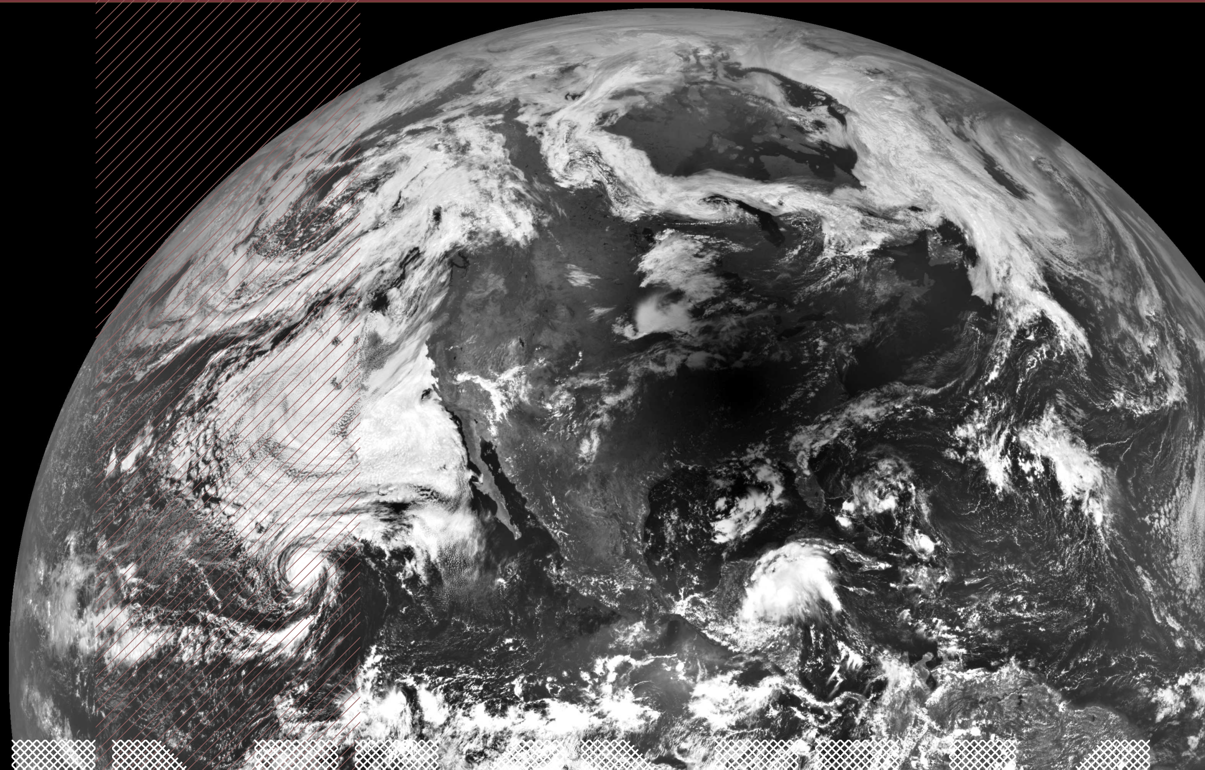
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

3

PRESEK LETNIK 45 (2017/2018) ŠTEVILKA 3



PRESEK

→ REŠITEV MALFATTIJEVEGA PROBLEMA

→ ELEUSIS – IGRA S KARTAMI

→ USPEŠEN NASTOP NAŠIH MLADI ASTRONOMOV

→ GENERIRANJE VSEH PODMNOŽIC DANE MNOŽICE

ISSN 0351-6652

9 770351 665531

Ustvarjanje vzorcev

Presenetljivo se leopardove pike s staranjem živali spreminjajo. Matematike in biologe zanima pomembno vprašanje, kako se živalski vzorci razvijajo na celičnem nivoju. S pomočjo diferencialnih enačb je mogoče ugotoviti, kako kemikalije v celici reagirajo med sabo. Z enačbami lahko razložimo, zakaj se lahko skupek enakih celic, s katerimi se začne življenje, preobrazi v pike, črte ali celo oboje. Znanstveniki so, recimo, napovedali, da se črte skalarja, posebne vrste tropske ribice, prestavljajo po telesu, kar je kasneje potrdilo tudi opazovanje.

Osupljiv rezultat so dobili tudi pri opazovanju kuščarja, ki se rodi rjav z enakomerno razporejenimi belimi pikami. Kasneje se vzorec spremeni v obliko labirinta, pike pa postanejo svetlo zelene in črne. Preboj na področju predstavlja odkritje, da se spremembe črnih pik v zelene in obratno obnašajo po pravilih celičnih avtomatov, to je, abstraktnega modela, ki ga je razvil matematik John von Neumann. Za črno piko je bolj verjetno, da se bo spremenila v zeleno, če je obkrožena z več črnimi pikami. Ko se sprememba barv ustali, so v povprečju črne pike obkrožene s tremi zelenimi, zelene pa s štirimi črnimi. Čeprav so celični avtomati dobro znani (verjetno poznate Igro življenja) in ustvarjajo zelo zanimive vzorce, je to prvi primer, ko se je njihova napoved uresničila kot vzorec na živalski koži.

Za več informacij si lahko preberete prispevek *A living mesoscopic cellular automation made of skin scales*, ki ga je Liana Manukyan s sodelavci objavili v reviji Nature 13. aprila 2017.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 45, šolsko leto 2017/2018, številka 3

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2017/2018 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

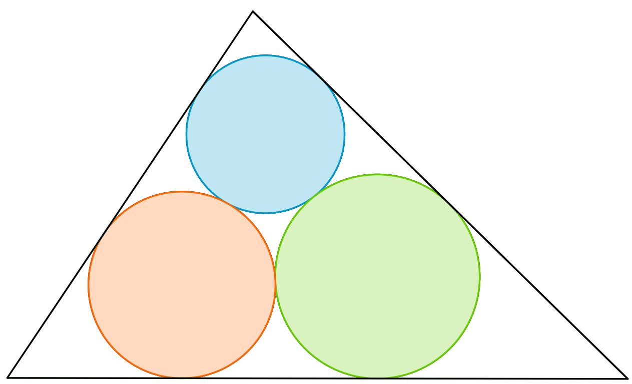
Kazalo

Slika na naslovnici: Pogled na Zemljo iz okolice Lune med popolnim sončnim mrkom 21. augusta 2017 ob 18:25 UTC (kratica za univerzalni koordinirani čas). Središče sence leži nad Kentuckyem v ZDA. Sliko je posnelo NASINO vesoljsko plovilo LRO (Lunar Reconnaissance Orbiter), ki je v orbiti okoli Lune in raziskuje njeno površino. Za ta posebni dogodek so kamere obrnili proti Zemlji. Razmislite, kam se je med mrkom pomikala senca, proti vzhodu ali zahodu? Kako se s časom spreminja pogled na Zemljo? Foto: NASA/GSFC/Arizona State University

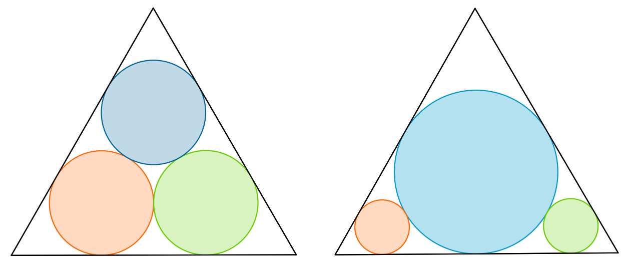
Rešitev Malfattijevega problema

Nada Razpet

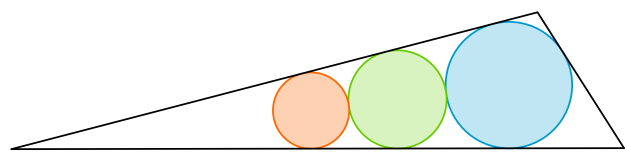
Najprej se spomnimo, kako se glasi naloga: Dan je trikotnik. Kako naj iz trikotnika izrežemo tri kroge tako, da bo njihova skupna ploščina največja?



SLIKA 1.
Malfattijeva rešitev naloge, ki pa ni pravilna.



SLIKA 2.
Za levi primer je vsota ploščin $\frac{\pi\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} \approx 0{,}729$, za desnega pa $\frac{11\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0{,}739$



SLIKA 3.
Evesova rešitev Malfattijevega problema za ozek in dolg trikotnik.

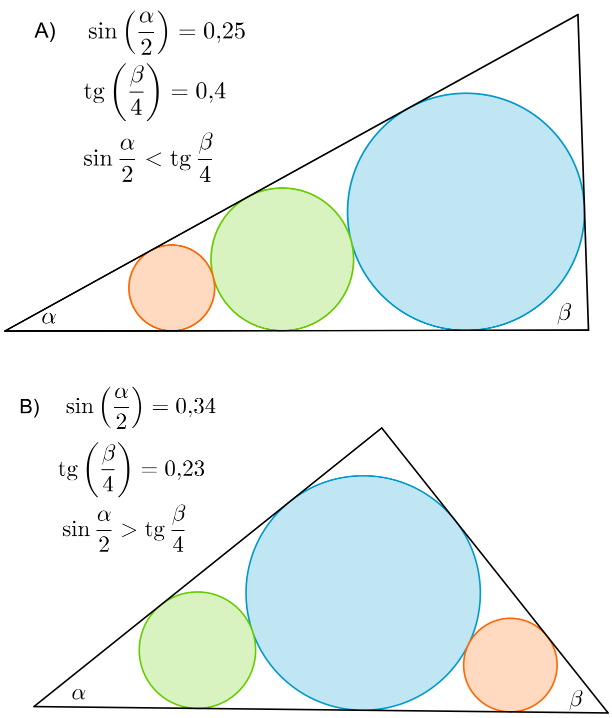
Dolgo je matematike zanimalo le, kako se ti krogi konstruirajo, niso pa razmišljali o pravilnosti Malfattijeve rešitve.

Nato pa sta leta 1929 Lob in Richmond ugotovila, da že za enakostranični trikotnik Malfattijeva rešitev problema ni pravilna (slika 2).

V enakostraničnem trikotniku je vsota ploščin krogov včrtanih tako, kot je to predlagal Malfatti (na sliki 2 levo), manjša kot v primeru na sliki 2 desno.

Howard Eves je 35 let kasneje ugotovil, da Malfattijeva rešitev tudi za dolg ozek trikotnik ni pravilna (slika 3).

Leta 1967 je Goldberg pokazal, da Malfattijeva rešitev ne drži za noben trikotnik. Leta 1994 sta Los in Zalgaller sistematično (z računalnikom) proučila vse možne lege treh krogov, včrtanih v dani trikotnik (obstaja 14 različnih možnosti), in proučila vsote njihovih ploščin. Ugotovila sta, da je najbolje, da je prvi krog kar včrtani krog trikotnika, potem pa se je treba odločiti, kam narisati še preostala dva kroga. Obstajata le dve taki možnosti. Prikazani sta na sliki 4. In kako naj se odločimo v danem primeru? Odločata vrednosti kotnih funkcij $\sin(\alpha/2)$ in $\mathrm{tg}(\beta/4)$.



SLIKA 4.
Zgornja slika velja za primer, ko je $\sin(\alpha/2) \leq \mathrm{tg}(\beta/4)$ (primer A), spodnja pa, ko je $\sin(\alpha/2) \geq \mathrm{tg}(\beta/4)$ (primer B).

Kdaj prva in kdaj druga možnost?

Privzemimo, da za kote v trikotniku velja

- $\alpha < \beta < \gamma \qquad \gamma = \text{konst} \Rightarrow \alpha + \beta = \text{konst}.$ (1)

Če to za dani primer ne drži, kote preimenujemo, da ustrezajo pogoju 1.

Dobro je, da izberemo enoto. Naj bo polmer trikotniku ABC včrtanega kroga $r = 1$. Oznake daljic razberemo s slike 5.

