metoda.

Navajamo še dve nalogi, ki jih lahko rešimo z uporabo grafično-aritmetične metode.

Naloga 6 – Notranji koti trikotnika

V trikotniku je prvi notranji kot trikrat manjši od drugega notranjega kota, tretji pa je za 15° večji od prvega notranjega kota. Koliko merijo posamezni notranji koti trikotnika?

Rešitev: Notranji koti trikotnika merijo 33° , 99° in 48° .

Naloga 7 – Vsota zaporednih lihih števil

Vsota štirih zaporednih lihih števil je 216. Poišči ta števila.

Rešitev: Iskana števila so 51, 53, 55 in 57.

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljicam Petri Kastelec, Mojci Kavčič, Vilmi Moderc, Barbari Fir, Nevi Slavec, Petri Tonejc, Sonji Mišič, ki so v šolskem letu 2010/11 delile svoje izkušnje in izdelke učencev v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko v OŠ.

Vir

1. Sanja Varošaneč: Neke metode reševanja problemskih zadataka. Poučak, letnik 4, št. 13, 2003.



Metoda iskanja vzorcev

The Pattern Search Method

**Amela Sambolić
Beganović**

Zavod RS za šolstvo

Σ Povzetek

V prispevku predstavljamo reševanje besedilnih nalog z metodo iskanja vzorcev. Na začetku metodo predstavimo in nato prikažemo mogoče načine reševanja izbranih nalog s to metodo. Reševanje učencev podkrepimo z mnenji učiteljev.

Ključne besede: metoda iskanja vzorcev, besedilne naloge

Σ Abstract

In the paper the solving of textual tasks through the use of the pattern search method is presented. We first present the method, and then follow it up with all the possible ways of solving selected tasks by this method. We bolster pupils' solving of the exercises with the teachers' opinions.

Keywords: pattern search method, textual tasks

α Predstavitev metode iskanja vzorcev

Nekatere zahtevnejše besedilne oz. problemske naloge lahko rešimo z **metodo iskanja vzorcev**. Gre za reševanje problema, ki je enostavnejši (na primer zmanjšamo število) od prvotnega. Enostavnejše različice problema nam pomagajo poiskati vzorec, s pomočjo katerega problem lažje rešimo.

Naloga 1 - Rokovanje na družinskem pikniku

Markovi starši pripravljajo družinski piknik, ki se ga bo udeležilo 27 sorodnikov. Tako kot vsak se bo tudi ta družinski piknik začel z močnim stiskom rok. Koliko bo vseh rokovanj?

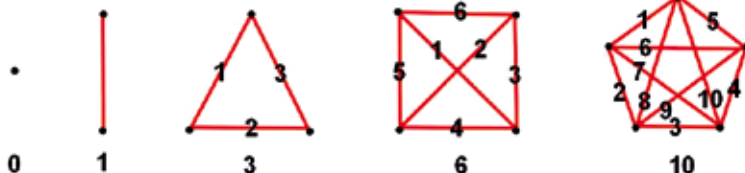


Vir slike: <http://mikimiska.wordpress.com/tag/piknik/>

Rešitev: Število rokovanj med 30 sorodniki je 435.

Ideja metode »iskanje vzorcev« je naslednja: iščemo enostavnejše različice problema, ki nam bodo pomagale poiskati vzorec. Učence uvajamo v algebrske zapise oz. v posplošitev problema.

I. Grafična pot reševanja



Vsaka povezava med dvema točkama pomeni eno roko. Število točk pomeni število ljudi, število povezav pa število rokovanj.

II. Tabeliranje

Število sorodnikov	Število rokovanj	(Matematična opazanja)
1	0	/
2	1	$\frac{2 \cdot 1}{2}$
3	3	$\frac{2 \cdot 3}{2}$
4	6	$\frac{3 \cdot 4}{2}$
5	10	$\frac{4 \cdot 5}{2}$
6	15	$\frac{5 \cdot 6}{2}$
...	...	...
30	435	$\frac{29 \cdot 30}{2}$
n		$\frac{(n-1)n}{2}$

Število rokovanj med 30 sorodniki je 435.

Z učenci poskušamo rešiti predstavljeno nalogo z metodo iskanja vzorcev. Želeno je, da učenci sami izpeljejo induktivni sklep za večje število sorodnikov. Naslednji korak je, da vzorec – tabelo nadaljujejo. Povezava med prvim in drugim stolpcem je težja, zato naj učenci podatke v preglednici zapišejo drugače, skratka tako, da lažje opazijo vzorec (pravilo). Priporočamo preglednico s praznim tretjim stolpcem, ki ga v tem primeru upo-

rabimo. Zadnji korak je posplošitev problema in rešitev.

V nadaljevanju predstavljamo raznolike načine reševanja učencev od 6. do 9. razreda dveh nalog (Rokovanje na družinskem pikniku in Počitniško delo) po tej metodi. Učenci so bili pri reševanju različno uspešni. Strnili bomo ugotovitve, načine reševanja, ki jih je sporočilo sedem učiteljev v šolskem letu 2010/2011 v forumu spletne učilnice za matematiko v osnovni šoli. V večini predstavljenih primerov učitelji učencev niso posebej usmerili v konkretno metodo reševanja, ampak so jim pustili prosto pot. Ko so učenci nalogo rešili, so si skupaj ogledali še reševanje z metodo iskanja vzorcev (npr. za izhodišče so vzeli rešitev učenca, ki je to metodo samostojno uporabil).

β Reševanje naloge Rokovanje na družinskem pikniku

Učitelji so zaznali, da je učencem naloga o številu rokovanj na družinskem pikniku povzročala kar nekaj »preglavic«. Pri reševanju te naloge so učenci uporabljali različne prikaze, ki so jim pomagali pri poenostavitvi problema.

Težave so se pojavljale tudi pri razumevanju besedila naloge. Učiteljica je zapisala:

Pri tej nalogi imam tudi sama nekaj pripomb. Rešitev je za 30 oseb. V besedilu ni točno omenjeno, koliko ljudi bo na pikniku. Moralo bi pisati, da se piknika udeležijo še 27 sorodnikov. Poleg tega pa se mi ne zdi logično, da se bodo med seboj rokovali Mark in njegova starša. Učenec je računal za 27 oseb. Najprej je pomnožil 27 krat 27, vendar je videl, da pride liho število, ki ni

deljivo z 2, zato je pomnožil 27 krat 26, da so se vsi sorodniki med seboj rokovali samo enkrat. Tukaj bi moral prišteti še 3 krat 27, ker se vsak član družine rokuje s sorodniki enkrat (med seboj pa se ne rokujejo) in bi bila rešitev 432.

Menimo, da ima naloga več rešitev, glede na privzete predpostavke, ki jih predvidimo ob začetku reševanja naloge. Če predpostavimo, da so Marko in njegovi starši družinski člani in da se bo piknika udeležilo 27 sorodnikov, potem beseda še ni potrebna. Nato predpostavimo, da se upoštevajo vsa rokovanja (tudi med družinskimi člani). Ob teh dveh predpostavkah je rešitev naloge takšna, kot je bila napovedana v rešitvah. Najbolj naravna je seveda rešitev, ki izključi rokovanja med ožjimi družinskimi člani.

Izpostavili bomo tri poti reševanja učencev, iz katerih je razvidna uporaba različnih prikazov pri iskanju vzorcev, in »težave«, ki so jih učenci imeli.

1. način reševanja

Učenec je v prikazanem primeru (Slika 1) izbral tabelo, ki jo je sistematično in pravilno oštevilčil od 1 do 30. Sprašujemo se, zakaj tabela ni v celoti izpolnjena. Ker je zmanjkalo časa, volje, potrpljenja ali je učenec preprosto ugotovil, da je »nekaj narobe« in ni nadaljeval. Iz tabele je razvidno, da učenec še ne ve, da je rokovanje med 1. in 2. udeležencem piknika enako kot rokovanje med 2. in 1. (dvojno štetje). Če bi nadaljeval, bi lepo 'ploskovno' prikazal problem rokovanja.

2. način reševanja

Rešitev naloge (Slika 2) ni pravilna. Zanimivo bi bilo vedeti, kako je razmišljal učenec. Učenec izračuna 27 krat 27 in dobi rezultat 729. Nato si pomaga z risanjem in ugotovi, da re-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1		x																												
2	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
3	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
4																														
5																														
6																														
7																														
8																														
9																														
10																														
11																														
12																														
13																														
14																														
15																														
16																														
17																														
18																														
19																														
20																														
21																														
22																														
23																														
24																														
25																														
26																														
27																														
28																														
29																														
30																														

[Slika 1] Reševanje naloge Rokovanje na družinskem pikniku s tabelo

27 · 27

54
189
—
729



[Slika 2] Nepravilno reševanje naloge o Rokovanju na družinskem pikniku

zultat 729 ni pravilen. Pomembno je, da je učenec z risanjem črte od enega objekta, ki predstavlja enega sorodnika, do drugega objekta, ki predstavlja drugega sorodnika, ugotovil, da

je rokovanje med 1. in 2. udeležencem piknika enako kot rokovanje med 2. in 1. (dvojno štetje), kar učencu, ki je izbral tabelo kot pripomoček pri iskanju vzorca ni uspelo.

Učiteljica je zapisala zanimivo ugotovitev, ki se nanaša na razliko v reševanju med učenci 8. in 9. razreda:

Naloga je bila učencem zelo zanimiva in jih je pritegnila. Skoraj vsi učenci so tudi prišli do pravilne rešitve, le po različnih poteh. Učenci 9. razreda so bili iznajdljivejši in so iskali vzorce, posploševali in na zelo kratek način rešili nalogo.

3. način reševanja

Učitelj je zapisal, da je, da bi se izognil reševanju naloge z zapisom zaslužkov po posameznih dneh in seštevanju vseh zaslužkov po 20 dneh, spremenil vprašanje: Kolikšen bo zaslužek po 100 dnevih? Ugotovil je naslednje:

Učenci so se lotili reševanja naloge na podoben način (zapisovali so zaslužek po posameznih dneh), a so kmalu ugotovili, da je za takšen pristop malo preveč dni.

Po neuspehlih poizkusih so si učenci po učiteljevem nasvetu pomagali s tabelo (dan, zaslužek, skupen zaslužek) ter z opazovanjem dni in skupnega zaslužka. S skupnim razmišljanjem so prišli do simbolnega zapisa:

$$\text{zaslužek} = \text{število dni}^2$$

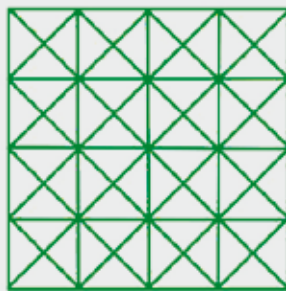
8 Za konec

Navajamo še eno nalogo, ki se lahko reši z opisano metodo.

Naloga 3 – Kvadrati in trikotniki

Koliko je vseh kvadratov na sliki?

Koliko je vseh trikotnikov na sliki?

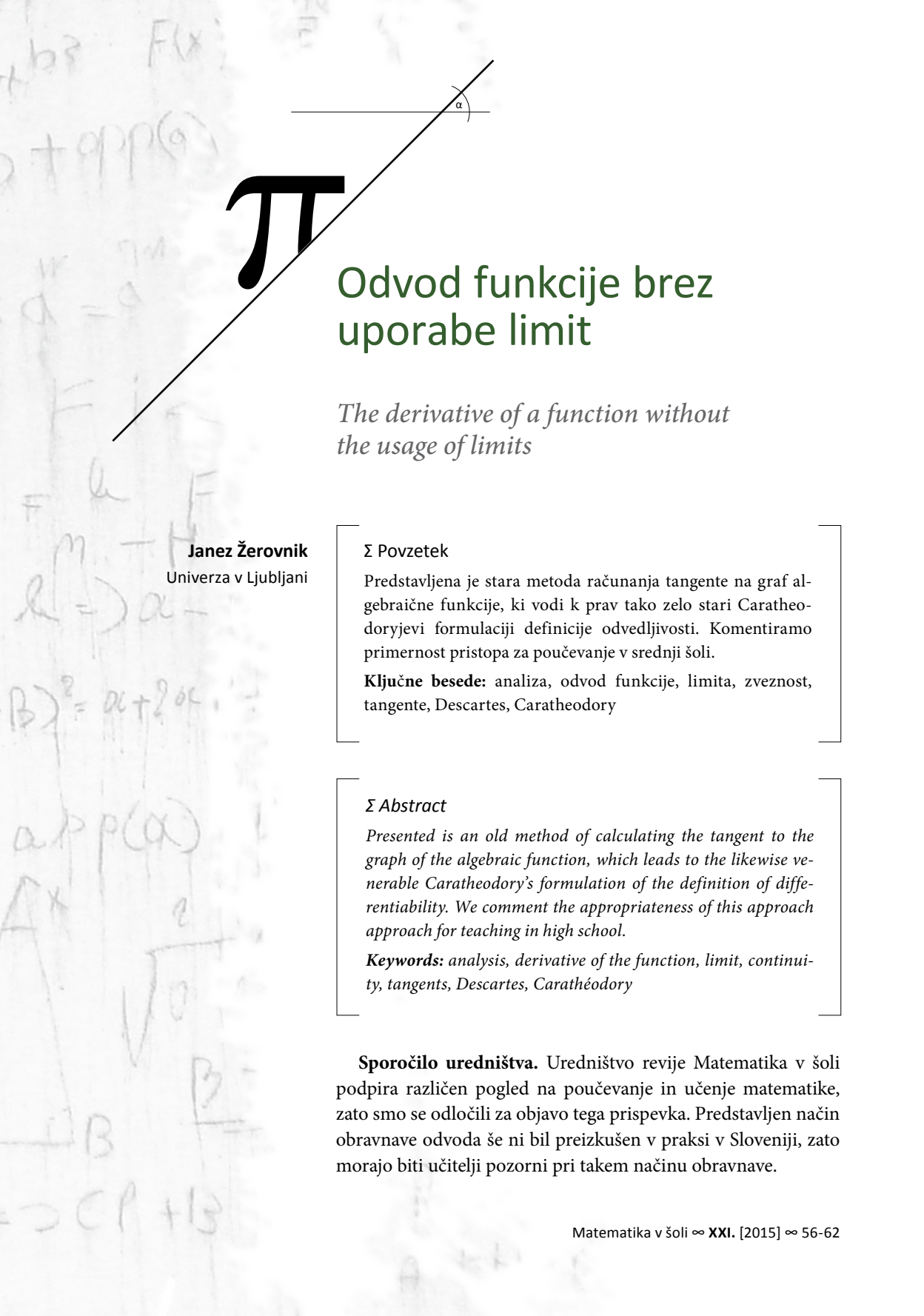


Rešitev: 72 kvadratov,
240 trikotnikov

Vir: Mathplus 9, Harcourt Brace & Company, Canada

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljicam Tanji Jagarinc, Nataši Pavšič, Andreju Starc in Nataši Olenik, ki so v šolskem letu 2010/11 z nami delile svoja razmišljanja in izdelke učencev v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko.



π

Odvod funkcije brez uporabe limit

The derivative of a function without the usage of limits

Janez Žerovnik
Univerza v Ljubljani

Σ Povzetek

Predstavljena je stara metoda računanja tangente na graf algebraične funkcije, ki vodi k prav tako zelo stari Caratheodoryjevi formulaciji definicije odvedljivosti. Komentiramo primernost pristopa za poučevanje v srednji šoli.

Ključne besede: analiza, odvod funkcije, limita, zveznost, tangente, Descartes, Caratheodory

Σ Abstract

Presented is an old method of calculating the tangent to the graph of the algebraic function, which leads to the likewise venerable Caratheodory's formulation of the definition of differentiability. We comment the appropriateness of this approach for teaching in high school.

Keywords: analysis, derivative of the function, limit, continuity, tangents, Descartes, Carathéodory

Sporočilo uredništva. Uredništvo revije Matematika v šoli podpira različen pogled na poučevanje in učenje matematike, zato smo se odločili za objavo tega prispevka. Predstavljen način obravnave odvoda še ni bil preizkušen v praksi v Sloveniji, zato morajo biti učitelji pozorni pri takem načinu obravnave.

α Uvod

Range v [5] predstavi Descartesovo metodo računanja tangent in odpira vprašanje, ali bi bilo smiselno ponovno razmisliti o osnovah kalkulusa, kar bolj ali manj ustreza našemu uvodu v analizo. Pojem limite je abstrakten in sorazmerno zahteven koncept. Posebej je problematično, ker si v srednji šoli težko izmislimo primere, ko je limito zares smiselno računati, saj imamo opravka praviloma z vsaj odsekoma zveznimi funkcijami. Izjema so limite z $x \rightarrow \infty$ (Drugi primer so nezveznosti funkcij v točkah nedefiniranosti, ki pa jih pogosto odpravimo kar z deljenjem ali malo bolj zahtevnim preoblikovanjem.)

