PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **3** (1975/1976)
Številka 1
Strani 9–14

Matjaž Omladič:

ZAGONETNI FERMAT

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/3/3-1-Omladic.pdf

ZAGONETNI FERMAT

1. Mirno življenje

V malem mestecu Beaumont-de-Lomagne na skrajnem jugu Francije, v vojvodini Gascogni, se je 4. avgusta 1601 rodil eden največjih matematikov vseh časov Pierre de Fermat. Umrl je dobrih 63 let kasneje, 12. januarja 1665 v bližnjem kraju Cartresu, kjer je tudi pokopan.

O življenju človeka, katerega genij še danes občudujemo, vemo le malo. Njegov oče Dominique je bil trgovec z usnjem in beaumonški uradnik, mati Claire de Long pa je izvirala iz pravniške družine. Šolal se je v rojstnem kraju in v bližnjem Toulousu, kjer je končal študij prava ter postal sodni uradnik. Kasneje se je tudi za stalno naselil v Toulousu, se poročil in imel pet otrok. Njegova pravniška kariera je bila počasna in mirna ter je dosegla svoj vrh takrat, ko je bil imenovan za kraljevega svetnika v lokalnem parlamentu v Toulousu. Nekateri viri pričajo o tem, da se je odlikoval po svojem poštenju, obzirnosti in zglednem vedenju. Svoj prosti čas je Fermat posvečal matematiki in dosegal izredne rezultate.

Danes velja za začetnika diferencialnega računa in skupaj z drugim znanim francoskim matematikom Blaiseom Pascalom za tvorca teorije verjetnosti. Njegova verjetno najpomembnejša odkritja pa sodijo v področje matematike, ki mu danes pravimo teorija števil. Na žalost nimamo pravega pregleda nad celotnim njegovim matematičnim delom, saj je svoje rezultate redko objavljal. Nekaj o njegovem delu lahko izvemo iz pisem, ki jih je pisal drugim matematikom in fizikom svojega časa. Dopisoval si je s Pascalom, Renéjem Descartesom in mnogimi drugimi, po nekaterih virih celo z Isaacom Newtonom. Navadno je Fermat svoje matematične domisleke pripisal kar na robove knjig, ki jih je prebiral. Njegov sin Samuel je imel težko delo, ko je poskušal po očetovi smrti zbrati njegovo delo in ga izdati v knjižni obliki. Kljub temu je knjiga leta 1679 izšla pod naslovom *Varia opera mathematica*, ta knjiga pa je hkrati tudi edino pričevanje, ki nam je ostalo o Fermatovem delu. Precejšnje število Fermatovih trditev je ostalo nedokazanih, bodisi da so se dokazi izgubili, bodisi jih zagonetni, a genialni mož ni nikdar zapisal. Cela desetletja so minila, preden so najboljši matematiki Evrope uspeli razvozlati nekatere Fermatove uganke. Ena med njimi je še dobrih 300 let po njegovi smrti ostala nerazrešena, to je sloviti "poslednji izrek".

2. Tangenta na krivuljo

Tangenta na krivuljo je eden najpomembnejših pojmov, ki jih je vpeljal Fermat in prav to ga postavlja na čelo tistih, ki jih danes imamo za začetnike diferencialnega računa.

Zamislimo si poljubno krivuljo v ravnini, npr. tako, kakršna je na sl.1 in izberimo točko T na krivulji. Tisti premici, ki bo šla skozi to točko in se bo najbolje prilegala krivulji v bližini te točke, bomo rekli *tangenta na krivuljo* v dani točki. Vprašanje je, kako priti do te premice?

Izberimo si na krivulji še dve nadaljni točki P in Q, eno npr. desno, drugo pa levo od točke T. Premica skozi ti dve točki je *sekanta krivulje*. Če bosta točki začeli drseti po krivulji vsaka s svoje strani proti točki T, pa bo sekanta najbrž vse bližje tangenti! In ko bosta končno točki zdrsnili v T, bo sekanta skočila v tangento!

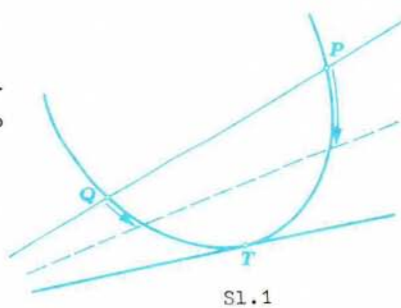
Že prav, boste rekli, toda kako to izračunati? Pa naj bo odslej krivulja podana kot graf neke funkcije $f(x)$ (sl.2). Na krivulji si izberimo točko T s koordinatama $(x_0, f(x_0))$ in točko P s koordinatama $(x_0+h, f(x_0+h))$. Danes si delo poenostavimo s tem, da drugo točko Q kar takoj postavimo v T. Naklon sekante je tedaj očitno

$$k_s = \frac{1}{h}|f(x_0+h) - f(x_0)|,$$

naklon tangente pa dobimo, če v zgornji izraz postavimo $h=0$. Funkcija, narisana na sl.2, ima enačbo

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Kaj hitro lahko izračunamo naklon sekante v točki x_0: $k_s = 2x_0 + h$,
naklon tangente : $k_t = 2x_0$
in tangento: $y = (2x_0)x + (1-x_0^2)$.