Trikotnik AB_1S je pravokoten, zato velja

- $\sin(\alpha/2) = \frac{r}{s}, \qquad r = 1, \qquad s = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$

Tudi preostala dva trikotnika AA_1S_1 in AA_2S_2 sta pravokotna, zato velja:

- $$\begin{aligned} \sin(\alpha/2) &= \frac{r_1}{s_1} = \frac{r_1}{s - r - r_1}, \\ r_1 &= \frac{1 - \sin(\alpha/2)}{1 + \sin(\alpha/2)}, \\ \sin(\alpha/2) &= \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_2}{s - r - 2r_1 - r_2}, \\ r_2 &= \left(\frac{1 - \sin(\alpha/2)}{1 + \sin(\alpha/2)}\right)^2. \end{aligned}$$

Opazimo, da so polmeri r, r_1 in r_2 trije zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Izrazimo še polmer r_3 s kotom β:

- $$\begin{aligned} \sin(\beta/2) &= \frac{r}{s_3}, \\ s_3 &= \frac{1}{\sin(\beta/2)}, \\ \sin(\beta/2) &= \frac{r_3}{s_4} = \frac{r_3}{s_3 - r - r_3}, \\ r_3 &= \frac{1 - \sin(\beta/2)}{1 + \sin(\beta/2)}. \end{aligned}$$

Da bo manj pisanja, zapišimo:

- $\sin(\alpha/2) = u, \qquad \sin(\beta/2) = v.$

Primerjamo vsoti ploščin

- $\pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2) > \pi(r^2 + r_1^2 + r_3^2).$ (2)

Obe strani neenačbe (2) delimo s π, vstavimo ustrezne izraze in dobimo:

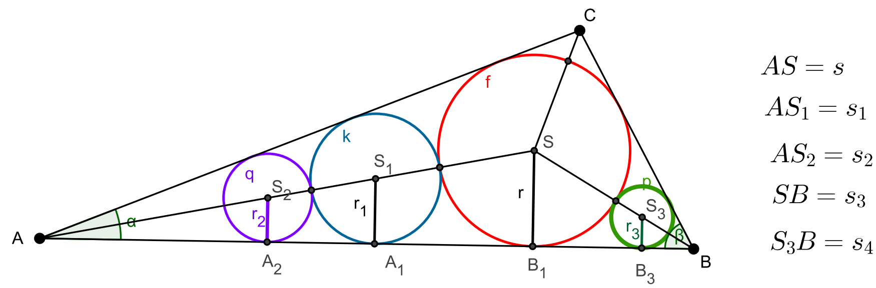
- $$\begin{aligned} r^2 + r_1^2 + r_2^2 &\geq r^2 + r_1^2 + r_3^2, \\ r_2^2 &\geq r_3^2, \\ \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^4 &\geq \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^2, && (3) \\ \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2 &\geq \frac{1-v}{1+v}. && (4) \end{aligned}$$

Neenačbo (3) smo korenili. To smemo narediti, saj sta tako števca kot imenovalca obeh ulomkov pozitivni števili.

Ker je po dogovoru kot γ največji kot v trikotniku, sta kota α in β manjša od 90° in vrednosti kotnih funkcij sinus in tangens pozitivni števili. Zapišimo povezavo med kotnima funkcijama sinus in tangens:

- $\sin(\beta/2) = \frac{2\,\mathrm{tg}(\beta/4)}{1 + \mathrm{tg}^2(\beta/4)}.$

→



SLIKA 5.
Trikotniku včrtamo kroge

Torej velja:

$$\frac{1-v}{1+v} = \frac{1-\sin(\beta/2)}{1+\sin(\beta/2)} =$$

$$= \frac{1-\frac{2\,\mathrm{tg}(\beta/4)}{1+\mathrm{tg}^2(\beta/4)}}{1+\frac{2\,\mathrm{tg}(\beta/4))}{1+\mathrm{tg}^2(\beta/4)}} = \frac{(1-\mathrm{tg}(\beta/4))^2}{(1+\mathrm{tg}(\beta/4))^2}. \qquad (5)$$

Desno stran neenačbe (4) zamenjamo z desno stranjo enačbe (5), neenačbo korenimo in dobimo:

$$\frac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)} \geq \frac{1-\mathrm{tg}(\beta/4)}{1+\mathrm{tg}(\beta/4)}.$$

In z malo računanja dobimo:

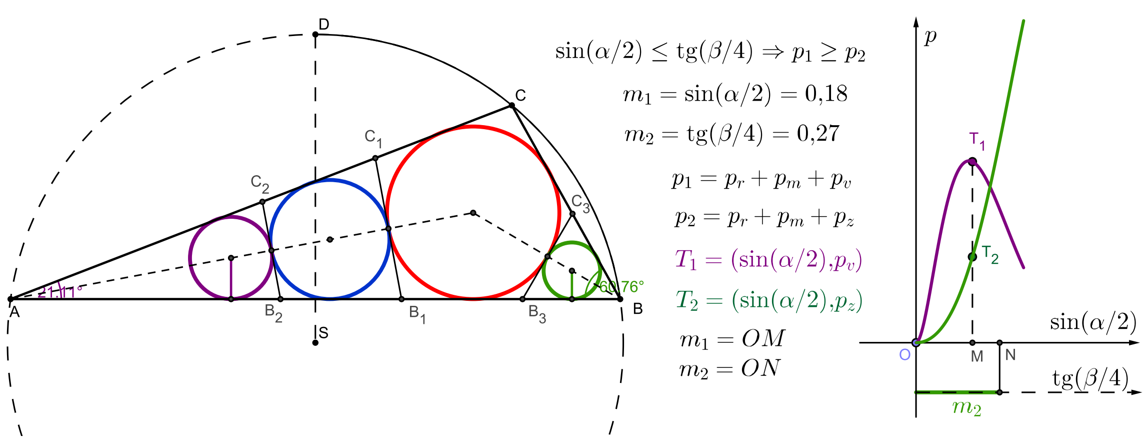
$$\mathrm{tg}(\beta/4) \geq \sin(\alpha/2). \qquad (6)$$

Iz neenačbe (6) sledi, da je vsota ploščin krogov v **primeru A večja** od vsote ploščin krogov v **primeru B**, če je $\sin(\alpha/2) < \mathrm{tg}(\beta/4)$.

Ploščine proučimo še z GeoGebro

Kako se v posameznem primeru spreminja vsota ploščin, proučimo še z GeoGebro. Naj za kote v trikotniku ABC velja $\alpha \leq \beta < \gamma$. Naj bo kot γ konstanten, torej je tudi vsota kotov $\alpha + \beta$ konstantna. Ko trikotniku včrtamo krog, bo najmanj prostora za preostala kroga v kotu γ, torej bomo včrtali oba kroga v kot α ali pa v vsakega od kotov α in β po en krog.

Vemo, da so koti, ki ležijo nad istim krožnim lokom, med seboj enaki. Zato osnovni trikotnik ABC narišemo tako, da kotu γ pripada največji lok, v našem primeru smo izbrali za ta lok več kot polovico krožnice (slika 6). Da bo tudi $\alpha \leq \beta$, se mora točka C



SLIKA 6.
Ploščini vijoličnega (vijolična krivulja) in zelenega (zelena krivulja) kroga v odvisnosti od $\sin(\alpha/2)$. Ko je $\sin(\alpha/2) < \mathrm{tg}(\beta/4)$, je $y(T_1) = p_v$ večji od $y(T_2) = p_z$, zato je vsota ploščin $p_1 > p_2$. Vse tri kroge je treba včrtati v kot α.

gibati po loku $\widehat{DB}$. Kota se s spremembo lege točke C spreminjata, pri tem je $\alpha \leq \beta$, njuna vsota pa je konstantna. Če izberemo lego točke C drugače, velja drugačna relacija med koti in moramo vloge kotov v nadaljevanju ustrezno spremeniti.

Trikotniku včrtamo krožnico, poiščemo presečišče te krožnico s simetralama kotov α in β. V teh točkah narišemo pravokotnice na te simetrale. Pravokotnice sekajo stranici c in b oziroma a. Dobimo nove trikotnike AB_1C_1, AB_2C_2 in B_3BC_3, v katere zopet včrtamo krožnice.

Vsoto ploščin rdečega (p_r), modrega (p_m) in vijoličnega (p_v) kroga označimo s p_1, vsoto ploščin rdečega, modrega in zelenega (p_z) kroga pa s p_2, če je $p_v > p_z$ je $p_1 > p_2$. V koordinatni sistem (na desno strani slike 6) rišemo sled točke $T_1(\sin(\alpha/2), p_v)$, vijolična krivulja, in sled točke $T_2(\sin(\alpha/2, p_z)$, zelena krivulja, ko se oglišče C giblje po loku $\widehat{DB}$. Program riše obe sledi hkrati. Ordinati odebeljenih pik na krivuljah kažeta, kolikšna je ploščina vijoličnega oz. zelenega kroga za trenutno izbrana kota α in β.

Bralci naj še premislijo, kolikšna sta kota α in β, ko je $p_1 = p_2$.

Kaj smo se naučili? Pri geometrijskih nalogah se pogosto zgodi, da pri reševanju upoštevamo odnose med količinami, ki jih razberemo s slike. Ta pa nas lahko zavede, zato je vedno dobro, da rešitev preverimo tudi na kakšnih posebnih primerih, kot v našem primeru na enakostraničnem trikotniku ali pa na zelo dolgem in ozkem trikotniku.

Literatura

[1] M. Andreatta, A. Bedzek, J. P. Boronski, *The Problem of Malfatti: Two Centuries of Debate*, The Mathematical Inteligencer, Springer, 2010.

[2] H. Lob, H. W. Richmond, *On the solution to Malfatti's problem for a triangle*, Proc. Lond. Mat. Soc, 2, **30**, 287-304, 1930.

[3] M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, Mathematics Magazine **40**, 241-427, 1967.

[4] V. A. Zalgaller, G. A. Los, *The solution of Malfatti's problem for a triangle*, Journal of the Mathematical Science, **72**, No. 4, 3163-3177, 1994.

× × ×

O pitagorejskih trojicah malo drugače

Marjan Jerman

V pravokotnem trikotniku s katetama a in b ter hipotenuzo c velja Pitagorov izrek, ki pravi, da je

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Če dodatno zahtevamo, da so števila a, b in c naravna, trojici (a, b, c) rečemo *pitagorejska trojica*. Posebej slavna pitagorejska trojica, s pomočjo katere so v starem Egiptu načrtovali prave kote, je trojica $(3, 4, 5)$.

Kadar stranice a, b in c nimajo skupnega faktorja, rečemo, da je pitagorejska trojica (a, b, c) *primitivna*. Na primer, $(6, 8, 10)$ je pitagorejska trojica, ki ni primitivna in je dobljena s celoštevilskim raztegom trojice $(3, 4, 5)$.

Pokažimo, da je v vsaki primitivni pitagorejski trojici ena kateta soda in ena liha.

Če sta obe kateti v pitagorejski trojici sodi, je soda tudi hipotenuza. Zato takšna trojica ni primitivna.

Če bi bili obe kateti lihi, enačba

$$(2k-1)^2 + (2\ell-1)^2 = 4(k^2 - k + \ell^2 - \ell) + 2$$

pove, da bi dal kvadrat hipotenuze ostanek 2 pri deljenju s 4. Ker kvadrat sodega števila da pri deljenju s 4 ostanek 0, kvadrat lihega števila $(2k-1)^2 = 4(k^2-k)+1$ pa ostanek 1, takšna hipotenuza ni mogoča.

S pomočjo zadnje trdive lahko, recimo, pokažemo, da je $(3, 4, 5)$ najmanjša Pitagorejska trojica.

Ker iščemo najmanjšo pitagorejsko trojico, mora biti iskana trojica (a, b, c) primitivna. Glede na trditev lahko dodatno privzamemo, da je kateta a liha, kateta b pa soda in zato hipotenuza c liha. Po Pitagorovem izreku velja $b^2 = c^2 - a^2$, kvadrata lihih števil pa se razlikujeta vsaj za $3^2 - 1^2 = 8$, zato je $b^2 \geq 8$ in je $b \geq 4$. Če poskusimo z najmanjšima možnima katetama $a = 1$ in $b = 4$, dobimo necelo hipotenuzo $c = \sqrt{17}$. Naslednja možnost $a = 3$ in $b = 4$ pa da iskano trojico $(3, 4, 5)$.

