PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 5
Strani 258–260, XVIII, 320

Boris Lavrič:

S PLOŠČINO DO TALESOVIH IZREKOV O SORAZMERJIH

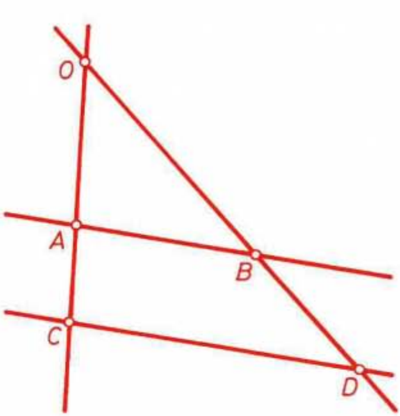
Ključne besede: matematika, geometrija, sorazmerje, Talesov izrek.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/909-Lavric.pdf

MATEMATIKA

S PLOŠČINO DO TALESOVIH IZREKOV O SORAZMERJIH

Presekajmo poltraka s skupnim izhodiščem O z dvema vzporednicama. Ena naj ju seče v točkah A in B, druga pa v C in D, kot kaže slika 1.



Gotovo veste, da potem veljata enakosti:

$$\frac{d(O,A)}{d(O,C)} = \frac{d(O,B)}{d(O,D)}$$

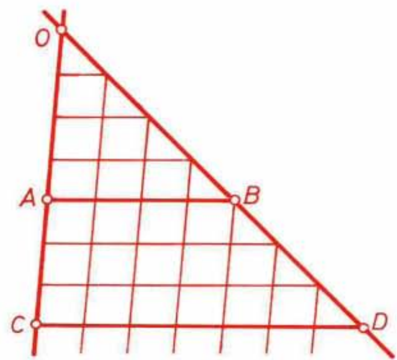
in

$$\frac{d(O,A)}{d(O,C)} = \frac{d(A,B)}{d(C,D)}$$

Ugotovitvi sta znani pod imenom *Talesova*★ izreka o sorazmerjih. Ste že kdaj podvomili o pravilnosti te trditve? Najbrž ne, saj jo še po dveh tisočletjih in pol uče v šolah. Toda takšni razlogi nas ne smejo zavesti. Kar poglejte, koliko časa je "bila" Zemlja ravna plošča – pa so se našli dvomljivci (menda je bil prav Tales med prvimi), ki so utemeljevali, da je okrogla★★. In kdo je imel prav?

Toda, kako uvideti, da se Tales tudi v svojih dveh izrekih ni motil? Podkrepiti ju bo treba z razlago, kar je storil tudi on sam. Če naj razlagi verjamemo, smemo v njej uporabljati le dejstva, ki se nam zde bolj očitna. V našem primeru se bomo, kot je že v navadi zanj, oprli na izrek o skladnosti trikotnikov.

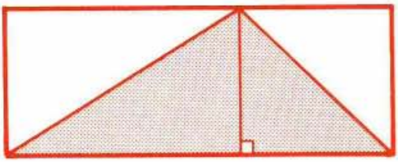
Denimo, da sta daljici OA in OC soizmerljivi – torej, da obstaja takšna daljica, npr. OE, da sta dolžini $d(O, A)$ in $d(O, C)$ obe cela večkratnika dolžine $d(O, E)$. Potem nam že



slika 2 dokazuje Talesova izreka za ta primer – le skladnost malih trikotnikov je treba poznati, pa gre (glej *I. Pucelj – I. Štalec,* Geometrija za II.

razred gimnazije). Če OA in OC nista soizmerljivi, je izrek mogoče dokazovati na podoben način, a ni prav preprosto. – Poskusite!