Po drugi strani pa limito vpeljemo sorazmerno zgodaj in na tem temeljimo veliko poznejše obravnave. Tako na primer rečemo, da je funkcija zvezna na intervalu, če je zvezna v vsaki točki intervala. Tu se pojavi limita: funkcija je zvezna v točki, če je tam njena vrednost enaka limiti. Precejšnja zmeda ali nepotrebna komplikacija za dijaka, ki pozna samo zvezne funkcije. Tu se lahko vprašamo, ali ne bi bilo bolj naravno definirati zveznosti brez omembe limit, in potem verjetno bližje dijakovemu znanju namesto zveznosti v točki takoj definirati zveznost na intervalu, a o tem na kakem drugem mestu.

Pojem odvoda je med težjimi abstraktnimi pojmi v srednješolski matematiki, po drugi strani pa se mu nikakor ne moremo in nečemo odreči zaradi očitne uporabnosti pri zelo elementarnih uporabnih nalogah. Za običajno vpeljavo pojma odvoda potrebujemo najprej pojem limite funkcije, potem pa opazujemo, ali konvergira limita diferenčnega kvocienta. Standardni obravnavi [6] sledijo srednješolski učbeniki, na primer [1] (ki je trenutno edini potrjeni učbenik za 4. razred

gimnazije [9]). Ali se lahko odrečemo vpeljavi odvoda z limito funkcije?

Že Descartes je v 17. stoletju poznal metodo za direktno računanje tangent, ki pa je danes nekoliko pozabljena [4,5]. Tangente na graf funkcije in seveda tudi smerni koeficient tangente lahko izračunamo brez uporabe odvoda za veliko družino funkcij. In zgodbo lahko obrnemo: najprej računamo tangente, potem pa odvod definiramo kot smerni koeficient tangente. Descartesov pristop naravno vodi h Caratheodoryjevi definiciji odvedljivosti, še eni skoraj pozabljeni dobri ideji [2,3,8]. Ta pristop je predstavljen tudi v [7], potem ko je bila tema nezanimiva za revijo Obzornik za matematiko in fiziko!

Tu bomo najprej povzeli Descartesovo metodo, s katero lahko tangente na grafe mnogih funkcij izračunamo brez vpeljave odvoda. Še več, smerni koeficient tangente lahko v mnogih primerih izračunamo algebraično brez pojma limite. Za funkcije, pri katerih se pojmu limite ne moremo izogniti, pa na naraven način pridemo do alternativne definicije odvoda, ki je enakovredna običajni. Alternativna Caratheodoryjeva definicija odvedljivosti in odvoda temelji na pojmu zveznosti funkcije, ki je videti bolj naraven in intuitivno lažje razumljiv kot pojem limite.

V nadaljevanju najprej predstavimo Descartesovo metodo računanja tangent, na podlagi katere je dana definicija odvoda polinoma. S primeri pokažemo, da je lastnosti odvoda mogoče sorazmerno preprosto izpeljati. Šele za splošno definicijo odvoda potrebujemo uporabo limite ali, enakovredno in morda primernejšo, zveznosti funkcije. Zapisana je Caratheodoryjeva definicija odvoda, ki je naravna posplošitev prejšnje definicije. Spet na primerih vidimo, da je izpeljava lastnosti odvodov sorazmerno nezahtevna.

Nezahtevnost ali zahtevnost tega ali onega pristopa je seveda težko opredeliti oziroma je zelo odvisna od (pred)znanja, pa tudi od drugih dejavnikov. Navsezadnje tudi od pridobljenih navad in izobrazbe učiteljev.

Namesto sklepa tu zapišimo osnovno sporočilo prispevka. Tudi pri poučevanju standardnih vsebin matematike je smiselno vedno znova premišljati o najprimernejšem načinu vpeljave pojmov. Pogosto nam že znane, a včasih po krivici pozabljene ideje lahko pomagajo, da se temu približamo, ne da bi pri tem izgubili splošnost ali celo formalno logično korektnost obravnave. Seveda je na drugi strani potrebna velika previdnost, saj lahko majhna sprememba v definiciji kakega osnovnega pojma povzroči nepričakovane težave na kakem drugem mestu obravnave.

β Descartesova metoda

Poglejmo najprej primer, kako lahko izračunamo tangento na parabolo, torej tangento na graf kvadratne funkcije. Ni težko razumeti, da premica seka parabolo v eni, dveh, ali v nobeni točki. Premica, ki seka graf kvadratne funkcije v dveh točkah, je sekanta, premica, ki graf seka v eni točki, torej se ga dotika, pa je tangenta. Algebraično recimo, da imamo funkcijo s predpisom $f(x) = x^2$ in želimo izračunati predpis linearne funkcije, katere graf bo tangenta v točki (a, a^2) .

Enačba tangente bo $y = a^2 + k(x - a)$, torej dobimo

$$x^2 - a^2 = k(x - a)$$

in od tod

$$((x + a) - k)(x - a) = 0.$$

Ker imata tangenta in parabola eno skupno točko, mora imeti enačba dvakratni koren $x = a$, zato $(x + a) - k = 0$ in dobimo $k = 2a$.

Če poskusimo razmišljati, kako bi to naredili intuitivno jasno in preprosto, bi šlo lahko takole, morda v praksi tudi s pomočjo grafične animacije. Tangenta ni katera koli premica, ki ima skupno točko z grafom funkcije, ampak jo dobimo tako, da sekanto, ki graf preseka v dveh bližnjih točkah, premikamo, tako da se dve presečišči približujeta.

Algebraično to pomeni, da se bosta dva korena ustrezne enačbe združila v večkratni koren. To bi dijaki lahko intuitivno razumeli na podlagi že znane obravnave parabole in premice. V animaciji bi tako na primer lahko začeli z grafom polinoma tretje stopnje in premico, ki bi ta graf sekala v treh točkah, nazadnje pa bi imeli tangento, ki bi imela z grafom polinoma še eno presečišče.

Podobno lahko razmišljamo, če je funkcija polinom stopnje $r \geq 2$.

Tangenta v točki $(a, P(a))$ je premica z enačbo $y = P(a) + k(x - a)$, $x = a$ pa mora biti vsaj dvakratni koren enačbe $P(x) = P(a) + k(x - a)$. Ker je $x = a$ ničla polinoma $P(x) - P(a)$, lahko zapišemo

$$P(x) - P(a) = q(x)(x - a),$$

kjer je q polinom stopnje $r - 1$. Potrebovali smo samo znanje deljenja polinomov. Zapišimo enačbo presečišč grafa polinoma in naše premice - tangente:

$$P(x) = P(a) + k(x - a).$$

Kot prej preoblikujmo in dobimo

$$(q(x) - k)(x - a) = 0$$

in ker mora biti $x = a$ dvakratni koren sklepamo, da mora biti $q(a) = k$.

Ker ima tudi $q(x) - q(a)$ ničlo pri $x = a$, lahko zapišemo $q(x) - q(a) = r(x)(x - a)$, in $P(x) - P(a) - k(x - a) = (q(x) - k)(x - a) = (q(a) - k)(x - a) + (q(x) - q(a))(x - a) = (q(a) - k)(x - a) + r(x)(x - a)^2$

Iz zadnjega zapisa sklepamo, da ima enačba $P(x) = P(a) + k(x - a)$ večkratni koren pri

$x = a$ natanko tedaj, ko je $q(a) = k$. Torej je $q(a)$ smerni koeficient tangente na graf polinoma P v točki $(a, P(a))$. Iz zapisa tudi sledi, da ima graf polinoma dobro definirano tangento v vsaki točki in lahko definiramo:

Definicija tangente in odvoda polinoma. *Tangenta na graf polinoma P v točki $(a, P(a))$ je enolično določena premica, ki v točki $(a, P(a))$ seka graf polinoma z večkratnostjo vsaj dva. Smerni koeficient tangente je enak $q(a)$, kjer je $q(x)$ določen z $P(x) - P(a) = q(x)(x - a)$. Smerni koeficient tangente imenujemo odvod polinoma P pri $x = a$, in ga označimo s $P'(a)$.*

Podobno lahko obravnavamo racionalne funkcije, obravnavo pa lahko razširimo na algebraične funkcije [4].

γ Osnovne lastnosti odvoda

Za tu definirani odvod veljajo znane lastnosti, dokazi pa so preprosti. Poglejmo nekaj zgledov izpeljave pravil za odvajanje. Omejimo se na množico funkcij $\mathcal{F}$, ki je zaprta za osnovne operacije (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje), komponiranje funkcij in inverze. Potem lahko, seveda na primer-nih definicijskih območjih, privzamemo, da za poljubno funkcijo $f \in \mathcal{F}$ obstaja $\varphi \in \mathcal{F}$, tako da je $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$ [4]. Trditev očitno velja za množico polinomov, pa tudi za množico racionalnih funkcij.

Privzemimo, da sta f in g iz množice funkcij $\mathcal{F}$, torej da velja

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a), \text{ za neko funkcijo } \varphi \in \mathcal{F} \quad (1)$$

in

$$g(x) - g(a) = \psi(x)(x - a), \text{ za neko funkcijo } \psi \in \mathcal{F} \quad (2)$$

Seštejmo (1) in (2),

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \\ &= f(a) + g(a) + \varphi(x)(x - a) + \psi(x)(x - a) \\ &= f(a) + g(a) + \varphi(x) + \psi(x))(x - a) \\ &= f(a) + g(a) + q(x)(x - a). \end{aligned}$$

Torej ima $f + g$ v točki a odvod in

$$(f + g)'(a) = \varphi(a) + \psi(a) = f'(a) + g'(a).$$

Dobili smo znano pravilo za odvod vsote odvedljivih funkcij. Tu rečemo, da je funkcija odvedljiva v točki, če v tej točki obstaja odvod. Po prejšnji definiciji je to ekvivalentno obstoju tangente na graf funkcije. Pozneje to definicijo posplošimo in jo razširimo na odvedljive funkcije v standardnem pomenu.

Za dokaz pravila za produkt pomnožimo

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \varphi(x)(x - a) \text{ in} \\ g(x) &= g(a) + \psi(x)(x - a) \text{ ter preuredimo} \\ f(x)g(x) - f(a)g(a) &= (\varphi(x)g(a) + f(a)\psi(x) + \\ &\quad \varphi(x)\psi(x)(x - a))(x - a). \end{aligned}$$

Vstavimo $x = a$ v oklepaj na desni in z upoštevanjem $\varphi(a) = f'(a)$ in $\psi(a) = g'(a)$ preberemo znano pravilo

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= (\varphi(a)g(a) + f(a)\psi(a) + 0) = \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

Zelo kratek je tudi dokaz izreka o odvodu posredne funkcije.

Izrek. *Naj bo $y = f(x)$ odvedljiva funkcija v točki a in $z = g(y)$ odvedljiva funkcija v točki $b = f(a)$. Potem je $g \circ f(x) = g(f(x))$ odvedljiva funkcija v točki a in velja*

$$(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) f'(a)$$

Za dokaz zapišimo definicijo odvedljivosti za funkcijo g z novimi oznakami

$$g(y) - g(b) = \psi(y)(y - b)$$

ter vstavimo $y = f(x)$, $b = f(a)$ in $y - b =$

$$= f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a),$$

$$g(f(x)) - g(f(a)) = \psi(f(x)) \varphi(x)(x - a).$$

Torej je kompozitum $g \circ f$ odvedljiva funk-

cija v točki a in

$$(g \circ f)'(a) = \psi(f(a)) \varphi(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

Podobno kratki in predvsem konceptualno nezahtevni so tudi dokazi drugih lastnosti odvoda, ki jih tu ne bomo navajali.

8 Caratheodoryjeva definicija odvedljivosti

Pri posplošitvi odvoda na večji razred funkcij ne gre brez uporabe limit. Tudi tu lahko limite skrijemo v definicijo zveznosti, ki je verjetno dijakom precej bolj intuitivno razumljiva, saj poznajo skorajda samo funkcije, ki so zvezne na svojih definicijskih območjih. Limite uporabimo šele v konkretnih primerih oziroma tedaj, ko res ne gre brez njih.

Primerna definicija zveznosti je seveda vredna posebne pozornosti, in kot že omenjeno, podrobna obravnava presega namen tega prispevka. Vsekakor je dijakom vredno povedati, da gre za formalizacijo lastnosti funkcije, katere graf je neprekinjena krivulja. Potem bi bilo naravno govoriti o zveznosti na (zaprtem) intervalu in uporabiti standardno definicijo enakomerne zveznosti. Potem lahko rečemo, da je funkcija zvezna tudi v vsaki točki intervala in imamo ekvivalentno definicijo običajni. Bistveno sporočilo tega odstavka je, da je mogoče in morda smiselno definirati zveznost funkcije pred definicijo limite, manj pomembno pa je tu vprašanje, ali to naredimo na tu nakazani ali na standardni način, ko začnemo z definicijo zveznosti funkcije v točki.

V nadaljevanju predpostavljamo, da so zvezne funkcije in njihove lastnosti znane. Sklepi so, kot bomo videli na primerih, vedno zelo podobni: ker je nek izraz, sestavljen iz zveznih funkcij, zvezna funkcija, sklepamo, da je obravnavana funkcija odvedljiva in

iz oblike izraza preberemo pravilo za izračun njenega odvoda.

Naj bo zdaj f poljubna realna funkcija, zanima nas tangenta na graf funkcije f v točki $x = a$. Enačba tangente mora biti $y = f(a) + k(x - a)$. Kot prej mora imeti enačba $f(x) = f(a) + k(x - a)$ pri $x = a$ rešitev, ki ni enostavna. Zapišimo

$$f(x) - f(a) = g(x)(x - a) = g(a)(x - a) + (g(x) - g(a))(x - a).$$

Izkaže se, da je dovolj zahtevati $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, ali drugače rečeno, g mora biti zvezna funkcija v točki a . Potem lahko rečemo, da je za $k = g(a)$

$$y = f(a) + k(x - a)$$

tangenta na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$. To nas je pripeljalo do Caratheodoryjeve definicije odvoda:

Definicija odvoda odvedljive funkcije (Caratheodory) [2,3]. Funkcija f je odvedljiva v točki x_0 natanko tedaj, ko obstaja funkcija φ , zvezna v točki x_0 , tako da je

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad (3)$$

Vrednost $\varphi(x_0)$ imenujemo odvod funkcije f v točki x_0 in jo označimo z $f'(x_0)$.

Odvedljivost funkcije f z leve (z desne) je ekvivalentna obstoju funkcije φ zvezne z leve (z desne).

Caratheodoryjeva definicija je posplošitev prej zapisane definicije odvoda polinoma in je enakovredna običajni definiciji odvoda, ki ga definiramo kot limito diferenčnega kvocienta, kot v [6] (in podobno [1]):

Definicija. Odvod funkcije f v točki x_0 je enak limiti

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \quad (4)$$

Funkcija je v točki x_0 odvedljiva, če eksistira limita na desni, na kakršen koli način gre h proti 0.

Ekvivalentnost definicij je mogoče hitro videti. Res, iz (3) sledi, da je povsod razen pri $x = x_0$

$$\varphi(x) = \frac{(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5)$$

Funkcija φ je zvezna v točki x_0 natanko tedaj, ko obstaja limita diferenčnega kvocienta (4). Tedaj je $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

ε Pravila za odvajanje v splošnem

Privzamemo, da poznamo definicijo in izreke o zveznosti vsote, produkta, kompozituma ... zveznih funkcij. Za primer zapišimo dokaz pravila za odvod inverzne funkcije in za odvod kvocienta. Videli bomo, da so tehnično dokazi enaki kot prej, le $\varphi \in \mathcal{F}$ v $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$ zamenjamo z zvezno funkcijo.

Naj bo f na neki okolici točke x_0 injektivna. Če v definiciji (3) zamenjamo $x = f^{-1}(y)$ in $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $y = f(x)$ in $y_0 = f(x_0)$, dobimo $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y_0)) + \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$, upoštevamo $y = f(f^{-1}(y))$, $y_0 = f(f^{-1}(y_0))$, in preuredimo

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} (y - y_0).$$

Če je $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) \neq 0$, predpis $\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ da realno funkcijo, ki je zvezna v točki y_0 in $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi((f^{-1})'(y))} = \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Nekaj več, a še vedno ne veliko, računanja je treba za dokaz pravila za odvod kvocienta. Naj bo $g(x_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{-(f(x)g(x) - f(x)g(x_0)) + (f(x)g(x) - f(x_0)g(x))}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{-f(x)\psi(x)(x - x_0) + g(x)\varphi(x)(x - x_0)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{-f(x)\psi(x) + g(x)\varphi(x)}{g(x)g(x_0)} (x - x_0) \end{aligned}$$

Ker je funkcija s predpisom

$$\frac{-f(x)\psi(x) + g(x)\varphi(x)}{g(x)g(x_0)}$$
 zvezna v točki x_0 , je

kvocient $\frac{f}{g}$ odvedljiva funkcija in

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{-f(x_0)\psi(x_0) + g(x_0)\varphi(x_0)}{g(x_0)g(x_0)} = \\ &= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)g(x_0)} \end{aligned}$$

η Za konec

V prispevku smo skicirali alternativni pristop k definiciji odvoda, kjer odvod najprej definiramo kot smerni koeficient tangente na graf funkcije. Kot smo videli, lahko pri preprostih funkcijah, kot so polinomi in racionalne funkcije, to storimo brez uporabe pojma limite.