Iskanje pitagorejskih trojic je navdihovalo mnoge civilizacije. Iz glinenih tablic iz let med 1900 in 1600 pred našim štetjem lahko upravičeno sklepamo, da so že Babilonci poznali pravila za njihovo tvorbo.

Če sta m in n naravni števili, je lahko preveriti, da je

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2, \tag{1}$$

zato lahko za naravni števili $m > n$ neskončno pitagorejskih trojic dobimo s pravilom

$$a = m^2 - n^2, \ b = 2mn, \ c = m^2 + n^2. \tag{2}$$

Presenetljivo je, da so se že v stari Grčiji vprašali tudi obratno: Ali je vsaka pitagorejska trojica zgornje oblike?

Dokončen odgovor daje lema v deseti knjigi Evklidovih Elementov iz let približno 300 pred našim štetjem, ki bi jo v današnjem matematičnem jeziku zapisali takole:

Trojica naravnih števil (a, b, c) je primitivna pitagorejska trojica natanko takrat, ko obstajata tuji števili m in n različne parnosti, $m > n$, da velja (2).

O pitagorejskih trojicah je bilo v Preseku že veliko napisanega. Pogledate si lahko na primer članka prof. Edvarda Kramarja (letnik 16, 1988/89, str. 274–280) in prof. Ivana Puclja (letnik 5, 1977/78, str. 195–197). V članku, ki ga je napisala prof. Milena Strnad (letnik 17, 1989/90, str. 8–11), najdete tudi moderno različico Evklidovega dokaza. Originalni dokaz je zapisan v geometrijskem jeziku in temelji na zviti uporabi elementarnih lastnosti deljivosti naravnih števil.

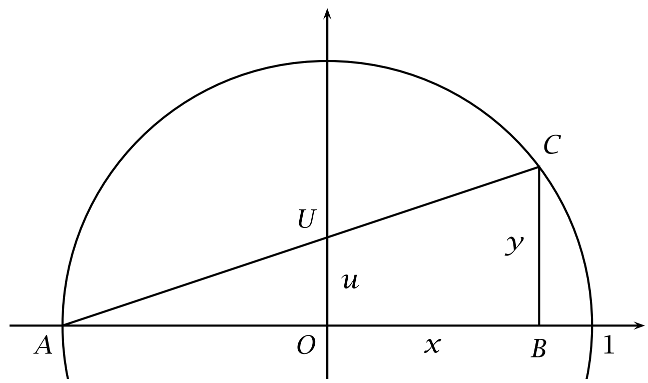
V tem prispevku bi radi prikazali zanimiv in eleganten dokaz s pomočjo analitične geometrije, ki smo ga našli kot 18. nalogo v prvem poglavju knjige A. Ostermana in G. Wannerja, *Geometry by Its History*. Sorodna metoda je pogosto uporabljena za iskanje racionalnih točk na stožnicah.

Najprej privzemimo, da za tuji števili različne parnosti $m > n$ velja $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ in $c = m^2 + n^2$. Pokažimo, da je (a, b, c) primitivna pitagorejska trojica.

Števila a, b in c so zaradi veljavnosti enačbe (1) stranice pravokotnega trikotnika.

Pokazati je treba še, da so paroma tuja. Če neko praštevilo p hkrati deli števili $a = m^2 - n^2$ in $c = m^2 + n^2$, deli tudi njuno vsoto in razliko: $p | (a + c) = 2m^2$ in $p | (c - a) = 2n^2$. Ker sta števili a in c zaradi različne parnosti m in n lihi, je $p \neq 2$ in hkrati deli m^2 in n^2. To pa je v nasprotju s tujostjo števil m in n.

Ker števila a, b in c zadoščajo Pitagorovemu izreku, praštevilo, ki deli b in c, deli tudi a. Podobno, praštevilo, ki deli a in b, deli tudi c. V prejšnjem odstavku smo pokazali, da praštevilo, ki bi hkrati delilo števili a in c, ne obstaja.



SLIKA 1.
Slika k dokazu

Naj bo sedaj (a, b, c) primitivna pitagorejska trojica. Vemo, da je ena od katet soda, druga pa liha. Brez škode za splošnost privzemimo, da je kateta b soda. Ker drži $a^2 + b^2 = c^2$, za strogo pozitivni racionalni števili $x = \frac{a}{c}$ in $y = \frac{b}{c}$, ki sta zapisani z okrajšanima ulomkoma, velja:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Z drugimi besedami: točka $C(x, y)$ v prvem kvadrantu ima racionalni koordinati in leži na krožnici s središčem v izhodišču in polmerom 1. Skozi točki $A(-1, 0)$ in C potegnimo premico, ki seka ordinatno os v točki $U(0, u)$, $u \in (0, 1)$. Označimo še točki $O(0, 0)$ in $B(x, 0)$ (glej sliko 1).

Pravokotna trikotnika AOU in ABC sta si podobna, zato je

$$\frac{OU}{BC} = \frac{u}{y} = \frac{1}{1+x} = \frac{AO}{AB}.$$

Od tu dobimo zvezo $y = u(1+x)$, ki med drugim pove, da je tudi število

$$u = \frac{y}{1+x} = \frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{a}{c}} = \frac{b}{a+c}$$

racionalno.

Točka $(x, y) = (x, u(1+x))$ leži hkrati na premici $y = u(1+x)$ in na krožnici $x^2+y^2 = 1$, zato zadošča enačbi

$$x^2 + u^2(1+x)^2 = 1,$$

$$x^2(u^2+1) + 2u^2x + u^2 - 1 = 0.$$

Tudi točka $A(-1, 0)$ leži na isti premici in krožnici, zato je $x = -1$ ena od rešitev te kvadratne enačbe. S pomočjo znane ničle lahko zadnjo kvadratno enačbo enostavno razstavimo na linearna faktorja

$$(x+1)\big((u^2+1)x + (u^2-1)\big) = 0,$$

od koder vidimo še drugo rešitev

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}. \tag{3}$$

Zato je

$$y = u(1+x) = \frac{2u}{1+u^2}. \tag{4}$$

Radoveden bralec lahko premisli, da ima kvadratna enačba z racionalnimi koeficienti, ki ima eno ničlo racionalno, racionalno tudi drugo ničlo. Zato metoda s presečno premico skozi eno racionalno točko deluje le za krivulje drugega reda.

Ker je u strogo pozitivno racionalno število, ga lahko zapišemo v obliki $u = \frac{n}{m}$ za primerni tuji naravni števili m in n, $m > n$. Po tej zamenjavi enačbi (3) in (4) preideta v

$$x = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \quad \text{in} \quad y = \frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

Ker sta števili m in n tuji, nista obe sodi. Pokažimo, da nista niti obe lihi. V primeru, ko sta obe števili m in n lihi, ima ulomek

$$y = \frac{b}{c} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

sodi števec in sodi imenovalec. Zato lahko dvojko v števcu in imenovalcu pokrajšamo in v števcu ostane liho število mn. Ulomek

$$\frac{mn}{\frac{m^2+n^2}{2}}$$

pokrajšajmo, kolikor se da. Po opravljenem krajšanju bo v števcu ostalo liho število. Ker je ta okrajšani ulomek enak okrajšanemu ulomku $\frac{b}{c}$, je to v nasprotju s sodostjo b. Zato imata števili m in n različno parnost.

Enako kot v obratni smeri dokaza sedaj vidimo, da so števila m^2-n^2, $2mn$ in m^2+n^2 tuja. Zato so ulomki

$$\frac{a}{c} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \quad \text{in} \quad \frac{b}{c} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

okrajšani in velja (2). To pa smo želeli pokazati.

Prispevek povzemimo s trditvijo:

Vse pitagorejske trojice (a, b, c) so natanko oblike

$$a = k(m^2-n^2),\ b = 2kmn,\ c = k(m^2+n^2),$$

kjer je k neko naravno število, $m > n$ pa tuji naravni števili različne parnosti.

Trojico precej dolgih celoštevilskih stranic pravokotnega trikotnika $(12709, 13500, 18541)$ na babilonski tablici je, recimo, dobljena z izbiro $k = 1$, $m = 125$ in $n = 54$.

Na koncu bralcem postavimo še zanimivi vprašanji: *Katera naravna števila so lahko katete primitivnih pitagorejskih trojic? Katera števila so lahko hipotenuze?*

Za odgovor je seveda zelo koristno uporabiti naš najpomembnejši rezultat (2). Za katete si pomagajte z enačbo

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1,$$

za hipotenuze pa poskušajte uporabite pomemben izrek iz teorije števil, ki pravi:

Naravno število $n \neq 1$ lahko napišemo kot vsoto dveh kvadratov naravnih števil natanko tedaj, ko v razcepu n na produkt praštevil vsako praštevilo, ki da pri deljenju s 4 ostanek 3, nastopa v sodi potenci.

× × ×

53. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

Aljoša Brlogar

Najboljši osnovnošolci s šolskih tekmovanj so se v soboto, 22. aprila 2017, pomerili v 23-ih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Državnega tekmovanja so se lahko udeležili učenci od petega do devetega razreda glede na dosežke šolskega tekmovanja. Na šolah, kjer smo organizirali državno tekmovanje, so organizatorji pripravili prijetne prireditve.

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V petem razredu smo podelili 65, v šestem 60, v sedmem 61, v osmem 60 in v devetem 64 zlatih Vegovih priznanj. Učenci, ki na tekmovanju Mednarodni matematični Kenguru dosežejo najboljši uspeh in hkrati dosežejo vsaj 60 % točk na državnem tekmovanju, se udeležijo nagradnega izleta. V tem šolskem letu smo za najboljše učence zadnjih treh razredov osnovne šole organizirali nagradni izlet na Dunaj. Povabili smo 120 najboljših učencev. Izlet je bil za učence nepozaben.

Nagrade, ki so bile podeljene v Grand hotelu Union, so prejeli najbolje uvrščeni tekmovalci.

