MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

4

PRESEK LETNIK 42 (2014/2015) ŠTEVILKA **4**

PRESEK

→ ŠIROKOKOTNI OBJEKTIVI IN DEFORMACIJE TELES

→ POČASNA CELIČNA KONVEKCIJA, 2. DEL

→ DELNI SONČEV MRK, 20. MAREC 2015

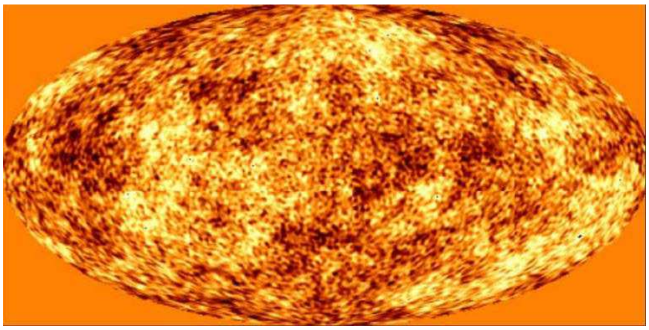
→ ALGORITEM ZA REŠEVANJE RUBIKOVE KOCKE

ISSN 0351-6652

9 770351 665241

MATEMATIČNI TRENUTKI

Vrnitev na začetek



V nasprotju z večino ljudi, ki so praviloma usmerjeni naprej, veliko fizikov računa za nazaj; tako bi želeli doumeti, kako se je razvilo vesolje. Ker od takrat nimamo prič, je še najboljša metoda reševanje enačb iz splošne relativnosti in kvantne mehanike v nasprotni smeri, kot teče čas. S pomočjo matematičnih modelov in numeričnih metod so znanstveniki iz teh enačb rekonstruirali, kaj se je zgodilo pred več milijardami let. Dokler pa nam ne bo uspelo združiti teorij splošne relativnosti in kvantne mehanike, ne bomo vedeli, kaj se je zgodilo v prvih trenutkih nastanka vesolja.

Splošna relativnost, ki opisuje gravitacijo, in kvantna mehanika, ki opisuje obnašanje zelo majhnih delcev, si trenutno nasprotujeta; različne teorije ju skušajo uskladiti. Ena od teh teorij je teorija strun, ki predvideva, da je vesolje sestavljeno iz enajstih dimenzij. Pomemben del teorije izhaja iz kompleksne analize in iz teorije modularnih form. V pravilnost teorije strun verjetno še zelo dolgo ne bomo prepričani; potrditi pa jo bo potrebno bodisi na Zemlji s še hitrejšimi pospeševalniki bodisi svetlobna leta stran z ogromnimi črnimi luknjami bodisi s pomočjo odmevov prvih trenutkov velikega poka.

Za več informacij si lahko preberete članek The Black Hole at the Beginning of Time, ki so ga napisali N. Afshordi, R. B. Mann in R. Pourhasan v reviji *Scientific American* avgusta 2014.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 42, šolsko leto 2014/2015, številka 4

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2014/2015 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

2 Vrnitev na začetek

MATEMATIKA

4–8 Širokokotni objektivi in deformacije teles *(Peter Legiša)*

9–12 Kitajske naloge *(Marjan Jerman)*

FIZIKA

13–19 Počasna celična konvekcija, 2. del – Razlaga pojavov v posodici s tekočim milom *(Jože Rakovec)*

ASTRONOMIJA

20–22 Delni Sončev mrk – 20. marec 2015 *(Andrej Guštin)*

RAČUNALNIŠTVO

23–29 Algoritem za reševanje Rubikove kocke *(Natalija Špur)*

RAZVEDRILO

8 Barvni sudoku

12, 22, 29 Križne vsote

16–17 Nagradna križanka *(Marko Bokalič)*

30 Rešitev nagradne križanke Presek 42/3 *(Marko Bokalič)*

31 Naravoslovna fotografija – Nevidna senca *(Aleš Mohorič)*

TEKMOVANJA

priloga 50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – področno tekmovanje

priloga 50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

priloga 34. tekmovanje iz fizike za bronasto Stefanovo priznanje – šolsko tekmovanje

priloga 34. tekmovanje iz fizike za srebrno Stefanovo priznanje – regijsko tekmovanje

Slika na naslovnici: Širokokotni objektivi deformirajo tri-razsežne objekte na robu vidnega polja. Avtor članka (str. 4–8) je na levi v sredini slike, na desni na skrajnem desnem robu. Fotoaparat je bil na obeh slikah v istem položaju. Dvo-razsežni vzorec na zidu se ni deformiral.

Širokokotni objektivi in deformacije teles

Peter Legiša

→ **Ko je moja prateta praznovala stoletnico, so sorodniki priredili slovesnost z velikim številom povabljenih. Na koncu je bilo treba seveda narediti »gasilsko« sliko ob vhodu na borjač, saj je bilo znotraj ograjenega dvorišča premalo prostora. Tudi zunaj borjača se v kraški vasi fotografi nismo mogli kaj dosti odmakniti od množice. Ljubiteljski fotografi navadno nimamo dovolj avtoritete, da bi lahko optimalno razporedili ljudi. Tako so se prisotni razporedili nekoliko po svoje. S širokokotnim objektivom jih ni bilo težko zajeti, a ob pregledu na računalniku se je pokazala težava. Dve osebi, ki sta se postavili povsem zase na robu slike, sta bili grdo raztegnjeni v vodoravni smeri, tako da nad sliko ne bi bili ravno navdušeni. Stavbe v ozadju pa so bile upodobljene praktično brezhibno – okna tudi na robu niso bila raztegnjena.**

V resnici sem čudne deformacije oseb na robu vidnega polja širokokotnega objektiva srečal že prej, a temu nisem posvečal pozornosti. Literatura ([1], str. 220–221) in zapisi na internetu [2] povedo, da je problem v tem, da ljudje nismo ploščati. Podobno ali še bolj bi se na robu raztegnile slike, denimo, navpičnih stebrov. Privzemimo, da je naša kamera vodoravno poravnana. Na sliki 1 si lahko ogledamo, kako objektiv v horizontalni ravnini skozi središče O objektiva »vidi« steber v obliki valja s polmerom r, katerega os stoji v ravnini Φ. Ta navpična ravnina je vzporedna ravnini senzorja aparata in oddaljena za a od optičnega središča O objektiva. Na sliki 1 se ta ravnina projicira v premico skozi M in točko S, ki leži v osi stebra. Sam steber je na sliki 1 viden kot krožnica s središčem S in s polmerom r. Objektiv vidi in upodobi steber kot navpični pas (v ravnini Φ), ki sega od točke A do točke B. Že $|AS|$ je večji od r, še toliko bolj pa $|SB|$. To je pač ta neprijetni učinek, ki ga imenujejo tudi *deformacija teles* (angleško *volume deformation*). Izračunajmo razdaljo $|AB|$ in jo primerjajmo z $2r$.

Na sliki 1 smo s φ označili kot $\angle SOM$ in z 2ω kot, pod katerim vidimo vodoravni prerez stebra iz točke O.

V nadaljevanju nam bosta prišli prav dve približni formuli. Trdimo, da je za število h, ki je blizu 0,

$$\frac{1}{1-h} \approx 1+h. \tag{1}$$

Res, $(1-h)(1+h) = 1-h^2 \approx 1$. Če je namreč h blizu 0, je $h^2 = hh$ še toliko bližje 0. Fiziki bi rekli, da je h^2 zanemarljiv (v primerjavi s h). Npr., če je $h = 0{,}1$, je $h^2 = 0{,}01$. Manjša je razdalja števila h od 0, bolj točna je ta približna enakost. Vsekakor približna formula daje malenkost premajhne rezultate, saj produkt ni ena, ampak nekaj manj, npr. $1 : 0{,}98 \approx 1{,}02$. Točni rezultat je 1,0204...

Podobno vidimo, da je za h blizu 0:

$$\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{h}{2}. \tag{2}$$

Res,

$$\left(1+\frac{h}{2}\right)^2 = 1+h+\frac{h^2}{4} \approx 1+h. \tag{3}$$

Vidimo, da približna formula (2) daje malce prevelik rezultat, saj je v (3) leva stran natančno koren srednjega izraza, ta izraz pa je nekoliko večji od $1+h$, npr. $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015$. Točni rezultat je 1,014889...

Če še ne poznate kotnih funkcij sinus, kosinus, tangens, lahko večino naslednjih formul preskočite in vsaj nekatere številske rezultate preverite s kotomerom in ravnilom.

Iz pravokotnega trikotnika OMS na sliki 1 vidimo, da je $|OS|\cos\varphi = a$, iz pravokotnega trikotnika OT_1S pa, da je $|OS|\sin\omega = r$. Od tod je

$$\sin\omega = \frac{r}{a}\cos\varphi, \quad \cos\omega = \sqrt{1-\sin^2\omega}.$$

Označimo

$$q = \frac{r^2}{a^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad \text{in} \quad y = \cos^2\varphi,$$

pa je

$$\cos\omega = \sqrt{1-qy}. \tag{4}$$

Seveda je $0 \le y < 1$. Privzeli bomo tudi, da je $r < a$, torej $0 < q < 1$.

Velja, da je $\angle AST_1 = \varphi - \omega$ in $|AS|\cos(\varphi-\omega) = r$ in podobno $\angle BST_2 = \varphi + \omega$, zato $|BS|\cos(\varphi+\omega) = r$. Tako je

$$|AB| = \frac{r}{\cos(\varphi-\omega)} + \frac{r}{\cos(\varphi+\omega)}.$$

Če je ω majhen v primerjavi s φ, je torej

$$|AB| \approx \frac{2r}{\cos\varphi}.$$

Če je φ blizu 0, je $\cos\varphi$ blizu 1 in je razteg majhen. Za $\varphi = 45^\circ$ je $1/\cos\varphi = \sqrt{2}$ in se na sliki steber raztegne za več kot 40 odstotkov v primerjavi z ozadjem.

Veliki senzor »full frame« fotoaparata – ti so zdaj postali cenovno dostopni tudi navdušenim amaterjem – meri približno toliko kot nekdaj sličica na 35 milimetrskem filmu, se pravi približno $u = 36$ mm $\times$ $v = 24$ mm. Za objektiv z goriščno razdaljo $|ON| = f = 16$ mm lahko maksimalni φ določimo s slike 2: $\operatorname{tg}\varphi = (u/2) : f = u/2f = |UN|/|NO| = 18 : 16$, od tod $\varphi = \operatorname{arctg}(9/8) \approx 48^\circ$. Iz

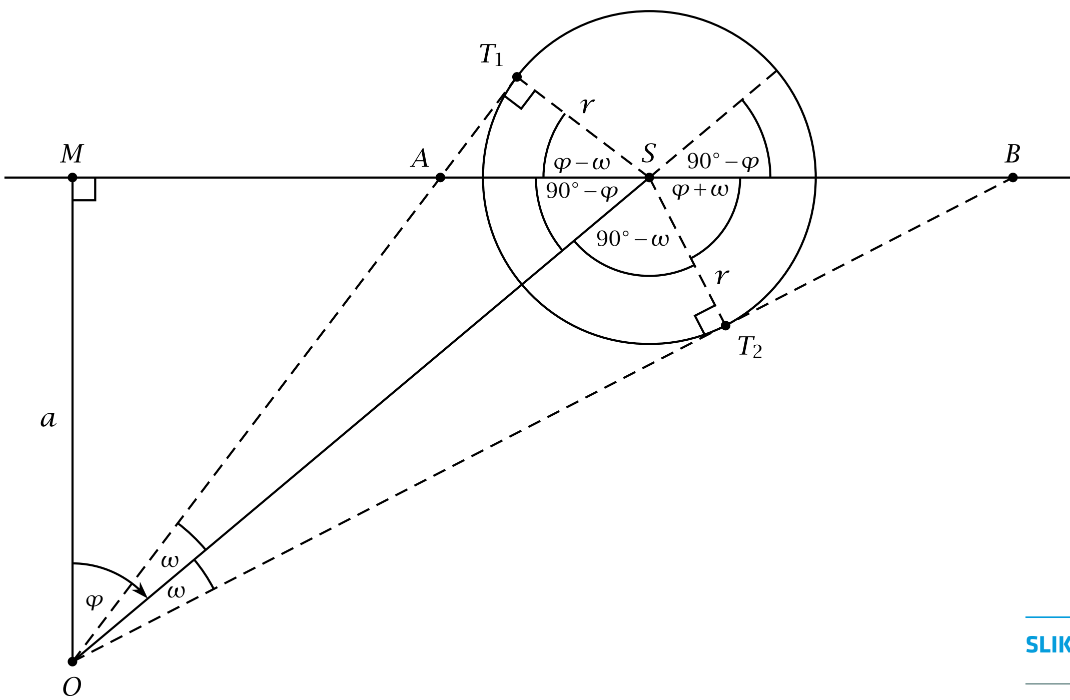
$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{81}{64} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

je

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{145}}{8} \approx \frac{12}{8} = 1{,}50.$$

(Mimogrede, z (2) lahko brez računala izračunamo $\sqrt{145}$ precej natančno:

$$\sqrt{145} = \sqrt{12^2+1} = 12\sqrt{1+\frac{1}{12^2}}$$
$$\approx 12\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12^2}\right) = 12 + \frac{1}{24} \approx 12{,}04.$$



SLIKA 1.

Za naše namene taka natančnost seveda ni potrebna.)

Deformacije valjev na robu so res hude – razteg v vodoravni smeri za kakih 50 odstotkov. Po drugi strani lahko s takim objektivom iz vogala sobe zajamemo celoten prostor: 48 stopinj desno in 48 stopinj levo, skupaj 96 stopinj v vodoravni smeri.