Tako lahko na primer odvod potence $f(x) = x^n$ pri $x = a$ dobimo tako, da zapišemo

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= x^n - a^n = (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + \\ &+ a^{n-1})(x - a) = q(x)(x - a) \end{aligned}$$

in odtod, ali še bolj nazorno, iz enakosti

$$f(x) = f(a) + q(x)(x - a)$$

vidimo, da je $x = a$ odvedljiva funkcija, njen odvod pri pa je enak

$$g(a) = na^{n-1}.$$

Ker je v izpeljavi poljubno realno število, sledi

$$f'(x) = g(x) = nx^{n-1}.$$

Pravila za odvod vsote, produkta in kvocienta, ki smo jih omenili v razdelku lastnosti odvoda, lahko potem uporabimo za računanje odvodov racionalnih funkcij, še vedno brez uporabe pojma limite. Tehnika odvajanja je tu seveda povsem enaka kot pri običajnem pristopu, le vpeljava je bila drugačna.

Za razširitev obravnave na vse funkcije, ki jih srečamo v srednji šoli, pa za definicijo odvoda potrebujemo pojem limite, ali ekvivalentno, pojem zveznosti funkcije, kot smo

naredili v razdelku Caratheodoryjeva definicija odvedljivosti. Za zgled izračunajmo odvod funkcije sinus v poljubni dani točki a . Zapišimo adicijski izrek, ki ga dijaki poznajo,

$$\sin x - \sin a = 2 \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$$

recimo, da je $x \neq a$ in pomnožimo z $\frac{x-a}{x-a}$.

$$2 \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} (x-a).$$

Zdaj seveda ne gre brez limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = \cos a$$

Funkcija $\sin$ je torej v točki a odvedljiva, njen odvod v točki a je enak $\cos a$. Ker je bila a poljubna točka, je za vsak realen x

$$\sin' x = \cos x.$$

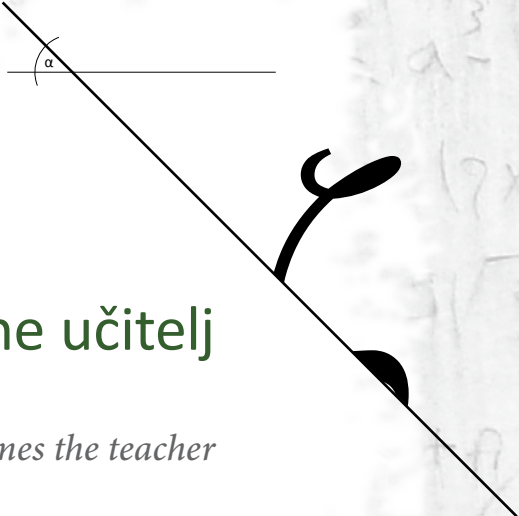
Videli smo, da je pravila za odvajanje in odvode potenc mogoče izpeljati brez vpeljave limit, ki so za povprečnega srednješolca dokaj zahteven pojem. Za popolnitev običajne tabele elementarnih odvodov brez limit ne gre, a pomembno je, da jih uporabimo šele takrat, ko je nujno potrebno.

Osnovno sporočilo člankov [4,5] in tega prispevka je, da je mogoče znaten del obravnave narediti pred vpeljavo pojma limite.

Zahvala. Avtor se zahvaljuje anonimnemu recenzentu za konstruktivne pripombe, urednici Jerneji Bone pa za potrpežljivost pri usklajevanju in tehnično pomoč pri pripravi zadnje različice članka.

✂ Literatura

1. Bon Klanjšček, M., Felda, D. (2012), Matematika 4, Učbenik za gimnazije, DZS, Ljubljana.
2. Carathéodory, C. (1950), Funktionentheorie, Birkhäuser.
3. Hairer, E., Warner, G. (1995), Analysis by its history, Springer.
4. Range, R.M. (2011), Where are Limits Needed in Calculus, Amer. Math. Monthly, letn. 118, str. 404–417.
5. Range, R. M. (2014), Descartes's Double Point Method for Tangents: An Old Idea Suggests New Approaches to Calculus, Notices of the AMS, letn. 61, str. 387–389.
6. Vidav, I. (1987), Višja matematika I, DMFA, Ljubljana.
7. Žerovnik, J. (2002/03), O definiciji odvedljivosti, Matematika v šoli, letn. 10, str. 85–88.
8. Žerovnik, J. (2009), Matematika 1, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana.
9. Seznam učbenikov na <http://www.zrss.si/> dostop maj 2014.



Ko dijak postane učitelj

When the pupil becomes the teacher

Se vam je zgodilo, da v kakšnem razredu niste in niste mogli doseči discipline? Meni se je to zgodilo pred tremi leti. V eni izmed paralelek splošnega gimnazijskega programa je bilo nekaj posameznikov, pri katerih nobena od tehnik vzpostavljanja discipline v razredu ni pomagala. Ni pomagalo opozarjanje, ni pomagalo počakati na tišino, ni pomagalo individualno sledenje dejavnostim skozi razred.

Veliko člankov na temo vzpostavljanja discipline v razredu sem prebral, se posvetoval s kolegi, brskal po svojih izkušnjah. Rešitve nisem našel, dokler nekega dne pri eni izmed ur neustrezno obnašanje dijakov ni doseglo vrelišča. Če sem prej dijakom nastavljal ogledalo, ki naj bi jim pomagalo uvideti resnost situacije, sem šel pri tej uri še korak dlje. Spomnil sem se samoupravnih dni, ki smo jih imeli v osnovni šoli. Vsak izmed nas je prevzel del učiteljevih nalog in opravil. Uro smo v dogovoru s profesorjem pripravili in izvedli, vpisali snov v dnevnik, vse. Kot pri izbiri izvajalcev za samoupravni dan sem vzel list s seznamom dijakov in časovni razpored ur oziroma snovi za prihodnje dni. Vsakemu dijaku sem dodelil snov, ki jo je namesto mene dobil za nalogo pripraviti drugim dijakom. Tako sem razmišljal: dokler ne bodo sami videli, koliko dela je vložnega v pripravo ene šolske ure, ne bodo razumeli niti pomena primerne vzdušja v razredu, niti vložnega dela učitelja, niti se ne bodo zavedali svojega nesprejemljivega vedenja.

Erik Vrčon

Gimnazija Tolmin

Prišla je ura, ko je prvi izmed dijakov med šolskimi počitnicami stopil z mano v stik po elektronski pošti. Odprl sem sporočilo in radovedno pregledal priloženo besedilno datoteko. V njej sem popravil strokovne in slovnične napake ter popravljeno datoteko poslal pošiljatelju. Pričakoval sem še kakšno vprašanje, vendar ga ni bilo. Tako je prišla tudi ura, ko je moral prvi dijak prevzeti moje mesto in za eno uro postati profesor.

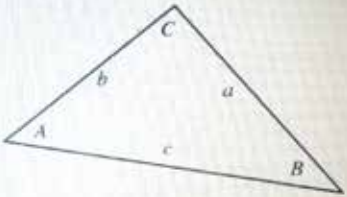
Kot običajno sem se napotil do učilnice. Odklenil sem vrata, vstopil v razred, na kateder odložil dnevnik, ga odprl na pravo uro, nič vpisal, šel v zadnjo klopi, sedel, pripravil zvezek in vse potrebno za matematiko ter ča-
kal. Na sebi sem čutil zvedave poglede sošolcev in opazoval presenečenje na »profesorjevem« obrazu. Ker je bil šok le prehud, sem prišel ponovno h katedru in »profesorju« razložil, kaj, kako in zakaj je treba vpisati v dnevnik. Počakal sem na vpis in se vrnil na svoje mesto v razredu. Med uro nisem klepetal, nisem motil pouka, nisem uporabljal

mobilnega telefona ne prenosnega računalnika, sem pa zastavljal »profesorju« vprašanja in ga z njimi usmerjal, rekel komu od sošolcev, naj bo tiho in podobno. Ob koncu ure sem se »profesorju« zahvalil za izvedeno uro in za seboj zaklenil razred. Take ure so se vrstile, dokler se ni v vlogi profesorja preizkusil zadnji dijak. Za primer prilagam sliko svoje običajne izpeljave kosinusnega izreka in sliko izpeljave kosinusnega izreka, kot sem jo zapisal v zvezek kot dijak.

Lahko rečem, da se je disciplina dijakov povečala, saj so poslušali drug drugega in profesorju sošolcu niso želeli povzročati težav. Ker so vedeli, da bo naslednjič njihov profesor drug dijak, so želeli od trenutnega profesorja izvedeti vse, kar se je dalo. Lažje kot meni so sošolcu postavljali vprašanja v zvezi s snovjo, če česa niso razumeli. Dijak v vlogi profesorja je moral potem snov na drugačen način razložiti ponovno. Če je profesor pri uri povedal kaj hudo narobe, sem napako popravil z vprašanjem. Če sem pre-

Kosinusni izrek

Za trikotnik na desni sliki tako veljajo naslednje zveze:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$


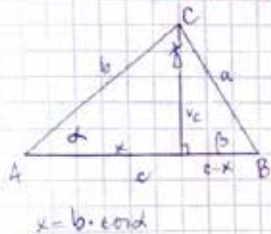
Dokaz (z vektorji): V poljubnem trikotniku ABC definiramo vektorje: $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$. Od tod je $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$. Iz tega ob uporabi lastnosti skalarnega produkta dobimo:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma + |\vec{b}|^2$$

Zapis poenostavimo v $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$.

[Slika 1] Moja običajna izpeljava kosinusnega izreka

6. Kosinusni izrek



Izpeljava & dohvat:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-x)^2 & b^2 &= x^2 + h^2 \\ h^2 &= a^2 - (c-x)^2 & h^2 &= b^2 - x^2 \\ a^2 - (c-x)^2 &= b^2 - x^2 \end{aligned}$$

$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$

$$a^2 + b^2 + 2cx = c^2$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

kosinusni izrek

Uporaba:

- da se 3 stranice,
- da se 2 stranici in enim kotom.

V pravokotnem trikotniku kosinusni izrek preide v Pitagorin izrek.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ = a^2 + b^2$$

[Slika 2] Moj zapis dijakove izpeljave kosinusnega izreka

sodil, da je bila napaka manjša, da kakšnega tipa naloge nismo naredili, profesorja nisem prekinjal, ampak sem pri naslednji uri sam stvari postavil na svoje mesto in poskrbel za ustrezne vaje ob posamezni snovi.

Spremljati uro iz šolske klopi je bilo nenavadno. Videl sem stvari, ki jih izpred table ne bi. Zanimivo mi je bilo opazovati, kako se je vsak dijak spoprijel z izzivom, s snovjo, z govorom, z izpeljavo ure. Nekateri so za učence pripravili povzetke, nekateri fotokopije. Pri nekaterih sta me presenetili odraslost in samostojnost. Nekateri dijaki so snov razložili preprosteje, kot bi to storil jaz, nekateri manj

razumljivo, kot bi to storil jaz. Za nekaterimi je bilo popravkov veliko, za nekaterimi nič. Pripravljanje nekaterih dijakov je terjalo od mene veliko več dela kot moja priprava ure. Vendar se zaradi tega nisem jezil. Še zdaj sem vesel, da sem sprejel to pogumno odločitev.

Povem lahko, da se je vedenje dijakov pri urah popravilo. Zbranost je postala večja, disciplina boljša. Odgovornost do lastnega znanja je bila postavljena na višjo raven. Odnos dijak : profesor, ki je bil že prej dober, je postal še boljši. Za bogato izkušnjo smo bili bogatejši vsi. Za srečen konec je poskrbel še dober uspeh pisne naloge iz te snovi.



Študijski obisk na temo medpredmetnega povezovanja matematike z drugimi predmeti¹

Study visit on the theme cross-curricular integration of Mathematics with other subjects

Martina Hren

Osnovna šola Pod goro

Σ Povzetek

Študijski obisk v angleškem mestu Solihull marca 2013 je obravnaval temo medpredmetnega povezovanja matematike z drugimi predmeti pri učencih od 4. do 16. leta starosti.

Udeleženci smo spoznavali angleški in druge evropske šolske sisteme, najbolj pa smo bili osredotočeni na poučevanje in učenje matematike.

Ugotovili smo, da je poučevanje matematike navkljub nekaterim razlikam v evropskih državah podobno, za boljše znanje in razumevanje ter uporabo pa jo je treba vključevati v druge predmete in jo povezovati z njimi na vseh stopnjah šolanja. Učenci morajo videti uporabnost in korist matematike v vsakdanjem življenju, saj le tako pridobijo trajnost znanja.

Ključne besede: matematika, študijski obisk, medpredmetno povezovanje



¹ Izvedba tega študijskega obiska je financirana od Evropske komisije. Vsebina publikacije (komunikacije) je izključno odgovornost izdajatelja. Evropska komisija ni odgovorna za morebitno uporabo informacije.

Σ Abstract

On the Study visit to the English town of Solihull in March 2013 we discussed the topic of cross-curricular integration of mathematics with other subjects for pupils aged from 4 to 16 years. The participants were acquainted with the English and other European school systems, although we most strongly focused on the teaching and learning of mathematics. We found that the teaching of mathematics is, in spite of some differences, similar in European countries, and that mathematics must be incorporated into other subjects at all school levels for the sake of better knowledge and understanding. Pupils need to see the utility and benefits of mathematics in everyday life, because that is the only way that they can gain a sustainability of knowledge.

Keywords: *mathematics, study visits, cross-curricular integration*

α Uvod

Velikokrat slišimo in beremo o raznih raziskavah o poučevanju v drugih državah, a le redko imamo priložnost sami doživeti sistem poučevanja. Takšno priložnost je v preteklih letih omogočal program Vseživljenjsko učenje s podprogramom Študijski obiski, ki ga sofinancira Evropska komisija.

Študijski obiski so bili namenjeni izmenjavi izkušenj in dobrih praks, a hkrati po študijskem obisku udeleženci lažje razumejo druge sisteme izobraževanja in usposabljanja.

Udeležila sem se študijskega obiska, ki je potekal med 11. in 15. marcem 2013 v Solihullu v Angliji, organizirala pa ga je ustanova Solihull Education Improvement Service.

Poudarek študijskega obiska je bil na medpredmetnem povezovanju matematike z drugimi predmeti pri učencih od 4. do 16. leta starosti. Vsebina je bila vpletena tako v različne predstavitve angleškega šolskega sistema ter posebnosti pri poučevanju in učenju matematike kot tudi v druge dejavnosti, npr.

ogled tamkajšnje tovarne Land Rover, kjer se poskušajo povezati s tamkajšnjimi šolami in za učence pripravljajo različne matematične dejavnosti.

Udeleženci smo lahko obiskali tudi različne šole – 'osnovne' in 'srednje' šole, kar bi pri nas pomenilo 'nižjo' in 'višjo' stopnjo osnovne šole. Imeli smo neposredni stik z učenci, povedali so nam svoje mnenje o matematiki in o angleškem načinu šolanja ter nas povprašali o šolskih sistemih v državah, iz katerih smo udeleženci prihajali.

Najpomembnejši del obiska pa je bilo ugotavljanje razlik v šolskih sistemih in poučevanju matematike v različnih evropskih državah. Glavne razlike, podobnosti in primeri dobrih praks so opisani v nadaljevanju.

β Primeri dobre prakse poučevanja in učenja matematike

Udeleženci študijskega obiska smo prihajali iz različnih evropskih držav – Slovenije, Nem-

čije, Malte, Švedske, Bolgarije, Portugalske, Turčije, Belgije, Irske in Francije.

Z udeleženci smo izmenjali svoje vtise in informacije o poučevanju matematike, pri pripravi skupnega poročila pa smo se še posebej osredotočili na določene vidike, kot so primeri dobrih praks, podobnosti in izzivi pri poučevanju matematike.

Zelo dobro skrbi za strokovno znanje matematike Velika Britanija, saj s projektom MaST (Mathematics Specialist Teacher), ki se izvaja na fakultetah, želijo izboljšati znanje učiteljev razrednega pouka na področju matematike in naravoslovja. Cilj projekta je spremeniti odnos do matematike, saj se je v zadnjih letih pokazalo, da je med otroki skoraj že priljubljeno, če pri matematiki niso uspešni. Glavni cilj projekta pa je izpopolniti matematično znanje in pedagoške pristope pri poučevanju matematike. Projekt MaST ne vključuje samo učitelja, ki se udeleži tega dvoletnega izobraževanja, temveč se dotika celotne šole, saj šola tako dobi strokovnjaka pri poučevanju matematike na razredni stopnji in s tem zagotovi tudi uvedbo sprememb pri poučevanju matematike.

Tud na Malti dajejo podporo učiteljem, ki poučujejo matematiko v nižjih razredih, saj jim omogočijo izobraževanje in usposabljanje, da bi se razvil pozitiven odnos do matematike.