5. RAZRED

I. nagrada

- Žan Arsov, OŠ Brezovica pri Ljubljani
- Janez Bartol, OŠ Preserje pri Radomljah
- Aljaž Krivograd, OŠ Prežihovega Voranca, Ravne na Koroškem

II. nagrada

- Nika Blažič, OŠ Bršljin
- Tomaž Holc, OŠ Breg, Ptuj
- Nace Hranjec, OŠ Šentjanž pri Dravogradu
- Ožbej Markun, OŠ Franceta Prešerna Kranj

III. nagrada

- Rebeka Cankar, OŠ Žiri
- Sara Ferreira, OŠ Žiri
- Patrik Videnović, OŠ Ivana Cankarja, Vrhnika

6. RAZRED

I. nagrada

- Peter Andolšek, OŠ dr. Franceta Prešerna, Ribnica
- Nika Dolenec, OŠ Žiri
- Luka Gašperlin, OŠ Franceta Prešerna Kranj
- Lira Jurkovič, OŠ narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana
- Klemen Juvančič, OŠ Mengeš
- Toni Kišek, OŠ Simona Jenka Kranj
- Brina Likar Kramberger, OŠ narodnega heroja MaksaPečarja, Ljubljana
- Tilen Novak, OŠ Stranje
- Timotej Otto, OŠ Neznanih talcev Dravograd

II. nagrada

- Peter Bandelj, OŠ Vodmat, Ljubljana
- Lev Bjelobaba, OŠ Ledina, Ljubljana

7. RAZRED

I. nagrada

- Nastasja Češnjevar Ušumović, OŠ Antona Ukmarja Koper
- Lenart Frankovič, OŠ Gustava Šiliha, Velenje
- Alica Muratović Romih, OŠ Hinka Smrekarja, Ljubljana
- Tjaša Rupar, OŠ Škofja Loka-Mesto

II. nagrada

- Žiga Brinovšek, OŠ Gustava Šiliha, Velenje
- Alexander Gaydukov, OŠ Pier Paolo Vergerio il Vecchio Koper
- Eva Šalamun, OŠ Zadobrova

III. nagrada

- Lara Rozman, OŠ Ketteja in Murna, Ljubljana
- Anika Simončič, OŠ Boštanj

8. RAZRED

I. nagrada

- Maxim Cosovici, OŠ Brinje Grosuplje
- Vid Kavčič, OŠ Loka, Črnomelj
- Nika Krivic, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
- Matija Likar, OŠ bratov Polančičev Maribor
- Aljaž Sovič, OŠ Gorica, Velenje
- Luka Stražišar, OŠ Jožeta Krajca, Rakek

II. nagrada

- Benjamin Bajd, OŠ Simona Jenka Kranj
- Janez Peter Bohinc, OŠ Antona Tomaža Linharta Radovljica
- Ivan Butkevich, OŠ Kolezija, Ljubljana

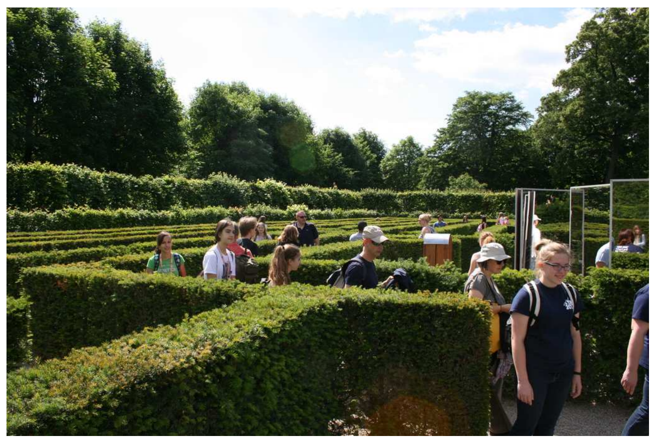
III. nagrada

- Lan Jeler, OŠ Šenčur

9. RAZRED

I. nagrada

- Simon Bukovšek, OŠ Škofja Loka-Mesto
- Lovro Drofenik, OŠ Frana Kranjca, Celje
- Aglaja Gale Šparemblek, OŠ Koseze, Ljubljana
- Matic Hočevar, OŠ Simona Jenka, Smlednik
- Jaša Knap, OŠ narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana
- Vito Levstik, OŠ Ljudski vrt Ptuj
- Jure Majcen, OŠ Karla Destovnika-Kajuha Šoštanj
- Lucija Matijašić, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
- Jošt Paternoster, OŠ Zadobrova
- Matic Petek, OŠ Ormož
- Ema Prevalšek, OŠ Metlika
- Jaka Vrhovnik, OŠ Mozirje
- Gal Zmazek, OŠ Ljudski vrt Ptuj
- Marjetka Zupan, OŠ Ig



SLIKA 1.
Udeleženci Kenguru nagradnega izleta na Dunaju (foto: Matjaž Željko).

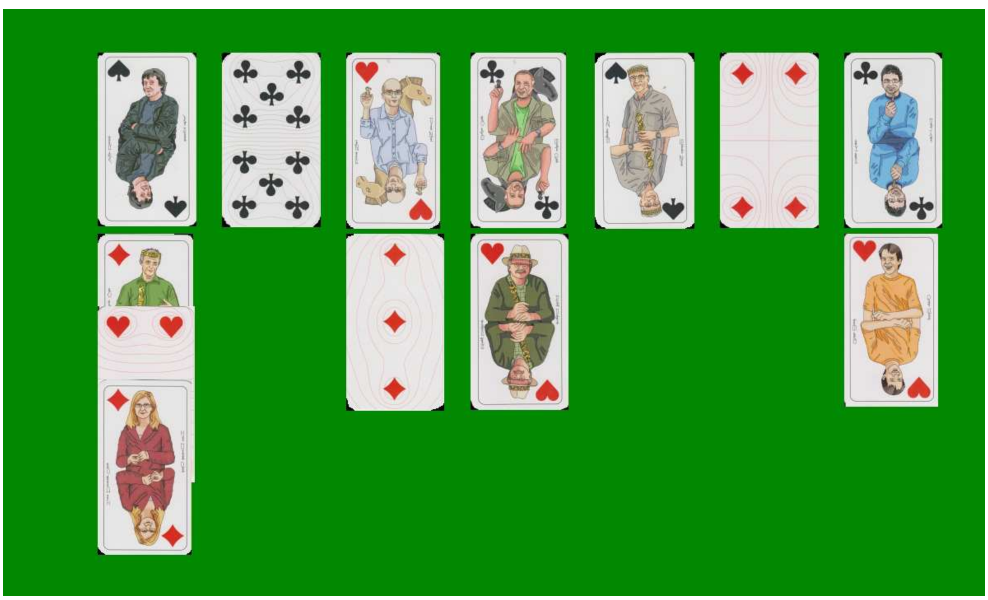
× × ×

Eleusis – igra s kartami za tuhtavce

Andrej Likar

→ Večina iger s kartami sodi med hazardiranje. Uspeh je odvisen od porazdelitve kart med igralce. Pri taroku ima igralec z obiljem visokih tarokov prednost. Vpliv porazdelitve se po mnogih igrah sicer nekoliko omili. Obstajajo pa igre, kjer porazdelitev kart med igralce nima nobenega vpliva na končni uspeh. Ena takih je med fiziki, morda tudi matematiki, že zelo dolgo znana – Eleusis. Ime se nanaša na grško mitologijo, saj naj bi v mestu Eleusis, blizu Aten, potekali skrivnostni obredi. Ime torej nakazuje neko skritost.

Kaj je skritega v igri? Skrito je pravilo, po katerem zlagamo karte na mizo. Za to ve le delilec kart, ki ne igra, temveč le nadzira igro. Najpogosteje igramo s standardnim 52 delnim kompletom kart, lahko pa se igramo tudi s kartami za tarok. Število igralcev ni določeno, najmanj pa naj bodo trije in največ osem. Vsak igralec dobi 12 kart, ostanek je na kupu. Delilec si izmisli neko pravilo, po katerem se gradi niz kart, ki jih polagajo igralci na mizo. Pravilo zapiše pred igro in ve zanj le on sam. Prvo karto niza postavi delilec, potem pa sledijo igralci po dogovorjenem vrstnem redu. Ker igralci pravila na začetku ne poznajo, postavljajo karte naključno. Če karta ustreza nizu, jo igralec položi v osrednjo vrsto, če pa ne, pa pod zadnjo pravilno karto. Na sliki 1 je prikazan začetek igre, kjer je bilo pravilo: dvema črnima sledi



SLIKA 1.
Potek igre, kjer je bilo pravilo dve črni, rdeča, dve črni, rdeča . . .

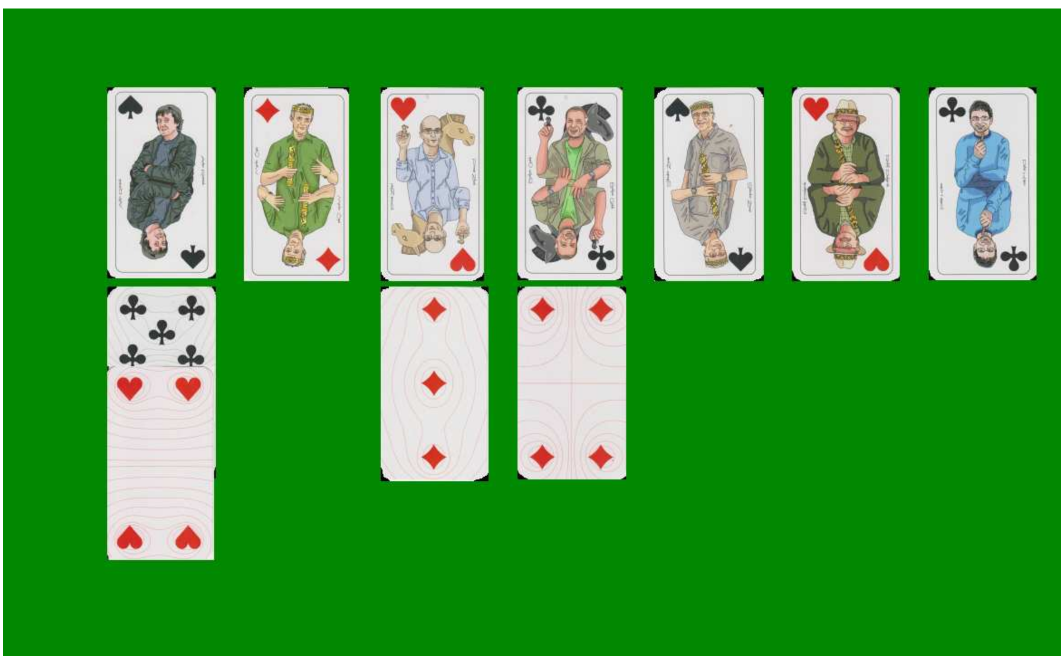
rdeča, potem pa spet dve črni in rdeča ... Prvo karto je položil delilec, naslednje pa so trije igralci izbrali napačno in so jih morali postavili pod prvo karto. Naslednja pravilna karta mora biti namreč črna, vse rdeče so napačne. Delilec odloči, katera karta je pravilna in katera napačna. Pri napačni karti igralec iz kupa dobi novo karto. Cilj igre je, čim prej se znebiti kart. Očitno zelo pomaga, če uganemo delilčevo pravilo. Ko eden od igralcev ostane brez kart ali pa pravilno pove pravilo, je igra zaključena. Vsakdo dobi 12 točk minus število kart, ki so mu ostale v roki. Igralec, ki je prvi ostal brez kart, dobi tri dodatne točke. Igralec, ki je prvi pravilno napovedal pravilo, pa dobi šest dodatnih točk. Delilec dobi toliko točk kot nauspešnejši igralec.

Kaj če igralec nima pravilne karte? Denimo, da v naše primeru ostene le s črnimi kartami, ko pa pride na vrsto, je pravilna le rdeča. V tem primeru lahko igralec pokaže vse svoje karte delilcu, ki izbere in postavi bodisi pravilno karto v vrsto ali pa katerokoli karto pod zadnjo pravilno karto. Če res ni imel pravilne karte, igralec ne dobi dodatne karte iz kupa. Vidimo, da vsak igralec dobi dobre karte; porazdelitev kart na začetku torej ni pomembna.

Pravila, ki si jih izmisli delilec, se morajo nanašati le na karte na mizi, ne pa na dogodke, ki so v okolici. Pravilo, denimo, da se po peti uri popoldne pravilo spremeni, ne velja. Ali pa pravilo, da so za dekleta pravilne le rdeče karte, za fante pa črne. Tudi sicer naj bi bilo pravilo tako, da ga dovolj zgodaj uganeta le en ali dva igralca, saj s tem delilec doseže največje število točk; torej ne prelahko in ne pretežko.

Pri dvodnevnem varnostnem obhodu jedrske elektrarne v Krškem je ekipa po večerji igrala Eleusis, največkrat po dva kroga. Ne morem opisati veselja, tesnobe, pozornosti in smeha pri tej igri. Vsakdo je pač želel blesteti s svojim pravilom in nadigrati kolege s hitrim zlomom njihovih pravil. Postali smo tako izurjeni, da smo nekako slutili značaj pravil, ki so jih postavili posamezni igralci. Posebno veselje nam je pripravil delilec, ki je kdaj pa kdaj napačno odločil, ali je karta pravilna ali napačna. Pravila seveda potem ni nihče uganil, so pa včasih nekateri igralci, ki so pravilo že skoraj dojeli, popravljali odločitve delilca. Si lahko zamislite njegovo zadrego!