Za profesionalce obstajajo dragi fiksni in tudi zoom objektivi s še nekoliko manjšo goriščno razdaljo. Za zrcalno refleksne aparate znamk Canon, Nikon z velikim senzorjem je minimum pri originalnih objektivih trenutno 14 mm in temu odgovarja kot vodoravnega zajema $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(9/7) \approx 52°$ desno od osi aparata (in ravno toliko levo). Tu moramo računati s še večjimi deformacijami prostorskih objektov – za vajo faktor raztega na robu izračunajte sami. (Mimogrede, krožijo govorice, da se bo pojavil objektiv z minimalno goriščno razdaljo 11 mm!) Ti objektivi, še posebno tisti s fiksno goriščno razdaljo, pa vseeno ravne črte upodobijo bolj ali manj kot ravne črte. Ne smemo jih mešati z objektivi tipa *ribje oko*, ki močno ukrivijo ravne črte ob robu, da bi na sliko spravili, kar se da veliko območje.

Na koncu izračunajmo še razteg za »normalni« objektiv, ki ima (pri senzorju velikosti 36×24 mm) goriščno razdaljo $f = 50$ mm. Tu za maksimalni φ velja $\operatorname{tg}\varphi = 18 : 50 = 0{,}36$ in $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1{,}1296$, od tod po (2)

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1{,}1296} \approx 1{,}06.$$

Povsem zanemarljiv tudi ta razteg na robu ni.

Opozarjam, da *vidni kot* fotografskega objektiva sicer navadno merimo na diagonali slike, se pravi, vzamemo kot, pod katerim objektiv gleda v ravnini skozi diagonalo tipala. Ta za senzor velikosti 24×36 mm meri $d = \sqrt{24^2 + 36^2}$ mm ≈ 43 mm. Vidni kot je enak $\alpha = 2\operatorname{arctg}(d/2f)$. Tako je vidni kot za 14 milimetrski objektiv enak približno 114°. V vodoravni smeri, ki je v praksi pomembnejša, ta objektiv vidi »le« 104 stopinje, kar pa vseeno zagotavlja precej nenavadno perspektivo.

Sam premorem star širokokotni zoom objektiv, ki ima deklarirano najmanjšo goriščno razdaljo 20 mm. Za maksimalni φ je $\operatorname{tg}\varphi = 18 : 20 = 0{,}9$. Torej je $1/\cos\varphi = \sqrt{1{,}81} \approx 1{,}35$. S tem objektivom sta bili posneti tudi fotografiji v članku: obe z istega mesta, ob nespremenjeni legi aparata. Na slikah in obeh izrezih razen popravkov osvetlitve niso bile narejene nikakršne spremembe. Kot lahko preverite, se na robu opeke v zidu niso raztegnile, oseba (moja malenkost) pa kar opazno, še posebej glava.

Za bolj zahtevne bralce izračunajmo zdaj razteg natančno:

$$\begin{aligned}|AB| &= \frac{r}{\cos(\varphi - \omega)} + \frac{r}{\cos(\varphi + \omega)} \\ &= r\,\frac{\cos(\varphi + \omega) + \cos(\varphi - \omega)}{\cos(\varphi + \omega)\cos(\varphi - \omega)}.\end{aligned}$$

Z znanimi formulami za pretvorbo vsote v produkt in obratno vidimo, da je števec enak $2r\cos\varphi\cos\omega$, imenovalec pa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\cos(2\varphi) + \cos(2\omega)) = \\ &\quad = \frac{1}{2}(2\cos^2\varphi - 1 + 1 - 2\sin^2\omega) \\ &\quad = \cos^2\varphi - \sin^2\omega.\end{aligned}$$

Upoštevajmo izračun za $\cos\omega$ (4), pa je

- $|AB| = \dfrac{2r\cos\omega}{\cos\varphi(1-q)} = \dfrac{2r}{\cos\varphi}P,$

kjer je

- $P = \dfrac{\sqrt{1-qy}}{1-q},$

kjer smo označili $y = \cos^2\varphi$ in $q = \frac{r^2}{a^2}$.

Lahko zapišemo

- $P = \dfrac{1}{\sqrt{1-q}}\sqrt{\dfrac{1-qy}{1-q}}.$

Prvi količnik je večji od ena in v velikem korenu je števec večji od imenovalca (zakaj?). Torej je $P > 1$.

Če je q blizu 0, je po naših približnih formulah P blizu 1:

- $$P \approx \left(1-\frac{1}{2}qy\right)(1+q) = 1+q-\frac{1}{2}qy-\frac{1}{2}q^2y \approx 1+q-\frac{1}{2}qy = 1+q\left(1-\frac{1}{2}y\right).$$

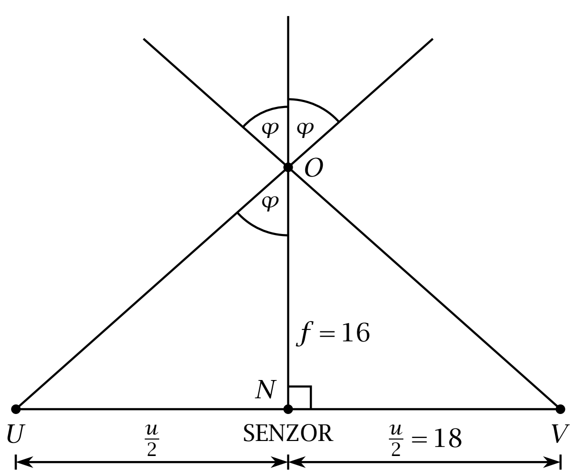
Tudi sicer se v praksi faktor P ne bo kaj dosti razlikoval od 1. Privzeli smo, da je $q < 1$. Izraz P bo največji, ko bo P^2 največji. Fiksirajmo q. Iz

- $$P^2 = \frac{1-q+q-qy}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q}+\frac{q}{(1-q)^2}(1-y) = \frac{1}{1-q}+\frac{q}{(1-q)^2}\sin^2\varphi$$

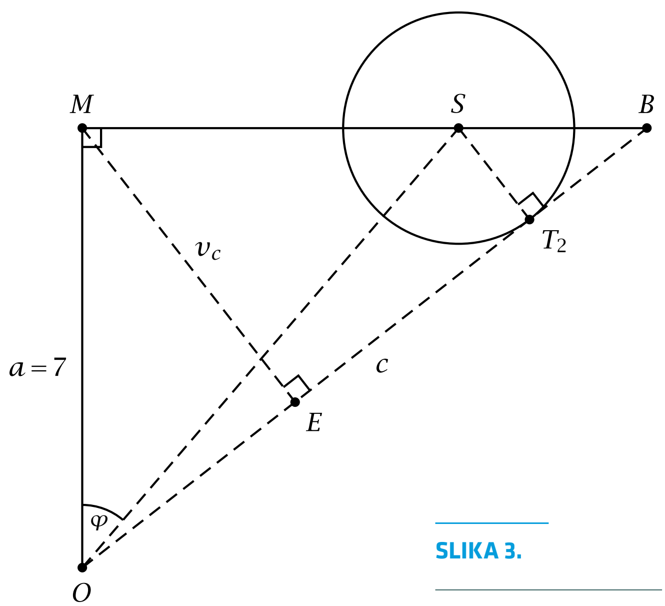
vidimo, da bo pri danem q izraz P največji, ko bo φ največji, saj funkcija sinus strogo narašča na intervalu $[0, 90°]$. Največje P torej lahko pričakujemo pri maksimalnem φ. To tudi pomeni pri minimalni goriščni razdalji. Fiksirajmo zdaj y, torej fiksirajmo φ. Iz

- $$P^2 = \frac{y-qy+1-y}{(1-q)^2} = \frac{y}{1-q}+\frac{1-y}{(1-q)^2}$$

vidimo, da bo P maksimalen, ko bo q maksimalen. (No, stvari so v resnici bolj zapletene, saj pri dani goriščni razdalji z večanjem kvocienta $q = \frac{r^2}{a^2}$ zmanjšujemo največji mogoči φ – slika 3.) Vzemimo torej 14 mm objektiv na velikem senzorju, tako da na sliki 3 velja $|OM| : |MB| = 14 : 18$. Naj bo recimo $a = |OM| = 7$, $|MB| = 9$. Narisali smo primer, ko je r in s tem q tako velik, da valj zavzame več kot četrtino slike. (Kaj več zame težko pride v poštev – širokokotni objektivi niso ravno primerni za slikanje posameznih oseb ali debelih teles. O tem kasneje. Poleg tega z večanjem spremenljivke r zmanjšujemo φ in s tem P. Rekli smo tudi, da nas zanimajo le razširitve teles na robu vidnega polja, kjer q ni prevelik.) Na sliki 3 je $|MB| = 9$, $|SB| = 3$. Od tod izračunamo $c = |OB| = \sqrt{130}$. Dve ploščini pravokotnega trikotnika OMB sta enaki $ab = cv_c$. Zato je $|EM| = v_c = 63/c$. Iz podobnih trikotnikov MEB in ST_2B izračunamo $r = |ST_2| \approx 1{,}8$. Iz $\operatorname{tg}\varphi = \frac{6}{7}$ dobimo $\cos^2\varphi = 49/85$ in končno $P \approx 1{,}05$.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

Sam težave z raztegnjenima osebama takrat nisem znal hitro odpraviti in sem ju zato enostavno odrezal. Pred kakim letom se je na trgu pojavila rešitev, ki pa ni ravno poceni. Razvil jo je francoski laboratorij, ki tudi sicer ponuja programe za izboljšave digitalno zajetih slik. Orodje popravi razteg oseb, a bolj ali manj popači ozadje – kar pa praktično ne moti. Kot smo videli, je razteg valja malce odvisen tudi od polmera in zato ustrezen popravek širšega valja malce preveč skrči ožje valje, tako da popolnih popravkov ni mogoče pričakovati. Demonstracijo si lahko ogledate na [2].

Ostane pa nenavadna perspektiva: zelo širokokotni objektivi bližnje predmete upodobijo nesorazmerno velike, oddaljene nesorazmerno majhne (za naš pogled, ki se bolj ali manj pokriva s pogledom »normalnega« objektiva). Tako je na slikah modela, ki sedi postrani, glava videti nekoliko premajhna glede na telo v ospredju. Širokokotni objektivi so neprimerni za portrete posameznih oseb! Če s takim objektivom, recimo, frontalno, z razdalje nekaj decimetrov, slikamo obraz, bo nos velikanski, ušesa minimalna in obraz povsem deformiran. Prav to pa se pogosto dogaja pri tako imenovanih »selfijih«, se pravi pri avtoportretih, pri katerih pametni telefon ali fotoaparat držimo v roki.

Kakorkoli že, če vam je videz pomemben, se na skupinski sliki postavite bolj v sredino. Ko sami fotografirate, se odmaknite od skupine. Kadar to ni mogoče, razporedite ljudi kot poklicni fotografi. Skrbno načrtovane kompozicije starih »gasilskih« slik, na katerih so nekateri sedeli, drugi stali in tretji ležali, so poskrbele, da skupina ni bila preširoka in da je tako fotoaparat zajel vse pod majhnim kotom. Nihče se ni mogel pritoževati, da se je na sliki nemarno razširil.

Literatura

[1] S. F. Ray, *Applied photographic optics*, Second ed., Focal Press, Oxford 1995.

[2] *Correcting volume deformation with DxO ViewPoint*, `http://www.dxo.com/intl/photography/tutorials/correcting-volume-deformation-dxo-viewpoint`, ogled: 8. 1. 2015.

× × ×

Barvni sudoku

V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

		8		3		5	
		4				6	
3		7	2				
	2		7				
	8	3			2		
				4		8	1
			1		6		7

REŠITEV BARVNI SUDOKU

7	3	6	5	8	1	2	4
2	1	8	4	3	7	5	6
1	5	4	8	7	3	6	2
3	6	7	2	5	4	1	8
5	2	1	7	6	8	4	3
4	8	3	6	1	2	7	5
6	7	2	3	4	5	8	1
8	4	5	1	2	6	3	7

× × ×

Kitajske naloge

MARJAN JERMAN

Zaradi geografske izoliranosti, večtisočletne samosvoje kulture in številčne populacije se je kitajska matematika zelo dolgo razvijala skoraj popolnoma neodvisno od drugih civilizacij.

Prve zametke matematike najdemo že v mitih, ki izvirajo iz predzgodovinskega obdobja. Najbolj znana je legenda o cesarju Yuju, ki se je ohranila tudi preko tradicije *feng shuija*. Cesar je z darovi želel pomiriti boga reke Lou, ki je pogosto povzročala katastrofalne poplave. Po eni izmed inačic zgodbe ni pomagalo prav nobeno darovanje, dokler ni iz reke prilezla želva. Na oklepu je imela zapisano naslednjo nenavadno tabelo s števili od 1 do 9:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Cesar je opazil, da je vsota vsake vrstice in vsota vsakega stolpca v tabeli enaka 15. Potem, ko je reki ponudil 15 darov, se je reka umirila. To je verjetno prva omemba magičnih kvadratov. Zanimivo je, da je to edini magični kvadrat velikosti 3×3.

Večji del našega védenja o kitajski matematiki izvira iz približno desetih knjig, ki povzemajo dotedanje znanje matematike. Najstarejša je bila napisana približno 180 let pred našim štetjem. Verjetno najpomembnejša med njimi je knjiga z naslovom *Devet poglavij matematične umetnosti*. Knjigo so skozi stoletja spreminjali in dopolnjevali. Njena zadnja verzija je iz leta 200 našega štetja, vsebuje pa odkritja iz približno 1200-letne preteklosti.

Za razliko od današnjega razumevanja matematike, ki izvira iz starogrške tradicije in ga je prvi dokončno izoblikoval Evklid v svojih *Elementih* približno 300 let pred našim štetjem, je bila kitajska matematika predstavljena kot zbirka konkretnih problemov. Številski podatki v problemih so skrbno izbrani, tako da rešitve problemov delujejo tudi z drugačnimi podatki in se v bistvu obnašajo kot današnje spremenljivke. Tako lahko s pomočjo analogije naloge posplošimo in dobimo nekaj takšnega, kot so naši izreki.

Kako različna od naše je bila starokitajska kultura, pokaže tudi njihov sistem izobraževanja. Cesarska akademija je med nižjimi sloji izbrala 30 študentov, med katerimi jih je 15 študiralo abstraktno, 15 pa uporabno matematiko. Po sedmih letih študija so na zelo strogih izpitih za državne uradnike morali rešiti nekaj nalog iz obravnavanih knjig. Študentje abstraktne matematike so morali dodatno še pravilno dopolniti vsaj šest od desetih naključnih stavkov iz knjige *Devet poglavij matematične umetnosti*.

