# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **27** (1999/2000)
Številka 6
Strani 342–343

Anton Suhadolc:

## KRITERIJ DELJIVOSTI S PRAŠTEVILI

Ključne besede: matematika, teorija števil, praštevila, deljivost.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/27/1423-Suhadolc.pdf

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

# KRITERIJ DELJIVOSTI S PRAŠTEVILI

Profesor Rihard Zupančič[1] je objavil leta 1909 v časopisu *L'Enseignement mathematique*, volumen 11, na straneh 300–301 članek "Sur une question elementaire de divisibilite". V njem je na kratko izpeljal kriterij deljivosti naravnega števila s praštevilom. Ta preprost kriterij deljivosti se mi zdi zanimiv, zato ga podajam v nekoliko razširjeni obliki.

Dano naj bo naravno število $n$, zapisano v desetiškem sistemu. Naj bo $p$ praštevilo, večje ali enako 7. Vsako naravno število lahko zapišemo v obliki

$$n = 10q + r\,, \quad 0 \le r \le 9\,. \tag{1}$$

Privzemimo najprej, da je število $n$ deljivo s $p$:

$$n = 10q + r = k_1 p\,, \quad k_1 \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Vsako naravno število, zato tudi $q$, lahko zapišemo v obliki

$$q = k_2 p + m\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{3}$$

Iz enačbe (2) potem sledi

$$r = (k_1 - 10k_2)p - 10m\,. \tag{4}$$

Oglejmo si sedaj polinom $q + rx$, kjer naj $x$ teče po celih številih. Za $q$ in $r$ vstavimo izraza iz formul (3) in (4) ter dobimo

$$q + rx = (k_2 + k_1 x - 10k_2 x)p + m(1 - 10x)\,. \tag{5}$$

Sedaj pokažimo, da je za vsako praštevilo $p$, večje ali enako 7, mogoče izbrati celo število $x$ tako, da bo $1 - 10x$ deljivo s $p$; tedaj bo seveda tudi $q + rx$ deljivo s $p$. Obstaja torej $x \in \mathbb{Z}$, da velja

$$1 - 10x = k_3 p$$

ali za neki $k_3$ je

$$x = \frac{1 - k_3 p}{10} \tag{6}$$

[1] Dr. Rihard Zupančič je bil profesor matematike na tehniški fakulteti v Ljubljani od leta 1919 do leta 1945. Bil je tudi drugi rektor ljubljanske univerze v šolskem letu 1920/21.

celo število. To dokažemo takole: Praštevila večja od 7 so seveda liha, v njihovem dekadičnem zapisu je zadnja števka eno od števil 1, 3, 7 ali 9 (5 ne more biti, ker bi bilo tako število deljivo s 5). Za praštevila z zadnjo števko 1 izberemo zgoraj $k_3 = 1$; za ona z zadnjo števko 3, 7 ali 9, izberemo npr. $k_3 = 7, 3$ in 9. V vseh štirih primerih bo imel produkt $k_3 p$ zadnjo števko enako 1, zato bo $x$ v formuli (6) gotovo celo število.

Napravimo kratko tabelo števil $p$ in $x$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
| x | -2 | -1 | 4 | -5 | 2 | 7 |

Opazimo, da ima enačba (6) neskončno mnogo rešitev; poleg rešitve $x = -5$ pri $p = 17$ je npr. rešitev tudi $x = 12$ itd.

Pri danem naravnem številu $n$ in praštevilu $p \geq 7$ ugotavljamo deljivost števila $n$ s $p$ takole: Najprej poiščemo eno rešitev $x$ enačbe (6) in izračunamo število $q + rx$. Če je to število deljivo s $p$,

$$q + rx = k_4 p\,,$$

vstavimo q iz te enačbe v enačbo (1) in dobimo

$$n = 10(k_4 p - rx) + r = 10k_4 p + r(1 - 10x)\,.$$

Ker je $x$ rešitev enačbe (6), sledi

$$n = (10k_4 + rk_3)p$$

ali, $n$ je deljiv s $p$.

Izrek: Za dano praštevilo $p \geq 7$ naj bo $x$ ena rešitev enačbe (6). Tedaj je $n$ deljiv s $p$ natanko tedaj, ko je $q + rx$ deljivo s $p$.

Primer: Vzemimo $n = 7014$. Zanima nas, ali je to število deljivo s 7. Ker je $7014 = 10 \cdot 701 + 4$, je $q = 701$ in $r = 4$. Pri $p = 7$ je ena rešitev enačbe (6) $x = -2$. Po izreku izračunamo $q - 2r = 701 - 8 = 693$. Ker je to število veliko, moremo njegovo deljivost s 7 spet ugotavljati po našem izreku. Sedaj je $q = 69$ in $r = 3$, zato $q + rx = 69 - 2 \cdot 3 = 63$, ki je deljivo s 7. Torej je tudi število 693 in zato 7014 deljivo s 7.

Poglejmo še, ali je število 7014 deljivo tudi s 13. Sedaj vzamemo npr. $x = 4$ in dobimo $q + rx = 717$. Če za število 717 ponovno uporabimo navodilo izreka, dobimo $q + rx = 99$, to število pa očitno ni deljivo s 13, zato tudi 7014 ni.

*Anton Suhadolc*