# Ledena sveča in žled

↓↓↓
Andrej Likar, Nada Razpet

→ **Ledeni dež, ki smo mu pred nedavnim bili priča, je uprizoril malokdaj videne pojave. Med njimi je tudi ukrivljena ledena sveča (slika 1), ki je zrasla na grmu v domačem vrtu.**

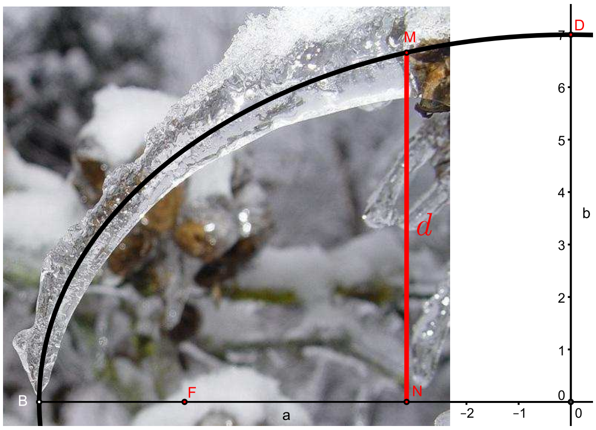
Sveča je nenavadne oblike zato, ker se je veja, na kateri je sveča rasla, pod naraščajočo težo ledu počasi upogibala. Veja je bila sicer kriva, a jo na mestu, kjer je začela rasti sveča, lahko obravnavamo kot ravno. Ker raste sveča le na konici navpično, veja pa se medtem obrača, se sveča krivi. Denimo, da je zasuk veje sorazmeren s količino dežja, ki je padla na vejo. Če bi bil tudi prirastek sveče na konici sorazmeren s količino dežja, torej z zasukom veje, bi imela sveča krožno obliko. Poglejmo zakaj.

Zaporedne slike rasti sveče pri enakomerno naraščajočem kotu zasuka veje smo prikazali na sliki 2. Privzeli smo, da se veja zasuče za majhen kot $\Delta\varphi$ (na sliki je bilo to pet stopinj), potem pa miruje, medtem pa sveča raste. Potem se na hitro zasuče za nadaljnji kot $\Delta\varphi$ in tako naprej. Zasuk smeri rasti sveče je glede na prejšnjo smer rasti prav tako $\Delta\varphi$, saj sveča na konici raste navpično. Ker sveča med dvema zaporednima zasukoma zraste za enako dolžino, se njena oblika prilega pravilnemu večkotniku. Ker se veja krivi zvezno in ne sunkovito, kot smo to privzeli mi, moramo našo sliko temu prilagoditi tako, da si mislimo kot $\Delta\varphi$ vedno manjši. Tako se res bližamo krožnici.

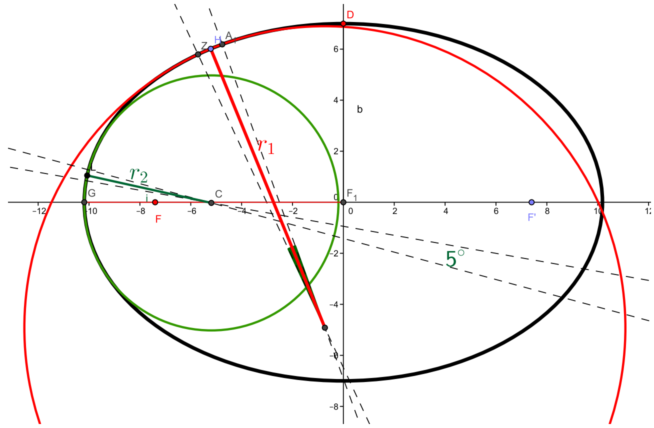
**SLIKA 1.**
Ukrivljena sveča

**SLIKA 2.**
Obliki ukrivljene sveče se bolje prilega elipsa (črno) kot krožnica (rdeče). Na sliki je nekaj črt, ki so bile ob rasti sveče vodoravnice, gledano s smeri vej.