Za ilustracijo tedanjega poznavanja matematike si poglejmo nekatere izmed značilnih nalog.

Polnjenje ribnika

V šestem poglavju je zapisana še danes zelo popularna naloga s polnjenjem ribnika.

Ribnik napaja pet kanalov. Prvi kanal napolni ribnik v tretjini dneva, drugi v enem dnevu, tretji v dveh dneh in pol, četrti v treh dneh in peti v petih dneh. Hkrati odpremo vse kanale. Kdaj bo poln ribnik?

Naj bo x število dni, potrebnih za napolnitev ribnika. Potem je

$$3x + x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 1.$$

Tako je $x = \frac{15}{74}$, kar je približno 4 ure, 51 minut in 54 sekund.

Kovanci

V sedmem poglavju so naloge, ki so povezane z reševanjem sistemov linearnih enačb.

Na prvem kupu je devet zlatih, na drugem pa enajst srebrnih kovancev. Oba kupa tehtata enako. Iz vsakega kupa vzamemo po en kovanec in ga damo na drugi kup. Kup, ki je v glavnem sestavljen iz zlatih kovancev, sedaj tehta 13 utežnih enot manj kot kup, ki vsebuje večino srebrnih kovancev.

Poišči teži zlatega in srebrnega kovanca.

Če z s označimo težo srebrnega in z z težo zlatega kovanca, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 9z &= 11s \\ 8z + s + 13 &= 10s + z. \end{aligned}$$

Sistem ima enolično določeni rešitvi

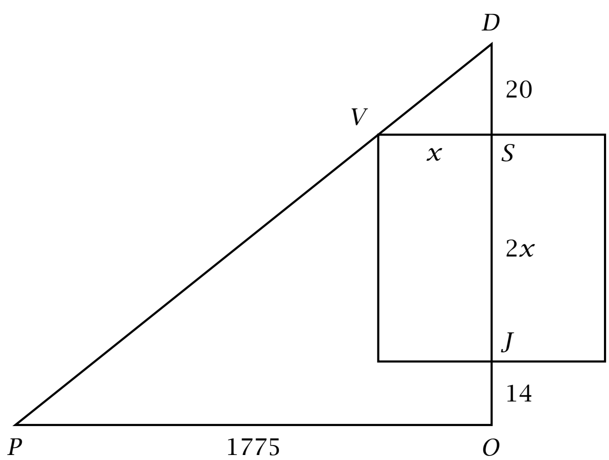
$$s = 29\tfrac{1}{4}, \quad z = 35\tfrac{3}{4}.$$

Kvadratno mesto

V zadnjem, devetem poglavju, so naloge, ki so povezane z znanjem o pravokotnih trikotnikih. Med bolj zanimivimi je naslednja:

Mesto je obdano s kvadratnim obzidjem. Na vsaki stranici zidu so na sredini vrata. Dvajset korakov pred severnimi vrati je drevo. Če mesto zapustimo pri južnih vratih, naredimo 14 *korakov proti jugu in nato* 1775 *korakov proti zahodu, prvič zagledamo drevo.*

Kako veliko je mesto?



SLIKA 1.
Kvadratno mesto

Skicirajmo mesto in uporabljajmo oznake s slike 1. Naj bo $2x$ njegova širina.

Ker sta trikotnika POD in VSD podobna, je

$$\frac{20}{x} = \frac{34 + 2x}{1775}.$$

Razmerje je ekvivalentno kvadratni enačbi

$$x^2 + 17x - 17750 = 0$$

z rešitvama

$$x = \frac{-17 \pm 267}{2}.$$

Za širino mesta moramo vzeti pozitivno rešitev $2x = 250$ korakov.

Oddaljeni otok

Liu Hui je leta 263 med komentarji knjige zapisal naslednjo nalogo o merjenju oddaljenega otoka:

Palici velikosti pet pujev sta postavljeni 1000 *pujev narazen (en pu ustreza približno dvema metroma). Če se postavimo med palici* 123 *pujev za prvo palico, ki je bližje otoku, sta vrh prve palice in vrh otoka poravnana. Če pa se postavimo* 127 *pujev za drugo palico, sta poravnana vrh otoka in vrh druge palice.*

Kolikšna je višina otoka in koliko je otok oddaljen od prve palice?

Naloga bo bolj jasna, če dodamo, da z obale vidimo visok klif nad morjem, ki je hkrati najvišja točka otoka. Povedati je treba tudi, da je obala sicer položna in da vrhova obeh palic ter vrh otoka vidimo s točk na tleh. Situacija je ilustrirana in skicirana na sliki 2.

Naj bo v višina klifa in d oddaljenost prve palice od otoka.

Trikotnika BP_1Q_1 in BOV sta si podobna, zato je

$$\frac{5}{v} = \frac{123}{123 + d}.$$

Prav tako sta si podobna tudi trikotnika AP_2Q_2 in AOV, zato je

$$\frac{5}{v} = \frac{127}{d + 1000 + 127}.$$

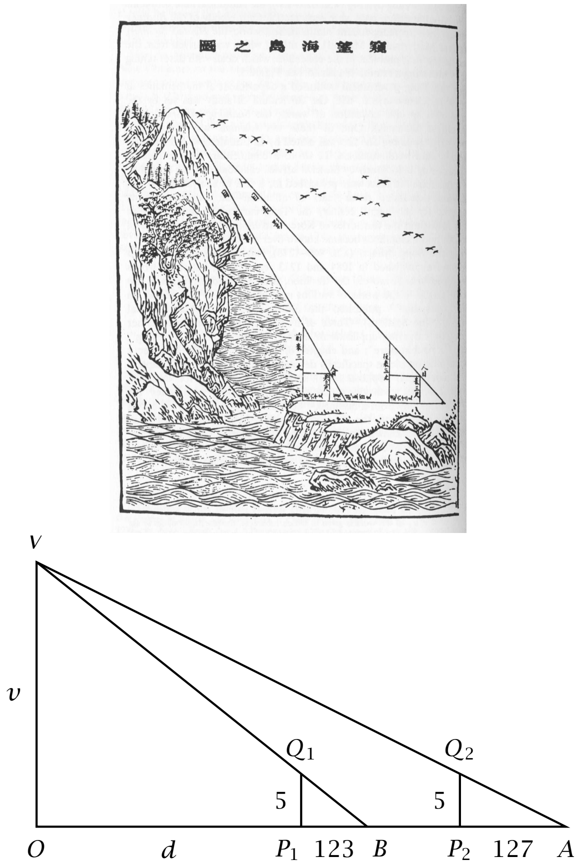
Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 615 + 5d &= 123v \\ 5635 + 5d &= 127v \end{aligned}$$

z rešitvama

$$v = 1255 \ \text{ in } \ d = 30750.$$

Otok je visok 1255 pujev in je 30750 pujev oddaljen od prve palice.



SLIKA 2.
Merjenje otoka z obale

Košara z jajci

Sun Zi je v petem stoletju med komentarji knjige zapisal naslednjo nalogo:

Če iz košare jemljemo po tri jajca, v košari ostaneta dve jajci. Če jemljemo po pet jajc, ostanejo tri. Če pa jih jemljemo po sedem, ostaneta dve. Koliko jajc je v košari?

Naj bo x število jajc v košari. Besedilo pravi, da je ostanek pri deljenju x s 3 enak 2, ostanek pri deljenju x s 5 enak 3 in ostanek pri deljenju x s 7 enak 2. Danes to krajše zapišemo kot sistem kongruenc:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

Izkaže se, da je takšen sistem zagotovo rešljiv, če so moduli paroma tuji. Danes ta rezultat imenujemo *Kitajski izrek o ostankih*. Kitajci so vedeli, da morajo v tem primeru rešitev iskati v obliki

$$x = 3 \cdot 5 \cdot a + 3 \cdot 7 \cdot b + 5 \cdot 7 \cdot c.$$

Zaradi tujosti modulov bi se dalo pokazati, da je prav vsaka rešitev te oblike. Vsak od seštevancev je premeteno nastavljen tako, da preostala dva data ostanek 0 po drugih dveh modulih. To pomeni, da mora hkrati veljati:

$$\begin{aligned} 15a &\equiv 2 \pmod 7 \\ 21b &\equiv 3 \pmod 5 \\ 35c &\equiv 2 \pmod 3 \end{aligned}$$

Ker je $15a = 2 \cdot 7a + a$, $21b = 4 \cdot 5b + b$ in $35c = 11 \cdot 3c + 2c$, dobimo

$$a = 7a' + 2, \quad b = 5b' + 3, \quad 2c = 3c' + 2.$$

Če preverimo vse možne ostanke pri deljenju s tri, vidimo, da mora biti c oblike $c = 3c'' + 1$. Ko rešitve vstavimo v nastavek za x, dobimo

$$x = 3 \cdot 5 \cdot 7(a' + b' + c'') + 128 = 105n + 128.$$

Najmanjšo smiselno naravno rešitev dobimo v primeru $n = -1$. Takrat je $x = 23$. Naslednja je že 128. Vse ostale rešitve dobimo s prištevanjem večkratnikov števila 105.

Perutnina

Yang Hui je v trinajstem stoletju pazljivo predelal Devet poglavij matematične umetnosti in med komentarji zapisal zanimivo nalogo, ki je povezana z reševanjem linearnih diofantskih enačb:

Petelin stane pet čienov, kokoš tri čiene in trije piščanci en čien. 100 *glav perutnine kupimo za* 100 *čienov. Koliko petelinov, koliko kokoši in koliko piščancev smo kupili?*

Naj bo x število petelinov, y število kokoši in z število piščancev, ki smo jih kupili. Potem je

$$\begin{aligned} 5x + 3y + \tfrac{1}{3}z &= 100\,, \\ x + y + z &= 100\,. \end{aligned}$$

Če odpravimo spremenljivko z, dobimo enačbo

- $7x + 4y = 100.$

To je enačba premice v ravnini, na kateri leži neskončno točk s koordinatama (x, y). Za rešitev naloge bodo zanimive le točke, ki imajo za koordinate nenegativna cela števila. Kitajci so, enako kot Grki in Indijci, že znali reševati t. i. diofantske enačbe. Najprej je treba v celih številih rešiti diofantsko enačbo

- $7x + 4y = D(7, 4),$

kjer $D(7, 4) = 1$ pomeni največji skupni delitelj števil 7 in 4. Zelo lahko je uganiti eno od celih rešitev, recimo $x_0 = -1$ in $y_0 = 2$. Indijski matematik Brahmagupta je v sedmem stoletju pokazal, da so vse ostale celoštevilske rešitve enačbe $7x + 4y = 1$ oblike

- $x = x_0 + 4k = 4k - 1\,,$
  $y = y_0 - 7k = 2 - 7k\,.$

Poskušajte opaziti idejo, da sta rešitvi nastavljeni tako, da se dodana $4k$ in $7k$ odštejeta. Iskani rešitvi originalne enačbe $7x + 4y = 100$ pa sta 100 krat večji:

- $x = 100x_0 + 4k = 4k - 100\,,$
  $y = 100y_0 - 7k = 200 - 7k\,.$

Da bosta rešitvi smiselni, mora seveda veljati $x \geq 0$ in $y \geq 0$. To pomeni, da mora biti

- $25 \leq k \leq 28.$

Za smiselne k dobimo kar štiri ustrezne rešitve:

k	x	y	z
25	0	25	75
26	4	18	78
27	8	11	81
28	12	4	84

Prva rešitev odpade, če vemo, da smo kupili vsaj enega petelina.

Naloge

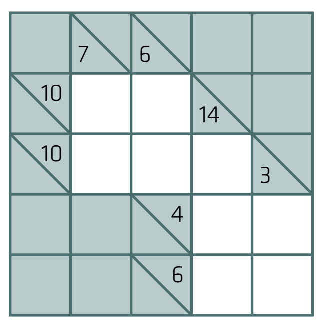
Če nam je uspelo z nalogami navdušiti katerega od bralcev, se lahko loti še naslednjih kitajskih nalog.

1. Hitri tekač preteče 100 korakov v enakem času kot počasni 60 korakov. Hitri tekač da počasnemu 100 korakov prednosti, nato starta tudi on. Čez koliko korakov bo ujel počasnega?
2. Kubični kun žada tehta sedem liangov, kubični kun peska pa šest liangov. V kocki s stranico tri kune je mešanica žada in peska, ki tehta 11 jinov. Kolikšni sta teži žada in peska v kocki? (1 jin=16 liangov)
3. Okroglo mesto z neznanim premerom ima na vsaki od strani neba vrata. Oseba A starta pri zahodnih vratih in naredi 480 pujev proti jugu. Oseba B pa starta pri vzhodnih vratih. Ko naredi 16 pujev proti vzhodu, zagleda osebo A. Poišči premer mesta.
4. Če neznano število kroglic postavimo v sedem enako dolgih vrst, nam ostane ena; če jih postavimo v osem vrst, ostaneta dve; če jih postavimo v devet vrst, ostaneta tri. Koliko je vseh kroglic?
5. V isto kletko damo fazane in zajce. Naštejemo 35 glav in 94 nog. Koliko fazanov in koliko zajcev je v kletki?

× × ×

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

Počasna celična konvekcija, 2. del

Razlaga pojavov v posodici s tekočim milom

Jože Rakovec

V prejšnji številki Preseka smo pokazali nekaj slik pojava, ko se v dveh milih, ki sta v začetku eno pod drugim, začnejo počasi pojavljati dokaj nenavadni prsti belega mila navzgor skozi prozorno milo. Da osvežimo spomin, prikažimo še eno sliko tudi v tem drugem delu prispevka o počasni celični konvekciji.

