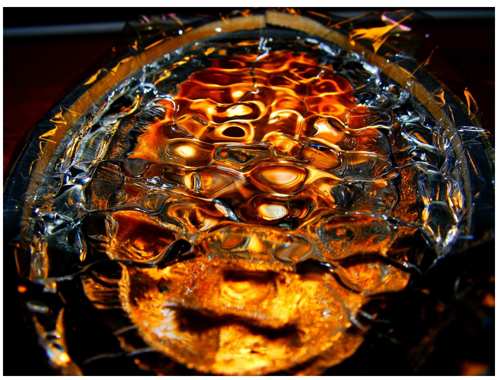
Ali se po vsem tem še kdo čudi, da sem pri Preseku še vedno urednik za fiziko? Morda bo tako še nekaj časa, saj se morajo mladi posvečati raziskovanju, ki prav zaradi razvoja računalnikov in zapletene laboratorijske opreme postaja vse bolj zahtevno, tako po miselnih naporih kot tudi časovno. Tudi profesorjem na srednjih šolah in učiteljem na devetletkah ne ostane kaj dosti prostega časa in volje, da bi še urednikovali in pisali za Presek. A mladih raziskovalcev in pedagogov ni tako malo in upam, da bo kmalu kdo od njih prevzel uredništvo. Sam pa bom vedno ostal zvest spremljevalec Preseka, edinstvenega lista za mlade ljubitelje matematike, fizike, računalništva in astronomije, saj je njemu podobnih tudi pri številčnejših narodih bore malo. Navdušuje pa me tudi tradicija, saj bo Presek kmalu praznoval že častitljivo petdesetletnico izhajanja.



SLIKA 1.
Z zvočnikom vzvalovana vodna gladina. Pri večjih amplitudah vzbujanja se na gladini tvorijo kapljice.

× × ×

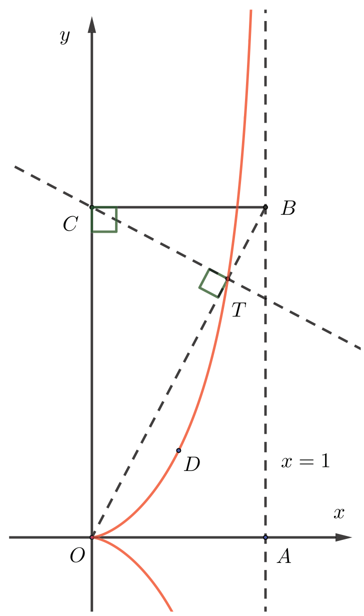
Dioklova cisoida in podvojitev, potrojitev, ... kocke

Marko Razpet

Kako z neoznačenim ravnilom in šestilom določiti rob kocke, da bo njena prostornina dvakratnik prostornine dane kocke? To je znani antični problem podvojitve kocke. Če ima dana kocka rob a, iščemo tako kocko z robom b, da bo $b^3 = 2a^3$. To pomeni, da mora biti $b = a\sqrt[3]{2}$. Problem podvojitve kocke z neoznačenim ravnilom in šestilom ni rešljiv, kar so matematiki pravilno dokazali šele v 19. stoletju. Razlog je v tem, da števila $\sqrt[3]{2}$ ni mogoče izraziti s končnim številom osnovnih štirih aritmetičnih operacij in kvadratnih korenov nad racionalnimi števili.

Že od antičnih časov pa so znani uspehi matematikov, ki so našli rešitev problema z drugačnimi pomagali, pogosto s posebnimi krivuljami, ne samo s premicami in krožnicami, ki jih rišemo z ravnilom in šestilom. Oglejmo si krivuljo, ki ji pravimo *Dioklova cisoida* in ki nam pomaga pri podvojitvi kocke. Pa ne le to, kocko lahko na podoben način tudi potrojimo, početverimo itd. *Diokles* (240–180 pr. n. št.) je bil starogrški matematik, ime krivulje pa izhaja iz grške besede *kissós*, kar pomeni *bršljan*. Kaj ima pri tem bršljan, bomo spoznali na koncu prispevka.