Tudi naslednji primer dobre prakse prihaja iz Velike Britanije. Gre namreč za STEM-Net (Science, Technology, Engineering and Mathematics Network), kjer strokovnjaki s področja naravoslovja, tehnologije, inženirstva in matematike pomagajo dvigniti zanimanje za ta področja, ki povsod po Evropi zadnja leta upada.

Mrežo ambasadorjev STEM tako sestavlja 26 tisoč prostovoljcev, ki svoj čas nameni-

jo za promocijo predmetov STEM. Učenci se tako učijo na izvirni in praktični način. S tem projektom želijo prikazati, kako pomembni so poklici s področja naravoslovja in matematike, saj so bistvenega pomena za obstoj današnjega sveta. Kar 40 % ambasadorjev je žensk. Razpon starosti ambasadorjev je od 18 do 70 let, a skoraj 60 % jih je mlajših od 35 let.

Mreža STEM povezuje ambasadorje, učitelje, učence in zaposlovalce.

Podoben projekt z imenom MINT poteka v Nemčiji. Cilj tega projekta je, da bi vsak učenec oziroma dijak, ki nima veliko znanja o tehničnih stvarih, napravah, pridobil osnovno znanje, da bi lahko razumel in reševal izzive. Cilj je približati sodobni svet vsakemu učencu. V tej mreži sodelujejo učenci, učitelji, fakultete, podjetja, ki se ukvarjajo z znanostjo in tehnologijo, raziskovalne ustanove ter razne druge ustanove. MINT se povezuje s številnimi drugimi projekti, ki težijo k dvigu zanimanja za naravoslovne predmete.

Kot primer dobre prakse sem sama omenila projekt »E-učbeniki s poudarkom naravoslovnih predmetov v osnovni šoli« in spletno stran E-um, ki se je udeležencem študijskega obiska zdela zelo dobro zasnova in uporabna pri učnem procesu.

γ Ugotovitve udeležencev študijskega obiska

Udeleženci študijskega obiska smo se osredinili predvsem na to, kaj prispeva k boljšemu znanju in razumevanju matematike.

Najpomembnejše je medpredmetno povezovanje, saj se le tako razvijajo matematične spretnosti in sposobnost matematičnega

mišljenja. Takšen pristop omogoča, da učenci vidijo povezavo matematike z drugimi področji in vsakdanjim življenjem. V tem smislu je zelo pomemben tudi praktičen pristop in prikaz, kje v vsakdanjem življenju je matematika uporabna, saj učenci le tako uvidijo njen izreden pomen. Pomembno je, da se pokaže smiselnost in korist matematike.

V Angliji smo obiskali tudi tovarno Land Rover, ki je za tamkajšnje območje pomembna ne samo zaradi števila ljudi, ki jih zaposluje, temveč tudi zaradi šolstva in še posebej matematike – podjetje se povezuje s šolami, jim ponuja različne matematične in naravoslovne delavnice ob obisku ter tako dviguje zanimanje za poklice naravoslovnega in matematičnega področja. Tako smo ugotovili tudi to, da je povezovanje s podjetji, še posebej s tovarnami, trgovinami in bankami v okolici zelo koristno in uporabno, saj tudi na takšen način prikazujemo uporabnost matematike. S tem se povečuje tudi notranja motivacija za učenje.



[Slika 1] Uporaba računalna pri reševanju problemskih nalog

Zanemariti ne smemo niti postavljanje temeljev in učenje osnovnih računskih ope-

racij. Četudi je praktičen vidik matematike izredno pomemben, smo udeleženci študijskega obiska ugotovili, da morajo učenci razviti spretnosti osnovnih računskih operacij, saj le tako lahko izvajajo višje in bolj zapletene računske operacije in rešujejo probleme, ki zahtevajo matematično mišljenje in uporabo kreativnosti. Opazili smo, da pri reševanju kompleksnejših nalog angleški učenci lahko uporabijo računalno, primerno starosti učenca – v nižjih razredih enostavnejše.

Vsi udeleženci smo se strinjali tudi s tem, da k boljšemu razumevanju prispeva tudi število odraslih glede na število učencev pri učnem procesu. Razmerje med številom odraslih in številom učencev na angleških šolah (npr. sedem odraslih na skupino sedemdesetih učencev) je pokazalo, da primerno strokovno usposobljeni odrasli zagotovo pomenijo več kot kakršna koli pametna tabla ali katero koli drugo tehnološko orodje. Vsi udeleženci obiska so se strinjali, da imamo tudi v Sloveniji zelo dober sistem učnih skupin v zadnjih dveh razredih osnovne šole, saj se učitelj lažje posveti učencem, če jih je v skupini manj. Ugotovili smo, da v nekaterih drugih državah skušajo nadomestiti število odraslih pri pouku s starejšimi učenci, starši in prostovoljci. Pri tem je treba paziti, da učitelj še vedno usmerja uro, saj je le on tisti, ki ima strokovno znanje in mora zato imeti in ohraniti profesionalno vlogo posrednika v učnem procesu.

Na šolah, ki smo jih obiskali, smo opazili, da uporabo učbenika dopolnjuje širok spekter dejavnosti. To je dokaz, da je za dobro načrtovanje poučevanja matematike treba mnogo več kot uporaba enega učbenika ali učne metode. Cilji se lažje dosežejo ob kombinaciji učnih pristopov in metod. Tudi uporaba IKT-tehnologije in interaktivnih tabel

igra pomembno vlogo pri učnem procesu. Angleške šole v večini primerov nimajo novega pohištva, a se v učilnici 'staro' povezuje z 'novim' – četudi mize in stole niso novi, je skoraj v vsaki učilnici na voljo interaktivna tabla.

V angleških šolah je velik poudarek tudi na samoocenjevanju in doseganju ciljev učne ure, saj učitelj na začetku ure predstavi cilje, po navadi tako, da jih zapiše na tablo. Tako je samoocenjevanje o doseganju učnih ciljev ključnega pomena v šolah, kjer smo opazovali pouk matematike in tudi drugih predmetov. Pozornost doseganju učnih ciljev ni pomembna le na začetku in na koncu učne ure, temveč ves čas vmes. Opaziti pa je bilo tudi pozitiven premik od tega, da cilji niso tisto, kar učitelj pričakuje, da je učenec sposoben narediti, temveč tisto, kar učenec sam predvidi, da je sposoben doseči.

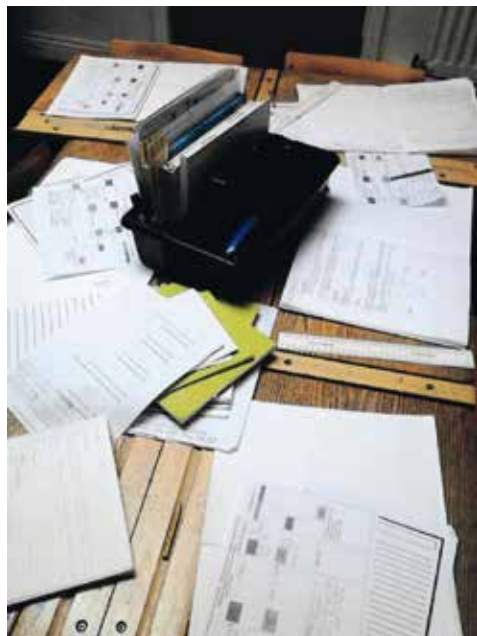
δ Izzivi poučevanja matematike

Še vedno obstajajo določeni vidiki, ki nam učiteljem in drugim strokovnjakom s področja poučevanja matematike predstavljajo izzive.

Ugotovili smo, da imajo številni otroci še vedno težave pri reševanju problemskih nalog, saj težko prenesejo matematično znanje na reševanje novih, nepoznanih situacij. Problemsko reševanje je tako izziv za mnogo učencev in k izboljšanju tega lahko prispeva razvoj na področju jezika, ki predstavlja podporo učenju matematike.

Naslednji izziv, s katerim se spoprijemajo številne šole, je premik od tradicionalnih pristopov poučevanja matematike, še posebej le s pomočjo učbenika, k bolj praktičnim in kontekstualiziranim pristopom. S tem je

povezano tudi število virov, ki so na voljo, saj je to od države do države različno. To je pomembno predvsem za učitelje, ki potrebujejo podporo in pomoč raznih virov, npr. priročnikov, raznih elektronskih virov itd.



[Slika 2] Pri reševanju nalog je na voljo več različnih virov.

Nekateri udeleženci so izpostavili tudi problem pri motiviranju učencev in razvijanju pozitivnega odnosa do matematike, vendar je to odvisno od starosti učencev – mlajši učenci so po navadi bolj motivirani kot starejši. Tako je izziv tudi spodbujanje ustvarjalnosti, saj se z ustvarjalnostjo večja notranja motivacija.

V mnogih državah so bili deležni tudi reform na področju šolstva in ugotovili smo, da pogosto spremembam učnih načrtov in raznih izpitov, kjer se poudarja funkcionalna raba matematike, ne sledijo izobraževanja in usposabljanja učiteljev in tako so učitelji po-

gosto nezadovoljni, saj imajo premalo vzorčnih primerov, ki bi jim pomagali pri uvajanju sprememb.

ε Poti do boljšega znanja matematike

Za vsak izziv lahko najdemo vsaj eno rešitev. Tudi izzivi, povezani z učenjem in poučevanjem matematike, so rešljivi in pot do njih ni le ena, temveč jih je več.

Najpomembnejša pot k učinkovitejšemu poučevanju in učenju je, kot smo že omenili, medpredmetna povezava. Na gostujočih šolah smo opazili, da je marsikatera izmed šol v projektu 'Numeracy', ki bi jo lahko prevedli kot 'matematična pismenost'. Namen tega projekta je, da celotna šola vključuje matematiko pri vseh predmetih. Sama sem na šoli St Peter's RC School prisostvovala pri učni uri športne vzgoje, kjer so fantje uporabili tablični računalnik in merili čas ter nato podatke zapisovali v preglednice in jih nato statistično obdelali (računali srednje vrednosti itd.), punce pa so imele temo ples, kjer je bila vključena matematika z ritmi in vzorci.

Tudi drugi udeleženci so delili svoje izkušnje o medpredmetnem povezovanju. Največkrat se povežejo z naravoslovnimi predmeti, kjer je matematika sama po sebi že vključena pri računanju raznih količin (npr. pri fiziki in kemiji). Menim pa, da se medpredmetno povezovanje še ne uporablja veliko, saj smo z udeleženci govorili na splošno, konkretnih primerov za starejše otroke niso navajali.

Udeleženci študijskega obiska pa smo potrdili že znano dejstvo, da je medpredmetno povezavo lažje izvajati v nižjih razredih, kjer je pri večini predmetov en učitelj, saj med-

predmetna povezava pomeni več načrtovanja in usklajevanja med učitelji, kar je zelo težko, predvsem zaradi pomanjkanja časa za načrtovanje zaradi drugih šolskih aktivnosti. To je opaziti tudi na angleških šolah, ki sem jih obiskala, saj je bilo vidno, da veliko lažje izvedejo uro medpredmetnega povezovanja na nižji stopnji. Pri uri, kjer sem bila, so učenci 5. razreda spoznavali različne države in valute, ki jih te države uporabljajo, nato pa so s pomočjo računalna preračunavali, npr. koliko evrov bi plačali za kosilo v Angliji, če imajo ceno dano v funtih in obratno – različno za države po svetu. Učencem je to predstavljalo izziv, saj preračunavanje ni potekalo samodejno, po točno določenem načinu, temveč so pri tem morali premisliti in uporabiti svoje razumevanje. Učenci so pri tem bili razdeljeni v skupine, tako da je bilo vključeno tudi timsko delo, uporabljali pa niso le računal, temveč tudi knjižice z informacijami o državah.

Še en primer dobrega medpredmetnega povezovanja sem opazila prav tako pri otrocih nižje starosti, kjer so pri pouku umetnosti in fizike izdelovali vrtiljake, pri tem pa je učitelj postavil raziskovanja vprašanja, povezana z matematiko in fiziko.



[Slika 3] Vrtiljaki, rezultat medpredmetnega povezovanja

Udeleženci so kot primer medpredmetnega povezovanja pri otrocih nižje starosti navajali povezovanje matematike s športno vzgojo, umetnostjo, glasbo ipd. Primer ure medpredmetnega povezovanja je ura športne vzgoje, ki se preživi na prostem, pri tem pa se ali ustvarja razne like s pomočjo naravnih materialov, ali pleše po ritmu (tukaj je vključena tudi glasba), ali igra izštevanka itd.

Vsi smo se strinjali, da je pri mlajših otrocih to enostavno, ker se vse več ali manj lahko počne skozi igro.

Medpredmetno povezovanje se velikokrat ne zgodi v eni sami uri, temveč se izvaja v obliki dnevov dejavnosti. Na eni izmed šol smo tako prisostvovali dnevu dejavnosti, kjer so gradili mostove iz palčk, ki so jih povezovali z elastičnimi gumaticami. Pri tem so morali uporabiti svoje znanje iz umetnosti, da je sama konstrukcija mosta bila takšna, da je most stal. Pri tej konstrukciji pa je bilo pomembno fizikalno in matematično znanje, da se most ni takoj porušil. Nekateri otroci so bili pri tem zelo uspešni, spet drugi so morali poskusiti večkrat. Vsi so s poskušanjem spoznavali, kako bi morali biti mostovi zgrajeni. Tudi pri tej dejavnosti so učenci delali po skupinah, torej je skupinsko delo in razvijanje sodelovanja v angleških šolah zelo pogosto.

Pomembno je tudi, da se otrokom pokaže več metod oziroma načinov za računanje, in ne samo enega. S tem se učinkovitejše razvijajo mentalne matematične spretnosti.

V večini držav ponujajo otrokom še dodatne matematične dejavnosti, npr. v obliki krožkov, dejavnosti zunaj na prostem, povezovanje s podjetji itd., kar predstavlja obogatitev učenja matematike.

Treba je tudi uporabiti sodobne vire in pripomočke, kot so pametne table in druga

IKT-tehnologija, učinkovite so tudi razprave v skupinah, razne zgodbe, ki pripomorejo pri raziskovanju matematičnih konceptov.

Nazadnje pa izredno vlogo igra stalni strokovni razvoj učiteljev matematike in tudi razrednih učiteljev. Učitelji morajo dobiti tudi ustrezno podporo tako območnih svetovalcev kot tudi podporo na šoli. To smo opazili na študijskem obisku, saj na mnogih angleških šolah omogočajo podporo in svetovanje na lokalni ravni in na ravni šole, še posebej podporo učitelja, ki vodi 'matematično pismenost' na šoli. Tudi na Malti poskušajo vzpostaviti dialog med učitelji samimi, saj organizirajo skupine učiteljev, ki izmenjujejo svoja mnenja in izkušnje. Podobno želijo doseči tudi v drugih evropskih državah. V Sloveniji so dober primer tega kolegialne hospitacije, ki se izvajajo na določenih šolah.

η Za konec

Na študijskem obisku so nam postregli s številnimi informacijami. Prikazali so nam statistične podatke in druge pomembne številke, toda na udeležence so vtis pustile šole, sami učenci, učitelji in drugi, ki so neposredno vključeni v učni proces.

Najpomembnejši od vsega je medpredmetni pristop pri učenju matematike, ki ga je mogoče izvesti s pomočjo dobrega načrtovanja in sodelovanja.

Življenjske okoliščine ali vsaj navezovanje matematike na vsakdanje življenje je izrednega pomena na vseh starostnih stopnjah, prav tako tudi pristop na ravni celotne šole, s pomočjo in s smernicami tako vodstva kot tudi drugih višjih organov.

☞ Viri

1. http://www.biodidaktik.uni-halle.de/projekte/mint_halle/?lang=en (9. 5. 2014).
2. http://www.cmepius.si/vzu/studijski_obiski.aspx (10. 5. 2014).
3. <http://www.edgehill.ac.uk/study/courses/specialist-primary-mathematics-practice> (7. 5. 2014).
4. 2014).
5. http://www.sio.si/sio/projekti/e_solstvo.html (10. 5. 2014).
6. <http://www.stemnet.org.uk/> (7. 5. 2014).



Profesorji pisca matematičnih učbenikov Franca viteza Močnika

*The Professors of Sir Franc Močnik, Writer
of Mathematical Textbooks*

Stanislav Južnič
Univerza v Oklahomi

Σ Povzetek

Akademsko rodoslovje matematičark in matematikov je že dolgo na svetovnem spletu. Tudi vodilni slovenski matematiki so tam, čeravno za zdaj še brez Franca Močnika. Je pa gradnja takšnih dreves tudi zabavna igra, primerna za najstnike. Skozi igro si utegnejo pridobiti ljubezen do matematike.

Ključne besede: Zgodovina pouka matematike, Franc Močnik, akademsko rodoslovje matematikov

Σ Abstract

The academic genealogy of mathematicians has long been present on the World Wide Web. The leading Slovenian mathematicians are also there, although for the moment without Franc Močnik. The construction of such 'family trees' is undoubtedly a fun game, suitable for teenagers. Through this game they might acquire a love for mathematics.