SLIKA 1.
Prsti belega mila navzgor skozi prozorno milo

Konvekcija zaradi različnih gostot

Prvi je o urejenih oblikah v tekočini s konvekcijo poročal E. H. Weber (1855), ki je opazil celice spuščanja v mešanici alkohola in vode. Trideset let kasneje je James Thomson (1882) opazoval mozaične strukture v topli milnici v čebru na dvorišču neke gostilne. Zares se je pojava lotil Henri Bénard,[1] ki je 1900 in 1901 o tem objavil več člankov in po katerem se imenujejo tudi »Bénardove celice«. Vidimo jih lahko v ponvi, v kateri segrejemo tanko plast olja. V sredini teh celic se olje dviga, na njihovih robovih pa se olje za izravnavo spušča. Za Bénardom se je pojava lotil lord Rayleigh (1916), ki je določil kriterij za to, kdaj se konvekcija sproži. Ker jo pospešuje razlika med vzgonom in težo (čemur se včasih reče tudi »čisti vzgon«), zavira pa trenje, nastopata oba ta vzroka v njegovem kriteriju za proženje konvekcije.

V našem primeru se stebri belega mila počasi, v nekako dveh dneh, dvignejo skoraj do vrha tekočine, kar pomeni, da je vzgon zelo majhen – da se gostota dvigajočega se mila le zelo malo razlikuje od gostote mila, ki se spušča. Merjenje zelo majhnih razlik gostot pa utegne biti z običajnimi tehtnicami zelo težko. Nam je obe gostoti uspelo izmeriti s piknometrom.[2] Piknometer je steklena bučka s stožčastim steklenim zamaškom s podaljškom s prevr-

[1] Pri Bénardu je iz konvekcije v Parizu leta 1939 doktoriral tudi Dušan Avsec (za podrobnosti glej COBISS).

[2] Zahvaljujem se prof. Igorju Poberaju, ki je v kemijskem laboratoriju FMF izmeril obe gostoti. Pri tem je bilo treba počakati dovolj dolgo (pri prvem merjenju dan ali dva, pri drugem še več dni), da so iz obeh mil izšli vsi mehurčki zraka, ki so nastali v milih ob natakanju v piknometer (primerjaj sliko 6 v prvem delu tega prispevka v prejšnjem Preseku).

tano kapilaro (slika 2). V piknometer nalijemo tekočino skoraj do vrha in potisnemo v vrat zamašek. Del tekočine se dvigne skozi zamašek in skozi kapilaro. Tisto, ki izteče na vrhu kapilare, obrišemo s krpo. Tako imamo pri vsakem natakanju v piknometru točno enak volumen tekočine.

Uporabili smo piknometer za 25 ml tekočine, torej za okrog 25 g mila. Po skrbni pripravi obeh vzorcev se je pri prvem tehtanju pokazalo, da je gostota belega mila večja.[3] To pa je zelo čudno – saj se vendar beli deli dvigajo, prozorni pa tonejo in na koncu se na dnu posode nabere prozorno milo. Torej mora biti vseeno prozorno milo nekoliko gostejše! Ali je kje ostal ujet kak mehurček zraka? Meritve smo ponovili in čakali še dlje za morebitno izločanje mehurčkov zraka. Poskrbeli smo tudi za kolikor le mogoče enake temperaturne razmere pri obeh tehtanjih. Pri drugem tehtanju je bil rezultat za belo in za prozorno milo skoraj enak – povprečje gostote za belo milo je 1,03563 g/ml, gostote prozornega mila pa – 1,02771 g/ml.

Zakaj se dviga belo milo, ki je gostejše?

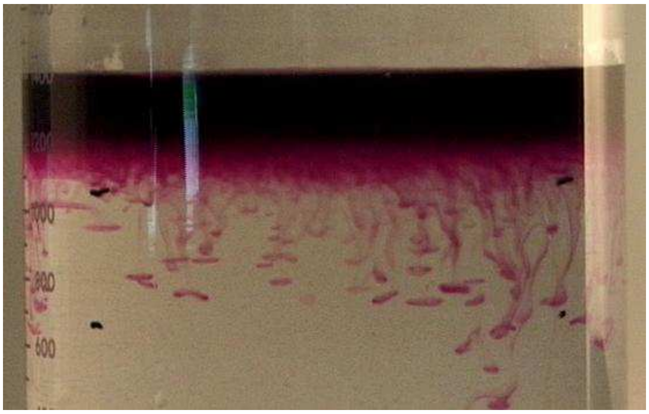
Če je res belo milo gostejše in se začne dvigati, prozorno pa spuščati, se je moralo nekaj dogoditi z obema gostotama *potem*, ko sta bili obe mili že nekaj časa (pol dneva ali en dan) v posodici za milo. Da torej belo milo *postane* redkejše, prozorno milo pa *postane* gostejše – kaj bi to lahko bilo?

V jezerih je velikokrat topla samo vrhnja plast vode in če plavamo, hitro začutimo, da je spodaj voda hladnejša. Toplejša voda je na vrhu, ker je njena gostota zaradi temperaturne razteznosti manjša. Pri slani vodi pa na gostoto vpliva tudi primes soli. Zato velikokrat sladka voda (npr. po padavinah) plava na slani, pa čeprav je morda tudi hladnejša.

Pojav »prstov slane vode«, ki je v naravi menda najizrazitejši v Karibskem morju (glej `http://en.wikipedia.org/wiki/Salt_fingering`), pa je drugačen. Gre za toplo slano in za hladno sladko vodo. Čuden je ta pojav zato, ker je na vrhu topla slana voda, pod njo pa hladna sladka voda. *Topla* slana voda se v obliki »prstov« spušča *navzdol* skozi *mrzlo* sladko vodo. Da je slana voda gostejša od sladke vode, pri tem pojavu prevlada nad razlikami zaradi temperature. S tem pa nenavadnosti še ni konec. Ker je izguba toplote z difuzijo hitrejša od difuzije soli v okolico, se slana voda hitro hladi, *postaja* vse gostejša in se še naprej spušča. Sladka voda, ki je bila v začetku hladna, pa dobiva toploto od slane, zato se greje in temperaturno razteza – pri tem pa dobiva le malo soli (kar bi ji povečevalo gostoto) in

SLIKA 2.
Piknometer

[3]Povprečne vrednosti: masa piknometra 24,4258 g, masa piknometra, napolnjenega s prozornim milom 50,8004 g, napolnjenega z belim milom pa 51,0072 g. Volumen piknometra je 25,667 ml.



SLIKA 3.
Spuščajoči se »prsti« slane vode. `http://www.ualberta.ca/~bsuther/eifl/teaching/saltfingers/image2.jpg`. Avtor poskusa s slanimi prsti je Paul F. Choboter, sept. 98, slika pa je povzeta s strani prof. Brucea R. Sutherlanda z Univerze v Alberti.

zato postaja vse redkejša. Ta »čudni« pojav je 1960 razložil prof. Melvin Stern s Floridske državne univerze (1960). Glavni vzrok za ta nenavadni pojav je, da je izguba toplote hitrejša od izgube soli: koeficient molekularne temperaturne difuzivnosti v vodi je $1{,}5 \times 10^{-7}$ m^2/s, za sol v vodi pa (pri običajni slanost morske vode) za dva velikostna reda manjši: $1{,}3 \times 10^{-9}$ m^2/s (Stern, 1960). Pojav je dokaj hiter: prvi »prsti« se lahko pojavijo že po nekaj deset sekundah ali v kaki minuti ali dveh (odvisno od razlik temperatur in slanosti). Kako se naredi ta poskus v laboratoriju, si lahko ogledamo npr. na `http://www.ualberta.ca/~bsuther/eifl/teaching/saltfingers/image2.jpg`, odličen je tudi filmček BBC na `http://www.bbc.co.uk/nature/15835017`.

V našem primeru sta temperaturi obeh mil izenačeni. Torej se morda gostoti spreminjata drugače – npr. tako, da iz enega mila gostejša snov difundira v drugo milo in neka redkejša snov iz drugega mila v prvo.[4] Naredili so precej poskusov te vrste, med drugim tudi s sladko in slano vodo (glej npr. v Yoshida in Nagasmima, 2003). Molska masa soli NaCl je 58 g/mol, sladkorja (saharoze) $C_{12}H_{22}O_{11}$ pa je skoraj šestkrat večja: 342,30 g/mol. Difuzivnost majhnih ionov Na^+ in Cl^- v vodi je okrog 30-krat večja od difuzivnosti velikih molekul sladkorja v vodi (odvisno od koncentracij in od temperature). Se pa pojavi še osmoza: voda difundira tja, kjer je koncentracija topljenca večja. Zato so tudi pri plasteh slane in sladke vode opazili »prste«: »vlogo temperature« po Sternovi razlagi tu opravlja koncentracija soli, »vlogo soli« pa koncentracija sladkorja (glej npr. Sorkin in sod., 2002).

Nekaj podobnega se morda dogaja tudi v našem primeru, ko se gostota sprva težjega belega mila *zmanjšuje* in se zato začne dvigati, gostota lažjega prozornega mila pa *povečuje* in zato to začne toniti proti dnu. Specifikaciji obeh mil na vrečkah sta sicer brez podrobnih navedb deležev posameznih sestavin, toda obe mili imata večino sestavin enakih. Že te snovi ob različnih koncentracijah lahko difundirajo iz enega mila v drugo. Prozorno milo pa vsebuje še tekoči glicerol za pospeševanje miljenja in natrijev laktat, ki kožo vlaži. Belo milo pa vsebuje nekatere druge tekoče sestavine: npr. za dezinfekcijski učinek mu je dodan tekoči fenol-metanol.[5] Molekule teh sestavin so različno velike, imajo različne molske mase in njihove difuzivnosti v vodi so tudi nekoliko različne: za natrijev laktat, fenol in metanol[6] okrog 1×10^{-9} m^2/s (odvisno od koncentracije, pa tudi temperature), za glicerol pa lahko tudi do desetkrat manj[7] (spet odvisno od koncentracije in temperature). To bi lahko pomenilo, da nekatere snovi difundirajo hitreje, druge pa počasneje. Seli se pa tudi voda – tja, kjer je topljencev več; temu rečemo osmoza. Na ta način bi se lahko gostoti počasi toliko spreminjali, da bi sprva »težje« milo postalo »lažje« in se pričelo dvigati; sprva »lažje« pa gostejše in bi pričelo toniti proti dnu posode.

[4] Prof. Alojz Kodre me je še pred tehtanjem obeh mil opozoril na možnost, da so razlike v gostotah obeh mil posledica osmoze in difuzije različnih sestavin v milih.

[5] S šibko vodikovo vezjo se v raztopini povežeta obe sestavini preko obeh OH – tistega iz metanola CH_3OH in tistega na aromatskem fenolnem obroču C_6H_5OH.

[6] `http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/jp1107075`, `www.researchgate.net/...sodium_lactate.../00b7d52a71fd5847a3000000`, `http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/j100270a039`

[7] `http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/je049917u`

18 nadaljevanje na strani

→ 15 nadaljevanje s strani

Kakšna je hitrost dviganja prstov belega mila skozi prozorno milo in kakšne so razlike gostot?

Oceno za hitrost dviganja prstov dobimo kar iz časa trajanja pojava. Najprej kak dan traja, da difuzija povzroči spremembe gostote obeh mil. Potem se belo milo za $h \approx 5$ cm dvigne, prozorno pa spusti v nekako dveh dneh, kar je $\tau \approx 2 \times 10^5$ s. Tako ocenimo velikosti obeh hitrosti kot $v \uparrow \approx v \downarrow \approx v \approx h/\tau \approx 3 \times 10^{-7}$ m/s – zelo, zelo počasi.

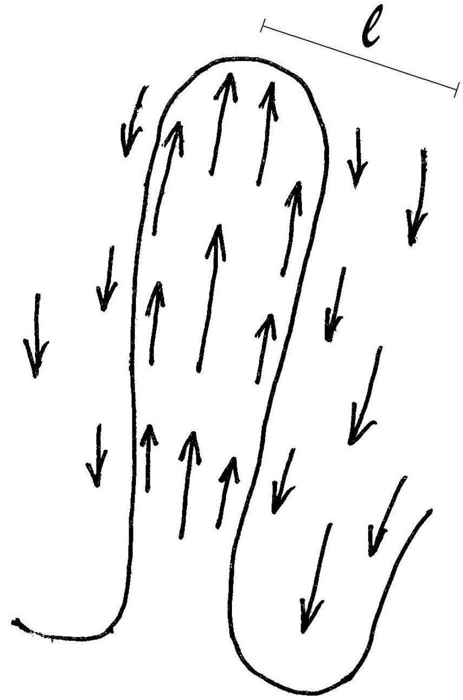
Hitrost pa bi lahko ocenili tudi iz ravnovesja sil. Privzamemo, da so pri zelo počasnem in zato enakomernem gibanju vse sile uravnotežene. Teža »prsta« belega mila je mg, na enoto volumna torej ρg. Za vzgon je že Arhimed ugotovil, da je enak teži okolišnje tekočine, ki jo iz volumna V izpodrine telo – »prst« belega mila. Torej je vzgon na enoto volumna, ki deluje na prst $\rho_{ok} g$. Trenje ob premikanju skozi tekočino je odvisno od tega, kako velike hitrostne razlike Δv na kako majhni razdalji l se pojavijo pri tem premikanju: to približno izrazimo kot $\Delta v/l$. Pri tem bi bila l razdalja med sredino dvigajočega se belega prsta in območjem okolišnjega prozornega mila, v našem primeru okrog $l \approx 1$ cm, Δv pa velikost razlike med hitrostima gor in dol; glej skico – slika 4.

Trenje je seveda močnejše v bolj viskoznih tekočinah, zato v izrazu za silo trenja nastopa tudi viskoznost η tekočine in tako bi trenje na volumsko enoto približno izrazili kot $\eta \Delta v/l^2$. (Podrobna razlaga in opis trenja sta bolj zapletena in presegata nivo, ki je v navadi v Preseku.) Z miloma sem šel v Praktikum 1 na FMF in izmeril viskoznosti preko hitrosti vrtenja kovinskega valjastega obroča, potopljenega v mili ob različnih navorih na ta obroč. Za različna mila in za različne navore sem sicer dobil različne ocene za viskoznost, povprečna viskoznost pa je približno $\eta \approx 1{,}5$ kg/ms $= 1{,}5$ Pa·s. Za primerjavo: viskoznost vode je okrog 0,001 kg/ms, motornih olj od 0,05 do 0,75 kg/ms, repičnega jedilnega olja okrog 0,16 kg/ms, medu pa okrog 2 kg/ms.