Posneta sveča pa ni krožne oblike. Bolje se ji prilega elipsa (sliki 2 in 3). Rast sveče torej ni bila pri vseh kotih enaka. Na začetku, to je na najdebelejšem koncu ali, kot pravimo, pri korenu, je rasla hitreje, potem pa vse počasneje. To lepo vidimo na sliki 4, kjer smo narisali zaporedne prirastke pri enakomernih zasukih veje za pet stopinj. Pri vsakem zasuku veje je sveča sicer rasla navpično, ta navpičnica pa se je za nekoga, ki bi sedel na veji (in bi imel zanemarljivo težo, kajpak), sukala. S pravokotnicami na tangente smo ponazorili smeri vodoravnice, gledane s strani veje. Sosednji vodoravnici tvorita kot 5°.




**SLIKA 3.**
Sveči prilegajoča se elipsa



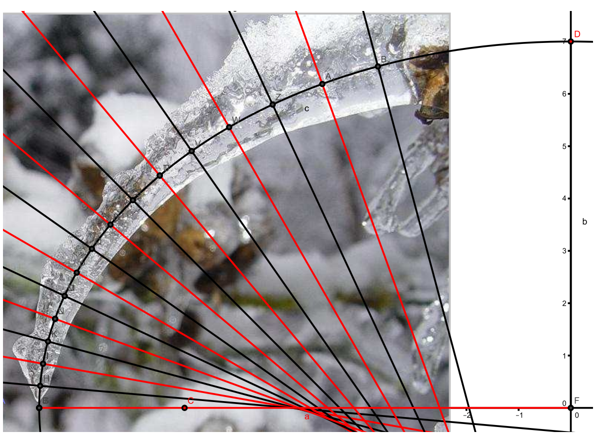

**SLIKA 5.**
Dva krivinska kroga (označeno z rdečo oz. zeleno barvo). Krivinski polmeri se manjšajo, $r_1 > r_2$. Črtkano sta označeni po dve sosednji normali.

Približno na mestu, kjer se sosednji vodoravnici sekata, pa najdemo središče krivinskega kroga, to je kroga, ki se nabolje prilega na ustrezni del elipse. Vidimo, da se krivinski radiji vzdolž sveče zmanjšujejo (slika 5).

Pojasnimo, kako smo prišli do teh vodoravnic.

## Določitev sveči prilegajoče se elipse

Pomagali smo si z računalniškim programom GeoGebra. Program je prosto dostopen s slovenskimi ukazi



**SLIKA 4.**
Neenakomerna rast sveče. Vse sosednje narisane vodoravnice se sekajo pod kotom 5°.

in se še vedno dograjuje. Ima vgrajene ukaze za risanje daljic, večkotnikov, stožnic, tangent na stožnice, meri razdalje, kote. Z njim lahko rišemo tudi grafe nekaterih funkcij.

V GeoGebro uvozimo sliko. Postavimo jo v drugi kvadrant (slika 3). Na osi $x$ izberemo točko $F$ in jo prezrcalimo čez os $y$, dobimo točko $F'$ (uporabimo GeoGebrine ukaze). Na osi $y$ izberemo točko $D$. Točki $F$ in $D$ lahko premikamo po oseh. Izberemo ukaz za risanje elipse z obema goriščema ($F$ in $F'$) in točko $D$. S premikanjem točk $F$ in $D$ dosežemo, da elipsa poteka približno po sredini ledene sveče, kot kaže slika 3. Premikamo lahko tudi lego slike, če kliknemo na sliko in ukinemo ukaz *fiksiraj sliko*. Ko smo našli pravo lego slike in elipse, sliko povežemo s koordinatnim sistemom (ukaz *fiksiraj objekt*).

Enačba elipse, ki ima središče v koordinatnem izhodišču, se glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

pri čemer je $a$ velika polos, razdalja $d(OB)$, in $b$ mala polos, razdalja $d(OD)$ na sliki 3. Program nam lahko posreduje tudi enačbo tako narisane elipse. Velikost njenih polosi je seveda odvisna od velikosti slike. Ocenimo, kolikšni sta. Sveča je bila v naravi visoka okoli 14 cm, na sliki pa je $d$ = 6,7 cm. Pomeni, da smo sliko skrčili približno na polovico. Osi elipse sta potem $a$ = 16 cm in $b$ = 14 cm.