Keywords: *The history of Mathematics instructions, Franc Močnik, the academic genealogy of mathematicians*

α Uvod

Risanje dreves akademskih prednikov je nadvse zabavna reč za šolarja, še posebej primerna za pouk matematike. Dijak si zlahka lahko zgradi svoje lastno akademsko drevo matematikov tako, da svojega učitelja povpraša po mentorjih pri njegovi diplomi, nato te povpraša po njihovih mentorjih itd. Potem se lahko kmalu poveže na akademskega drevesa, ki so že dodelana na spletu, predvsem na naslovu <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/search.php>.

Da bi učencu dopovedali, kako naj se dreves loti, in učitelja poučili, kako naj svoje di-jake usmerja, bomo v prispevku zgradili akademsko drevesa vodilnega slovenskega pisca matematičnih učbenikov Franca viteza Močnika. Njegovega akademskega rodovnika za zdaj še ni na spletu, čeravno tam najdemo Jurija Vego, Josipa Plemlja, ne pa matematika – aktuarja Iva Laha. Celotna gradnja Močnikovega akademskega drevesa je avtorsko delo pisca tega prispevka [1].

β Prvi korak: Matematik vitez Močnik kot šolar

Ko gledamo znanstvene velikane preteklosti, je vedno dobro vedeti, kam so hodili v šolo. Franc vitez Močnik je bil domala največji slovenskih gora list. Kdo ga je učil, da je prišel tako visoko?

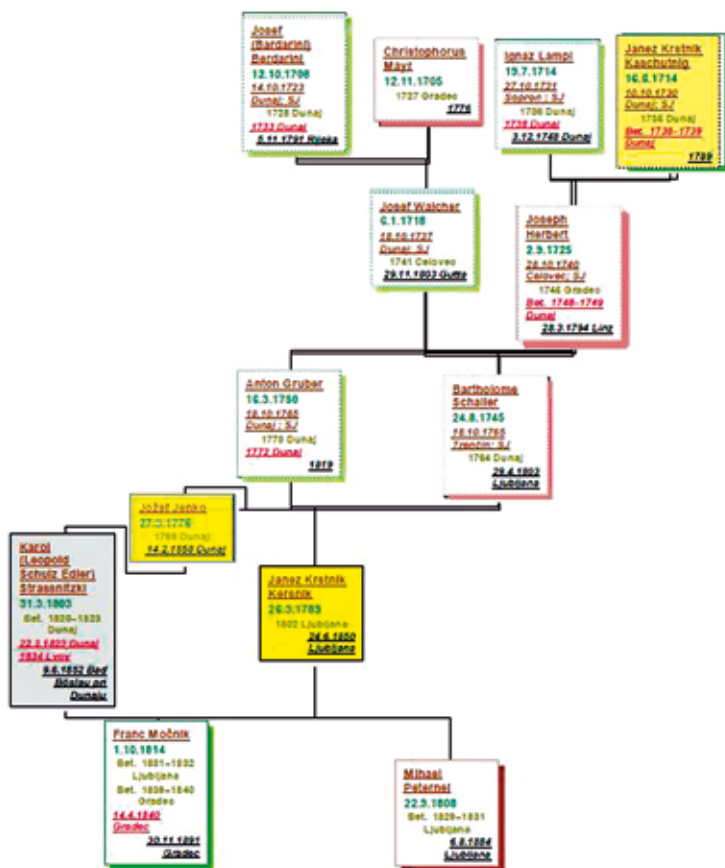
Odgovorov je vedno lahko več. Načeloma posamezniku za prednike izberemo ljudi, ki so bili njegovi mentorji pri doktorski disertaciji. To je danes zelo enostavno. Vendar disertacije niso od nekdaj in še posebej ne pri nas v Srednji Evropi. Zato tistim učenjakom, ki jim doktorata ni mogoče pripisati, za

prednike izberemo ljudi, ki so ga učili matematiko in/ali fiziko na univerzi.

Za Močnika bomo izjemoma izrisali oba primera. Fizike in matematike se je učil v Ljubljani, kjer ga je matematiko učil Poljak Karl Schulz, fiziko pa Janez Krstnik Kersnik. Eden Močnikovih starejših sošolcev je bil Mihael Peternel, ki je postal pomemben fizik in ravnatelj ljubljanske realke. S tem smo opravili prvi korak k Močnikovemu akademskemu rodoslovju. Drugo vejo poiščemo v Gradcu, kjer je Močnik doktoriral. Tretjo vejo Močnikovih prednikov lahko najdemo v slovitim matematiku A. Cauchyju [3], s katerim sta skupaj delovala v Gorici; Cauchy kot domači učitelj sina francoskega kralja, Močnik pa kot profesor. Močnikovo znanstveno delo je bilo povsem navezano na Cauchyjeve nasvete [1, 2], tako da je tudi tretja veja povsem upravičena.

γ Drugi korak: Učitelji Močnikovih učiteljev

Drugo generacijo Močnikovih prednikov prav tako poiščemo brez večjih težav. Kersnik se je prav tako šolal v Ljubljani, v nasprotju z Močnikom pa je med Ljubljančani opravil prav vse svoje študije. Matematiko je poslušal pri Antonu Gruberju, mlajšem bratu slavnjšega Gabrijela, po katerem Ljubljančani imenujejo prekop in palačo ob začetku Dolenjske ceste. Anton je bil Dunajčan; morebiti se je prav zato lepo razumel s sodelavcem Schallerjem, ki je bil rojen v predmestju Dunaja. Če ne bi pristno sodelovala, gotovo ne bi znala tako umetelno naučiti Kersnika, ki je nato predaval Močniku. Kersnik namreč ni imel drugih šol razen ljubljanskih. Njegov vnuk je bil pisatelj Janko Kersnik in tudi sam profesor Kersnik je imel nadvse rad slovens-



[Slika 1] Močnikovi in Jenkovi ljubljanski profesorji. Zelene številke kažejo rojstvo, rjave morebitni vstop k jezuitom, olivne leto študija fizike, rdeče poševne morebitno leto specializacije matematičnih ved oziroma doktorat. V desnem spodnjem kotu je s črno podčrtano pisavo zapisan datum smrti. Rumeno so obarvani Slovenci, sivo nekoč ljubljanski profesorji. Slika je narisana z rodovniškim programom Family Tree Maker (FTM) 2012 in pretvorjena v PDF.

ko besedo. Tako je študentom na zapletena matematična vprašanja dovolil odgovarjati kar po slovensko, čeravno to uradno ni bilo prav. Seveda Kersnika ni nihče zatožil zaradi te pregrehe, celo dijak Janez Trdina ga je hvalil, čeravno mu je bila kot pisatelju matematika docela španska vas. Učenci so imeli profesorja Kresnika tako radi, da so mi za god redno prirejali sprevod z baklami na Ljubljani. On jim je ljubezen vračal, tako

da je na ljubljanskih visokih šolah predaval kar pol stoletja. Učil je večinoma fiziko in matematiko, včasih pa tudi kemijo; imel je namreč obilico otrok in se stranskega zaslužka nikakor ni branil.

Matematik poljskega plemiškega rodu Karl Schulz pa je bil povsem druge sorte učenjak. Ob matematiki je za ljubitelje poučeval še astronomijo, ki se je gotovo tudi Močnik ni branil. Schulz je študiral na cesarskem

Dunaju. Lepa reč. Njegov profesor je bil tam namreč znova naših gora list, Kranjčan Jožef Jenko. Jenko je najprej učil matematiko na ljubljanskih višjih šolah z ramo ob rami s fizikom Kersnikom. Ko pa so v deželo prihrumeli Napoleonovi vojaki, jih ni bil nič kaj vesel. Takoj je zapakiral kovčke in začel poučevati v Linzu, nato v Gradcu in končno dolga desetletja na Dunajski univerzi med vodilnimi matematiki tedanje srednje Evrope. Slovencev pa pri tem nikakor ni pozabil, pomagal jim je, kjer se je dalo. Ko je bil sloviti slavist Jernej Kopitar že star in bolan, ga je vzel k sebi domov in ga je gostil do njegove poslednje ure. Kopitar je bil namreč zelo zaposlen in se je med silnim delom (in prepiranjem s Francetom Prešernom) pozabil – poročiti.

δ Tretji korak: Učitelji, ki so učili matematiko profesorje Močnikovih učiteljev

Jenko je po svoji strani spet študiral matematiko in fiziko na Dunaju. Fiziko in mehaniko ga je tam učil Anton Ambschell, nekdanji ljubljanski profesor fizike in rektor visoke šole. Jabolko pač ne pade predaleč od drevesa. Osnove matematike in višjo matematiko ga je sprva učil Metzburg, čigar profesor matematike Liesganig je po ukazu cesarice Marije Terezije meril poldnevnik tudi v naših krajih med Radgono, Mariborom in Ptujem. Ambschellov dunajski profesor je bil Korošec Herbert, njega pa je učil rojak matematik Korošec Košutnik (Kaschutnig), ki je svoji zadnji desetletji preživel v Mariboru.

Naslednja slika kaže Močnikove graške profesorje, pri katerih je pozneje dosegel doktorski naslov. Tudi Močnikov graški profesor matematike Knar je študiral pri Jenku;

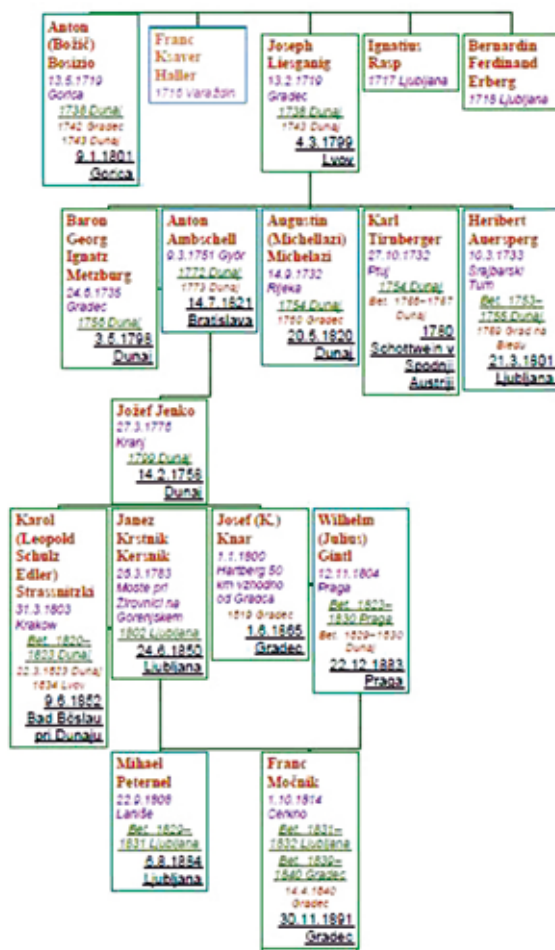
z njim si je celo dopisoval, potem ko je namesto Jenka predaval matematiko v Gradcu.

Močnikov graški profesor fizike je bil Gintl, ki je svoj čas študiral na Dunaju pri Ettingshausenu, predhodniku Jožefa Stefana na položaju vodje tamkajšnjega fizikalnega instituta. Andrej Ettingshausen je po svoji plati študiral pri Lindnerju na dunajski topniški šoli, kjer je svoj čas poučeval Jurij Vega. Seveda je bil tudi Lindner Vegov učenec; ko je Vega nenadoma preminil, je Lindner v njegove matematične učbenike dodal nekaj sodobnejših dognanj. Pa tudi sicer je hodil po Vegovih stopinjah, saj je tudi sam objavljaj učinkovite tablice logaritmov, še posebno rad takšne žepne, ki so prišle prav topničarjem na tedaj kar vse prepogostih bojiščih.

ε Četrty korak: Drevo Močnikovih matematičnih akademskih prednikov

Zdaj, ko smo si ogledali Močnikovo diplo-mo in doktorat skupaj z njegovimi profesorji, skušajmo obe skupini učiteljev združiti v enotno sliko. Med Liesganigovimi sošolci vidimo tudi Kranjca Bernardina Ferdinanda Erberga, ustanovitelja ljubljanskega matematično-fizikalnega kabineta z učnimi laboratorijskimi pripomočki.

Seveda lahko z malce poguma sliko Močnikovih ljubljanskih profesorjev in njihovih akademskih prednikov še podaljšamo. Tako se dokopljemo še do številnih drugih Močnikovih akademskih prednikov. Med njimi bil je astronom Ljubljančan Franc Breckersfeld, ki se je po predavanjih v Gradcu in slovaških Košicah odpravil za vodjo kraljeve zvezdarne v daljnem Cluju v Transilvaniji. Še pomemb-

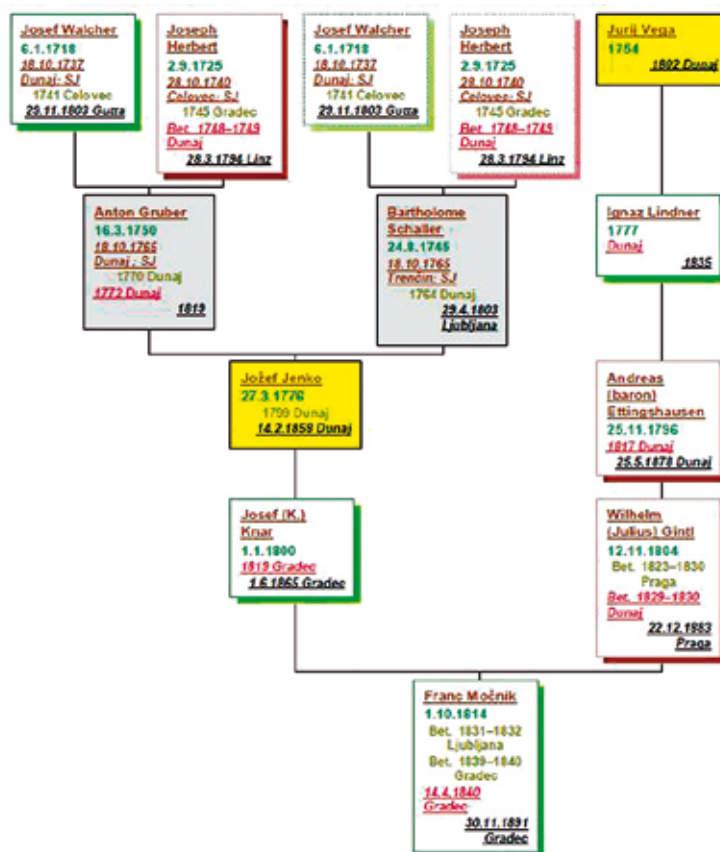


[Slika 2] Močnikovi in Petermelovi akademski predniki po vejah njunih ljubljanskih profesorjev matematike (v zelenih pravokotnikih) in fizike (v modrih pravokotnikih). Močniku so za akademske prednike postavljeni njegovi graški profesorji, pri katerih je bil promoviran v doktorja, za Jenkove akademske prednike pa smo postavili Jenkove dunajske profesorje. Vijolične številke kažejo rojstvo, rjave morebitni vstop k jezuitom, sive leto študija fizike, rjave poševne morebitno leto specializacije matematičnih ved. V desnem spodnjem kotu je s črno pisavo zapisan datum smrti.

nejši je bil radgonski matematik Ernest Vols, ki je učil celo paleto pomembnih učenjakov.

Podobna razširitev se nam bo gotovo splačala tudi pri risanju drevesa Močnikovih graških profesorjev. Tako med njimi najdemo dolgoletnega profesorja fizike in končno ljubljanskega rektorja Antona barona Erber-

ga z graščine Dol ob Savi. Anton je bil bratranec zgoraj opisanega B. F. Erberga, predvsem pa si je štel v čast biti stric enega največjih slovenskih matematikov in astronomov, kitajskega misijonarja Avgušтина Hallersteina. Med Antonovimi akademskimi predniki je Ljubljančan Karl Enders. Za Vegovega aka-

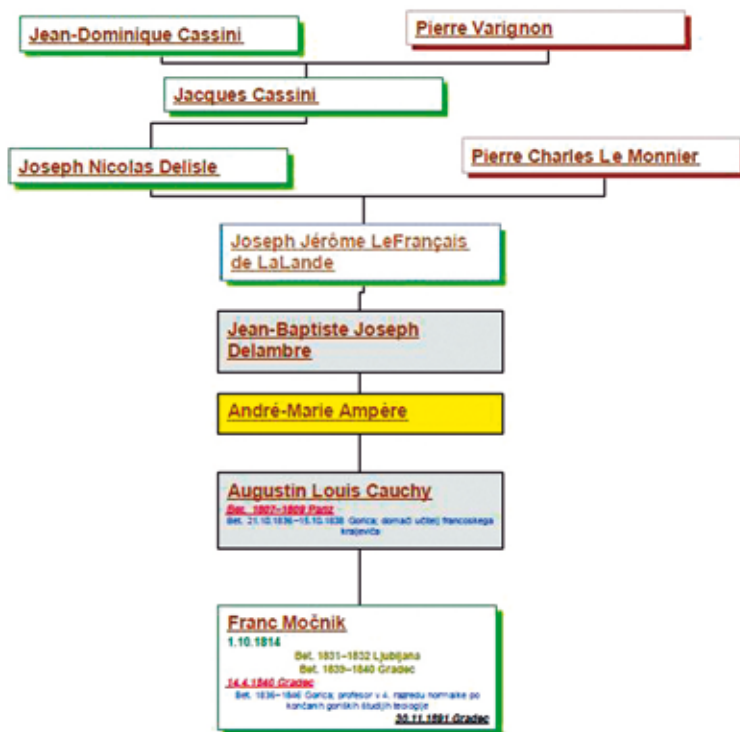


[Slika 3] Močnikovi akademski predniki glede na njegove graške profesorje in Jenkove ljubljanske profesorje.

demskega prednika lahko izjemoma narišemo celo njegovega profesorja zaključnih dveh letnikov srednje šole Korošca Janeza Jakoba Knauerja, čeravno je po Knauerjevem pouku Vega poslušal matematiko in fiziko še na visokih šolah v Ljubljani pri Jožefu Maffeiju, Gregorju Schöttlu in svojem poznejšem delodajalcu Gabrijelu Gruberju. A o tem ob kakšni drugi priložnosti. Knauer je bil kot prvovrsten matematik nedvomno prav tisti, ki je Vegi odprl matematične oči.