Igro si je izmislil leta 1956 Robert Abbott in Združenih držav Amerike, po poklicu programer, ki si je izmislil kar nekaj zanimivih miselnih iger. Igra torej res ni od včeraj, a pri nas so jo igrali le redki. Gotovo je primerna tudi v šolah, od devetletke do univerze. Morda bo ta sestavek vzpodbudil nove generacije, da jo vzljubijo.



SLIKA 2.
Potek igre s pravilom: pravilne so le karte s figuro.

× × ×

Merjenje upogiba palice

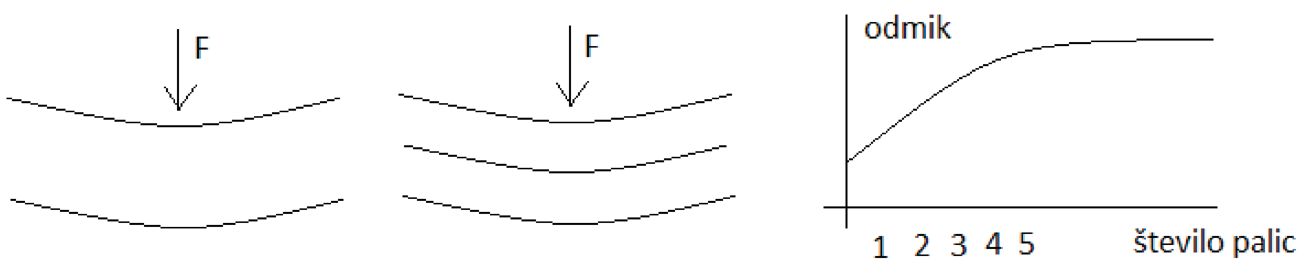
Jurij Kovič

Na lanskem Znanstivalu (potekal je od 3. do 5. 6. 2016 v središču Ljubljane) so med drugim prikazali tudi merjenje upogiba lesene palice, vpete v vodoravni legi in obremenjene s silo usmerjeno navpično navzdol v njenem središču. S takšnimi meritvami si v gradbeništvu pomagajo pri načrtovanju in konstrukciji mostov.

Čeprav lahko na vprašanje, ali bo ob enaki obremenitvi upogib dveh palic s skupno enako debelino večji, manjši ali enak, dajo zanesljiv odgovor le fizikalni eksperiment oziroma natančne meritve upogiba, je vseeno vredno premisliti, ali lahko izid (vsaj v kvalitativnem smislu!) uganemo oziroma napovemo zgolj z razmišljanjem. Pri tem si morda lahko pomagamo s sklepanjem po analogiji ali z miselnim poizkusom, kot jih je rad uporabljal Arhimed.

Spomnimo se znane zgodbe, v kateri je kralj iskal naslednika za svoje kraljestvo in sklenil, da bo to tisti, ki mu bo uspelo prelomiti tri lesene palice, čvrsto povezane skupaj. To, kar ni uspelo junakom z veliko fizično močjo, je uspelo bistroumnemu mladeniču, ki je palice razvezal, potem pa prelomil vsako posebej. Ob tem lahko takoj oblikujemo hipotezo: Večje število palic enake skupne debeline se vda toliko prej, kolikor več jih je, pa naj gre za lomljenje ali upogib. Meritve so potrdile našo domnevo, da se dve palici upogneta bolj kot ena sama. Dve palici nekako zdrsneta druga ob drugi in se tako slabše upreta pritisku kot ena sama (ki ima poleg vodoravnih vezi med molekulami tudi dodatne navpične).

Ob tem eksperimentu, ki ga lahko razumemo tudi kot zelo splošno metaforo še za mnoge druge situacije v življenju (ne samo kot model obremenitve mostov), nehote pomislimo tudi na znani pregovor: V slogi je moč!



SLIKA 1.

37. tekmovanje iz znanja fizike za Stefanova priznanja

Barbara Rovšek

V šolskem letu 2016/2017 se je odvijalo 37. tekmovanje iz znanja fizike za osnovnošolce. Nanj so se uvrstili vsi osmošolci, ki so na šolskem tekmovanju tuhtali, kako se ure premaknejo, če letimo na druge celine, in devetošolci, ki so se na istem tekmovanju teoretično vozili z vlakcem smrti.

SLIKA 1.
Tekmovalci na državnem tekmovanju v Ljubljani merijo kovance za 2 evra podolgem in počez ter ugotavljajo sestavo zlitin, iz katerih so skovani. (Foto: Jan Šuntajs)

Šolskega tekmovanja se je udeležilo 7007 učencev 8. in 9. razreda in od teh jih je 2515 prejelo bronasta Stefanova priznanja. Na področno tekmovanje, ki je potekalo v 17-ih regijah po Sloveniji, se je prebilo 1479 učencev, 501 jih je osvojilo srebrno priznanje.

Državno tekmovanje je bilo v soboto, 8. aprila 2017, na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter Osnovni šoli Antona Globočnika v Postojni. Tekmovalo je 286 učencev, od katerih jih je 99 osvojilo zlata priznanja, 185 pa srebrna priznanja, podeljena na državnem tekmovanju.

Osmošolci so pri eksperimentalnem delu državnega tekmovanja ugotavljali sestavo dveh zlitin, iz katerih je kovanec za dva evra. Poskus je sočasno opravljalo skoraj 80 osmošolcev. Ker je vsak meritve opravljal na 20-ih kovancih, si lahko sami izračunate, koliko denarja smo imeli po mizah na prizoriščih državnega tekmovanja in kolikšno maso je imel kovček, v katerem smo pred tekmovanjem tovorili kovance iz banke in po tekmovanju nazaj v banko. Masa enega kovanca za dva evra je 8,5 g. Kdor se je pri poskusu potrudil in meritve opravil kar se da natančno, je lahko zelo dobro ocenil masni delež cinka v medenini, iz katere je del kovanca.

Devetošolci so pri eksperimentalni nalogi najbrž pričakovali elektriko in jo tudi dobili. Merili so karakteristiko in moč žarnice. Karakteristika žarnice je graf, ki kaže, kako sta med seboj povezana napetost na žarnici in tok, ki teče skoznjo. Če želimo narisati graf, potrebujemo več merskih točk. Ker so bili pri poskusu tekmovalci zelo omejeni s pripomočki – imeli so en sam vir napetosti, ploščato baterijo – so se morali za vsako mersko točko potruditi z različnimi vezavami treh enakih žarnic. Koliko je lahko različnih napetosti na eni žarnici, če imamo eno baterijo in največ tri enake žarnice?

Uradni vrstni red prav na vrhu je bil tak: v 8. razredu je nagrade prejelo šest učencev; dva iz Štajerske in po eden iz Ljubljane, Gorenjske, Bele krajine in Primorske.

nadaljevanje na strani 18 →

→ 15 nadaljevanje s strani

8. RAZRED

1. nagrada

- Matija Likar, OŠ bratov Polančičev Maribor, mentor Mladen Tancer.

2. nagrada

- Jure Kalan, OŠ Trnovo, Ljubljana, mentorica Đulijana Juričić.

3. nagrada

- Benjamin Bajd, OŠ Simona Jenka Kranj, mentorica Irma Pustotnik;
- Vid Kavčič, OŠ Loka, Črnomelj, mentorica Jožica Kuzma;
- Blaž Mevlja, OŠ Srečka Kosovela Sežana, mentorica Mojca Štembergar;
- Tilen Šket, OŠ Šmarje pri Jelšah, mentorica Martina Petauer.

V 9. razredu so nagrade prejele tri učenke in pet učencev sedmih različnih mentoric.

9. RAZRED

1. nagrada

- Jaka Vrhovnik, OŠ Mozirje, mentorica Jana Pahovnik;
- Marjetka Zupan, OŠ Ig, mentorica Martina Brence.

2. nagrada

- Jernej Birk, OŠ Vavta vas, Straža pri Novem mestu, mentorica Nataša Umek Plankar;
- Gregor Globevnik, OŠ Stražišče Kranj, mentorica Silva Majcen;
- Gal Zmazek, OŠ Ljudski vrt Ptuj, mentorica Jasmina Žel.

3. nagrada

- Tjaša Sušnik, OŠ Naklo, mentorica Špela Knez;
- Urša Mati Djuraki, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana, mentorica Andreja Pagon;
- Vito Levstik, OŠ Ljudski vrt Ptuj, mentorica Jasmina Žel.

SLIKA 2.
Nagrajenci 37. tekmovanja osnovnošolcev za Stefanova priznanja na prireditvi Bistroumi 2017, ki je potekala 13. maja 2017 v Unionski dvorani Grand Hotela Union v Ljubljani, skupaj s podeljevalcema nagrad, predstojnikom Oddelka za fiziko Fakultete za matematiko in fiziko Boštjanom Golobom in predsednico tekmovalne komisije Barbaro Rovšek. (Foto: Jana Jocif)

× × ×

Uspešen nastop naših mladih astronomov na 3. astronomskem tekmovanju treh dežel

Andrej Guštin in Krištof Skok

Na Sljemenu nad Zagrebom je med 30. avgustom in 1. septembrom 2017 potekalo 3. astronomsko tekmovanje treh dežel, ki se ga udeležujejo olimpijske ekipe Madžarske, Hrvaške in Slovenije. Naše vrste so tokrat zastopali člani letošnje ekipe srednješolcev za Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike (v nadaljevanju MOAA) Rok Kovač, Marko Čmrlec, Luka Govedič, Urban Ogrinec, Aleksej Jurca in kot rezerva Zala Potočnik.

Aleksej Jurca je na tekmovanju zmagal, Luka Govedič pa je zasedel tretje mesto. Tudi drugi člani ekipe so se dobro odrezali in z ekipno nalogo zasedli drugo mesto. Tokrat sta jih kot vodji ekipe spremljala Andrej Guštin in Krištof Skok. Vsem udeležencem čestitamo!

Idejo za astronomsko tekmovanje treh dežel, ki naj bi bila nekakšna pripravljalnica za MOAA, je pred nekaj leti dal vodja madžarske olimpijske ekipe dr. Tibor Hegedüs. Pred tremi leti je zamisel tudi uresničil in takrat smo se prvič zbrali na Madžarskem. Lani je bilo tekmovanje pri nas, letos pa na Hrvaškem in vse kaže, da se bo v takem kolobarjenju nadaljevalo tudi v prihodnjih letih. Tekmovanje poteka po načelih MOAA, le v nekoliko skrčenem obsegu nalog. Težavnost nalog je mogoče večja od tistih na MOAA. Prav zaradi dobrih nalog in organizacije si marsikatera evropska ekipa mladih astronomov želi priključiti k temu tekmovanju, a smo se vodje ekip odločili, da tekmovanja ne bomo širili. Organizacija tekmovanja za tri ekipe je relativno enostavna, pa tudi stroški tekmovanja so majhni. Širjenje tekmovanja pa bi pomenilo bistveno povečanje stroškov, česar pa pri DMFA Slovenije ne zmoremo. Podobno velja tudi za Hrvate in Madžare.

Pokazalo se je, da je astronomsko tekmovanje treh dežel zelo dobra priprava na olimpijado. Rezultati vseh treh ekip na MOAA so se po uvedbi tekmovanja treh dežel opazno izboljšali.

SLIKA 1.
Udeleženci, organizatorji in mentorji 3. astronomskega tekmovanja treh dežel na strehi Zagrebške zvjezdarnice. Foto: A. Guštin

Primeri nalog iz letošnjega astronomskega tekmovanja treh dežel

1. opazovalna naloga

- Z laserjem pokaži zvezdo δ Kefeja. Če je ne najdeš, prosi asistenta, da ti jo najde.
- Z uporabo priložene zvezdne karte določi navidezno magnitudo δ Kefeja. Na karti označi zvezde, ki si jih uporabil za ocenjevanje magnitude.

- Poišči M92 z daljnogledom.
- Poišči zvezdo δ Kasiopeje z daljnogledom. Če je ne najdeš, prosi asistenta, da ti jo najde.
- Določi rektascenzijo zvezde γ Kasiopeje z daljnogledom, če veš, da je rektascenzija zvezde δ Kasiopeje je $\alpha = 1$ h 26 m 40 s. Deklinaciji obeh zvezd sta pribl. 60°.