Do Dioklove cisoide bomo prišli z metodami analitične geometrije v ravnini, v katero vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy. V njem načrtamo najprej premico $x = 1$, ki preseka os x v točki $A(1,0)$. Na tej premici izberemo poljubno



SLIKA 1.
Geometrijska konstrukcija točk Dioklove cisoide

točko $B(1,t)$, kjer je t od 0 različno realno število. Na sliki 1 je $t > 0$. Točko B pravokotno projiciramo na os y, kjer dobimo točko $C(0,t)$. Nato C pravokotno projiciramo na premico skozi O in B, kjer dobimo točko $T(x,y)$.

Premica skozi O in B ima enačbo $y = tx$, pravokotnica skozi C nanjo pa smerni koeficient $-1/t$, zato enačbo $x + yt = t^2$. Rešitev sistema enačb

$$y = tx, \quad x + yt = t^2 \tag{1}$$

sta koordinati točke T:

$$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^2}. \tag{2}$$

Za $t = 0$ dobimo točko $O(0,0)$, za $t = 1$ pa $D(1/2,1/2)$. Ko točka B preteče premico $x = 1$, spremenljivka t (pravimo ji tudi *parameter*) preteče vsa realna števila, točka T pa opiše krivuljo, ki ji pravimo *Dioklova cisoida*. Enačbi (2) imenujemo *parametrični enačbi* cisoide.

Če si mislimo, da je parameter t čas, enačbi predstavljata sestavljeno gibanje točkaste mase v dveh med seboj pravokotnih smereh v koordinatni ravnini: v smeri osi x po pravilu prve enačbe, v smeri osi y pa po pravilu druge enačbe. Tirnica takega gibanja je cisoida. Podobno opišemo npr. tudi gibanje točkaste mase pri poševnem metu.

Iz prve enačbe v (2) razberemo, da za vsak t velja relacija $0 \le x < 1$. Zato je pravokotna projekcija cisoide na os x interval $[0,1)$. Ko zamenjamo t z $-t$, se x ne spremeni, y pa spremeni predznak. To pomeni, da je cisoida simetrična glede na os x. Hitro spoznamo tudi, da $x \to 1$ in $|y| \to \infty$, ko $|t| \to \infty$, kar pomeni, da je premica $x = 1$ njena navpična asimptota. Cisoida poteka skozi točke $O(0,0)$, $D(1/2,1/2)$ in $D'(1/2,-1/2)$.

Če izrazimo t iz prve enačbe sistema (1) in vstavimo v drugo, dobimo po poenostavitvi enakovredni implicitni enačbi cisoide

$$x(x^2+y^2) = y^2, \quad (1-x)y^2 = x^3. \tag{3}$$

Če v prvo vstavimo $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$, vidimo, da v polarnih koordinatah velja zveza

$$r = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{4}$$

Pri tem polarni kot φ teče po intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, polarni radij $r = |OT|$ pa zavzame vse nenegativne vrednosti. Zveza (4) je enačba cisoide v *polarni obliki*.

Kako sedaj uporabimo Dioklovo cisoido za podvojitev, potrojitev, početverjenje, ... kocke? Pomagamo si s premico skozi točki A in C. Njena enačba je $y = t(1-x)$. Poiščimo njeno presečišče $E(x_E, y_E)$ s cisoido. Če upoštevajmo zadnjo enačbo v (3) desno, dobimo

$$(1-x)^3 t^2 = x^3.$$

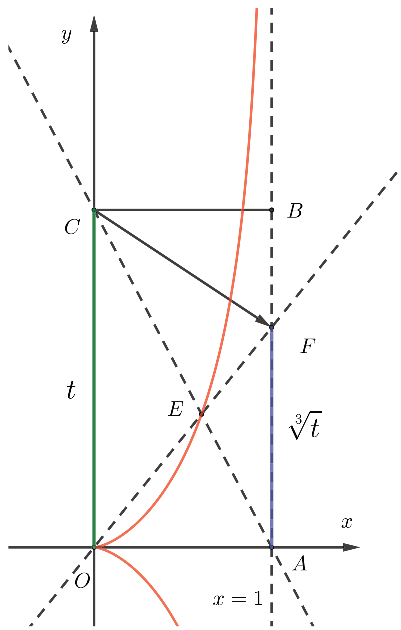
Obe strani korenimo in imamo preprosto enačbo za x:

$$(1-x)\sqrt[3]{t^2} = x.$$

Iz te takoj sledi

$$x_E = \frac{\sqrt[3]{t^2}}{1+\sqrt[3]{t^2}}, \quad y_E = t(1-x_E) = \frac{t}{1+\sqrt[3]{t^2}}.$$

Ker je smerni koeficient premice skozi O in E enak $y_E/x_E = \sqrt[3]{t}$, je njena enačba $y = x\sqrt[3]{t}$. Ta premica pa preseka premico $x = 1$ v točki $F(1, \sqrt[3]{t})$ (slika 2).