Sklep

Izdelava akademskih dreves je lahka in zabavna reč za mladega šolarja. Je privlačna in urno privede do lepih uspehov. Je pa tudi zelo koristna, saj bo prispevala k večji prisotnosti akademskih dreves slovenskih matematičark in matematikov na svetovnem spletu. Takšna vidnost pa je nadvse zaželena, saj Slovenkam in Slovencem odpira vrata v široki svet matematike na svetovni ravni.



[Slika 4] Cauchy kot Močnikov svetovalec v Gorici in s tem neformalni akademski prednik.

Literatura

1. S. Južnič, Cauchyeva in Močnikova Gorica kot središče evropske matematike. *Arhivi*. 2005, 28/1: 15-32. <http://www.arhivsko-drustvo.si/sl/documents/18325/25929/juznic.pdf>.
2. S. Južnič, Močnikova disertacija (ob 165. obletnici Močnikove promocije). *Arhivi*. 2005, 28/2: 153-164. <http://www.arhivsko-drustvo.si/sl/documents/18325/25930/juznic.pdf>.
3. S. Južnič, Jezuitski profesorji matematike na višjih študijih v Ljubljani, Celovcu, Gorici, Trstu in na Reki, njihova matematična ter fizikalna dela. *Zgodovinski Časopis*

- (Ljubljana). 2002, 56/3-4/126: 345-398. [http://sistory.si/publikacije/prenos/?urn=SISTORY:ID:767 345-398](http://sistory.si/publikacije/prenos/?urn=SISTORY:ID:767%20345-398).
4. S. Južnič, Kralj matematikov Cauchy in njegovi goriški dediči. *Bourboni na Goriškem : zbornik s posveta na Kostanjevici : ob 170. obletnici prihoda Bourbonov v Gorico in smrti kralja Karla X.* [ur. Drago Trpin, Renato Podbersič ; prevod v italijanščino Peter Černic, prevod v slovenščino Luka Lisjak Gabrijelčič], 2007, str. 22-57.
 5. S. Južnič, M. Prosen, *Astronomija na Slovenskem in slovenski astronomi na tujem: (12.–21. stoletje).* (Sprehod skozi zgodovino slovenske astronomije od srede 12. do začetkov 21. stoletja. Radovljica: Didakta, 2008; S. Južnič, *Razvoj matematičnih ved na ozemlju poseljenem s Slovenci*, 2009.
 6. F. Močnik, *Theorie der numerischen Gleichungen mit besonderer Rücksicht auf die Cauchy'sche Methode.* Dunaj 1839.
 7. M. Razpet, Dr. Franc Močnik in Cauchyjeva metoda. *Presek.* Letnik 26 (1998/1999) Številka 5, str. 258–263.
 8. M. Razpet, Franc Hočevár and his scientific work (ur. Martina Bečvářová; Christa Binder). *Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire. Proceedings of a Symposium held in Budapest on August 1, 2009 during the XXIII ICHST.* Praga: Matfyzpress, 2010. Str. 150–151.

Zaznamovanje 200. obletnice rojstva Franca Močnika

*Celebration of the 200th anniversary of the
birth of Franc Močnik*

Mija Bavcon Venko
Osnovna šola Cerkno

Cerkljanski rojak dr. Franc vitez Močnik se je rodil 1. oktobra 1814 v Cerknem. V počastitev matematika, pedagoga in pisca matematičnih učbenikov praznuje občina Cerkno občinski praznik prav na ta dan. Vsako leto se tega dogodka spomnimo tudi na naši osnovni šoli z matematičnim kvizom, ki poteka že od leta 1997 na pobudo takratne učiteljice Cirile Metode Močnik v sodelovanju z Izidoro Podgorelec, Milanom Koželjem in Ireno Zajc, ki so bili snovalci prvih kvizov na naši šoli.



[Slika 1] Razstava v avli OŠ Cerkno

Ob letošnjem jubileju pa smo na OŠ Cerkno še posebej pripravili več prireditev in delavnic. Učenci so bili s tem praznikom seznanjeni že maja leta 2014. Kot članici šolskega strokovnega aktiva in veliki privrženki slavnega cerkljanskega rojaka, se mi

je porodila ideja, da bi vsi učenci, od šestega do devetega razreda na različne načine sodelovali pri tem praznovanju. S kolegico Barbaro Carli, učiteljico matematike, sva začeli spodbujati in zbirati tudi literarne izdelke, in sicer pesmice na temo matematike. Material smo še naprej zbirali v letošnjem šolskem letu. Poleg tega smo se z učenci dogovorili, da izdelke tudi razstavimo v avli naše šole.

α Matematične delavnice

Že 24. septembra 2014 smo v sklopu teh dejavnosti pripravili posebne matematične delavnice za učence višjih razredov na pobudo naše nekdanje učenke, domačinke iz Cerknega in danes asistentke na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije (Famnit) Univerze na Primorskem, Ane Zalokar. Tako so bile prvič izvedene tako imenovane Močnikove delavnice za učence od šestega do devetega razreda.



[Slika 2] Močnikove delavnice: matematika z zavitki papirja

Na njih sta sodelovala tudi asistentka Karla Ferjančič in študent magistrskega študija matematike Tadej Vodopivec, oba z omenjene fakultete. Zainteresiranim učencem so

predstavili matematiko na drugačen način. Odgovarjali so na vprašanja: Kaj imajo verige skupnega z verjetnostjo? Kako se gremo matematiko z zavitki papirja? Kako si lahko v matematiki pomagamo z barvicami? ... Sodelovalo je precejšnje število učencev, skupaj 38, ki jih matematika zanima.



[Slika 3] Močnikove delavnice: verjetnost

β Z vrlino in delom

30. septembra 2014 pa so učenci pripravili gledališki skeč na temo matematične naloge dr. Franca Močnika kot popestritev odprtja muzejske razstave »Z vrlino in delom«, šola pa je prispevala tudi strokovno razpravo o Močnikovem didaktičnem poslanstvu v znanstveni katalog razstave. Na dan občinskega praznika in Močnikovega rojstva, v sredo, 1. oktobra, pa so učenci pomembno sodelovali pri protokolu odkritja Močnikovega spomenika na novi lokaciji ob stavbi muzeja.

γ Matematika živi skozi zgodovino

Osrednji dogodek praznovanja, ki je bil hkrati tudi prispevek Cerkljanske v projektu

Zavoda za varstvo kulturne dediščine Slovenije pod geslom Dediščina gre v šole, pa je potekal 2. oktobra 2014 na naši šoli, in sicer večpredstavnostni matematični kviz z naslovom Matematika živi skozi zgodovino, poklon vitezu Francu Močniku. Scenarij zanj je napisal kolega matematik Rok Ozebek. Kviz je vseboval pet nalog, ki so se povezovale v celoto in predstavile kmečko življenje iz tistega časa. Prizori iz leta 1824 so bili posnети na stari, dobro ohranjeni kmetiji v bližnji vasi in tudi v živo odigrani. Na prireditvi so poleg omenjenega sodelovali še Šolska radiotelevizija pod mentorstvom Braneta Breliha, mladi matematični literati, šolska skupina »Ko račun ne gre v glavo...« pod mentorstvom kolegice Petre Jenko ter vokalna skupina D BUTLS iz Šebrelj. V avli šole smo postavili razstavo izdelkov učencev, ki so literarno ustvarjali na temo matematike. Večinoma so bile pesmice, nekaj zapisov iz starih časov in risbe, ki so jih ustvarili devetošolci pri izbirnem predmetu likovno snovanje pod mentorstvom likovne pedagoginje Uršule Batistuta. V dveh vitrinah pa smo razstavili dragocene računice Franca Močnika iz 19. stoletja, ki so jih prispevali učenci oziroma njihovi starši.



[Slika 4] Matematični kviz: snemanje prizora iz časa dr. F. Močnika



[Slika 5] S prireditve, 2. 10. 2014: matematični literati



[Slika 6] Šolska skupina: »Ko račun ne gre v glavo«

δ Festival znanosti

9. oktobra 2014 smo matematični kviz že tradicionalno predstavili na 20. Festivalu znanosti v ljubljanskem Koloseju pod okriljem Slovenske znanstvene fundacije. Uvodoma smo obiskovalcem, učencem dveh osnovnih šol, predstavili film o Francu Močniku, nato

smo jih skozi zgodbo ter avtentično dramatizacijo šolarjev iz 19. stoletja spretno vodili s posnetimi prizori, ob katerih so se s Šolsko radiotelevizijo vrnili v šolo Močnikovega časa z zastavljenimi nalogami iz avtentičnih Močnikovih računic.



[Slika 7] Pred Kolosejem v Ljubljani, na festivalu znanosti



[Slika 8] Krava Liska se predstavi v Koloseju na matematičnem kvizu

Za konec objavljamo še eno izmed pesmic, ki so jih ob tej priložnosti ustvarjali učenci naše šole.

MATEMATIKA

Ko še v vrtcu smo bili,
znali šteti smo do tri,
kasneje v šolo smo vstopili
in računati do deset se naučili.

Naslednje leto še + in – smo spoznali,
z njima radi se igrali,
tudi če še majhni smo bili,
matematiko smo že obvladali.

Skozi leta matematično znanje smo pridobili,
tudi do milijon šteti se že naučili,
zdaj v devetem razredu smo pristali,
kar nekaj matematičnih nalog že za sabo dali.

Od množenja do deljenja pa vse do
Pitagorovega izreka in dvočlenika kvadrata
v osnovnošolskih letih smo se naučili,
naslednje leto pa skozi srednješolska vrata
polni znanja bomo vstopili.

Anja Sedej
in Nika Poljanšek, 9. b



Na OŠ Tišina vedno hitreje računamo

*We Calculate Faster with Every Day at Tišina
Primary School*

Anka Brinar

Osnovna šola Tišina

Σ Povzetek

Pripravek prikazuje pregled uspehov učencev OŠ Tišina na tekmovanjih hitrega in zanesljivega računanja, v obdobju od 2007 do 2014. Sprehodila sem se skozi leta, ko sem kot mentorica učence navduševala in pripravljala na tekmovanje in opisala svoje videnje in občutke.

Ključne besede: uspešni učenci, hitro in zanesljivo računanje

Σ Abstract

The article presents an overview of the achievements of pupils of the Tišina primary school at competitions of fast and reliable calculation in the period from 2007 to 2014. I recount the years when I was able to make pupils feel enthusiastic as mentor and prepare them for the competition. I also describe my vision and feelings.

Keywords: successful learners, fast and reliable calculating

α Začetki hitrega računanja

Bilo je oktobrsko jutro in kot razredničarka devetošolcev sem bila na predstavitvi ško-fijske gimnazije Maribor. Stopim v razred in zagledam našega nekdanjega učenca Primoža, zdaj maturanta te šole. Na obrazu se obema pojavi velik nasmešek in pristrčen tisk rok.

To je tisti Primož, ki je poskrbel, da smo na naši šoli, osnovni šoli Tišina, začeli hitro računati na pamet. V živo se mi je zavrtel film izpred osmih let, ko sem v šesti razred pri matematiki dobila zelo heterogeno skupino.

Razred je bil zelo pester, tako da sem v začetku celo obupavala, da kljub 25-letnim delovnim izkušnjam tega ne bom zmogla. V razredu so bili štirje učenci s posebnimi potrebami, z odločbo velikih učnih težav, z različnimi motnjami in z veliko prilagoditvami. Poleg razredne sredine je bil v razredu še Primož, zelo nadarjen učenec, tudi na matematično-logičnem področju.

Da sem te ure »preživela«, nista bili zados-ti skrbno načrtovana motivacija in notranja diferenciacija, kajti učenci s posebnimi potrebami so bili tako zahtevni in so me hoteli v slehernem trenutku imeti za sebe, razredne sredine nisem mogla zanemarjati, Primoževo samostojno delo, s poglobljanjem vsebin in reševanjem drugačnih nalog, pa je bilo zelo kratkotrajno. Njega je z enim ušesom vseskozi zanimalo, kaj se dogaja v razredu in kaj hitro je zabaval sošolce okrog sebe.

V tistem obdobju sem veliko časa name-nila iskanju novih pristopov, izzivov, cele večere sem brskala po spletu in prišla do več aplikacij, med drugim tudi do Hitrega in zanesljivega računanja na pamet. Primož se je navdušil nad interaktivnim računanjem in

ko je pri uri končal delati, se je presedel za računalnik in se ukvarjal z vsemi štirimi računskimi algoritmi, kar ga je po svoje zabavalo. Tako se je tisto leto uvrstil na državno tekmovanje in tam zasedel 8. mesto. Podobno je bilo tudi naslednje leto in na takšen način mi je uspelo »preživeti« poučevanje tega razreda.



[Slika 1] Leta 2011 se je kar sedem učencev OŠ Tišine uvrstilo na državno tekmovanje, Primož drugi z leve strani

β Naključno odkritje velikega talenta

Če mislite, da se tu zgodba konča, se motite, tu se zgodba šele začne.

Primoža je hitro računanje tako navdušilo, da je včasih ostajal za računalnikom tudi v odmoru ali po pouku.

Ker imam na šoli tudi šahovski krožek, so k šahu že prihajali mlajši učenci in občudovali Primoža, ki je še vedno sedel za računalnikom in podiral osebni rekord. Spomnim se, kako so ti mali učenci stali za njim in z velikimi očmi strmeli v monitor. Mojo pozornost pa je pritegnila mala deklica, ki je tiho mrmrala številke 2, 8, 7, 9, 4 (28 794), te so bile rezultat posameznega številskega izraza, ki se je pojavljal na monitorju. Še bolj sem po-

slušala in ugotovila, da so rezultati pravilni. Pa kako je to mogoče, sem se spraševala, saj so računi posegali v številski obseg čez deset tisoč, deklica pa je tretješolka.

Moje naslednje vprašanje je seveda bilo, pa čeprav pri šahu: »Kaja, boš tudi ti poskusila?« In je poskusila. Kaj kmalu sem ugotovila, da sem po naključju odkrila deklico z velikim talentom, KAJO TUŠKEI. Kaja ni več učenka naše šole, saj je že gimnazijka, je pa na naši šoli še vedno zapisana z velikimi črkami.

Kajo je hitro računaje očaralo, mene pa še bolj. Vsako leto je z vznemirjenjem pričakovala posamezne kroge tekmovanja, še najbolj pa državno tekmovanje, ki je potekalo v živo. Iz dneva v dan je rezultate izboljševala, šestkrat je bila državna prvakinja, enkrat je bila druga (takrat ji je nagajala računalniška miška) in se redno uvrščala na meddržavno tekmovanje. Prvo leto, ko je bila državna prvakinja, je najboljšim v državi na različnih področjih priznanja podelil minister za šolstvo dr. Milan Zver.



[Slika 2] Kaja na leta 2008 z ministrom za šolstvo dr. Milanom Zverom



[Slika 3] Kaja v računalniški učilnici v Estoniji

γ Mednarodna tekmovanja

Nepozabno je bilo potovanje v Estonijo, naslednje leto sva let v Rigo odpovedali zaradi prahu, ki ga je bruhal ognjenik na Islandiji. Sledilo je meddržavno tekmovanje v Črnemlju, kjer je Kaja osvojila srebrno medaljo. V Litvi je bila peta, naslednje leto, ko je tekmovanje potekalo v Ukrajini (na daljavo iz Ljubljane), je osvojila bronasto medaljo. Zaradi pomanjkanja finančnih sredstev pa letos nismo potovali v Latvijo.

Težko je opisati vse občutke, ko sem s ponosom stala ob svoji varovanki, ko je zmagovala in prejemale priznanja. Takšno sposobnost oziroma nadarjenost na računsko-numeričnem področju ima le malo ljudi in Kaja jo ima. Pomembni sta tudi ročna spretnost in osebna strategija.