2. opazovalna naloga

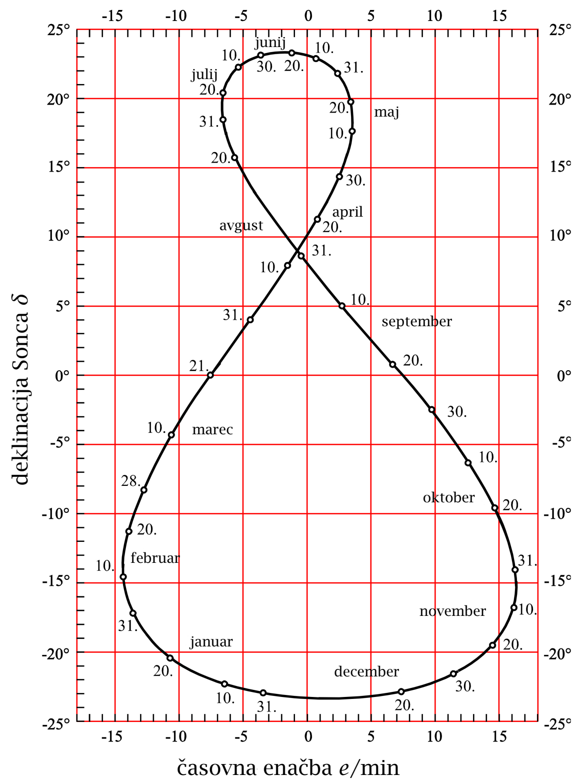
V sobi so ravnilo, trikotnik, gnomon (izvijač) in žarnica, ki predstavlja položaj Sonca. Na tleh je označena točka za opazovanje in črte, ki predstavljajo smeri sever-jug in vzhod-zahod. Datum opazovanja je 26. 6. 2014 in lokacija opazovanja je nekje na ekvatorju. Luna je bila vidna in njena faza je bila okoli zadnjega krajca. Za meritve predpostavi, da so žarki iz žarnice vzporedni na mestu opazovanja. Zanemari debelino označbe, na katero boš postavil gnomon.

- Na list z odgovori nariši položaj sence in označi smeri neba.
- Določi zenitno razdaljo in azimut Sonca.
- Določi geografsko dolžino, če je ura 14:00 UT v trenutku meritve.
- Določi časovni pas. Privzemi, da so širine časovnih pasov 15° in da je začetek ničtega pasu na ničtem poldnevniku.

Primeri teoretičnih nalog

1. teoretična naloga

Dva opazovalca, eden pri jezeru Jarun v Zagrebu in drugi v Brodarici (pri Šibeniku), istočasno merita višino kulminacije Sonca s pomočjo gnomonov enakih višin. Opazovalec v Zagrebu je ugotovil, da je dolžina sence gnomona 48,1 % višine gnomona, medtem ko je opazovalec v Brodarici ugotovil, da je dolžina sence 43,7 % višine gnomona. Opazovalca sta na isti geografski dolžini 15,9° vzhodno in njuna oddaljenost je $d = 234$ km. Določi Zemljin polmer R, če veš, da na prvi spomladanski dan Sonce v Brodarici kulminira na višini 46°42', oceni z uporabo priloženega grafa z vrednostmi časovne enačbe in Sončeve deklinacije skozi leto, na kateri dan v letu in približno ob kateri uri (po poletnem času) sta opazovalca izvedla svoje meritve.



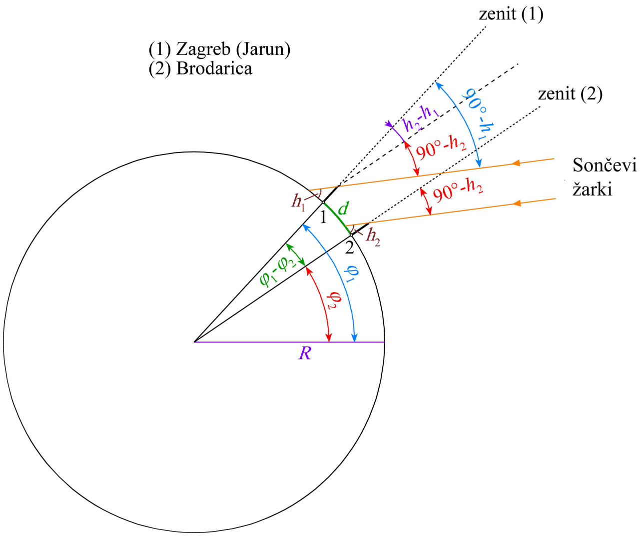
SLIKA 2.

Namig Pri reševanju si pomagajte s sliko 3.

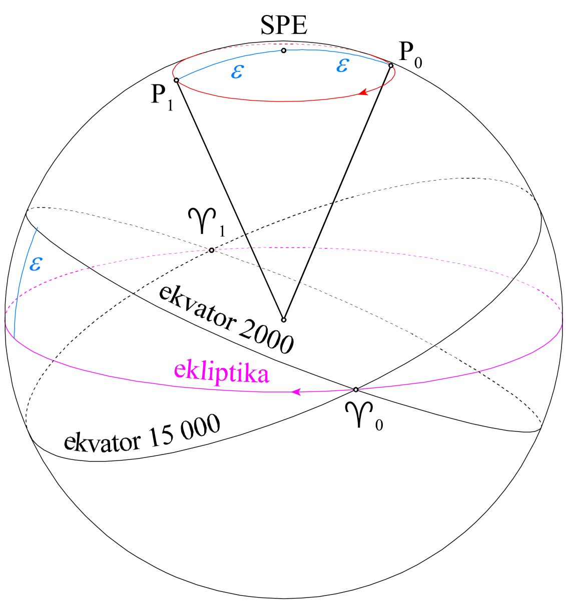
2. teoretična naloga

Predpostavi, da je deklinacija Severnice danes 90°. S pomočjo skice nebesne krogle oceni, na katerih geografskih širinah bo Severnica nadobzornica čez polovico periode precesije Zemljine vrtilne osi (Platonovega leta)! Predpostavi, da je naklon vrtilne osi konstanten in znaša 23,5°. Koliko je danes rektascenzija točke na nebesni krogli, v kateri se bo po polovici periode precesije nahajala točka enakonočja? Zanemari lastno gibanje Severnice.

Rešitve Deklinacija Severnice je $\delta = 90° - 2\varepsilon = 43°$. Njena oddaljenost od severnega nebesnega polja je $90° - \delta = 47°$.
Severnica je nadobzorniška za geografske širine, večje od 47° severno.
Danes je rektascenzija pomladišča $\alpha = 12$ h.



SLIKA 3.



SLIKA 4.

3. teoretična naloga

Eksoplanet brez atmosfere kroži okoli svoje zvezde v krožni orbiti s polmerom dveh astronomskih enot. Vrtilna os planeta je pravokotna na njegovo ravnino kroženja. Skupna masa zvezde in planeta je $3 \cdot 10^{30}$ kg. Zvezda največ seva pri 400 nm. Svetlobni tok vpada pravokotno na planetovo površje in njegova gostota tam znaša 2 $\mathrm{kWm^{-2}}$. Opazovano s planetovega ekvatorja je trajanje med prvim in zadnjim stikom zvezdinega diska z obzorjem 3 min. Vrtenja planeta je pogradno v primerjavi z njegovim kroženjem okoli zvezde. Izračunaj planetovo sidersko periodo rotacije izraženo v dnevih. Wienova konstanta je $2{,}9 \cdot 10^{-3}$ K m.

Rešitev $T_{\mathrm{sid}} = 44{,}9$ dneva.

Ekipna naloga

Veliki radijski teleskop je prejel skrivnostni signal iz vesolja, ki je sestavljen iz 594 bitov. Ker je 594 s 27 (33), so znanstveniki prikazali signal v osmiškem sistemu:

- 760700100040170140117610104024012020422030021020202401202044105004104010660330005025100410401042021001104410101040117707740211041020102021010404040610104010104101040410022010407607020050023741403500

Znanstveniki niso mogli dešifrirati sporočila, zato so domnevali, da je sporočilo v resnici v binarnem sistemu, in iščejo rešitev. Pomagaj jim.

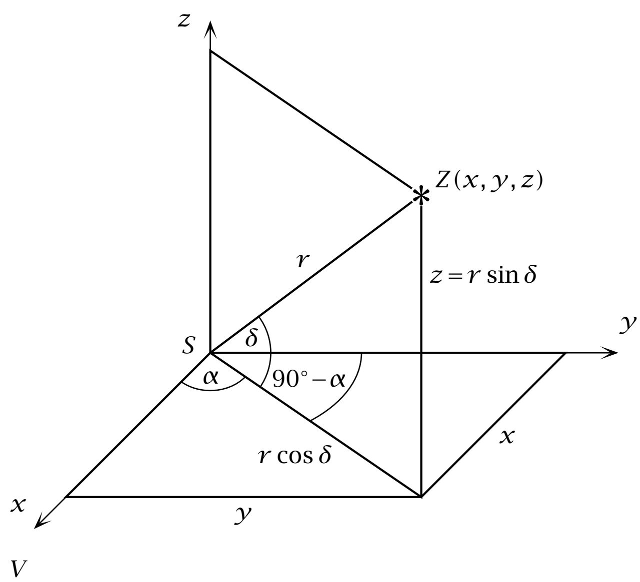
Naloga Obdelava podatkov

Asterizem Veliki voz

Za računanje lastnih gibanj zvezd v daljših časovnih obdobij si izberemo kartezični koordinatni sistem z izhodiščem v Soncu (S), os x v smeri pomladišča, os y v smeri deklinacije 0° in rektascenzije 90° (6 h) in os z v smeri nebesnega severnega pola (glej skico).

Kartezične koordinate zvezde Z, katere ekvatorialni koordinati (ob času t) sta α in δ in oddaljenost od Sonca r, so podane z enačbami:

- $x = r\cos\alpha\cos\delta$
  $y = r\sin\alpha\cos\delta$
  $z = r\sin\delta$



SLIKA 5.

Hitrost zvezde V lahko razdelimo na radialno komponento V_r in dve pravokotni komponenti – ena pravokotna na rektascenzijski meridian (prečna komponenta na deklinacijo $V_{t\delta}$) in druga pravokotna na deklinacijski vzporednik (prečna komponenta na rektascenzijo $V_{t\alpha}$). Transverzalni komponenti lahko izračunamo z enačbama:

- $V_{t\delta}(\text{km/s}) = 4{,}74\mu_\delta(''/\text{god})\cdot r(\text{pc})$
  $V_{t\delta}(\text{km/s}) = 4{,}74\mu_\alpha(''/\text{god})\cos\delta\cdot r(\text{pc})$,

kjer je μ_α sprememba rektascenzijo na časovno in μ_δ sprememba deklinacije na časovno enoto. (God pomeni leto.)

Komponente hitrosti zvezde (V_x, V_y, V_z) lahko določimo z naslednjimi enačbami:

- $V_x = V_r\cos\alpha\cos\delta - V_{t\alpha}\sin\alpha - V_{t\delta}\cos\alpha\sin\delta$
  $V_y = V_r\sin\alpha\cos\delta - V_{t\alpha}\cos\alpha - V_{t\delta}\sin\alpha\sin\delta$
  $V_z = V_r\sin\delta - V_{t\delta}\cos\delta$.