Če so sile na volumsko enoto: vzgona $\rho_{ok} g$, teže ρg in in trenja $\eta \Delta v/l^2$ izenačene, velja:

$$\rho_{ok} g = \rho g + \eta \Delta v / l^2$$

Enačbo delimo z ρ in potem na levi strani enačbe dobimo razmerje gostot, na desni pa nastopa viskoznost deljena z gostoto (v našem primeru $\eta/\rho \approx$



SLIKA 4.
Pri dviganju belega belega mila in kompenzacijskem spuščanju okolišnjega prozornega mila se pojavi striženje hitrosti Δv na karakteristični razdalji l.

$0{,}0015$ m^2 s^{-1}):

$$\frac{\rho_{ok}}{\rho} g = g + \frac{\eta}{\rho} \Delta v / l^2$$

Odtod ocenimo Δv:

$$\Delta v = \left(\frac{\rho_{ok}}{\rho} - 1\right) g \frac{l^2}{\eta/\rho} = \frac{\Delta\rho}{\rho} g \frac{l^2}{\eta/\rho}.$$

Ker pa sta gostoti mil ravno »obrnjeni« – belo milo, ki se sicer dviga, se je namreč pri tehtanjih izkazalo za gostejše – seveda ne bi bilo prav, da bi v enačbo vstavili s piknometrom izmerjeni gostoti.

Zato lahko vprašanje obrnemo: če smo iz trajanja pojava dveh do treh dni približno ocenili čas $\tau \approx 2 \times 10^5$ sekund in s tem hitrost dviganja $v = h/\tau \approx 3 \times 10^{-7}$ m/s – ali lahko ocenimo kolikšna je razlika gostot, *ki se pojavi potem*, ko difuzija že prenese ene in druge snovi iz enega mila v drugo? Enačbo »obrnemo«:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta v \eta/\rho}{g l^2}$$

Izračun (ob upoštevanju $\Delta v \approx 2v$) da rezultat $\Delta\rho/\rho \approx 9 \times 10^{-7}$. Tako majhne razlike gostot pa s piknometrom ne bi mogli izmeriti!

Naj čisto na koncu povemo še to, da so podrobni matematično-fizikalni opisi takih in podobnih pojavov precej zapleteni in močno presegajo nivo, ki je običajen za Presek. Kogar pa bi to vseeno zanimalo, naj si ogleda npr. objave Borońske, Pringla ali Sorkina z njihovimi sodelavci (navedene so med viri).

Literatura

[1] H. Bénard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide*, Revue Générale des Sciences 11, 1261–1271, 1309–1328, 1900.

[2] H. Bénard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, Méthodes optiques d'observation et d'enregistrement*, J. Phys. Theor. Appl. **10** 254–266, 1901. Dostopno na `http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/24/05/02/PDF/ajp-jphystap_1901_10_254_0.pdf`.

[3] M. K. Borońska, *Motifs tridimensionnels dans la convection de Rayleigh–Bénard cylindrique*, Doctorat, Mécanique des fluides, Universite Paris 7 – Denis Diderot UFR de physique, 2005. Dostopno na `http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/33/78/40/PDF/thesis.pdf`.

[4] K. Borońska in L. S. Tuckerman, *Extreme multiplicity in cylindrical Rayleigh-Bénard convection: I. Time-dependence and oscillation*, Phys. Rev. E, **81** DOI: 10.1103/PhysRevE.81.036320, 2010. Dostopno na `http://arxiv.org/pdf/0908.4343.pdf`.

[5] C. C. T. Pringle, Y. Duguet in R. R. Kerswell, *Highly symmetric travelling waves in pipe flow*, Phil. Trans. R. Soc. A. **367** 457–472, doi:10.1098/rsta.2008.0236, 2009. Dostopno na `http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/367/1888.toc`.

[6] Lord Rayleigh, *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side*, Phil. Mag., Ser. 6, **32** 529–546, 1916. Dostopno na `http://gibbs.if.usp.br/~marchett/fluidos/convection_rayleigh-1916.pdf`.

[7] A. Sorkin, V. Sorkin in I. Leizerson, *Salt fingers in double-diffusive systems*, Physica A, **303** 13–26, 2002. Dostopno na `http://phycomp.technion.ac.il/~phsorkin/science.pdf`.

[8] M. E. Stern, *The »salt-fountain« and thermohaline convection*, Tellus, **12** 172–175, 1960. Dostopno na `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.2153-3490.1960.tb01295.x/pdf`.

[9] J. Thompson, *On a changing tesselated structure in certin fluids*, Proc. Glasg. Phil. Soc. **13** 464–468, 1882. Dostopno na`http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786441608635602#.VAb5HmNadDQ`.

[10] E. H. Weber, *Mikroskopische Beobachtungen sehr gesetzmäßiger Bewegungen, welche die Bildung von Niederschlägen harziger Körper aus Weingeist begleiten* Ann. Phys. (Poggendorf) **94** 447–459, 1855. Dostopno na `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.18551700310/abstract`.

[11] J. Yoshida in H. Nagashima, *Numerical experiments on salt-finger convection*, Progress in oceanography, **56** 435–459, 2003. Dostopno na `http://www.phys.ocean.dal.ca/programs/doubdiff/final_pdfs/salt-finger_numerical.pdf`.

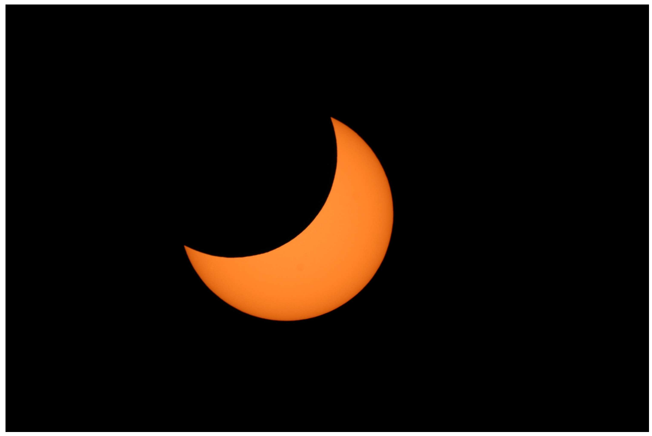
Drugi uporabljeni internetni viri so navedeni med tekstom – vsi ogledi med 30. avgustom in 3. septembrom 2014.

× × ×

Delni Sončev mrk – 20. marec 2015

Andrej Guštin

→ 20. marca bo Sončev mrk, ki bo v naših krajih viden kot delni. Kot popolni bo viden v ozkem pasu, ki bo tekel čez severni Atlantik, začenši vzhodno od kanadske obale, med Islandijo in Škotsko, čez Ferske otoke in Svalbard ter se končal na severnem polu.



SLIKA 1.
Ob delnem Sončevem mrku Luna ne zakrije vse ploskvice Sonca. Foto: Greg Hewgill/Wiki Commons

Kdor bi si želel ogledati popolno fazo tega Sončevega mrka, bo moral odpotovati na Ferske otoke ali na otok Svalbard. V Sloveniji bomo deležni le skromnejšega doživetja, saj delni Sončev mrk ni tako dramatičen nebesni pojav kakor popolni. Kljub temu pa si mrk velja ogledati, narediti kako zanimivo fotografijo ali izpeljati astronomsko delavnico v šoli.

V Ljubljani se bo mrk začel ob 9. uri 31 minut in 30 sekund. Takrat se bo Lunina ploskvica prvič navidezno dotaknila Sončeve ploskvice. Nato bo Luna zakrivala vse večji del Sonca. Sredina mrka bo ob 10. uri 40 minut in 10 sekund. Takrat bo Luna zakrila 67,7 odstotka premera ploskvice Sonca oziroma 60 odstotkov njene površine. Mrk se bo končal ob 11. uri in 52 minut. Podatki veljajo za Ljubljano, za druge kraje po Sloveniji pa se ti časi le malo razlikujejo. Tako se v Brdih mrk začne poldrugo minuto prej, približno za toliko pa tudi sredina in konec mrka, v Murski Soboti pa so vsi časi zakasnjeni za približno tri minute glede na podatke za Ljubljano.

Opazovanje in fotografiranje Sončevega mrka in Sonca nasploh zahteva nekaj znanja in primerne opreme, saj je naša zvezda zelo svetlo nebesno telo. Močna svetloba lahko trajno poškoduje oči. Verjetno ste se že kdaj igrali z lečo in ob jasnem dnevu z njo zbirali Sončeve žarke ter zažigali papir. Kar pomislite, kaj bi se zgodilo, če bi na mesto papirja postavili oko. Tudi v očesu se nahaja majhna leča, ki zbira svetlobo. Če z nezaščitenim očesom pogledamo naravnost v Sonce, očesna leča usmeri žarke na mrežnico in jo zažge oziroma, bolje rečeno, skuha. S prostim očesom lahko torej Sonce opazujemo le zjutraj in zvečer, ko je zelo nizko nad obzorjem, ali pa skozi meglo in oblake. Toda obilica Sončeve svetlobe ni edina nevarnost za oči, nevarni sta tudi ultravijolična in infrardeča svetloba, ki ju moramo med opazovanjem zaustaviti, preden prideta v oko. Še bolj nevaren je pogled v Sonce skozi daljnogled, ki ni opremljen s posebnimi filtri. Daljnogled namreč zbere in pošlje v oko veliko več svetlobe kot pri opazovanju Sonca brez daljnogleda. Če hočemo varno opazovati našo zvezdo, potem moramo naše oči zaščititi s filtri, ki primerno oslabijo Sončevo svetlobo ter zadržijo ultravijolično in infrardečo svetlobo. Pri tem moramo upoštevati tudi nekaj osnovnih pravil in nasvetov za opazovanje.

Opazovanje Sonca s prostim očesom

Za varno opazovanje Sonca s prostim očesom lahko uporabimo le nepoškodovano varilsko steklo z »optično gostoto« 12 ali več oziroma posebno folijo mylar. Varilsko steklo oziroma folijo Mylar prislonimo k očesu in šele nato pogledamo v Sonce. Varilsko steklo lahko kupimo v vsaki bolje založeni tehnični trgovini in ni drago. Paziti moramo le, da kupimo dovolj temno steklo z veliko »optično gostoto«. Vsako varilsko steklo je označeno s standardno oznako za gostoto, ki mora biti za opazovanje Sonca 12 ali več. Posebna očala s folijo mylar za opazovanje Sonca in tudi večje pole te folije pa lahko dobite pri prodajalcih astronomske opreme.

Pri opazovanju Sonca ne smemo uporabljati doma narejenih filtrov. Steklena ploščica, ki jo počrnimo s sajami nad gorečo svečo, je povsem neprimerna zaščita za oči. Sončevo svetlobo sicer lahko dovolj oslabi, na zaustavi pa zelo nevarnih ultravijoličnih in infrardečih žarkov. Zato nikar ne poskušajte sami izdelovati filtrov za Sonce!

Opazovaje Sonca z daljnogledom

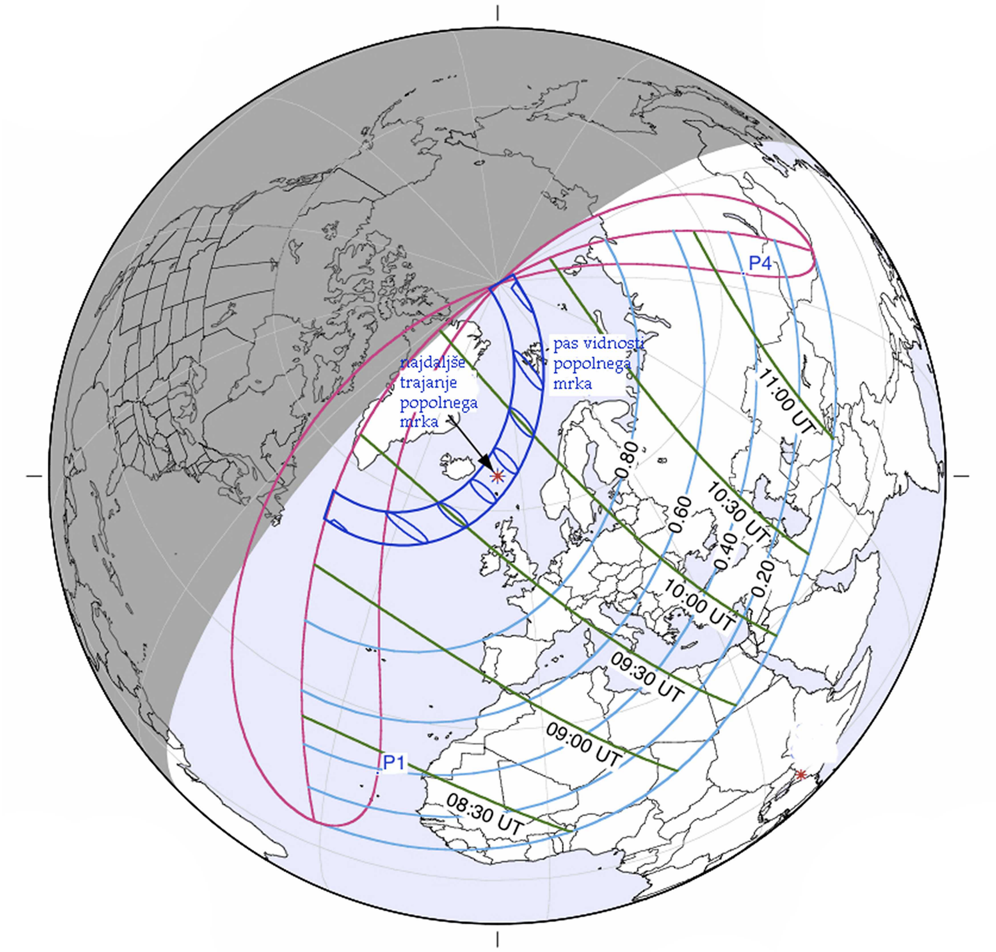
Pri opazovanju Sonca z daljnogledom imamo na izbiro dve metodi: neposredno opazovanje, pri katerem pred objektiv pritrdimo poseben steklen filter za Sonce oziroma filter iz folije mylar, ter opazovanje projekcije Sonca na bel zaslon. Pri neposrednem opazovanju moramo poskrbeti, da je filter pred objektivom nepoškodovan in trdno pritrjen, sicer se lahko premakne ali poči in oči so hipno izpostavljene premočni svetlobi. Projekcija je najenostavnejši in najzanesljivejši način varnega opazovanja Sonca, ki je zelo primeren tudi za skupinska opazovanja, saj ne potrebujemo filtrov za Sonce. Za ta način zadošča le stojalo za daljnogled oziroma teleskop in bel zaslon. Daljnogled brez filtrov usmerimo proti Soncu. Pri tem ne gledamo skozi daljnogled, temveč opazujemo njegovo senco. Ko je senca daljnogleda najmanjša, njegova cev gleda naravnost proti Soncu. Nato za okularjem namestimo bel zaslon, na katerem lahko varno opazujemo ploskvico Sonca. Pazimo le, da ne bi kdo pomotoma želel pogledati skozi optično cev teleskopa. Nekateri proizvajalci manjših teleskopov med dodatke uvrščajo tudi posebne filtre, ki jih navijemo na okularje. Ker se tak filter nahaja v bližini gorišča teleskopa, se močno segreva. Pregreti filtri pa radi počijo, kar je za opazovalčeve oči hudo nevarno, zato se takemu načinu opazovanja raje izognimo.