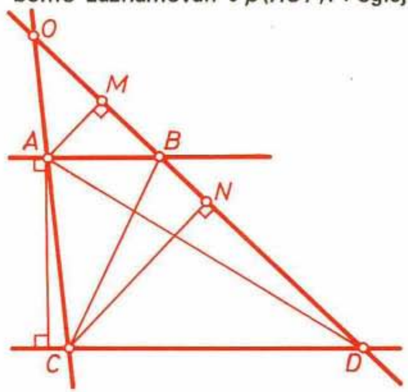
Zato se bomo ognili takemu načinu in težave, na katere bi naleteli, skrili v naslednji privzetek: pravokotnik, katerega stranici merita a in b, ima ploščino ab (upam, da mu verjamete). Izrek o skladnosti trikotnikov uporabimo zgolj za potrditev formule za ploščino trikotnika. Dovolj o tem



pove slika 3 (pravokotnik zgradimo nad stranico, ob kateri sta ostra kota). Od tod takoj dobimo naslednje tri ugotovitve.

1. Trikotnika z enako dolgo stranico in enakima višinama nanju imata enaki ploščini.
2. Kvocient ploščin dveh trikotnikot z enako dolgima višinama je enak kvocientu nanju pravokotnih stranic.
3. Kvocient ploščin dveh trikotnikov z enako dolgima stranicama je enak kvocientu ustreznih višin.

Uporabimo jih, še prej pa se dogovorimo za naslednjo oznako. Ploščino poljubnega trikotnika RST bomo zaznamovali s $p(RST)$. Poglej-



mo zdaj sliko 4. Prva ugotovitev nam da enakost $p(ACB) = p(ADB)$, odkoder vidimo, da velja tudi

$$p(OCB) = p(OAD) \tag{1}$$

S pomočjo druge ugotovitve najdemo

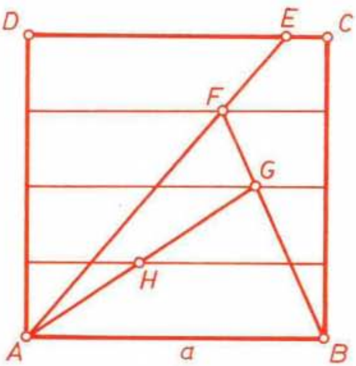
$$\frac{d(O,A)}{d(O,C)} = \frac{p(OAB)}{p(OCB)}, \quad \frac{d(O,B)}{d(O,D)} = \frac{p(OAB)}{p(OAD)}, \quad \frac{d(A,B)}{d(C,D)} = \frac{p(ADB)}{p(CDB)} \tag{2}$$

tretja pa pove, da je

$$\frac{p(OAB)}{p(OCB)} = \frac{d(A,M)}{d(C,N)} = \frac{p(ADB)}{p(CDB)} \tag{3}$$

Upoštevajmo (1) in s primerjavo prvih dveh enakosti v (2) že dobimo prvi Talesov izrek: $d(O,A) : d(O,C) = d(O,B) : d(O,D)$. Če pa pričnemo s prvo enakostjo v (2) in preidemo po mostu (3) na zadnjo enakost v (2), je pred nami drugi Talesov izrek: $d(O, A) : d(O, C) = d(A, B) : d(C, D)$. Dokaz je končan, sestavek pa naj sklenejo naloge.

1. Točka E na stranici CD kvadrata $ABCD$ s stranico a = 15 cm je od oglišča C oddaljena 1 cm. Kvadrat s tremi premicami, vzporednimi osnovnici AB, razdelimo na štiri skladne pravokotnike. Nato na njih določimo



točke F, G in H, kot kaže slika 5 (EA, FB in GA so daljice). Poišči oddaljenost točke H od stranice AD.

2. Enakokrakemu trikotniku ABC z osnovnico AB je očrtan krog s polmerom 5. Kraka AC in BC razdelita premer kroga, ki je vzporeden AB, na tri enake dele. Koliko meri osnovnica AB?

3. Na stranicah AB in BC kvadrata $ABCD$ ležita točki E in F tako, da velja $d(A, E) : d(E, B) = d(C, F) : d(F, B) = 1 : 4$. Daljica DE naj seka diagonalo AC v točki G, DF pa v točki H. Kolikšen del kvadrata pokriva trikotnik GHD?

4. V trapezu je ena od osnovnic trikrat daljša kot druga. Z daljico, ki gre skozi sečišče diagonal in je vzporedna osnovnicama, ga razdelimo na dva dela. Ploščina večjega meri 54. Kolikšna je ploščina manjšega dela?