## Smerni koeficienti normal na elipso, ki se medsebojno sekajo pod kotom $5^\circ$

Za določitev vodoravnic potrebujemo nekaj enačb. Najlaže jih najdemo, če primerjamo elipsi očrtano krožnico z elipso samo.

Zapišimo enačbi elipsi očrtane krožnice s polmerom $a$ in elipse s polosema $a$ in $b$ v središčni legi

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ krožnica,
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsa.

Ker je v obeh primerih vsota kvadratov enaka 1, vsota kvadratov cosinusa in sinusa pa tudi 1, lahko pišemo za krožnico:

- $x_c = a\cos t, \qquad y_c = a\sin t,$

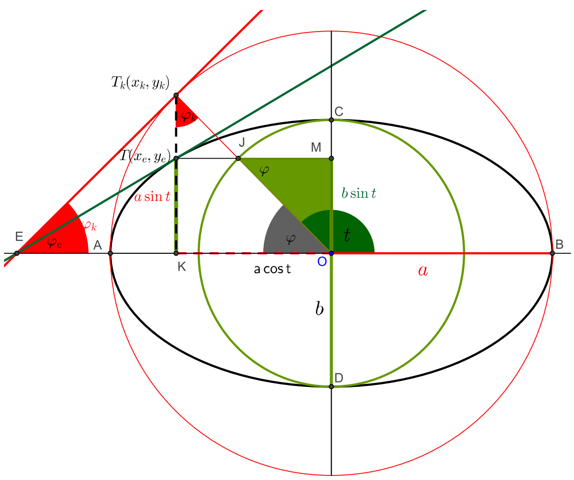
za elipso pa

- $x_e = a\cos t, \qquad y_e = b\sin t,$

pri čemer je $t$ parameter (kot), ki teče od 0 do $2\pi$.

Opazimo, da sta abscisi točk $T_c$ na krožnici in $T_e$ elipsi enaki (glej sliko 6), ordinati točk pa sta v razmerju $a/b$, torej lahko zapišemo

- $y_c = \dfrac{a}{b} y_e.$




**SLIKA 6.**
Povezava med krožnicama s polmeroma $a$ in $b$ ter elipso

V točki $T_c$ na krožnici in v točki $T_e$ na elipsi narišimo tangenti (z ukazom iz GeoGebre).

Enačba tangente na krožnico v točki $T_c(x_c, y_c)$ je

- $y = kx + n = -\dfrac{x_c}{y_c}x + n.$

Upoštevali smo, da je smerni koeficient enak tangensu naklonskega kota, izračunamo ga iz trikotnika $KOT_c$.

Enačbe tangente na elipso v točki $T_e$ dobimo iz enačbe tangente na krožnico v točki $T_c$ tako, da vse $y$ pomnožimo z $a/b$:

- $\dfrac{a}{b}y = -\dfrac{x_e}{\frac{a}{b}y_e}x + n_1, \qquad k_{et} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_e}{y_e}.$

Za razlago nastanka sveče potrebujemo smerne koeficiente normal na elipso. Ker vemo, kako sta povezana smerna koeficienta tangente in normale, izračunamo smerni koeficient normale v točki $T_e$ kot

- $$k_{en} = -\frac{1}{k_{et}} = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_e}{x_e} = \frac{a^2}{b^2}\frac{b\sin t}{a\cos t} = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t \qquad (1)$$
  $$\Rightarrow k_1 = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t_1, \qquad k_2 = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t_2,$$

kjer smo s $k_1$ in $k_2$ označili smerna koeficienta sosednjih normal.

Za naklonska kota sosednjih normal (slika 7) velja:

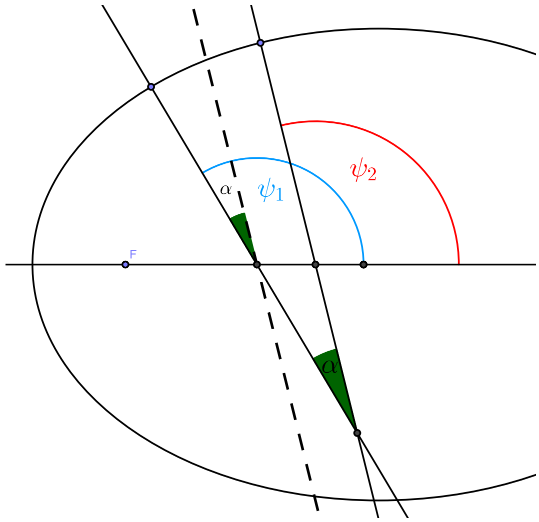
- $$\psi_2 = \psi_1 - \alpha$$
  $$\operatorname{tg}\psi_2 = \operatorname{tg}(\psi_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\alpha}$$
  $$\Rightarrow k_2 = \frac{k_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + k_1 \operatorname{tg}\alpha}.$$

Pri tem smo upoštevali, da so tangensi naklonskih kotov normal smerni koeficienti normal na elipso. Smerne koeficiente normal na elipso pa smo že izrazili v (1). Torej lahko zapišemo:

- $$\operatorname{tg} t_2 = \frac{\frac{a}{b}\operatorname{tg} t_1 - \operatorname{tg}\alpha}{\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg} t_1 \operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Od tu dalje pa zopet delamo z GeoGebro. Polosi $a$ in $b$ izmerimo in izračunamo (ustrezne ukaze vpišemo v vnosno vrstico) ,

- $m = \dfrac{a}{b}, \qquad p = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(5^\circ) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{180}\right).$




**SLIKA 7.**
Dve sosednji normali z naklonskima kotoma $\psi_1$ in $\psi_2$ se sekata pod kotom $\alpha$.

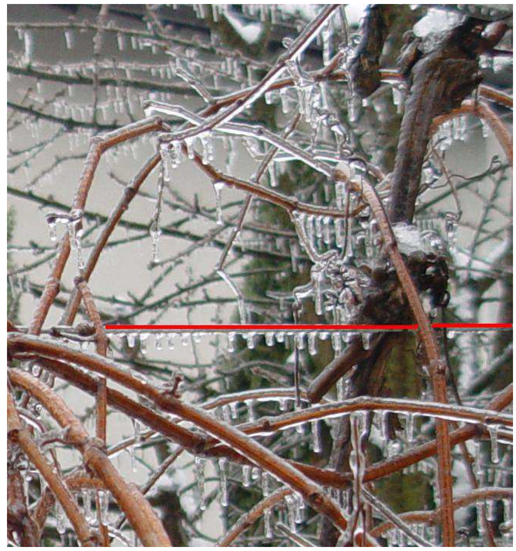
Prva normala je vodoravna, zato je $\operatorname{tg} t_1 = 0$. Izračunamo $\operatorname{tg} t_2$. Računanje ponavljamo tako, da izračunani $\operatorname{tg} t_2$ vstavimo namesto $\operatorname{tg} t_1$ in izračunamo novi $\operatorname{tg} t_2$ in tako naprej. GeoGebra pozna ukaz *SeznamPonavljanj*, s katerim dosežemo, da program ponavlja računanje in zapisuje vse vmesne rezultate.

V vnosno vrstico zapišemo enačba (2) v obliki

- $f(x) = (m \cdot x - p)/(m + m^2 \cdot p \cdot x)$,

pri tem smo namesto $\operatorname{tg} t_1$ pisali $x$ in namesto $\operatorname{tg} t_2$, ki je funkcija $\operatorname{tg} t_1$, ustrezno $f(x)$. V vnosno vrstico zapišemo *SeznamPonavljanj[f(x),0,14]*, kjer 0 pomeni vrednost prvega $\operatorname{tg} t_1$ in 14, da računanje ponovimo 14-krat (dobimo 15 normal). Izračunane vrednosti se pojavijo v algebrskem oknu pod *seznam1*. Potrebujemo še točke na elipsi, za katere smo izračunali smerne koeficiente normal. V GeoGebri odpremo tabelo in v prvi stolpec prepišemo izračunane tangense tako, da v vnosno vrstico napišemo ukaz *ZapolniStolpec[1,seznam1]*. Izračunamo še koordinate točk, pri čemer kotni funkciji sinus in kosinus zapišemo s tangensi in pazimo na ustrezne predznake kotnih funkcij:

- $x_e = a\cos t = \dfrac{-a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}, \quad y_e = \dfrac{-b\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}.$



**SLIKA 8.**
Žled na vinski trti. Na žici, ki smo jo označili z rdečo črto, so vidne navpične sveče, saj se žica ni upogibala.