Sl.1

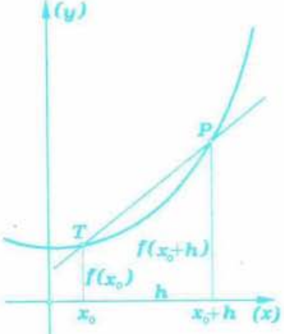
Poglejmo si še tole: smiselno je reči, da ima pri nekem številu x_0 funkcija največjo vrednost (maksimum), če ima v vseh bližnjih točkah manjšo vrednost. Podobno lahko definiramo minimum funkcije. Tako ima funkcija na sl.3 maksimum v točkah x_1 in x_3, minimum pa v točki x_2. Točkam obeh vrst pravimo s skupno besedo *lokalni ekstremi funkcije*. Iz slike pa lahko kaj hitro razberemo tole resnico: v točkah, kjer ima funkcija ekstrem, so tangente vodoravne! To pa pomeni, da je v teh točkah naklon tangente na krivuljo enak 0.

Funkcija na sl.2 ima očitno minimum pri $x=0$ in res je tangenta v točki 0, kakor smo že izračunali, $y=1$, torej vodoravna!

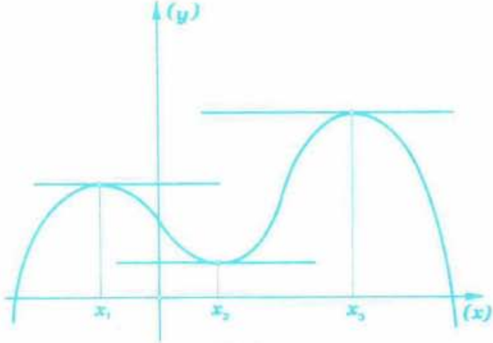
3. Fermatov princip

Fermat pa se ni ukvarjal samo z matematiko, ampak je včasih posvetil svoj čas tudi nekaterim fizikalnim problemom. Med njegova najpomembnejša odkritja s tega področja štejemo danes njegovo trditev o širjenju svetlobe v optiki. To je znameniti *Fermatov princip*, ki pravi, da se svetloba širi po taki poti, za katero porabi najmanj časa. Fermatov sodobnik Descartes je ta princip v svojih pismih žolčno napadal in poskušal pri tem mirnega Fermata celo žaliti. Descartes je namreč v zvezi s širjenjem svetlobe zagovarjal svoje lomne in odbojne zakone, ki so sicer pravilni, ni pa sprevidel, da Fermat vidi dlje, saj so Descartesovi zakoni samo ena izmed posledic Fermatovega principa.

Prejšnje razmišljanje o tangentah nas je dovolj podkovalo, da bomo znali to razumeti!



Sl.2



Sl.3

Sl.4

Sl.5

Na sl.4 naj pomeni os x mejo med dvema optičnima srédstvoma. Recimo, da je nad osjo x zrak, pod njo pa voda. V sredstvu, ki leži nad osjo x, naj ima svetloba hitrost v_1, v tistem pod osjo pa hitrost v_2. V točki $A(0,a)$ prižgemo svetilko, enega izmed žarkov, ki jih svetilka pošilja na vse strani, prestrežemo v točki $B(c,-b)$.

Vprašamo se, kako je svetlobni žarek, ki smo ga prestregli, potoval do nas? Denimo, da je na mejo med sredstvoma, torej na os x, zadel žarek v točki $T(x,0)$. Po Fermatovem principu je od točke A do točke T potoval tako, da je za pot porabil najmanj časa. Na tej poti je ves čas potoval z enako hitrostjo in zato izbral najkrajšo pot med obema točkama, to je daljico $\overline{AT}$. Od točke T do točke B pa je prav tako potoval po daljici $\overline{TB}$. Iz fizike vemo, da je pot, ki jo naredimo v času t, če se gibljemo z enakomerno hitrostjo v, enaka $v \cdot t$; če zdaj upoštevamo še Pitagorov izrek, dobimo, da je čas, ki ga je svetlobni žarek porabil za pot od točke A do točke T

$$t_1 = \frac{\overline{AT}}{v_1} = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+a^2}$$

in čas za pot od točke T do točke B

$$t_2 = \frac{\overline{TB}}{v_2} = \frac{1}{v_2}\sqrt{(c-x)^2+b^2}$$

Če torej izberemo x in s tem točko T, bomo lahko izračunali čas, ki bi ga žarek porabil, če bi tudi on "izbral" isto točko T za pot od A do B! Celotni čas za to pot $t=t_1+t_2$ je torej še odvisen od izbire x, to je funkcija spremenljivke x! Na sl.5 je narisana ta funkcija.