Še zdaj čutim popolno tišino v telovadnici naše šole, ko je svoje računanje pokazala vsem učencem, pa tudi na roditeljskem sestanku, ko se je predstavila, je bilo slišati vdihljaje osuplosti in tu in tam: »Pa to ni res«.

δ Vztrajnost in delavnost se obrestuje

Vsako leto je gospod župan priredil sprejem za najboljše, kjer sva bili tudi midve s Kajo.

Šolsko leto	Razred	Državno tekmovanje	Rezultat	Meddržavno tekmovanje
2007/2008	3. razred	1. mesto	7656	–
2008/2009	4. razred	1. mesto	13533	5. mesto (Estonija)
2009/2010	5. razred	1. mesto	16922	– (Litva)
2010/2011	6. razred	2. mesto	17892	2. mesto (Slovenija)
2011/2012	7. razred	1. mesto	18468	5. mesto (Litva)
2012/2013	8. razred	1. mesto	20889	3. mesto (Ukrajina)
2013/2014	9. razred	1. mesto	23583	(Latvija)

[Preglednica 1] Rezultati in uvrstitve Kaje na tekmovanjih

Večkrat sem razmišljala, da sem imela res srečo, da se je v moji poklicni karieri pojavila učenka, ki je svojo nadarjenost nadgradila z delavnostjo, vztrajnostjo, doslednostjo, ambicioznostjo in še s čim. Kaja je bila uspešna še na veliko drugih področjih in osvajala razna priznanja.

Malo je ljudi, ki svoje sposobnosti tako izkoristijo oziroma jim je dana tudi možnost. To možnost moramo učencem dati mentorji in jim nenehno stati ob strani.



[Slika 4] Osvojena srebrna medalja na meddržavnem tekmovanju leta 2011 v Črnomlju

Takšni učenci obogatijo poklicno pot učitelja in mu včasih dajo novih zagonov, seveda je treba priznati, da so že tako majhni lahko boljši od učitelja, jim čestitati in se z njimi veseliti.

Glas o hitrem računanju se je hitro širil, tudi drugi učenci so se vključevali. Tako se je vsako leto na državno tekmovanje uvrstilo več učencev naše šole. Tudi moje sodelavke v 1. in 2. triletnja so se začele vključevati in s pridom uporabljati spletno aplikacijo.

Pred tremi leti pride k meni sodelavka iz prve triade in mi pravi, da pa se ji zdi, da imamo še enega dobrega računarja in ali bi ga prišla pogledat.

ε Novo odkritje

Ko sem se srečala s tem drugošolcem, sem kaj hitro ugotovila, da smo dobili novo »Kajo«, z imenom Rene. Skoraj se zdi nemogoče, da se na isti šoli pojavita dva takšna talenta.

Če primerjam njune rezultate v istem starostnem obdobju, kaj kmalu ugotovim, da je Rene še boljši kot Kaja. Hitro računanje živi v Reneju. Postavlja se mi vprašanje, kako daleč lahko ti rezultati še pridejo? Ko jaz na monitorju zagledam vsa števila in začnem računati, ima Rene že rezultat. Rene ničesar ne prepusti naključju, je zelo dober strateg, mislec in garač. Tudi on je bil že trikrat državni prvak in se trikrat uvrstil na meddržavno tekmovanje, kjer je osvojil zlato medaljo.



[Slika 5] Rene v računalniški učilnici v Črnomlju



[Slika 6] Kaja in Rene v Litvi



[Slika 7] Vesetje od osvojitvi naslovov državnih prvakov leta 2014

Rene je tudi zelo dober šahist, ne samo v računanju, tudi v šahu me kdaj premaga. Vse to dokazuje o njegovi izjemni predstavi o številih, spretnosti, hitrem sklepanju, pomnjenju, predvsem pa učinkoviti osebni strategiji in digitalni pismenosti. Letos Reneja poučujem tudi matematiko in zdaj še bolj vidim, koliko volje, zagnanosti, samodiscipline in vztrajnosti ima. S takšnimi učenci je veselje delati.

Poleg raznih sprejemov, intervjujev se je Rene udeležil tudi oddaje Slovenija ima talent, kjer so bili nad njim zelo navdušeni.



[Slika 8] Rene na oddaji Slovenija ima talent

η Sklepne misli

Vso to delo, motivacija in uspehi so plod več dejavnikov. Povsod, kamor sem se kot men-

Šolsko leto	Razred	Državno tekmovanje	Rezultat	Meddržavno tekmovanje
2011/2012	2. razred	1. mesto	14 386	7. mesto (Litva)
2012/2013	3. razred	1. mesto	19432	1. mesto (Ukrajina)
2013/2014	4. razred	1. mesto	19216	(Latvija)

[Preglednica 2] Rezultati in uvrstitve Reneja na tekmovanjih

torica obrnila, sem naletela na velik posluh in podporo, tako pri gospe ravnateljici, gospodu županu in seveda starših, ki so bili vedno pripravljeni sodelovati in svojemu otroku stati ob strani.

Ugotavljam, da me je spletna aplikacija hitrega računanja tako zaznamovala, da si sploh ne predstavljam poučevanja brez nje. Postala je nepogrešljiv del mojega pouka, pa naj si gre za redni pouk, dopolnilni pouk, dodatni pouk, delo z nadarjenimi učenci ali pri delu z učenci s posebnimi potrebami.

Letos se na tekmovanje pripravljamo že osmo leto. Če pogledam nazaj, so bili vsi ti učenci, ki so bili uspešni v hitrem računanju, uspešni še na raznih drugih področjih.

Mislim, da je za njih to dobra popotnica in da bodo vse te izkušnje znali s pridom izkoristiti.

Sama še dalje iščem nove izzive in v veliko veselje mi je učencem ponuditi nekaj več in z njimi stopati v korak s časom.

Kaja Tuškei o hitrem in zanesljivem računanju

Pred sedmimi leti sem se prvič srečala s hitrim in zanesljivim računanjem na pamet. Hitro računanje mi je bilo v veliko veselje in pomoč pri učenju. Moje navdušenje in pričakovanja so se izpolnila, saj sem dosegala dobre rezultate. Pri tem so me zelo podpirali mentorica Anka Brinar, sošolci in seveda starši. Po zaslugi velike količine vloženega časa in truda sem tudi obiskala Estonijo in kasneje še Litvo.

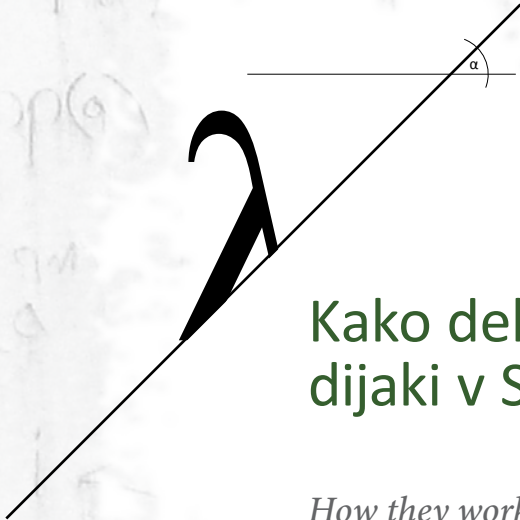
Vesela sem, da sem se ukvarjala z hitrim in zanesljivim računanjem, saj ne le da sem spoznala veliko novih prijateljev, sem imela možnost potovati z letalom in obiskati države, ki so svetu komaj poznane.

Avtorja fotografij:

- Anka Brinar, tekmovanja v Črnomlju, Estoniji, Ljubljani in Novem mestu
- Stanislav Žižek, meddržavno tekmovanje v Litvi in na oddaji Slovenija ima talent

Vir

1. si.lefo.net
2. osebni arhiv avtorice



Kako delajo z nadarjenimi dijaki v Srbiji?

How they work with gifted students in Serbia?

Branka Hrast Debenjak
Gimnazija Tolmin

α V Valjevo in Beograd

Skupina ravnateljev in učiteljev naravoslovja slovenskih srednjih šol je na pobudo srbskih kolegov oktobra obiskala Valjevo in Beograd. S srbskimi kolegi smo si poleg ogleda nekaterih njihovih srednjih šol in Raziskovalne postaje Petnica predvsem izmenjali mnenja in izkušnje na področju dela z nadarjeno mladino. Kot učiteljica matematike, ki še vedno verjame v klasično Gaussovo krivuljo, ki na obeh koncih - zunaj dveh standardnih odklonov - predvideva od 2 do 3 % populacije, se namreč vse pogosteje sprašujem, kako imamo Slovenci kar naenkrat skoraj 20 % nadarjenih otrok in le malo manjši delež otrok s posebnimi potrebami. Zlasti me je zanimalo, kako z dijaki na desni strani omenjene krivulje delajo srbski kolegi.

β Raziskovalna postaja Petnica

Presenečeno, a res iskreno pohvalo in priznanje smo izrekli takoj prvi dan svojega obiska. V Petnici, 8 km iz Valjeva, so v nekdanjem samostanu srbski zanesenjaki, mladi učitelji in študenti, že pred 30 leti postavili Raziskovalno postajo Petnica, ki naj bi postala zbirališče za mlade ljudi z velikim zanimanjem za znanost. Postaja je bila prva res nevladna izobraževalna organizacija v nekdanji Jugoslaviji. Kljub vsem političnim pretresom v zadnjih treh desetletjih je ob podpori oblasti, univerz, industrije in

velikim vložkom evropskih sredstev postala vrhunsko opremljen center za promocijo naravoslovnega izobraževanja. 50 000 udeležencev in 6000 gostujočih znanstvenikov in predavateljev je v tem obdobju izvedlo skoraj 3000 taborov.



[Slika 1] Pogled na del raziskovalne postaje Petnica: laboratoriji v stavbi na levi in namestitveni objekt na desni

γ Delo na Raziskovalni postaji Petnica

Ponujajo veliko intenzivnih tečajev za študente naravoslovnih fakultet, izobraževanja za učitelje naravoslovja, poletne šole za osnovnošolce in celoletne tečaje za srednješolce, tako iz Srbije kot iz tujine. Srednješolski tabori potekajo v obliki tedenskih tečajev celo leto. Njihov osnovni cilj je dijakom dati širino, kompleksnost in povezanost določene znanosti z drugimi znanostmi in mlade naučiti kritično razmišljati. Poseben poudarek je na zaščiti avtorskih del in citiranju. Srednješolski tečaji potekajo v obliki dveh tednov teoretičnega dela v jesenskem oz. zimskem obdobju, po katerem udeleženci doma snov dodatno raziščejo in pozneje v 2-tedenskem eksperimentalnem delu izvedejo določene eksperimente. Delo poteka vsak dan od 10. ure do polnoči. Zatem izdelajo raziskovalno nalogo in jo v zadnjem tednu predstavijo

drugim udeležencem ter objavijo v zborniku. Vsako leto je poleg drugih področjih objavljenih tudi nekaj raziskav z matematičnega področja. Na postaji je zaposlenih le nekaj predavateljev, večino dela prostovoljno opravijo njihovi nekdanji »petničarji«, danes priznani strokovnjaki z vsega sveta.



[Slika 2] Predavalnice in odlično opremljena knjižnica z domačo in tujo literaturo

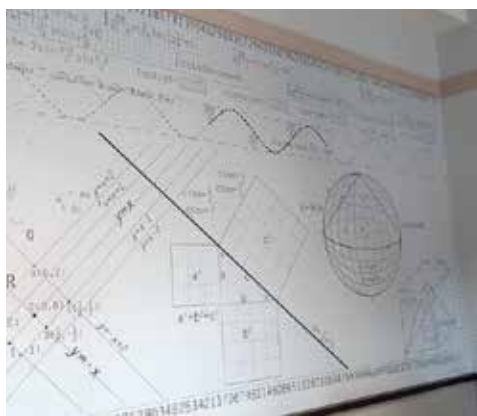
δ Izbira kandidatov in stroški izobraževanja

Njihovo osnovno vodilo je, da samo nadarjenost, brez dela in motivacije, ne pripelje do uspeha, zato je za izbiro ključno motivacijsko pismo, ki ga oceni petčlanska komisija. Za 1500 mest na leto prejmejo okrog 3500 prijav. Stroški pettedenskih dejavnosti z namestitvijo za srbske dijake so 150,00 evrov, za tujce 500,00 evrov, večini srbskih dijakov jih pokrijejo sponzorji. Pri izbiri skrbijo za pozitivno diskriminacijo otrok iz revnih okolij. Prvo leto jih naučijo metod znanstveno-raziskovalnega dela in izvajajo manjše projekte. Osip do konca leta je okrog 30-odstotni. Večina preostalih udeležencev se prijavi še za eno leto, čeprav niso samodejno izbrani. V drugem letu morajo sami podati predlog konkretnega projekta in ga izvesti.

Raziskovalna postaja jim priskrbi ustreznega mentorja. Med udeleženci je poleg srbskih dijakov veliko Madžarov, Angležev, Italijanov in zlasti dijakov iz nekdanjih jugoslovanskih republik, med katerimi pa skorajda ni Slovencev. Predavanja so v srbskem ali angleškem jeziku.

ε Izkušnje pri delu z nadarjeno mladino

Predvsem poudarjajo, da pri njih »zacvetijo« dijak, ki so zaradi svoje nadarjenosti v svoji šoli pogosto odrinjeni, šikanirani in zasmehovani. V Petnici pa spoznajo, da je njim podobnih vrstnikov veliko. Za svoje delo ne prejmejo nikakršnih formalnih potrdil ali diplom, od njih se pričakuje predvsem intenzivno delo. To potrjuje tudi izjava udeleženke intenzivnega tečaja biokemije, ki je potekal med našim obiskom. Študentka farmacije iz Beograda je na vprašanje, ali ni udeležba na tečaju zanj zelo draga, preprosto odgovorila: »Izbira med tednom počitnic v Grčiji in tednom intenzivnega dela v Petnici je bila lahka.«



[Slika 3] Pogled na steno v matematični učilnici Gimnazije Valjevo

Prvi del obiska v Valjevu smo sklenili z ogledom valjevske gimnazije in nekaterih tehničnih šol v mestu. Med njimi so nam v ušesih odzvanjale besede ravnatelja zdravstvene šole – v zadnjem času je podpisal že več sto prevodov spričeval v angleščino. Beg možganov iz Srbije je velik problem.

η Matematična gimnazija v Beogradu

Obisk smo končali v Beogradu – na matematični gimnaziji. Ustanovljena je bila leta 1966 po zgledu matematične šole Kolmogorov iz Moskve. Častitljiva zgradba v centru mesta ni le prostor, v katerem deluje matematična gimnazija. Srbska zakonodaja namreč šolam omogoča, da na gimnazijah izvajajo tudi intenzivni pouk zadnjih dveh razredov osnovnih šol. Tako kot na valjevski gimnaziji tudi na Matematični gimnaziji v Beogradu izvajajo pouk v dveh oddelkih zadnjih dveh razredov osnovnih šol. Vanj izberejo 50 matematično najbolj nadarjenih osnovnošolcev iz celega Beograda. Večina med njimi nadaljuje šolanje na njihovi matematični gimnaziji – za 100 mest v petih gimnazijskih oddelkih namreč letno kandidira okrog 300 učencev. Kriteriji izbire so sprejemni izpit in predhodni dosežki učencev.

Na šoli je skupno 500 dijakov, ki jih poučuje 100 učiteljev, skoraj polovica med njimi jih za določeno število ur prihaja na šolo z univerze in znanstvenih institucij. Najštevilčnejši so učitelji matematike – med 38 učitelji je kar 20 doktorjev znanosti. Tolikšno število učiteljev je razumljivo, saj imajo dijaki tedensko kar osem ur matematike. Po besedah ravnatelja v tem času ne predavajo snovi zunaj učnega načrta, ampak zelo raz-

ENTRANCE EXAMINATION
FOR THE ADMISSION TO MATHEMATICAL GRAMMAR SCHOOL

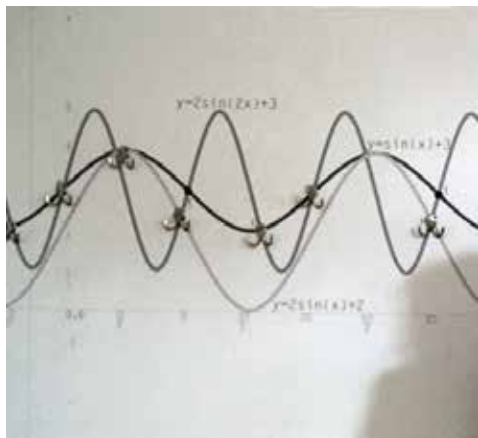
June 11, 2011

The test contains 12 problems. Total time allowed for the exam is 120 minutes. For each problem there are five proposed answers (A, B, C, D, E), only one of which is correct. If you do not know the answer, circle N without losing or gaining any points. Each problem is worth 20 points. For a wrong answer you lose 2 points. Should you circle more than one answer or none, you lose 4 points.