**SLIKA 9.**
Žled na šipku

Predznak minus pri ordinatah točk sta zato, ker je na intervalu $(\pi/2, \pi)$ tangens kota negativen, sinus kota pozitiven, cosinus kota pa negativen.

V drugi stolpec bomo pisali absice točk, v tretjega pa ordinate iskanih točk. V tabeli kliknemo na prvo celico drugega stolpca, kliknemo na gumb $f_x$ in v vnosno vrstico v tabeli vpišemo

- $= -a/(1 + A1^2)^{0.5}$.

SLIKA 10.
Žled na viticah vinske trte in sveče z izboklinami

Označimo prvo celico drugega stolpca in potegnemo desni spodnji vogal do konca seznama. Na ta način smo izračunali abscise točk, ordinate točk pa izračunamo na enak način, le da označimo prvo celico tretjega stolpca in v vnosno vrstico v tabeli vpišemo

- $= -b \cdot A1/(1 + A1^2)^{0.5}$.

Označimo oba stolpca (zajamemo le tiste vrstice, kjer so koordinate), pritisnemo desni klik na miški, izberemo *Izdelaj* in nato *SeznamTočk*. V algebrskem oknu se pojavi seznam točk *seznam2*, ki jih program tudi označi na elipsi. Normale na elipso so simetrale kota $\sphericalangle F_1AF_2$, pri tem sta $F_1$ in $F_2$ gorišči elipse, $A$ pa točka na elipsi, v kateri rišemo normalo. Z GeoGebro narišemo normale skozi izračunane točke. Na koncu še skrijemo nepotrebne oznake, krivulje in premice ter imamo končno sliko 4.

Sveče, ki smo jih opazovali ob pojavu žleda, so bile različnih oblik. Nekaj jih je na slikah 8, 9 in 10. Njihova oblika je v veliki meri odvisna od prožnosti vej oz. žic, na katerih nastajajo. Če se žica ali veja le malo upogneta, raste sveča navpično. Če je veja že upognjena in ni prožna, jo žled ovije. Če je temperatura čez dan nekaj časa nad ničlo in ponoči pade pod ničlo, pa se lahko na svečah pojavijo »izbokline«.

Opazovali smo naravni pojav, ga fotografirali in ga skušali tudi matematično opisati. Pri tem smo si pomagali z lastnostmi elipse in krožnice, ki smo jih ilustrirali z računalniškim programom GeoGebra.

× × ×

# Razmisli in poskusi

MITJA ROSINA

## 56. Bosi na vročem pesku

Zagotovo radi tekate bosi po peščeni plaži, kamnitih ploščadih ali celo po asfaltu. Na svetlem pesku je prijetno, na temni mivki pa zelo vroče. Še huje je na temnem asfaltu, ki se v vročini celo tali.

RAZMISLEK. Najvišjo temperaturo doseže idealna črna ploskev, na katero sije sonce pravokotno. Od zadaj naj bo dobro toplotno izolirana, od spredaj pa naj oddaja toploto samo s sevanjem (recimo, da ni vetra in da je tanka plast zraka že enako topla). Od sonca dobi gostoto energijskega toka kvečjemu $j = 1{,}4\ \mathrm{kW/m^2}$, ki jo seva po Štefanovem zakonu

- $j = \sigma T^4$.

Pri tem je $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ Stefanova konstanta. Temu ustreza temperatura $T = 396\ \mathrm{K} = 123\ °\mathrm{C}$. (Izračunaj jo še sam.). To je skrajna idealizacija, v resnici pobere precej energije ozračje, zlasti če ni čisto, plošča ali pesek pa nista čisto črna in absorbirata le del svetlobe. Črna streha ali temen asfalt se maksimalni temperaturi lahko približata, na kakih 70 °C, svetla mivka pa je hladnejša.

NALOGA. Oceni temperaturo različnih tal ob različnih pogojih. Svojo oceno preveri s primernim termometrom.

× × ×