Po Fermatovem principu mora biti točka T izbrana tako, da bo čas za pot od A do B izmed vseh možnih najmanjši! Točka T mora biti torej izbrana tako, da bo funkcija $t(x)$ imela v tej točki ekstrem, kar pomeni, da bo naklon tangente na funkcijo v tej točki enak 0. Naklon sekante na krivuljo je:

$$k_s = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{v_1}\sqrt{(x_0+h)^2+a^2} - \frac{1}{v_1}\sqrt{x_0^2+a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(c-x_0-h)^2+b^2} - \frac{1}{v_2}\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}\right]$$

Po kratkem računu dobimo:

$$k_s = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{2x_0+h}{\sqrt{(x_0+h)^2+a^2}+\sqrt{x_0^2+a^2}} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{-2(c-x_0)+h}{\sqrt{(c-x_0-h)^2+b^2}+\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}},$$

pri tem smo po dva in dva člena združili na skupni imenovalec in na znani način spravili korene iz števca v imenovalec. Naklon tangente dobimo pri $h=0$

$$k_t = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+a^2}} - \frac{1}{v_2}\cdot\frac{c-x_0}{\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}}$$

Povrnimo se k sliki 4, tu smo vrisali kota α in β. Očitno je

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{in} \quad \sin\beta = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

zato je

$$k_t = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2}$$

in iz pogoja $k_t=0$ dobimo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \quad !$$

To pa je ravno Descartesov lomni zakon! Svetlobni žarek, ki smo ga prestregli v točki B, je potoval tako, da je bil na meji med obema optičnima sredstvima izpolnjen ta zakon!

4. Teorija števil in poslednji izrek

Za konec naj navedem še dva Fermatova problema iz teorije števil. Najprej moram omeniti znameniti Fermatov izrek, ki ga je kakih 20 let po Fermatovi smrti prvi dokazal nemški matematik in filozof Gottfried Wilhelm Leibniz. Njegova vsebina je kaj preprosta: *Pri poljubnem naravnem številu n in praštevilu p je število*

$$M(n,p) = n^p - n$$

deljivo s p!

Da bi se prepričali o pravilnosti te trditve, si oglejmo nekatere primere. Tako je npr. $M(n,2) = n^2-n = n(n-1)$. Če je n deljiv z 2, tedaj je očitno tudi $M(n,2)$ deljiv z 2, če pa n ni deljiv z 2, tedaj je $n-1$ prav gotovo deljiv z 2 in spet je $M(n,2)$ deljiv z 2. S podobnim premislekom se prepričamo, da velja Fermatov izrek v naslednjih primerih:

$$M(n,3) = n^3-n = n(n-1)(n+1)$$
$$M(n,5) = n^5-n = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+1) + 5(n^3-n)$$
$$M(n,7) = n^7-n = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)(n-3)(n+3) + 7(n^3-n)(2n^2-5).$$

Ta izrek sodi, kot sem že omenil, v posebno vejo matematike, imenovano teorija števil, ki se ukvarja predvsem z naravnimi in celimi števili. Začetki te matematične teorije segajo še v stari vek, saj je že starogrški matematik Diofant iz Aleksandrije zastavljal in reševal probleme, ki sodijo v to vejo. Fermat je imel v svoji knjižnici tudi neko izdajo Diofantove matematike iz leta 1621, ki jo je vneto prebiral in včasih tudi zapisoval vanjo na robove svoje ideje. In prav na robu te knjige so našli trditev, ki se je glasila nekako tako: *Če je n poljubno naravno število, večje kot 2, potem ne obstajajo nobena taka cela števila x, y in z, da bi bila izpolnjena enačba*

$$x^n + y^n = z^n \,!$$

Ob tej trditvi je Fermat zapisal v isto knjigo, da pozna čudovit dokaz za to, da pa je na robu knjige premalo prostora, da bi lahko dokaz zapisal. S tem je Fermat zastavil matematičnemu svetu uganko, ki je doslej ni še nihče razrešil. Največji matematiki sveta so se ukvarjali s tem "poslednjim izrekom", toda nihče ga doslej ni znal niti dokazati, niti ovreči!

Jasno je, da pri $n=2$ celoštevilske rešitve zgornje enačbe obstajajo! Rešitve so tedaj npr. $x=3$, $y=4$, $z=5$; $x=5$, $y=12$, $z=13$; $x=7$, $y=24$, $z=25$; $x=8$, $y=15$, $z=17$; itd., nove rešitve pa dobimo iz teh, če vsa tri števila množimo z istim faktorjem. Tako so rešitve tudi $x=6$, $y=8$, $z=10$; $x=9$, $y=12$, $z=15$; $x=12$, $y=16$, $z=20$; itd. Vidimo, da je rešitev kar neskončno. Toda že za $n=3,4,5$ in še za nekatera druga naravna števila n so matematiki dokazali, da zgornja enačba sploh nima rešitev.

To pa še ni vse. Fermat je trdil še mnogo več!

Matjaž Omladič