1. The value of $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ is:
 A) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; B) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; C) 1; D) $2 + \sqrt{3}$; E) $2 - \sqrt{3}$; N) I don't know
2. Which of the following statements are true?
 (I) If all the sides in a triangle are proportional to the corresponding sides in another triangle, then these two triangles are congruent.
 (II) For any two real numbers a and b , the equality $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$ holds.
 (III) A line that is parallel to a plane is parallel to any line of that plane.
 A) All three; B) Only (I); C) Only (II); D) Only (III); E) None; N) I don't know

[Slika 4] Skenirano navodilo in prvi dve nalogi sprejemnega izpita (Vir: Mathematical Grammar School, The school with the high national distinction status)

širjeno obdelajo učno snov gimnazijskega programa. Poleg matematike dajejo poseben poudarek tudi fiziki in računalništvu.



[Slika 5] Še en utrinek iz valjevske matematične učilnice

Zanimivost, ki je pritegnila našo pozornost, je tudi delo z najmlajšimi – že 20 let vsak konec tedna organizirajo pripravljalne tečaje za otroke med 4. in 15. letom starosti zato, da bi prepoznali in razvijali talente v zgodnji starosti. Novost od leta 2012 je polletni matematični tabor »Kliker«, na katerem povezujejo matematiko in šport zato, da otroci uživajo in razvijajo svoje fizične in umske sposobnosti.

✂ Za konec

V Sloveniji smo zadnja leta veliko časa in energije namenili delu z nadarjenimi – take dijake identificiramo in evidentiramo, ko pa postopek končamo, pogosto ne vemo, kako naprej. Srbski pristop je drugačen – ne poz-

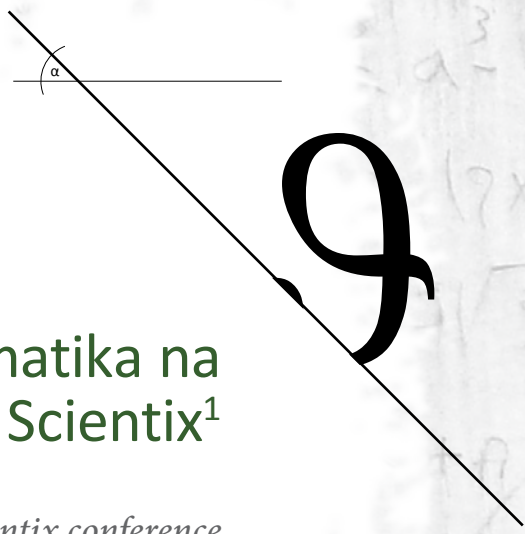
najo formalnih postopkov, ampak nadarjene in motivirane mlade povabijo. Taki se povabilom odzovejo, nemotivirani in nedelavni pač ne.

Katera pot je torej prava? Glede na vse, kar smo v zadnjih dveh desetletjih v šoli poskusili, in glede na vse, kar so dijaki in starši pogosto poskusili izsiliti, najpogosteje zaradi pridobitve Zoisove štipendije, je težko soditi. Država pač mora nekako izbrati, kdo si zaradi svoje nadarjenosti zasluži posebno podporo. A tako kot mnogi drugi učitelji sem tudi sama imela opravka z dijaki, nedelavnimi in nezainteresiranimi, ki so štipendijo pridobili le na podlagi inteligenčnih testov in jo do zadnje zaostritve zakonodaje skorajda niso mogli izgubiti. Prepričana sem, da si nadarjeni dijaki res zaslužijo posebno

pozornost, težko pa verjamem, da je res potreben tolikšen formalizem. Šola in učitelji potrebujemo predvsem dovolj podpore, da bomo vse, kar smo in znamo dobrega početi s cvetom naše mladine, počeli še naprej.



[Slika 6] Eden od Petniških laboratorijev.



Matematika na 2. konferenci Scientix¹

Mathematics on the Scientix conference

Druga konferenca Scientix je bila v Bruslju med 24. in 26. oktobrom 2014. Scientix je skupnost za naravoslovno-matematično (NAMA) izobraževanje v Evropi – »Science« v Scientix = STEM (*science, technology, engineering, and mathematics*).

Namen konference je bil predstaviti evropske projekte s področja STEM (*science, technology, engineering, mathematics*), deliti in širiti dobre prakse poučevanja ter druženje. Spoznali smo možnosti, ki jih ponuja portal Scientix (<http://www.scientix.eu/>). To so predvsem brezplačna učna in druga gradiva projektov v več jezikih z možnostjo prevodov, najnovejše informacije, novice, vsebine in drugi viri iz naravoslovno-matematičnega izobraževanja.

Konferenco je v videosporočilu odprla zdaj že nekdanja evropska komisarka za raziskave, inovacije in znanost Maire Geoghegan-Quinn. Poudarila je bistvo evropskih projektov, za katere je Evropska komisija od leta 2007 namenila več kot 90 milijonov evrov in s katerimi želijo povečati kakovost naravoslovno-matematičnega izobraževanja, da dosežejo tiste, ki so jim namenjeni, učitelje in učence ali dijake. Poudarila je, da naj bo eden izmed glavnih ciljev družbe spodbujanje mladih k zanimanju za naravoslovje, znanost in razvoj.

V naslednjih dveh dnevih so se v plenarnem delu zvrstili trije zanimivi predavatelji. Nekdanji portugalski minister, pristojen za

Franč Gosak

Osnovna šola

Franca Lešnika -

Vuka Slivnica pri Mariboru

¹ Scientix is funded by the EC's 7th Framework Programme Scientix je financiran iz 7. okvirnega programa Evropske komisije.

znanost, tehnologijo, informacijsko družbo in visoko šolstvo, prof. dr. Mariano Gago je govoril o tem, kako se morajo politike in pristojna ministrstva spoprijeti in sprejeti izzive v STEM-izobraževanju.

Dr. Ewald Breunese, eden izmed direktorjev nizozemsko-angleške naftne družbe Shell, je predstavil izhodišča, kako učence zanimivo pritegniti k vedoželjnosti v naravoslovnih znanostih.

Kako uspeti kot znanstvenik in inženir, tudi v vlogi ženske, se je predstavila ameriška znanstvenica in inženirka za vesoljska plovila dr. Amber S. Gell.



[Slika 1] Plenarni del konference



[Slika 2] Amber S. Gell, vesoljska inženirka

Sledile so triminutne predstavitve 25 evropskih projektov, ki so namenjeni učitel-

jem STEM-področij. V nadaljevanju našteje projekte in njihova gradiva, uporabna za pouk, najdemo na portalu Scientix. Projekti: Mascil, Make the Link, GEOschools, Metafora, ICT for IST, ENGINEER, NanoDiode, nanOpinion, PLACES, TEMI, CyberMentor, Inspiring Science Education, Science on Stage Europe, eTwinning, SAILS, ASSIST-ME, FaSMEd, Go-Lab, e-Bug, PROFILES, REStARTS, SUSTAIN, Xplore Health, ingenious, Scientix, Science: It's a Girl Thing, Responsible Research and Innovation. Izpostavimo naj projekt Mascil <http://www.mascil-project.eu/>, ki je bil predstavljen tudi na delavnici na KUPM 2014. Objavljena so zelo uporabna gradiva za medpredmetno povezovanje matematike. Z drugimi naravoslovnimi predmeti.

Med sočasnimi predstavitvami, plakati in delavnicami bomo omenili le delavnice z matematičnimi vsebinami. Predstavljen je bil projekt Le-MATH, ki ponuja nove metode poučevanja matematike z nekaterimi komunikacijskimi dejavniki. Metodi MATHeatre in MATHFactor (izpeljanka iz znanega tekmovanja X-Factor) ponujata učenje in poučevanje z dramatizacijo matematičnih vsebin oziroma uporabo nadarjenosti in sposobnosti kot podporo drugim verbalnim dejavnostim.



[Slika 3] Delavnica: Learn maths through code



[Slika 4] Okrogla miza: *There is a World Outside to Discover Through IBL with 4 elements*

V delavnici z naslovom Learn Maths Through Code smo spoznali aktivno učno okolje za stimulacijo predšolskih otrok in otrok nižjih razredov osnovne šole za razumevanje programiranja brez uporabe računalnika. Z uporabo preprostega programskega jezika v didaktičnih igrah (ukazi, ko sta korak naprej in obrat v to smer) učenci pridobijo številske predstave, količinske odnose, rešujejo probleme, se orientirajo v prostoru, uporabljajo drugačen jezik ... Pozneje lahko proces digitalno nadgradijo z uporabo preprostega programskega jezika, kot je na primer Scratch (<http://scratch.mit.edu/>), ki je brezplačen, preveden tudi v slovenščino, in omogoča programiranje lastne interaktivne zgodbe, igre ali animacije. Na njihovi spletni strani je objavljenih veliko matematičnih vsebin (programčkov) za otroke in mladostnike med osmim in šestnajstim letom.

Naj omenimo še dve brezplačni aplikaciji spletni strani, ki sta bili predstavljeni na konferenci. Spletno in mobilno aplikacijo Zondle (<https://www.zondle.com/>), ki omogoča izdelavo in uporabo računalniških iger, kvizov in delitev gradiv z drugimi uporabniki, kar je lahko odlična podpora učenju in poučevanju. Program je preveden v 26 jezikov, tudi v slovenščino. Druga aplikacija je Qui-

zlet (<http://quizlet.com/>), ki ima več kot 11 milijonov registriranih uporabnikov in prav tako omogoča izdelavo različnih interaktivnih gradiv za učenje.

Konference se je udeležilo več kot 550 učiteljev, vodij različnih projektov, raziskovalcev in predstavnikov drugih izobraževalnih institucij iz cele Evrope, med njimi je bilo devet predstavnikov iz Slovenije.

Neposredna vez med nacionalnimi organizacijami in evropsko so nacionalne kontaktne točke (NCP). Naša nacionalna kontaktna točka je Zavod RS za šolstvo, natančneje Andreja Bačnik in Jerneja Bone. Jerneja Bone se je konference tudi udeležila. Med slovenskimi udeleženci sta bila tudi dva Scientixova ambasadorja, Tatjana Gulič, ambasadorica Scientixa (OŠ Preska), in Alojz Blažič, namestnik ambasadorja Scientix (OŠ Cerklje ob Krki). Nacionalne kontaktne točke in ambasadorji v svojih državah s predstavitvami na konferencah in delavnicah skrbijo za obveščenost učiteljev o Scientixovih dejavnostih. Slovenijo so zastopali štirje dejavni udeleženci konference: Mojca Orel (Gimnazija Moste), ki je s kolegi iz Italije, Poljske in Portugalske sodelovala na okrogli mizi z naslovom *There is a World Outside to Discover Through IBL with 4 elements*, in Natalija Bohinc Zaveljcina (Gimnazija Jesenice), ki je predstavila prispevek z naslovom *Promotion of Science Vertically*. Oba ambasadorja sta soizvajala delavnico *Scientix and elevator pitches*. Preostali štirje udeleženci iz Slovenije smo bili učitelji iz osnovnih in srednjih šol, ki poučujemo fiziko, matematiko, kemijo ter tehniko in tehnologijo. Ob spremljanju novic iz foruma spletnih učilnic (za matematiko, kemijo, fiziko...) smo izvedeli, da se lahko prijavimo na konferenco Scientix. S pravočasno prijavo na Scientixovi

spletni strani in Scientixovo izbiro v EU smo si zagotovili brezplačno udeležbo na tej konferenci (namestitev, obroke in letalske karte).



[Slika 5] Udeleženci 2. konference Scientix iz Slovenije

Vabimo vas, da obiščete spletno stran Scientix <http://www.scientix.eu> in poiščite primerna gradiva za pouk. Če se registrirate, lahko spremljate novice Scientix, saj Scientix večkrat štipendira tudi druge dogodke in izobraževanja. Morda se boste na naslednjo delavnico ali konferenco prijavi prav vi.

Več o sami konferenci, programu, (ki je bil res pester), vsebini, predstavljenih gradivih, lahko najdete na spletni strani konference Scientix <http://www.scientix.eu/web/guest/conference>.

Fotografije 1-4 so uradne fotografije konference Scientix: https://www.flickr.com/photos/european_schoolnet/sets/72157646669447533/

Navodila sodelavcem in dopisnikom revije Matematika v šoli

Revija Matematika v šoli objavlja le izvirna, še neobjavljena dela, napisana v slovenščini, za kar odgovarja avtor. Objavljamo znanstvene in strokovne prispevke ter poročila. Prispevki morajo biti napisani strokovno, jezikovno in slogovno neoporečno.

Strokovni prispevki:

- **Naslov prispevka** naj bo kratek, jasen, enostaven in informativen. Vsebuje naj ključne pojme, odraža naj temo prispevka.
- **Ob imenu in priimku avtorja** navedite **ustanovo**, v kateri je zaposlen.
- **Povzetek** (abstract) naj vsebuje največ 200 besed. Umestite ga na prvi strani prispevka, takoj za naslovom prispevka in imenom ter priimkom avtorja ter ustanovo, kjer je zaposlen. Razumljiv mora biti sam po sebi, brez branja celotnega besedila prispevka. Napisan naj bo v 3. osebi, povzema naj bistvo prispevka, pojasni njegov namen in cilje, opiše uporabljene metode in tehnike morebitnega raziskovalnega oziroma znanstvenega pristopa, rezultate in glavne ugotovitve. Praviloma naj bo povzetek oblikovan v enem odstavku.
- **Ključnih besed** naj bo največ pet.
- Sledi **besedilo prispevka** (uvod, osrednji del, zaključek) z vključenimi slikami, fotografijami, preglednicami. Besedilo naj bo logično razdeljeno na poglavja in podpoglavja.
- **Preglednice, slike in druge priloge** naj bodo vključene v besedilo. Vsaka preglednica ali slika naj ima naslov in zaporedno številko in ustrezen podnapis. Slikovno gradivo morajo avtorji priložiti v formatih jpg ali tiff z ločljivostjo najmanj 300 dpi. Če v prispevku uporabite avtorske izdelke učencev oz. dijakov, je treba pridobiti tudi njihova pisna soglasja za objavo, če so polnoletni, oz. dovoljenja enega od staršev, če še niso polnoletni. Dovoljenja se priloži prispevku. Za objavo slikovnega gradiva, ki ni last avtorja prispevka, je treba pridobiti dovoljenja za objavo. Za dovoljenja lahko zaprosi že avtor prispevka ali pa posreduje založbi podatke o avtorjih gradiv, ki uredi potrebna soglasja za objavo.
- Na koncu zapišite seznam citiranih in uporabljenih **virov**.

Uporabljeni viri naj bodo navedeni po abecednem redu priimkov prvih avtorjev oziroma po naslovih del neznanih avtorjev. Navajamo primere navajanja virov.

1. Jerman, M. (2013): Evklidov algoritem, Matematika v šoli, letn. 19, št. 1.–2., str. 54–60.
2. Heacox, D. (2009): Diferenciacija za uspeh vseh, Rokus Klett, Ljubljana.
3. Magajna, Z. (2013): Preverjanje matematičnega znanja s pisnimi preizkusi. V Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Matematika. Ljubljana: ZRSŠ.
4. www.zrss.si/.../konkretno.html (17. 10. 2014).

Drugih sestavkov (sporočil, predstavitev knjig, dogodkov idr.) ni treba opremiti s povzetkom in ključnimi besedami. Seminarske naloge v obliki, kot so izdelane pri študiju ali na različnih tečajih oz. seminarjih, sprejemamo le, če so ustrezno prirejene za objavo v naši reviji.

Oblika prispevka: Prispevki lahko obsegajo do 15 tipkanih strani s preglednicami, slikami in viri vred (do 30 000 znakov s presledki). Besedilo naj bo napisano v Wordu, s pisavo Times New Roman, velikost črk 12, razmik med vrsticami 1,5.

Za trditve v prispevku odgovarja avtor/-ica, zato mora biti podpisan/-a s celotnim imenom in priimkom. **Avtor mora priložiti lastnoročno podpisano prijavnico za objavo prispevka v reviji**, s katero med drugim jamči, da je prispevek izvirno avtorsko delo (obrazec za prijavo prispevka je skupaj z uredniško politiko in navodili sodelavcem in dopisnikom revije Matematika v šoli dostopen na spletni strani Zavoda Republike Slovenije za šolstvo – Založba – predstavitev previj – Matematika v šoli: <http://www.zrss.si/default.asp?rub=5177>).

Avtorji morajo svoje prispevke poslati v elektronski obliki po e-pošti odgovorni urednici na naslov **jerneja.bone@zrss.si**, na naslov uredništva pa morajo poslati podpisano in izpolnjeno prijavnico prispevka za objavo v reviji. Nepopolnih prispevkov uredništvo ne bo upoštevalo.

Naslov uredništva:

Uredništvo revije Matematika v šoli
Zavod RS za šolstvo, OE Nova Gorica
Erjavčeva 2, 5000 Nova Gorica
E-mail: jerneja.bone@zrss.si.

ISSN 1318-010X



9 771318 010005



Zavod
Republike
Slovenije
za šolstvo