V preglednici 1 so podani podatki za sedem zvezd v dobro znanem asterizmu (za epoho J2000,0). Podatki vključujejo rektascenzijo (α_0) in deklinacijo zvezd (δ_0), radialno hitrost (V_r), razdaljo (r) in komponente lastnega gibanja ($\mu\alpha\cdot\cos\delta$ in $\mu\delta$) izražene v mililočnih sekundah na leto. V zadnjih dveh stolpcih so koordinate za vse zvezde razen za zvezdo 4 za leto −50.000, ki vključujejo premik zaradi lastnega gibanja.

zvezda	α_0	δ_0	V_r (km/s)	r (pc)	$\mu_\alpha\cdot\cos\delta$ ($10^{-3}{}''$/leto)	μ_δ ($10^{-3}{}''$/leto)	α_0	δ_0
1	$11^h03^m44^s$	$+61°45'04''$	−9,0	37,7	−134	−34	$11^h20^m7^s$	$+61°57'36''$
2	$11^h01^m50^s$	$+56°22'57''$	−12,0	24,5	+81	+33	$10^h53^m42^s$	$+56°11'15''$
3	$11^h53^m50^s$	$+53°41'41''$	−12,6	25,5	+107	+11	$11^h43^m42^s$	$+53°37'19''$
4	$12^h15^m26^s$	$+57°01'57''$	−20,2	17,9	+143	−129		
5	$12^h54^m02^s$	$+55°57'35''$	−9,3	25,3	+111	−8	$12^h42^m46^s$	$+55°58'12''$
6	$13^h23^m56^s$	$+54°55'31''$	−9,0	25,4	+121	−22	$13^h11^m54^s$	$+54°59'41''$
7	$13^h03^m44^s$	$+49°18'48''$	−10,9	31,9	−121	−14	$13^h58^m6^s$	$+49°18'47''$

PREGLEDNICA 1.

Naloge

- Z uporabo podanih enačb izračunaj rektascenzijo, deklinacijo in razdaljo zvezde 4 za leto −50.000. Za izračun razdalje predpostavi konstantno hitrost in zanemari precesijo.
- Izračunaj razliko navidezne magnitude zvezde 4 od leta −50.000 do leta 2000 zaradi lastnega gibanja zvezde.
- Nariši asterizem, kakor je videti danes in kakor je zgledal leta −50.000 v kartezično koordinatno mrežo.
- Kako je ime zvezdam v asterizmu?

Virialni teorem in temna snov

V preglednici 2 so prikazani podatki za radialne hitrosti (V_{ri}) in navidezne magnitude v spektralnem pasu (m_{Bi}) za 30 galaksij v Jati v Berenikinih kodrih katere navidezna kotna velikost je $D = 3{,}8°$ in obsega 1.000 galaksij.

Naloge

- Izračunaj povprečno radialno hitrost galaksij in razdaljo do jate, če je Hubblova konstanta $H = 70\ (\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$.
- Izračunaj disperzijo hitrosti v smeri opazovanja (σ_r), ki je enaka standardni deviaciji meritev.
- Z izrazom
  - $M = \dfrac{2R\sigma^2}{G}$,

  ki je izpeljan iz virialnega teorema, izračunaj maso jate galaksij M, ki izhaja iz dinamike galaksij v jati (G je gravitacijska konstanta in R je polmer jate).
- Predpostavi, da izsev vsake galaksije izhaja iz določenega števila zvezd, ki so vse podobne Soncu, in izračunaj povprečno maso galaksije ter celotno maso jate. Absolutna magnituda Sonca v modrem delu spektra je $m_{\mathrm{BS}} = 5{,}5$ m in Sončeva masa je $2 \cdot 10^{30}$ kg. Izračunaj maso vidne snovi ob predpostavki, da je razmerje med maso in izsevom (v modrem delu spektra) = 5. Primerjaj rezultat z maso izpeljano iz virialnega teorema. Kolikšen je delež temne snovi v tej jati galaksij?

št.	cz (km/s)	m_B
1	6497	11,42
2	6848	13,73
3	9371	14,75
4	7228	14,79
5	7176	11,49
6	7145	14,62
7	7020	14,73
8	7114	14,69
9	5504	14,46
10	8043	14,24
11	4745	14,39
12	4818	14,52
13	6950	14,68
14	4660	13,68
15	7799	14,38
16	6907	14,72
17	5807	13,28
18	6691	13,61
19	9386	14,61
20	6675	14,65
21	6350	14,24
22	5475	12,08
23	6101	14,32
24	7242	14,01
25	6086	14,25
26	7616	14,69
27	7583	13,66
28	7405	14,79
29	7203	14,81
30	7198	14,86

PREGLEDNICA 2.

Barvni sudoku

→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

		3	6		2		1
							4
8				7	6		
			7				2
4				6			8
7		5					
				4	8		
		7			3	2	

→ REŠITEV BARVNI SUDOKU

5	4	3	6	8	2	7	1
2	7	8	1	3	5	6	4
8	1	4	2	7	6	3	5
3	5	6	7	1	4	8	2
4	2	1	3	6	7	5	8
7	6	5	8	2	1	4	3
6	3	2	5	4	8	1	7
1	8	7	4	5	3	2	6

Smer potovanja mrka

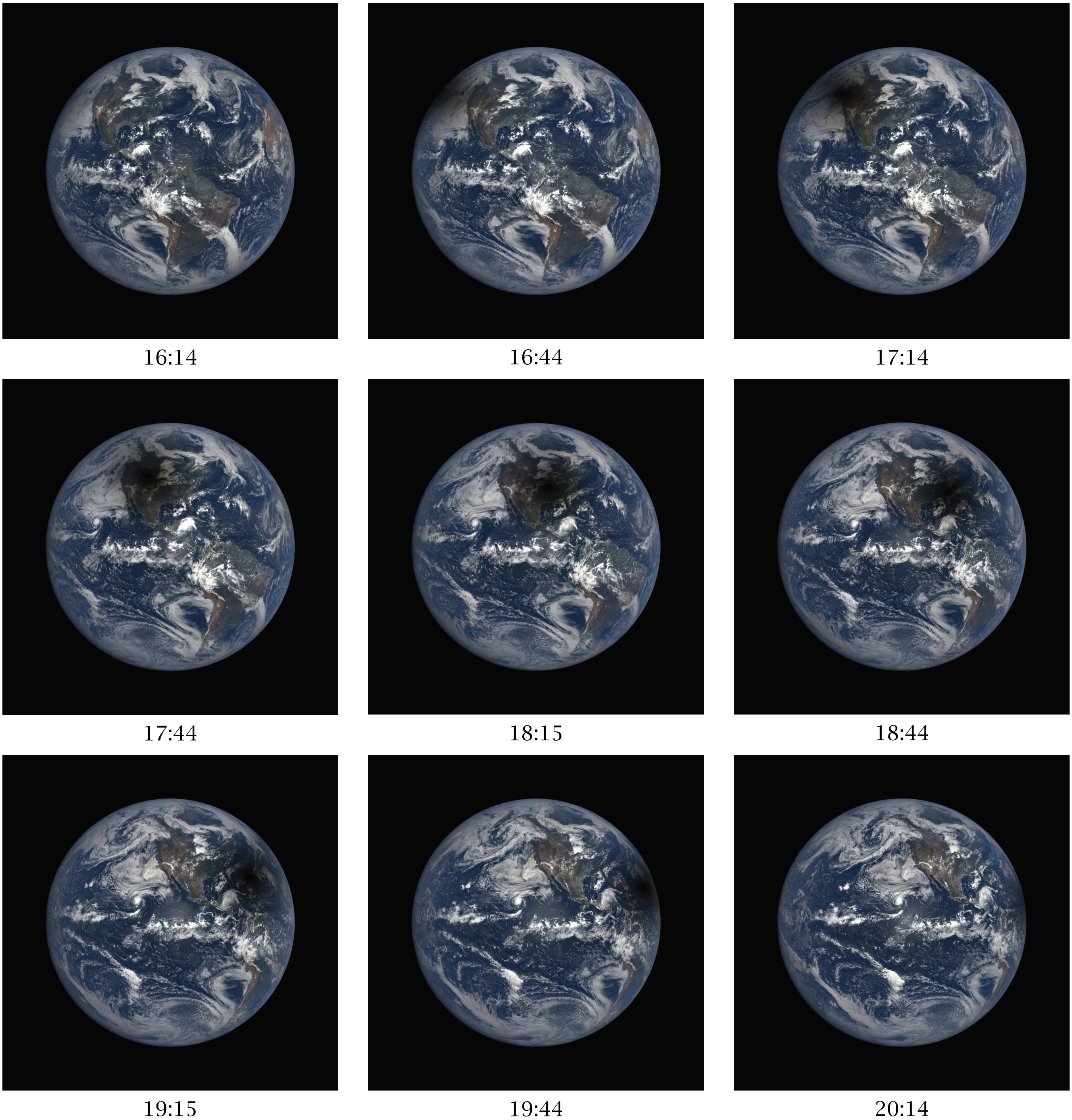
Aleš Mohorič

→ K sliki na naslovnici je postavljeno vprašanje: V katero smer na Zemljinem površju se premika območje Sončevega mrka? Kolega vam sporoči, da je ravnokar opazoval Sončev mrk. Kam boste pohiteli, da ujamete svoj pogled na spektakularni dogodek, vzhodno ali zahodno od njega?

Odgovor morda ni tako enostaven. Zgornja kulminacija Sonca, najvišja lega Sonca v kakem kraju, se na Zemljinem površju seli proti zahodu – pri nas je poldne prej kot npr. v Londonu. Razlog za to je vrtenje Zemlje okoli lastne osi od zahoda proti vzhodu. Zemlja se okoli lastne osi zavrti v enem dnevu. Ali velja enako za mrk? Če je vrtenje Zemlje glavni razlog, da nebesna telesa krožijo po nebu, potem bi se območje mrka tudi selilo proti vzhodu. Pa si poglejmo niz satelitskih posnetkov, ki si sledijo po naraščajočem času (slika 1).

Na nizu slik lepo vidimo, da se Zemlja vrti proti vzhodu, hkrati pa vidimo senco Sončevega mrka, kako najprej zakrije zahodni del Severne Amerike, nato pa se v nekaj urah premakne proti vzhodnemu delu. Torej, senca Sončevega mrka po Zemlji potuje od zahoda proti vzhodu! Razmislite, kako bi pojav pojasnili. Upoštevati morate oddaljenosti Zemlje od Sonca in Lune, hitrosti, s katerimi telesa krožijo, hitrost vrtenja Zemlje.

Satelitske slike je med Sončevim mrkom 21. avgusta 2017 posnela večbarvna kamera za slikanje Zemlje EPIC (Earth Polychromatic Imaging Camera), ki jo ima na svojem krovu satelit za opazovanje Zemljinega podnebja DSCOVR (Deep Space Climate Observatory).



SLIKA 1.
Satelitska slika Zemlje v devetih zaporednih časih narejena 21. avgusta. Na Severni polobli se vidi Lunino senco, kako prepotuje Severno Ameriko od zahoda proti vzhodu.

× × ×

Generiranje vseh podmnožic dane množice – leksikografska ureditev

Andrej Taranenko

V prispevku bomo spoznali algoritme, ki se uporabljajo za generiranje vseh možnih podmnožic poljubne dane končne množice v nekem vrstnem redu.

Naj bo n poljubno naravno število in $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pogledali bomo, kako tvorimo vse podmnožice množice S. Vemo, da je število vseh podmnožic poljubne množice z n elementi enako 2^n. S $\boldsymbol{S}$ označimo seznam[1] vseh podmnožic množice S. Natančneje, $\boldsymbol{S} = [S_0, S_1, \ldots, S_{2^n-1}]$, pri čemer za vsak $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ velja $S_i \subseteq S$ in so vse množice v seznamu $\boldsymbol{S}$ paroma različne. Ker konkreten seznam določa vrstni red elementov v njem, mu rečemo tudi *ureditev* elementov.

