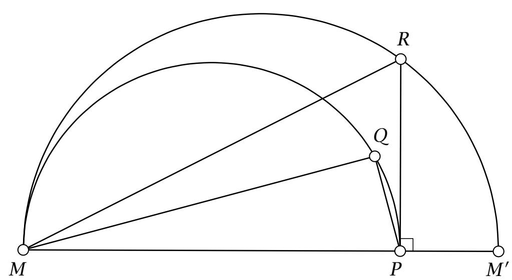
Naloga

Aleksander Simonič

→ Ramanujan na 223. strani Druge beležke trdi naslednje (glej sliko 1):

Vzemimo daljico MM' in tako točko R na polkrožnici nad MM', da je $\angle M'MR < \pi/4$. Naj bo P presečišče pravokotnice na MM' v R z daljico MM'. Izberimo točko Q na polkrožnici nad MP, da bo $|PM'| = |PQ|$. Če P deli daljico MM' v razmerju zlatega reza, potem premici MQ in MR sovpadata.



SLIKA 1.

Spomnimo, da P deli daljico MM' v razmerju zlatega reza natanko tedaj, ko je $|MP|/|PM'| = |MM'|/|MP|$.

- Dokaži Ramanujanovo trditev. Dokaži tudi, da se to zgodi natanko tedaj, ko velja $|MP| = |M'R|$.
- Uvedimo oznake $\varphi_1 = \angle M'MQ$, $\varphi_2 = \angle M'MR$ in $\lambda = |MM'|/|MP|$. Dokaži, da je $\sin\varphi_1 = \lambda - 1$ in

  - $$\sin(2\varphi_2) = \frac{2\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}.$$

  Ramanujan je ti zvezi uporabil pri ugotovitvi, da je razmerje nihajnih časov nitnih nihal z odmikoma $4\varphi_2$ in $2\varphi_1$ od ravnovesne lege ravno λ.

Rešitev. Pogoj $\angle M'MR < \pi/4$ zagotavlja, da je $|MP| > \frac{1}{2}|MM'|$. To pomeni, da točka Q obstaja. Naj bo D presečišče daljice MR s polkrožnico nad MP. Po Talesovem izreku o obodnih kotih je $\angle MDP = \angle MRM' = \pi/2$, zato sta premici PD in $M'R$ vzporedni, ter $\angle PDR = \angle M'PR$. Sledi $\angle RPD = \angle PRM'$, zato sta trikotnika $\triangle RDP$ in $\triangle M'PR$ podobna. Od tod dobimo $|PR|^2 = |M'R| \cdot |DP|$. Po drugi strani pa nam Evklidov višinski izrek za $\triangle MM'R$ zagotavlja $|PR|^2 = |MP| \cdot |PM'|$. Torej je

$$\frac{|M'R|}{|MP|} = \frac{|PM'|}{|DP|}. \tag{1}$$

Trikotnika $\triangle MPD$ in $\triangle MM'R$ sta tudi podobna, zato $|MM'|/|MP| = |M'R|/|DP|$. Sledi

$$\frac{|MM'|}{|MP|} = \frac{|MP|}{|PM'|}\left(\frac{|PM'|}{|DP|}\right)^2. \tag{2}$$

Torej točka P deli daljico MM' v razmerju zlatega reza natanko tedaj, ko je $|PM'| = |DP|$. Enakost (1) nam tudi pove, da se to zgodi natanko tedaj, ko je $|MP| = |M'R|$. Po konstrukciji točke Q pa se to zgodi natanko tedaj, ko Q in D sovpadata, kar je ekvivalentno trditvi, da premici MQ in MR sovpadata. S tem je Ramanujanova trditev dokazana.

Ker je $|MP|\sin\varphi_1 = |PQ| = |PM'|$ in $|PM'| = |MM'| - |MP|$, imamo $\sin\varphi_1 = \lambda - 1$. Ker pa je še $|MP|\sin\varphi_2 = |DP|$, iz (2) dobimo $\sin^2\varphi_2 = (\lambda-1)/\lambda$. Torej je

$$\sin^2(2\varphi_2) = 4\sin^2\varphi_2\left(1-\sin^2\varphi_2\right) = \frac{4(\lambda-1)}{\lambda^2}.$$

To pa že dokazuje zahtevano enakost, saj je $2\varphi_2 < \pi$.

× × ×