Za vsa skupinska opazovanja Sonca in tudi delnega Sončevega mrka s teleskopom velja, da mora ob njem vedno stati mentor oziroma izkušeni opazovalec, ki lahko prepreči nesrečo z napačno uporabo teleskopa.

Fotografiranje delnega Sončevega mrka

Delni Sončevi mrki sicer niso tako atraktivni kot popolni mrki, pri katerih ob popolni fazi postaneta vidni zunanji plasti Sončeve atmosfere kromosfera in korona, vidni pa so še številni drugi optični pojavi. Kljub temu pa je lahko tudi delni Sončev mrk fotogeničen, še posebej, če poiščemo kako atraktivno kompozicijo. Tudi pri fotografiranju mrka potrebujemo filter, ki primerno zmanjša količino svetlobe pred vstopom v fotoaparat. V ta namen lahko uporabimo folijo mylar, ki jo pritrdimo pred objektiv fotoaparata, z malo spretnosti pa lahko kot filter uporabimo tudi varilsko steklo. Zavedati pa se moramo, da je pri panoramski fotografiji pokrajina močno podosvetljena, če je Sonce pravilno osvetljeno. Pred mrkom lahko izkušnje z uporabo filtrov in iskanjem zanimivih motivov nabiramo s fotografiranjem nezakritega Sonca.

Zdi se, da so Sončevi mrki zelo redek nebesni pojav. Astronomi pa so izračunali, da je bilo oziroma bo med leti 1207 pr. n. št. in letom 2161 8000 Sončevih mrkov. V povprečju torej 238 mrkov na stoletje. Od tega je kar 28 odstotkov popolnih Sončevih mrkov oziroma 66 v vsakem stoletju. Verjetnost za popolni mrk je torej večja, kot bi si na prvi pogled mislili. Res pa je, da so popolni Sončevi mrki v istem kraju v povprečju vidni le vsakih 450 let! V Sloveniji je bil zadnji tak mrk viden leta 1999, naslednji pa bo leta 2081.



SLIKA 2.
Potek popolnega mrka (modra krivulja), ki bo 20. marca letos. Zelene črte označujejo sredino mrka za različna območja, modre pa odstotek zakritosti premera Sončeve ploskvice. Časi so v univerzalnem času, ki mu moramo po srednjeevropskem času prišteti eno uro. Ilustracija: F. Espenak, NASA

Opozorilo

- V Sonce nikoli ne gledamo brez posebnih filtrov!
- V Sonce nikoli ne pogledamo skozi daljnogled!
- Otroci morajo Sonce oziroma Sončev mrk opazovati skupaj s starši, mentorji ali izkušenimi astronomi!
- Opazovanje Sonca z daljnogledi naj bo vedno ob prisotnosti izkušenih mentorjev oziroma astronomov!

Križne vsote

Rešitev s strani 9

	7	6		
10	**6**	**4**	14	
10	**1**	**2**	**7**	3
		4	**3**	**1**
		6	**4**	**2**

Algoritem za reševanje Rubikove kocke

Natalija Špur

Poznate Rubikovo kocko? Ali jo znate rešiti? Če ne, potem je ta članek ravno za vas! Vse, kar potrebujete, je Rubikova kocka ter volja za reševanje. Rubikova kocka je trodimenzionalna sestavljanka, ki jo je leta 1974 izumil *Erno Rubik*.

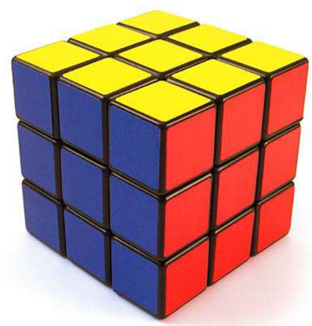
Poznamo različne dimenzije kock, kot so $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$.

SLIKA 1.
Kocka dimenzije $2 \times 2 \times 2$

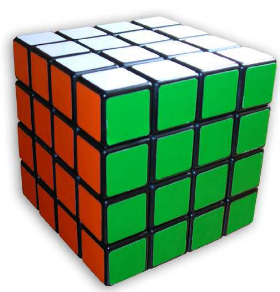
Cilj reševanja je sestaviti *enobarvne ploskve*. Kocka je zasnovana tako, da posamezne plasti lahko zavrtimo v različne smeri. V tem članku je predstavljena *Fridrichina metoda*, s katero rešimo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$.

Kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$ je sestavljena iz 26-ih manjših kockic. Razločimo tri vrste kockic:

- *Sredinska kockica ali center* je kockica na sredini vsake plasti, ki se ne premika. Iz nje lahko razberemo barvo celotne ploskve. Kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$ ima šest sredinskih kockic.

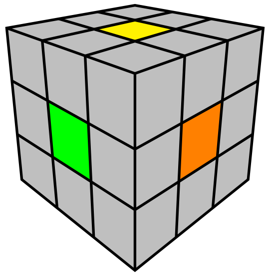


SLIKA 2.
Kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$

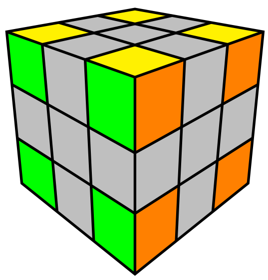


SLIKA 3.
Kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$

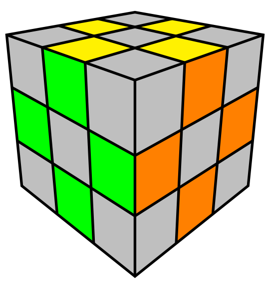
- *Kotna kockica ali kot* je kockica na stičišču treh plasti in ima tri barve. Kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$ ima osem kotnih kockic.
- *Robna kockica ali rob* je kockica na stičišču dveh plasti in ima dve barvi. Kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$ ima 12 robnih kockic.



SLIKA 4.
Sredinske kockice

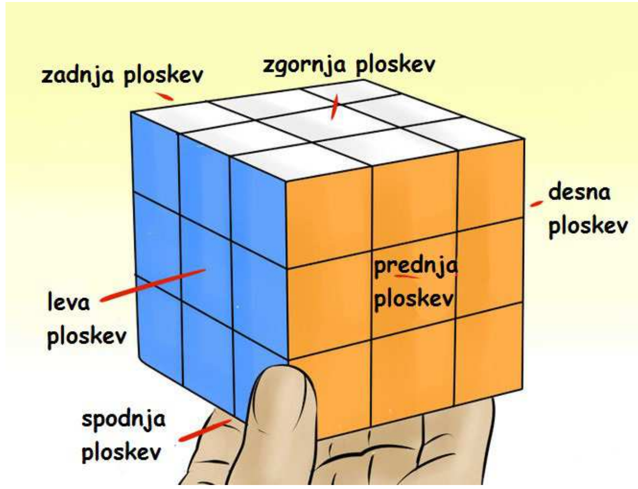


SLIKA 5.
Kotne kockice



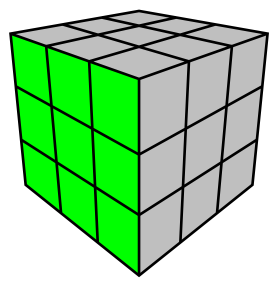
SLIKA 6.
Robne kockice

Vsaka izmed *šestih ploskev* je obarvana z eno od barv: oranžno, modro, belo, zeleno, rdečo ali rumeno. Barva ploskve je določena s sredinsko kockico. Ploskev je sestavljena iz devetih ploskev kockic. Razločimo *spodnjo*, *zgornjo*, *prednjo*, *zadnjo*, *levo* in *desno ploskev*.



SLIKA 7.
Ploskve

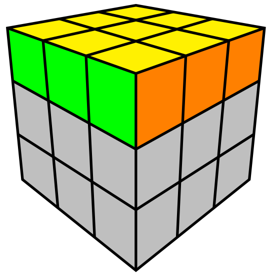
Plast je tretjina kocke, ki je sestavljena iz devetih kockic (razen srednje plasti, ki jo sestavlja osem kockic). Kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$ ima tri plasti.



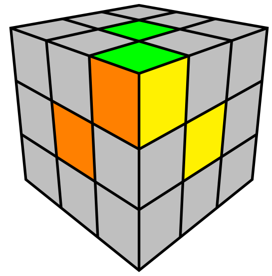
SLIKA 8.
Ploskev

Fridrichina metoda

Fridrichina metoda je najbolj znana metoda reševanje Rubikove kocke. Ime je dobila po *Jessici Fridrich*, ki je profesorica na Univerzi Binghamton. S hitrostnim reševanjem Rubikove kocke se je začela ukvarjati leta 1981 [3]. Postopek reševanja je razdeljen v več delov, ki se morajo izvesti v pravilnem zaporedju.



SLIKA 9.
Plast



SLIKA 10.
Orientirana kockica

Uporabljali bomo naslednje ukaze:

- F^{desno}: prednjo plast obrnemo v smeri urinega kazalca za 90° (en obrat).
- F^{levo}: prednjo plast obrnemo v nasprotni smeri urinega kazalca za 90° (en obrat).
- R^{gor}: desno plast obrnemo gor za 90° (en obrat).
- R^{dol}: desno plast obrnemo dol za 90° (en obrat).
- L^{gor}: levo plast obrnemo gor za 90° (en obrat).
- L^{dol}: levo plast obrnemo dol za 90° (en obrat).
- D^{desno}: spodnjo plast obrnemo v smeri urinega kazalca za 90° (en obrat).
- D^{levo}: spodnjo plast obrnemo v levo za 90° (en obrat).
- U^{desno}: zgornjo plast obrnemo v smeri urinega kazalca za 90° (en obrat).
- U^{levo}: zgornjo plast obrnemo v nasprotni smeri urinega kazalca za 90° (en obrat).

Pravilno orientirana kockica pomeni, da se barva posamezne ploskve kotne kockice ujema s centri stikajočih se plasti (slika 10).

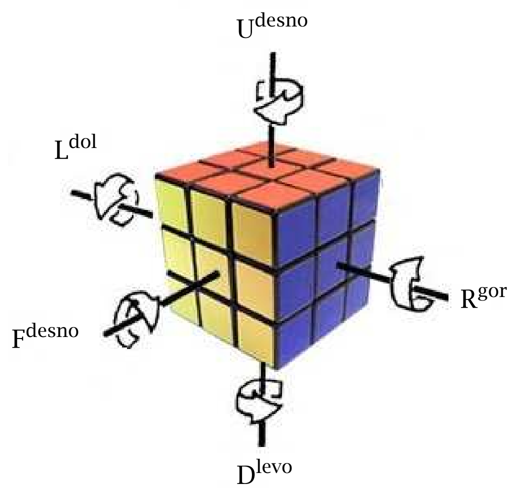
Pravilno poravnana kotna kockica vsebuje barve stikajočih se plasti, ni pa nujno, da je pravilno orientirana (slika 12).

Nerešena kockica pomeni, da kockica ni pravilno poravnana ali orientirana.

Fridrichina metoda je sestavljena iz sledečih korakov:

- *križ* (cross),
- *prvi dve plasti* (**F**irst two **L**ayers: **F2L**),
- *orientacija zadnje plasti* (**O**rientation of **L**ast **L**ayer: **OLL**),
- *permutacija zadnje plasti* (**P**ermutation of the **L**ast **L**ayer: **PLL**).

Vsi koraki metode bodo predstavljeni bolj podrobno.

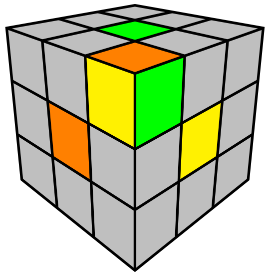


SLIKA 11.
Ukazi

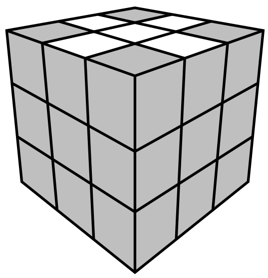
Križ

Cilj: pravilno poravnane in orientirane robne kockice v zgornji plasti (v našem primeru bele barve – slika 13).

1. Ponavljaj, dokler robne kockice zgornje plasti niso pravilno poravnane in orientirane.
   1.1. Postavitev kocke: ploskev, na kateri želiš narediti križ, naj bo zgoraj.
   1.2. Poišči nerešeno zgornjo robno kockico prednje plasti in obrni kocko, da bo izbrana kockica na prednji plasti.