5. Premica ploščinsko razpolavlja trikotnik ABC in seka stranico AC v točki D, stranico BC v točki E, poltrak AB pa v točki F. Določi lego točk D in E, če veš, da sta ploščini trikotnikov CDE in BFE enaki.

Na strani 320 najdete tudi namige za reševanje teh nalog in odgovore.

Boris Lavrič

★ *Tales* iz Mileta (7.– 6. stol. pred našim štetjem) – eden izmed sedmih legendarnih grških modrijanov, utemeljitelj evropske filozofije (miletska šola) in oče grške geometrije. Vnaprej je izračunal sončni mrk za leto 585 pred n.š.

★★ V šestem razredu osnovne šole so nas učili, da Zemlja ni niti okrogla niti elipsoidne oblike, pač pa ima obliko geoida (?) (grško: *ge* – zemlja, *eides* – oblika).

Slika na II strani ovitka

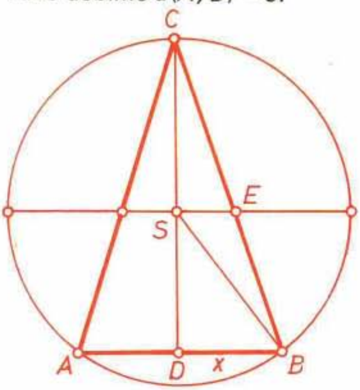
Risba je iz pomembne knjige o rudarski tehnologiji iz leta 1530. V njej avtor Agricola povezuje teorijo in prakso. Tako na primer razloži, kako bi z izmeritvijo dostopnih podatkov (glej sliko) lahko s pomočjo Talesovih izrekov določili bodisi globino jaška ali dolžino vodoravnega rova, ki naj bi ju izkopali tako, da se združita.

NAMIGI IN ODGOVORI

k nalogam s str. 261

1. Z uporabo Talesovega izreka zaporedoma izračunamo oddaljenost točk F, G in H od stranice AD. Slednja meri 6 cm.

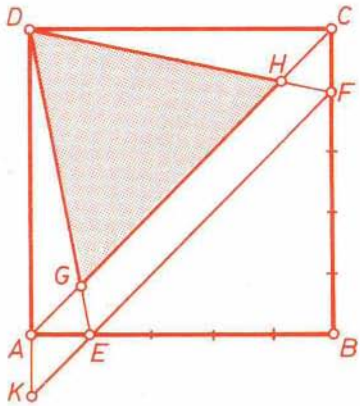
2. Poglejmo sliko in ugotovimo, da je $d(S, E) = 5/3$. Postavimo $x = d(D, B)$, s Talesovim izrekom določimo $d(S, D) = 3x - 5$ in zapišemo Pitagorov izrek za trikotnik DBS. Tako dobimo $d(A, B) = 6$.



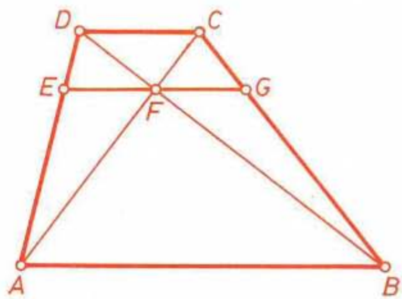
3. Poglejmo sliko in ugotovimo:

$$\frac{d(A, G)}{d(G, H)} = \frac{d(K, E)}{d(E, F)} = \frac{d(A, E)}{d(E, B)}$$

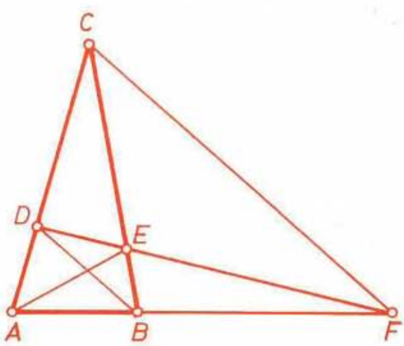
Odgovor: Tretjino.



