roba do roba. Vredno je kupiti novejše konstrukcije, saj je kontrola kakovosti boljša in pri zrcalno refleksnih aparatih je t. i. fazno avtomatično ostrenje z novimi tipi motorčkov precej bolj zanesljivo.

Literatura

[1] P. Legiša, *Moteča perspektiva*, Presek **44** (2016), 1, 4–14.

[2] R. Cicala, *Lensrentals Repair Data: 2012-2013*, https://www.lensrentals.com/blog/2013/08/lensrentals-repair-data-2012-2013/, ogled: 1. 3. 2017.

[3] Strokovnjaka firme Zeiss razlagata popačenje: B. Hönlinger, H. H. Nasse, *Verzeichnung*, Carl Zeiss Camera Lens News, Photo-Objektive, Oktober 2009, http://www.zeiss.com/content/dam/Photography/new/pdf/de/cln_archiv/cln33_de_web_special_distortion.pdf, angleška verzija: *Distortion*, http://lenspire.zeiss.com/en/wp-content/uploads/sites/2/2016/01/cln33_en_web_special_distortion.pdf, ogled: 1. 3. 2017.

[4] Interaktivne ilustracije članka so na avtorjevi strani na GeoGebra Tube: https://www.geogebra.org/peter.legisa, ogled: 1. 3. 2017.

[5] S. F. Ray, *Applied photographic optics*, Second ed., Focal Press, Oxford 1995.

[6] R. Cicala, *Fun with field of focus II*, https://www.lensrentals.com/blog/2016/11/fun-with-field-of-focus-ii-copy-to-copy-variation-and-lens-testing/, ogled: 1. 3. 2017.

[7] R. Cicala, *Is your camera really the best optical test*, https://www.lensrentals.com/blog/2016/09/is-your-camera-really-the-best-optical-test/, ogled: 1. 3. 2017.

[8] Cambridge in Colour, *Lens Diffraction and Photography*, http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/diffraction-photography.htm, ogled: 1. 3. 2017.

×××

Vsota kvadratov prvih n zaporednih naravnih števil

↓↓↓

Jens Carstensen in Alija Muminagić

→ **Ko boste prebrali naslov, si boste verjetno mislili, saj to pa dobro poznamo. Kaj novega pa lahko še izvemo? Avtorja misliva drugače in zato sva napisala ta članek.**

Najprej opišimo zgled, kje na omenjeno vsoto lahko naletimo v življenju. Zamislite si jabolka, zložena v kvadratno piramido. Eno na vrhu, pod njim so štiri, zložena v kvadrat s stranico po dve jabolki, v tretji plasti nato sledi devet jabolk in tako dalje. Koliko je vseh jabolk v piramidi, če vemo, iz koliko plasti je sestavljena? Ravno toliko, kot vsota, ki jo obravnavamo. Poznamo mnogo (tudi zelo duhovitih) dokazov, da je

- $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2b+1)}{6}$. (1)

Eden od takih je tudi ta dokaz: enostavno preverimo, da za vsa realna števila a velja enostavna zveza:

- $a(a+1)^2 - a(a-1)^2 = 4a^2$.

Če za a po vrsti vstavljamo naravna števila 1, 2, 3, …, n, dobimo vrsto enačb: od $1 \cdot 2^2 – 1 \cdot 0^2 = 4 \cdot 1^2$ do $n(n+1)^2 – n(n-1)^2 = 4n^2$. Vrsto enačb nato seštejmo:

- $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 + n(n+1)^2 - 1\cdot 0^2 - 2\cdot 1^2 - \ldots - (n-1)(n-2)^2 - n(n-1)^2 =$
  $= 4(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2)$.

Vidimo, da se na desni pojavi člen, ki bi ga radi izračunali. Člene na levi lahko preuredimo in pri tem upoštevamo, da je $1 \cdot 0^2 = 0$ v:

- $-2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots +$
  $+ (n-1)n^2 + n(n+1)^2 = 4S_2$.

Upoštevajmo še $1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 = -2 \cdot 2^2, 2 \cdot 3^2 – 4 \cdot 3^2 = -2 \cdot 3^2, \ldots, (n-2)(n-1)^2 - n(n-1)^2 = -2(n-1)^2$, pa dobimo

- $-2[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] + (n-1)n^2 +$
  $+ n(n+1)^2 = 4S_2$.

Izraz v oglatih oklepajih lahko izrazimo z vsoto, ki jo želimo izračunati: $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = S_2 - n^2$ in ostane nam:

- $-2(S_2 - n^2) + n^2 - n^2 + n^3 + 2n^2 + n = 4S_n$.

Od tu brez težav izrazimo

- $S_2 = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ta dokaz je neizpodbiten (in eleganten), vendar nanj lahko damo nekaj pripomb: 1. Kako vemo, da je vsota kvadratov prvih zaporedni naravnih števil enaka prav $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$? 2. Kako smo se domislili enačbe $a(a+1)^2 - a(a-1)^2 = 4a^2$?

Pokazali bomo, kako lahko zaslutimo, da velja enačba (1). Dobro je znana vrsta prvih n zaporednih naravnih števil:

- $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (2)

Oglejmo si sledečo tabelo 1.

Vidimo, da je $\frac{S_2}{S_1} = \frac{2n+1}{3}$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Od tu sledi:

- $S_2 = \dfrac{(2n+1)S_1}{3} = \dfrac{(2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{3}$
  $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Deduktivno iskanje kvocientov je zelo zanimivo in nam da idejo, kako priti do izraza, vsekakor pa to ni dokaz. To zvezo bi lahko dokazali npr. z indukcijo. Poskusite!

Literatura

[1] A. Muminagić, *Suma kvadrata prvih n uzastopnih prirodnih brojeva*, časopis MiŠ, 59, 60 in 61, 2011.

[2] J. Carstensen, *Kvadratsummen*, Matematik Magasinet 78, 2014.

[3] G. S. Barnard, *Looking for patterns*, The mathematical gazette, 436, 1982.

n	1	2	3	4	5	6	…
S_1	1	3	6	10	15	21	…
S_2	1	5	14	30	55	91	…
$\frac{S_2}{S_1}$	$\frac{1}{1} = \frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$	$\frac{30}{10} = \frac{9}{3}$	$\frac{55}{15} = \frac{11}{3}$	$\frac{91}{21} = \frac{13}{3}$	…

TABELA 1.

× × ×