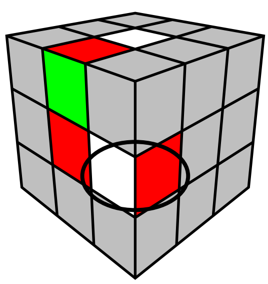


SLIKA 12.
Poravnana kockica

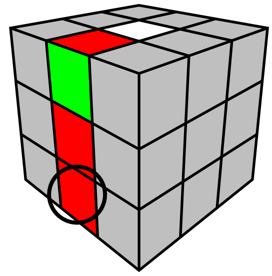


SLIKA 13.
Križ

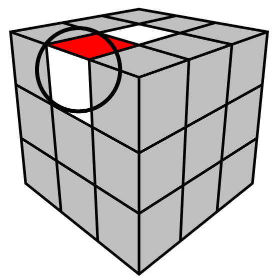
1.3. Premakni pravilno poravnano ali orientirano robno kockico (takšne barve, kot je center prednje in zgornje ploskve – slika 14), da bo v spodnji plasti pod centrom prednje plasti (slika 15).
1.4. $2 \times \mathrm{F}^{\mathrm{levo}}$.
1.5. Če robna kockica ni pravilno orientirana (slika 16): $\mathrm{F}^{\mathrm{levo}}$, $\mathrm{U}^{\mathrm{desno}}$, $\mathrm{L}^{\mathrm{gor}}$, $\mathrm{U}^{\mathrm{levo}}$.



SLIKA 14.
Iskana robna kockica



SLIKA 15.
Premik robne kockice

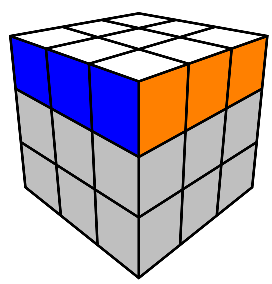


SLIKA 16.
Nepravilno orientirana robna kockica

Prvi dve plasti

Ta korak bo razdeljen na podkoraka *Reši kote prve plasti* in *Reši srednjo plast*.

Reši kote prve plasti *Cilj*: pravilno orientirane kockice v zgornji plasti (slika 17).



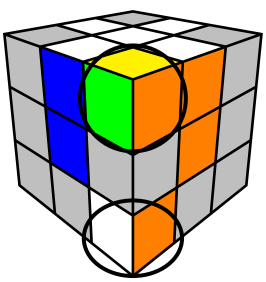
SLIKA 17.
Rešena prva plast

1. Ponavljaj, dokler kotne kockice zgornje plasti niso pravilno orientirane.
   1.1. Postavitev kocke: rešene robne kockice (križ) naj bodo na zgornji ploskvi.
   1.2. Če obstaja nerešena kotna kockica barve zgornje ploskve v spodnji plasti (slika 18), zavrti spodnjo plast (D^{levo} ali D^{desno}), da bo izbrana kockica poravnana v spodnji plasti.
      1.2.1. Če ima pravilno poravnana kotna kockica na *spodnji* ploskvi barvo centra zgornje ploskve:
      R^{dol}, $2 \times D^{\text{levo}}$, R^{gor}, D^{levo}, R^{dol}, D^{desno}, R^{gor}.
      1.2.2. Če ima pravilno poravnana kotna kockica na *desni* ploskvi barvo centra zgornje ploskve:
      R^{dol}, D^{desno}, R^{gor}
      1.2.3. Če ima pravilno poravnana kotna kockica na *prednji* ploskvi barvo centra zgornje ploskve:
      D^{desno}, R^{dol}, D^{levo}, R^{gor}.
   1.3. Če v spodnji plasti ni več nerešenih kockic, zgornja plast pa še ni rešena, poišči v zgornji plasti napačno orientirano kotno kockico, obrni kocko, da je v desnem sprednjem kotu in jo prestavi v spodnjo plast:
   R^{dol}, D^{desno}, R^{gor}, D^{levo}.

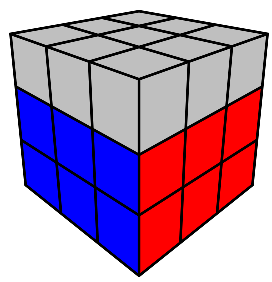
Reši srednjo plast

Cilj: pravilno orientirane in poravnane kockice v srednji plasti (slika 19).

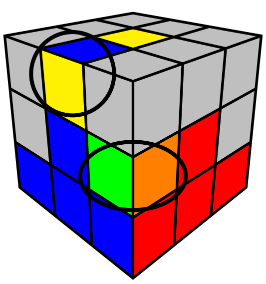
1. Obrni kocko, da je trenutna zgornja plast sedaj spodnja plast.
2. Ponavljaj, dokler v zgornji plasti niso robne kockice pravilno poravnane in orientirane
   2.1. Poišči robno kockico zgornje plasti, ki na nobeni ploskvi ne vsebuje barve centra.
   2.2. Če ni takšne kockice (slika 20):



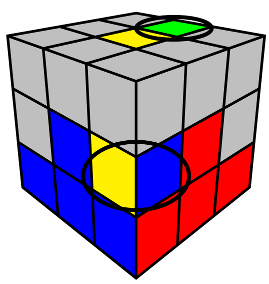
SLIKA 18.
Spodnja kotna kockica



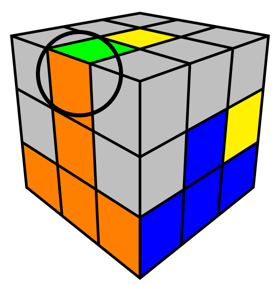
SLIKA 19.
Rešeni spodnji dve plasti



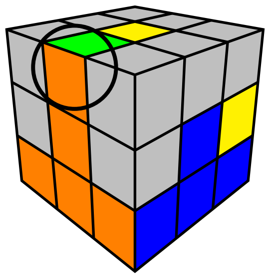
SLIKA 20.
Robne kockice z barvo centra



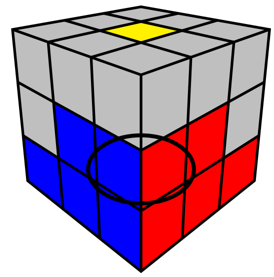
SLIKA 21.
Rezultat po izvedbi koraka 2.4.



SLIKA 22.
Poravnava zgornje plasti



SLIKA 23.
Poravnava spodnjih plasti



SLIKA 24.
Rezultat po izvedbi koraka 2.4.

2.2.1. Izvedi korake točke 2.4. (slika 21) ali 2.5., da spraviš desno ali levo robno kockico prednje plasti v zgornjo plast.

2.2.2. Poravnaj zgornjo plast, da se bo robna kockica ujemala s centrom ene izmed ploskev (slika 22).

2.3. Obrni spodnji dve plasti, da se bo prednja ploskev robne kockice ujemala s centrom prednje ploskve (slika 23).

2.4. Če se zgornja ploskev robne kockice ujema s centrom *desne* ploskve:
U^{desno}, R^{gor}, U^{levo}, R^{dol}, U^{levo}, F^{levo}, U^{desno}, F^{desno} (dobimo situacijo prikazano na sliki 24).

2.5. Če se zgornja ploskev robne kockice ujema s centrom leve ploskve (slika 23):
U^{levo}, L^{gor}, U^{desno}, L^{dol}, U^{desno}, F^{desno}, U^{levo}, F^{levo}.

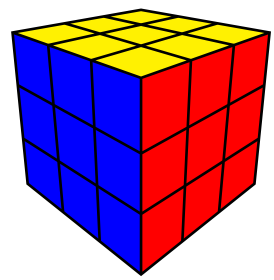
Orientacija in permutacija zadnje plasti

Cilj: pravilno orientirane in poravnane kockice v zgornji plasti (slika 25).

1. Če imaš na zgornji ploskvi že križ, pojdi na korak 3.
2. Ponavljaj, dokler nimaš na zgornji ploskvi križa.

   2.1. Obrni kocko tako, da bo zgornja plast v enem izmed prikazanih položajev na spodnjih slikah. S puščicami zgoraj je nakazan prehod med koraki, ki ga izvedemo s ponovitvami algoritma 2.2 (slika 26):
   F^{desno}, R^{gor}, U^{desno}, R^{dol}, U^{levo}, F^{levo}.

3. Ponavljaj, dokler niso robne kockice zgornje plasti pravilno poravnane in orientirane:



SLIKA 25.
Rešena Rubikova kocka

   3.1. Če imaš en križ na eni izmed ploskev (križ na zgornji ploskvi ne šteje!) obrni kocko, da bo križ na sprednji ploskvi.

   3.2. Poravnaj zgornjo plast tako, da dobiš dva križa na dveh ploskvah.

   3.3. Če sta križa na sosednjih ploskvah: obrni kocko, da imaš na desni in zadnji ploskvi križ.

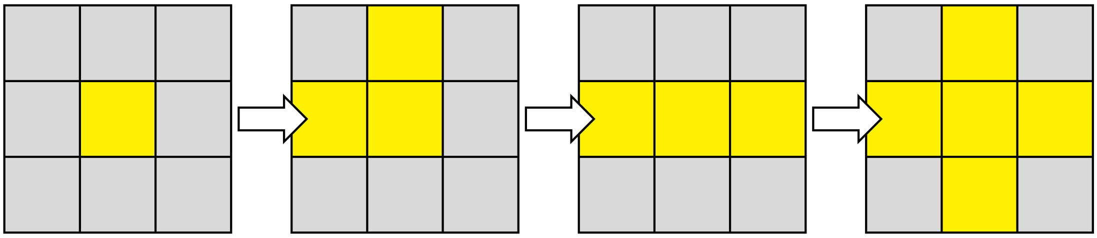
   3.4. Če sta križa na nasprotnih ploskvah: obrni kocko, da bo križ na prednji in zadnji ploskvi.

   3.5. Izvedi:
   R^{gor}, U^{desno}, R^{dol}, U^{desno}, R^{gor}, $2 \times U^{desno}$, R^{dol}, U^{desno}.

4. Če v zgornji plasti nimaš nič pravilno poravnanih kotnih kockic:

   4.1. Ponavljaj, dokler nimaš vsaj ene pravilno poravnane kotne kockice:
   U^{desno}, R^{gor}, U^{levo}, L^{gor}, U^{desno}, R^{dol}, U^{levo}, L^{dol}.

5. Obrni kocko tako, da bo pravilno poravnana kotna kockica v desnem zgornjem kotu.



SLIKA 26.
Prehod med koraki po izvedbi koraka 2.2.

6. Ponavljaj, dokler niso vse kotne kockice pravilno poravnane:
U^{desno}, R^{gor}, U^{levo}, L^{gor}, U^{desno}, R^{dol}, U^{levo}, L^{dol}.
7. Ponavljaj, dokler se vse kotne kockice ne ujemajo z barvami sprednje in zgornje ploskve.
   7.1. Obrni zgornjo plast, da bo nerešena kotna kockica v desnem zgornjem kotu.
   7.2. Ponavljaj, dokler se barve kotne kockice ne ujemajo s sprednjo in zgornjo ploskvijo:
   R^{dol}, D^{desno}, R^{gor}, D^{levo}.
8. Poravnaj plasti kocke, da se bodo ujemale s ploskvami kocke.

Zaključek

Uspelo? Če ne, nič zato. Poskusi znova. Če ti je uspelo, odlično! Pridno vadi, da ti bo reševanje šlo hitreje od rok. Še zanimivost: v Sloveniji imamo Rubik klub (RubiKS), za ljudi vseh starosti, ki se ukvarjajo z dejavnostjo, povezano z mehanskimi ugankami, med njimi tudi Rubikovo kocko [4]. V eni od prihodnjih številk bomo predstavili algoritem za reševanje Rubikovih kock $4 \times 4 \times 4$.

Literatura

[1] How to Solve the Rubik's Cube! (Beginner Method) (citirano dne 23. 12. 2014, dostopno na `https://www.youtube.com/watch?v=tYmtdFM1Zwk`).

[2] S. Gerhold, *Razvoj interaktivne Rubikove kocke*, Ljubljana, 2014.

[3] Jessica Fridrich (citirano dne 23. 12. 2014, dostopno na `http://www.ws.binghamton.edu/fridrich/`).

[4] Rubiks (citirano dne 23. 12. 2014, dostopno na `http://www.rubik.si/klub/`).

[5] `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rubix_cube.jpg`

[6] `http://zavaboy.deviantart.com/art/Animated-Blank-Rubik-s-Cube-53031084`

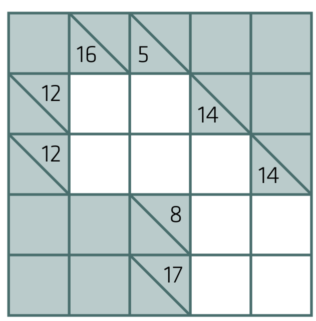
[7] `http://www.wikihow.com/Make-Awesome-Rubik's-Cube-Patterns`

× × ×

Križne vsote

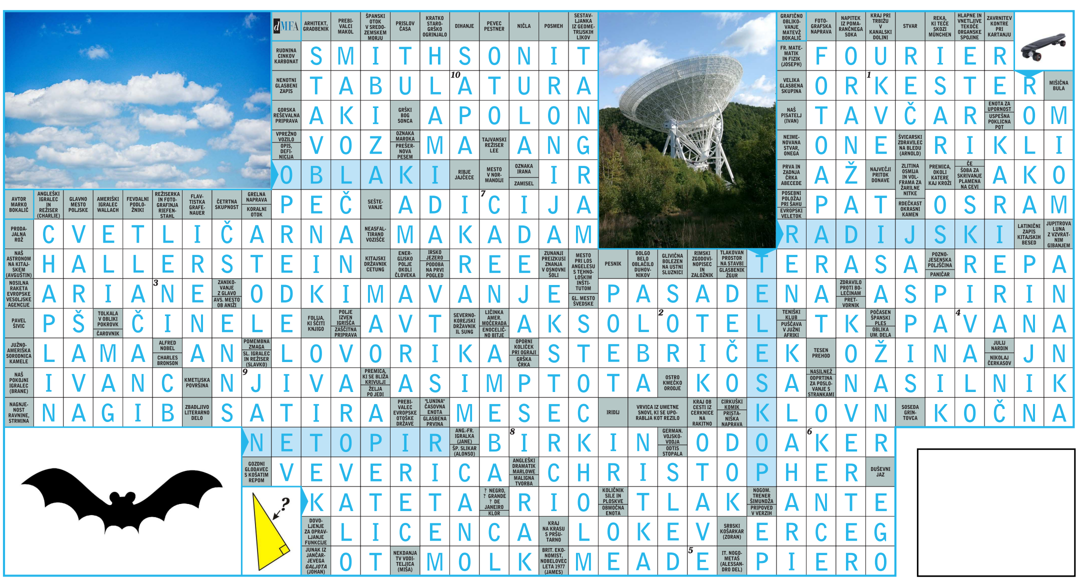
↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