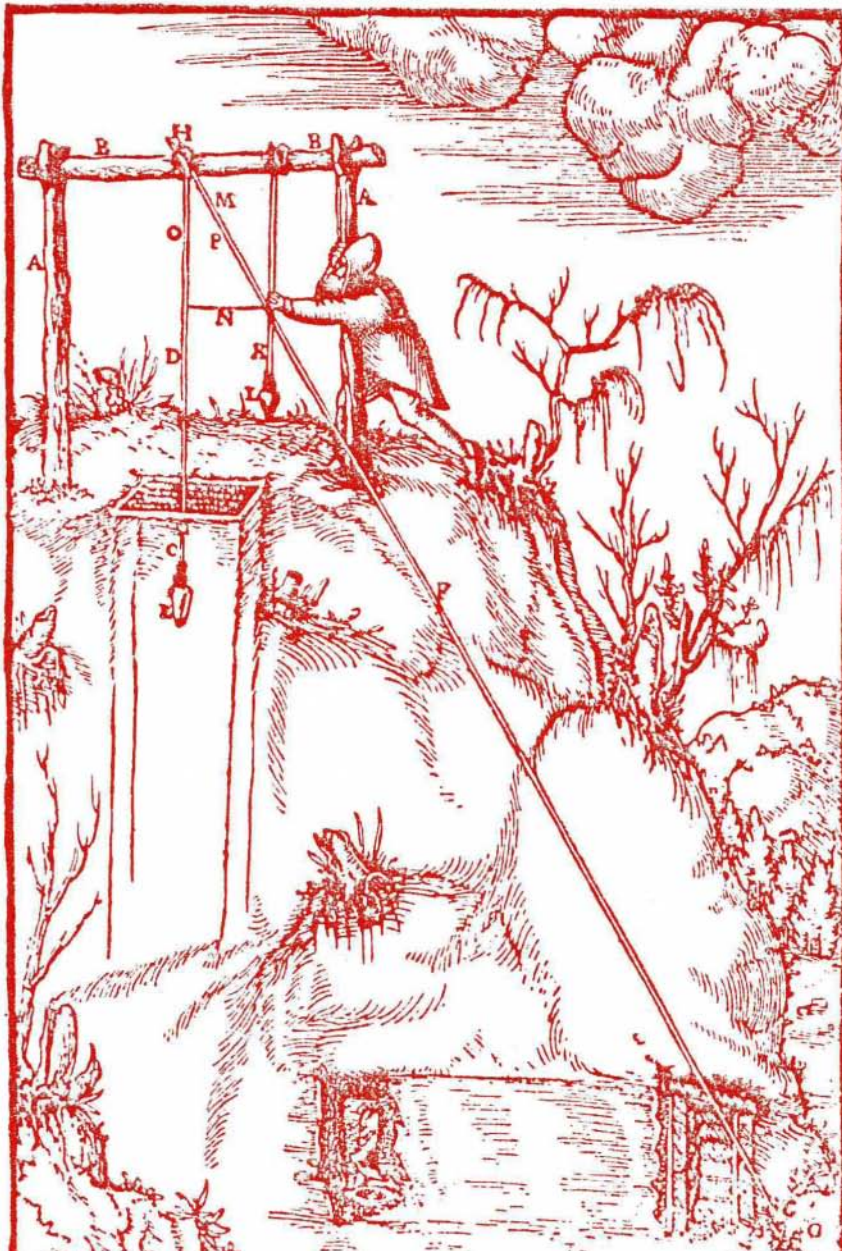
4. S pomočjo Talesovih izrekov izrazimo $d(E, F)$ z $d(A, B)$ in izračunamo razmerje med višinama trapezov $ABGE$ ter $EGCD$. Nato določimo razmerje med njunima ploščinama. Odgovor: 10.



5. Iz enakosti $p(CDE) = p(BFE)$ dobimo $CF \parallel DB$ in potem še $p(ABE) = p(AED)$. Nato upoštevamo, da DE razpolavlja ABC.
Odgovor: $d(A, D) : d(D, C) = 1 : 2$, $d(B, E) : d(E, C) = 1 : 3$.



Boris Lavrič


E
H
B
A
M
O
P
A
N
D
K
L
C
F
C
O