SLIKA 2.
Geometrijska konstrukcija tretjih korenov

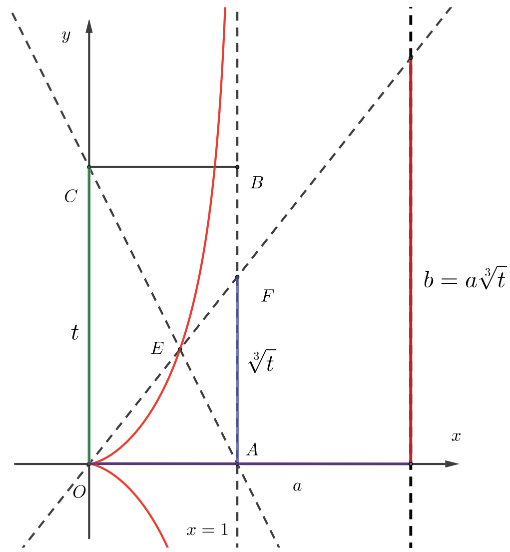
S tem smo našli preslikavo

- $C(0,t) \mapsto F(1, \sqrt[3]{t})$,

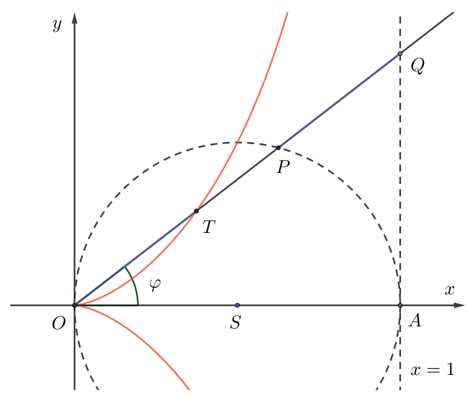
ki nam da tretje korene. S podobnostno transformacijo lahko za vsak rob a dane kocke najdemo rob $b = a\sqrt[3]{n}$ kocke, ki ima za prostornino n-kratnik prostornine dane kocke: $b^3 = na^3$, če vzamemo za n naravna števila $2, 3, 4, \ldots$ (slika 3). Za $n = 2$ imamo klasično podvojitev kocke, za $n = 3$ potrojitev, za $n = 4$ početverjenje itd.

Dioklovo cisoido lahko konstruiramo po točkah še na druge načine. Eden od teh je s pomočjo krožnice $x^2 + y^2 = x$, ki ima središče v točki $S(1/2, 0)$ in polmer $1/2$ (slika 4).

Iz koordinatnega izhodišča O načrtamo poltrak, ki preseka krožnico $x^2 + y^2 = x$ v točki P, cisoido v točki T, njeno asimptoto pa v točki Q. Dokažemo lahko, da velja enakost $|OT| = |PQ|$ za vsak Q na premici $x = 1$. To lahko elegantno naredimo v polarnih koordinatah. Pokažemo, da je na sliki 4 $|OP| = \cos\varphi$ in $|OQ| = 1/\cos\varphi$. Od tod izračunamo $|PQ| = |OQ| - |OP|$. Rezultat primerjamo z že izračunano vrednostjo za $|OT|$ (enačba (4)). Torej



SLIKA 3.
Geometrijska konstrukcija robov $b = a\sqrt[3]{t}$



SLIKA 4.
Določilna lastnost cisoide: $|OT| = |PQ|$

res velja enakost $|OT| = |PQ|$. To lastnost, ki je za cisoido določilna, lahko izkoristimo za njeno risanje po točkah.

Del cisoide, ki je znotraj krožnice $x^2 + y^2 = x$, omejuje z njo lik, ki spominja na list vrste bršljana. Od tod izhaja ime krivulje.

× × ×