↓↓↓



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 42/3

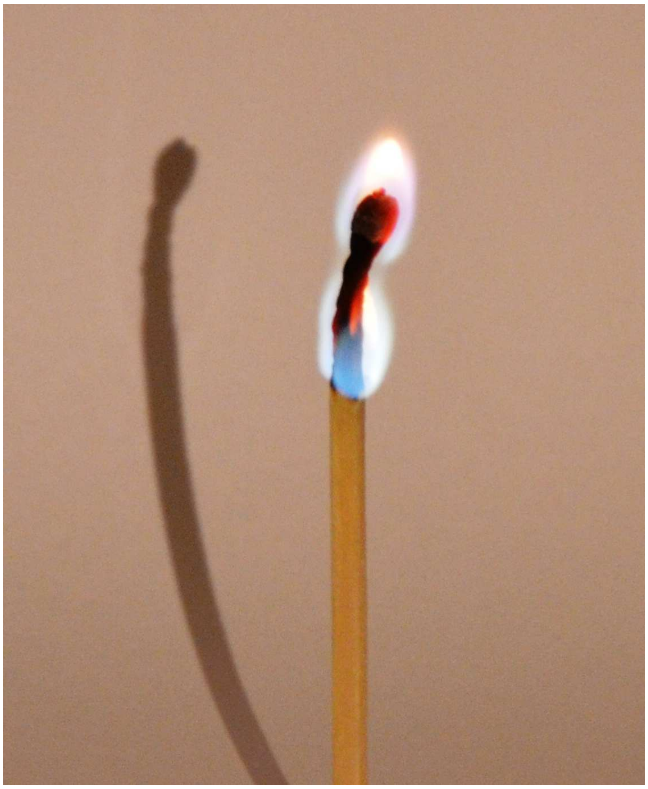
→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz tretje številke 42. letnika Preseka je **Konvekcija.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Marija Langus iz Tržiča, Urška Kendar Mavrar iz Grahovega ob Bači in Andreja Cvetko iz Ruš, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Nevidna senca

Aleš Mohorič

Na tokratni naravoslovni fotografiji je goreča vžigalica. Na sliki sta vidna vžigalica ter plamen, razdeljen na dva jezika. Vžigalico vidimo zato, ker je osvetljena, plamen pa bi videli tudi v temi. Preusmerimo pozornost na senco, ki jo vidimo na zaslonu, za vžigalico. Zaslon osvetljuje majhna lučka, ki je postavljeno desno, za hrbtom opazovalca. V senci jasno prepoznamo vžigalico. Njena senca je nekoliko zakrivljena, ker zaslon ni raven. Na zaslonu sence plamena ne opazimo. Zakaj?



Senca nastane, kadar med lučko in zaslonom stoji neprozorno telo. Telo ni prozorno, če odbija ali absorbira svetlobo. Senco opazimo kot razlike v osvetljenosti zaslona, nastane pa na delih zaslona, ki jih ne dosežejo žarki iz lučke. Ti žarki na svoji poti dosežejo telo in se na njem odbijejo stran od zaslona. Oblika sence ustreza obliki telesa. Rob sence je oster, kadar je lučka majhna; zasenčeni del se jasno loči od osvetljenega. Telo, ki ga osvetljuje več lučk, ustvari na zaslonu več senc na različnih mestih. Sence se lahko tudi prekrivajo; tam je zaslon najtemnejši. Če uporabimo luč, ki ima veliko, svetlo površino, prehod iz svetlega v temni del zaslona ni oster; v tem področju je polsenca. Telo iz prozorne snovi, ki ima lomni kvocient drugačen od okolice, prepusti žarke, vendar jim lahko spremeni smer zaradi loma svetlobe. Telo tedaj deluje kot nekakšna leča, svetlobo v nekaterih smereh zbira ali razprši, tako da je zaslon nekje svetlejši, drugje pa temnejši.

Plamen vžigalice je za svetlobo skoraj prozoren. Z očmi ga vidimo zato, ker svetloba izvira iz plamena, in ne zato, ker bi se od njega odbijala svetloba lučke. Če bi senco opazovali nekoliko drugače, bi vpliv plamena na svetlobo vendarle opazili. V plamenu je zrak vroč in ima nekoliko drugačen lomni kvocient od hladnega zraka v okolici. Zato lahko na zaslonu opazimo migotice – rahle polsence. V plamenu so tudi vzbujene in ionizirane molekule. Zato lahko plamen vpliva na barvo prepuščene svetlobe. Kadar gorita, denimo, les ali vosek, so v plamenu tudi saje. Saje svetlobo absorbirajo in za plamenom nastane rahla senca.

Senca goreče vžigalice nas torej najprej preseneti, ker na njej ne opazimo plamena, z natančnejšim premislekom pa lahko odkrijemo še druge zanimivosti.

Poskusite sami postaviti luč in vžigalico tako, da boste v senci opazili tudi plamen.

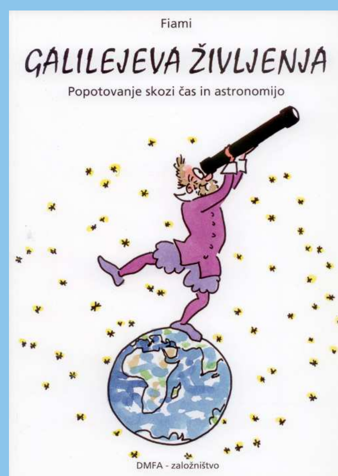
× × ×

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

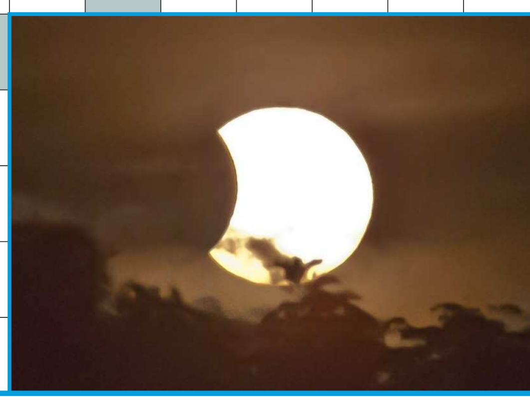
Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

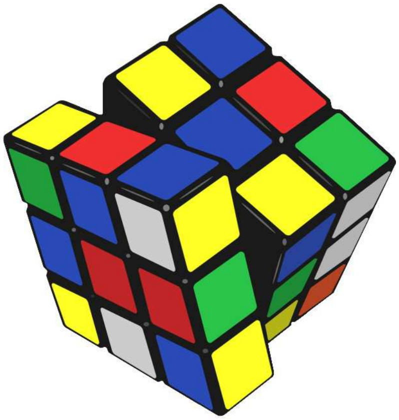
Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.

Nagradna križanka

AVTOR MARKO BOKALIČ
USTVARJALKA
RAZPOK ALI RAZTRGANJE TKIVA
NEKDANJI TRINIDAD. SPRINTER BOLDON
LIDIJA HREN
JED
KRAJŠA OBLIKA IMENA ERNESTINA
MINERAL TITANOV SILIKAT, TITANIT
OPRIJETA ŽENSKA MAJICA BREZ ROKAVOV
METEOROLOGIJA
MONARHIČNO UREJENA DRŽAVA
ANG. FIZIK, KI JE RAZVIL MODEL ATOMA (ERNEST)
3
ERITROPOETIN
UKRAJIN. VELETOK
MEHKA KOŠARICA Z ROČAJEMA
ASTAT
OSNOVNA TISKARSKA BARVA
AM. IGRALEC (ED)
MAGNEZIJ
SUNKOVIT PREMIK SEM IN TJA
PREDOR
NAJVIŠJI TAROK
KSENIJA HORVAT
SPANJE
SKANDINAVSKI DROBIŽ, ERE
PREPRIČANJE, DA NI NIČ ZANESLJIVO RES, NAGNJENJE K DVOMU
KRAJ PRI JESENICAH
OKSID
PRAVILA LEPEGA VEDENJA
PEVEC SMOLAR
ZASTOJ V DELOVANJU STROJA
STAROGR. MATEMATIK IN MEHANIK
TIHOST
ŽELEZNA PRIPRAVA ZA SPENJANJE, KLAMFA
SAMEC GOVEDA
DRUGA MOHAMEDOVA ŽENA
BODIČAST IZRASTEK
GRMIČASTA GOZDNA PODRAST
KNOCKOUT
KOKOŠ (GLEDE NA OGLAŠANJE)
OČESCE
GORA V AVSTRIJ. DELU KARAVANK
SLOVENSKI
KVAČKANEC
GRŠKE BOGINJE MAŠČEVANJA
2
NAVOJNICA
HUDA OSLABELOST
UMETNOST RAZPRAVLJANJA
6
OMEJITEV UŽIVANJA HRANE IN ČAS TE OMEJITVE
GLAS PRI ŠKREBLJANJU
PISATELJ MURNIK
PODREDNI VEZNIK, KADAR
JURE IVANUŠIČ
ORANŽNA PRILOGA JEDEM Z ŽARA
ERBIJ
TOMAŽ ŠALAMUN
POČITNIŠKE VERSKE DELAVNICE ZA OTROKE
GR. TEOLOG
5
NEKDANJI SULTANOV DVOR V CARIGRADU
GRAFIČNI SIMBOL NA ZASLONU RAČUNALNIKA
STARO BALKAN. LJUDSTVO
INDONEZ. OTOK
TRNASTO GRMOVJE
FRAJER, DŽEK
TURIST. SREDIŠČE V ŠVICI
RITMIČNA ENOTA
KAPITAN, KI JE LOVIL KITA MOBYJA DICKA



RAZTOPINA BITUMNA ZA PREMAZ PROTI VLAGI
9
BIVALNA USTANOVA, KI NUDI VSO OSKRBO
TILEN ARTAČ
TLA POD VODO
POKOJNI IGRALEC IZ NOVE GORICE (ERNEST)
LETNI DOPUST
TANTAL
RADIJSKA ŽARNICA, PREDHODNICA TRANZISTORJA
VELIKA MORSKA RIBA ROMBIČNE OBLIKE
GORATA DOMOVINA MOABITOV V JORDANIJI



POVRŠINSKA POŠKODBA, OPRASKANINA

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ

PROMETNI OBJEKT PREK DOLINE

OSTANKI PRI MLETJU ŽITA

ZELO TANKI RASTLIN. IZRASTKI

TRDNO ZEMELJ. POVRŠJE

PRETVORNIK ZVOČNIH NIHANJ V ELEKTR. NAPETOST

ELFRIEDE JELINEK

GR. MIT. JUNAK, KI JE TRPEL HUDE MUKE

OSREDNJI JUNAK *ENEIDE*

SERPENTINE

MERILNIK ELEKTRIČNE NAPETOSTI

PREBIVALCI SOSEDNJE DRŽAVE

IGRALEC BEATTY

PLOŠČA IZ LESNIH DROBCEV

ZAČETNIK PRVE PARTSKE DINASTIJE

PRISTANIŠKA NAPRAVA

1

RAZRIVANJE, RINJENJE

ILUSTRATOR

VEROUČNI UČBENIK

VOLILNI KNEZ

KITAJSKA DENARNA ENOTA

DMFA

NAŠ PRAVNIK IN PUBLICIST (LOJZE)

ČEBELJE DOMOVANJE

MAŠČOBA V TEKOČI OBLIKI

RIHARD JAKOPIČ

SOPROGA ROGERJA MOORA

JAPONSKI AVTO

OD SONCA NAJBOLJ ODDALJENA TOČKA PLANETA

7

KOLIČINA, KI NASTOPA V OHMOVEM ZAKONU

IZCEDEK ALI IZLOČEK PRI VNETJIH

TRENJE

HIDRATNO ŽIVILO

SOSEDI ČRKE V

ANGLEŠKI PISATELJ (GEORGE)

OMEJEN ODSEK NA PREMICI

NEPRIJETEN OKUS

NAŠ FIZIK (JANEZ)

DALMATIN. OTOK

LETOVIŠČE V HRVAŠK. PRIMORJU

10

VARUH, TUTOR

MOJZESOV BRAT

SLAVKO AVSKENIK

ŠPARTANSKI KRALJ

ZAMAŠEK ZA SODE

SREDOZEM. DREV. PLOD

WAYNE ROONEY

LETOVIŠČE NA HVARU

SPAKA KOT OKRAS NAD VHODOM

SMUČARKA BUCIK

PEVKA SIRK

NA DOLOČ. SNOV PREOBČUTLJIV ČLOVEK

GLASBENO DELO

EDWIN ALDRIN

VELIKI TRAVEN

VRTNA ZAČIMBNA RASTLINA

GL. MESTO ZGORNJE AVSTRIJE

AM. JAZZ. GLASBENIK (KEITH)

FILM. USTVARJALEC

UDOBEN STOL

PODOLGOVAT ZRAKOPLOV

8

NOVODOBNI BOGATAŠ

NENASIČEN OGLJIKOVODIK S TROJNO VEZJO

ZNIŽANI TON A

MOŠTVO, EKIPA

V SINJU OHRANJENA JAHALNA PRIREDITEV

IGRA GIBOV

ALFRED NOBEL

STARO NASELJE PRI ZADRU

RAZSTAVLJANJE, RUŠENJE

11

ZDRUŽENE DRŽAVE

GASILSKO DRUŠTVO

SPLETNA ŠTEVILKA RAČUNALN.

BEL TROPSKI PTIČ

NAPETOST MIŠIČNEGA TKIVA

4

ODPOVED ORGANA ZARADI ZAMAŠITVE ŽILE

HOKEJSKI PLOŠČEK

OZNAKA TUNIZIJE

NIKOLA TESLA

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. marca 2015**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×