Naj bo $\boldsymbol{S} = [S_0, S_1, \ldots, S_{2^n-1}]$ ureditev vseh podmnožic množice S. Ker je s tem določen vrstni red vseh teh podmnožic, ima vsaka podmnožica S_i, za poljubni $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 2\}$, svojega *naslednika* S_{i+1} - podmnožico, ki se v izbranem vrstnem redu pojavi neposredno za njo. Množica S_{2^n-1} pa nima naslednika oziroma bomo rekli, da je ta *nedefiniran*. Velja torej:

- $\text{naslednik}(S_i) = \begin{cases} S_{i+1}, & 0 \le i < 2^n - 1 \\ \textit{nedefiniran}, & i = 2^n - 1. \end{cases}$

Naj bo $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ in A množica iz seznama $\boldsymbol{S}$. Število i je *rang množice* A natanko tedaj, ko je $A = S_i$. Rang množice A v izbrani ureditvi označimo z $\text{rang}(A)$ in rečemo, da rangiramo množico A. Funkcija $\text{rang} : \boldsymbol{S} \to \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ je bijektivna. Njen inverz označimo z derang. Velja torej:

- $\text{rang}(A) = i \Leftrightarrow \text{derang}(i) = A$,

za vse A iz seznama $\boldsymbol{S}$ in vse $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Računanje $\text{derang}(i)$ imenujemo derangiranje števila i.

Poleg iskanja naslednjega elementa v ureditvi nas bosta zanimala tudi algoritma rangiranja in derangiranja. Še več, naslednika lahko preprosto definiramo s pomočjo rangiranja in derangiranja na naslednji način:

- $$\text{naslednik}(A) = \begin{cases} \text{derang}(\text{rang}(A) + 1), \\ \qquad \text{če } \text{rang}(A) < |\boldsymbol{S}| - 1, \text{ in} \\ \textit{nedefiniran}, \\ \qquad \text{če } \text{rang}(A) = |\boldsymbol{S}| - 1. \end{cases} \tag{1}$$

Primer 1. Poglejmo dve izmed vseh možnih ureditev podmnožic množice $\{1, 2, 3\}$. Prva ureditev naj bo

- $\mathcal{A} = \left[\overset{0}{\{\}}, \overset{1}{\{1\}}, \overset{2}{\{2\}}, \overset{3}{\{3\}}, \overset{4}{\{1,2\}}, \overset{5}{\{1,3\}}, \overset{6}{\{2,3\}}, \overset{7}{\{1,2,3\}}\right]$,

druga pa

- $\mathcal{B} = \left[\overset{0}{\{\}}, \overset{1}{\{3\}}, \overset{2}{\{2\}}, \overset{3}{\{2,3\}}, \overset{4}{\{1\}}, \overset{5}{\{1,3\}}, \overset{6}{\{1,2\}}, \overset{7}{\{1,2,3\}}\right]$.

Nad posameznimi množicami so zapisani rangi v dani ureditvi. Vidimo lahko, da ima množica $\{\}$ v obeh ureditvah rang enak 0. Množica $\{1\}$ ima v ureditvi $\mathcal{A}$ rang enak 1, v ureditvi $\mathcal{B}$ pa rang enak 4. Za ureditev $\mathcal{A}$ je $\text{derang}(6)$ množica $\{2, 3\}$, za ureditev $\mathcal{B}$ pa je $\text{derang}(6)$ množica $\{1, 2\}$. Naslednik množice $\{1, 2\}$ v ureditvi $\mathcal{A}$ je množica $\{1, 3\}$, v ureditvi $\mathcal{B}$ pa množica $\{1, 2, 3\}$.

[1] V strukturi *seznam* je pomemben vrstni red elementov. Sezname bomo zapisovali med oglate oklepaje.

Podmnožico T množice $S = \{1, 2, \dots, n\}$ si lahko v računalniku učinkovito predstavimo z binarnim nizom dolžine n, označili ga bomo z $B(T)$. $B(T)$ torej vsebuje n bitov: $b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0$, pri tem za vsak $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ velja:

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{če } n - i \notin T \\ 1, & \text{če } n - i \in T. \end{cases}$$

To pomeni, da je i-ti bit z leve (indeks $n - i$) enak 1, če je število i v podmnožici, in enak 0, če število i ni v podmnožici.

Primer 2. Naj bo $S = \{1, 2, 3\}$ in $T = \{1, 2\}$. Če gledamo na T kot na podmnožico množice S, si jo lahko predstavimo s tremi biti ($n = 3$), in sicer $B(T) = 110$. Natančneje, $b_2 = 1$, ker velja $3 - 2 = 1 \in T$, $b_1 = 1$, ker velja $3 - 1 = 2 \in T$, in $b_0 = 0$, ker velja $3 - 0 = 3 \notin T$.

Vsaki podmnožici T množice $S = \{1, 2, \dots, n\}$ tako priredimo enolično določen niz $B(T)$. Velja tudi obratno, vsak binarni niz dolžine n enolično določa pripadajočo podmnožico množice S. Ni težko preveriti, da na ta način dobimo vse možne binarne nize dolžine n. Še več, na nize $B(T)$ lahko gledamo kot na predstavitve celih števil med 0 in $2^n - 1$ v dvojiškem številskem sestavu. Naraščajoča ureditev teh celih števil, predstavljenih v dvojiškem številskem sestavu, porodi ureditev podmnožic množice S, ki jo imenujemo *leksikografska ureditev*. Rang neke množice $T \subseteq S$ je torej enak vrednosti, ki jo predstavlja $B(T) = b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0$ v dvojiškem številskem sestavu:

$$\operatorname{rang}(T) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i.$$

Derang števila r, kjer je $0 \le r \le 2^n - 1$, pa je podmnožica $U \subseteq S$, za katero je $B(U)$ enak predstavitvi števila r v dvojiškem številskem sestavu.

Primer 3. Poglejmo leksikografsko ureditev podmnožic množice $\{1, 2, 3\}$. Torej števila $0 \le r \le 2^3 - 1 = 7$ uredimo v naraščajočem vrstnem redu. Za vsako število pogledamo njegovo predstavitev v dvojiškem številskem sestavu, iz česar dobimo pripadajočo podmnožico.

r	dvojiška predstavitev r	pripadajoča množica
0	000	$\{\}$
1	001	$\{3\}$
2	010	$\{2\}$
3	011	$\{2, 3\}$
4	100	$\{1\}$
5	101	$\{1, 3\}$
6	110	$\{1, 2\}$
7	111	$\{1, 2, 3\}$

TABELA 1.

Leksikografska ureditev podmnožic množice $\{1, 2, 3\}$ je torej

$$S = \left[\overset{0}{\{\}}, \overset{1}{\{3\}}, \overset{2}{\{2\}}, \{2, \overset{3}{,} 3\}, \overset{4}{\{1\}}, \{1 \overset{5}{,} 3\}, \{1 \overset{6}{,} 2\}, \{1, \overset{7}{2}, 3\} \right].$$

Zapišimo še algoritma rangiranja in derangiranja za leksikografsko ureditev podmnožic množice $S = \{1, \dots, n\}$. Algoritem 1 prikazuje izračun ranga množice $T \subseteq S$ v leksikografski ureditvi. Z zanko **for** gremo skozi vse elemente množice S. V pogojnem stavku preverimo, ali element i pripada dani podmnožici T. S tem v bistvu preverjamo, ali je v $B(T)$ bit b_{n-i} enak 1. Če je, rangu prištejemo ustrezno potenco števila 2. Računamo torej desetiško vrednost števila $B(T)$, ki jo predstavlja dvojiški zapis.

Algoritem 1: LexRangPodmnozice(n,T)

$r = 0$
for $i = n, n-1, \dots, 1$ **do**
  if $i \in T$ **then**
    $r = r + 2^{n-i}$
return r

Algoritem 2 prikazuje, kako v leksikografski ureditvi derangiramo število r, pri čemer je $0 \le r \le 2^n - 1$. Tudi tokrat zanka **for** predstavlja sprehod čez vseh n elementov množice S. V pogojnem stavku preverimo, ali je najbolj desna števka v dvojiškem zapisu števila r enaka 1. Če je, v množico dodamo →

element, ki ga ta števka (bit) predstavlja. Deljenje števila r z dva in rezanjem na celi del v dvojiški predstavitvi odreže najbolj desno števko, kar omogoča, da v vsaki iteraciji zanke preverjamo vrednost najbolj desne števke.

Algoritem 2: LexDerangPodmnozice(n,r)

$T = \emptyset$
for $i = n, n-1, \ldots, 1$ **do**
  if $r \mod 2 = 1$ **then**
    $T = T \cup \{i\}$
  $r = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$
return T

Algoritma za izračun naslednika ne bomo posebej zapisovali, saj lahko neposredno uporabimo zvezo med naslednikom ter rangiranjem in derangiranjem, predstavljeno s formulo (1).

Primer 4. Ta primer naredite sami. Naj bo $n = 8$ in $T = \{1, 3, 4, 6\}$. S pomočjo algoritma 1 izračunajte rang(T). Katero množico dobite, če s pomočjo algoritma 2 izračunte derang(181)?

V tem prispevku smo za našo osnovno množico vzeli množico $S = \{1, \ldots, n\}$. Kaj pa, če želimo leksikografsko ureditev poljubne množice A z n elementi? V tem primeru zadostuje, da poiščemo bijekcijo $f : A \to S$. Tako lahko poljubno podmnožico $X \subseteq A$ rangiramo kot

- $\text{rang}(X) = \text{rang}(f(X))$.

Podobno derangiramo število r, $0 \le r \le 2^n - 1$, po naslednji formuli:

- $\text{derang}(r) = f^{-1}(\text{derang}(r))$.

Pri tem je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f, torej $f(X) = Y$ natanko tedaj, ko je $f^{-1}(Y) = X$, kjer je $X \subseteq A$ in $Y \subseteq S$.

Na začetku smo videli, da obstaja več različnih ureditev podmnožic dane množice, leksikografska je le ena od njih. Na primeru 4 lahko opazimo tudi naslednje. Množica $\{2, 3\}$ ima rang enak 3, množica $\{1\}$ pa rang enak 4. V leksikografski ureditvi podmnožic množice $\{1, 2, 3\}$ imamo torej dve zaporedni množici, ki sta komplementarni (sta med seboj različni, kolikor se le da). Ali obstaja taka ureditev podmnožic množice $\{1, 2, 3\}$, da se bosta dve poljubni zaporedni množici razlikovali za natanko en element? Odgovor je DA! Taka razvrstitev obstaja za poljubno množico $\{1, 2, \ldots n\}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Ampak to je morda zgodba za kdaj drugič. Vas pa izzivam, da najdete tako razvrstitev podmnožic množice $\{1, 2, 3\}$.

Literatura

[1] Donald L. Kreher, Douglas R. Stinson, *Combinatorial algorithms: generation, enumeration, and search*, CRC Press, 1999.

× × ×

Nalogi

Marko Razpet

1. Urejena m-terica $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$, v kateri so koordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ naravna števila, je pitagorejska m-terica, če velja

- $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2 = x_m^2$

Pri tem je $m \ge 3$. Pitagorejska trojica je na primer (3, 4, 5), ker je $3^2 + 4^2 = 5^2$, pitagorejska četverica pa (2, 3, 6, 7), saj je $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$. Dokaži, da je za vsako naravno število n peterica

- $(2n, 2n+1, 2n+2, 6n^2+6n+2, 6n^2+6n+3)$

pitagorejska. Poišči tovrstne pitagorejske peterice, katerih koordinate ne presegajo 100.

2. Izračunaj

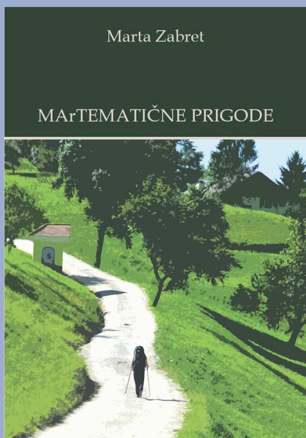
- $6^2 - 5^2,\ 56^2 - 45^2,\ 556^2 - 445^2,\ 5556^2 - 4445^2$

Nato rezultate posploši na razliko kvadratov oblike

- $\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2$.

× × ×

MaRtematične prigode



Marta Zabret

MArTEMATIČNE PRIGODE

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode*. Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/`

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

PRESEK 45/2

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz druge številke Preseka je **Bik se pase.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Lana Polak iz Kranja, Ana Knap iz Preserja in Zala Hriberšek iz Mislinja, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Zbegana pšenica

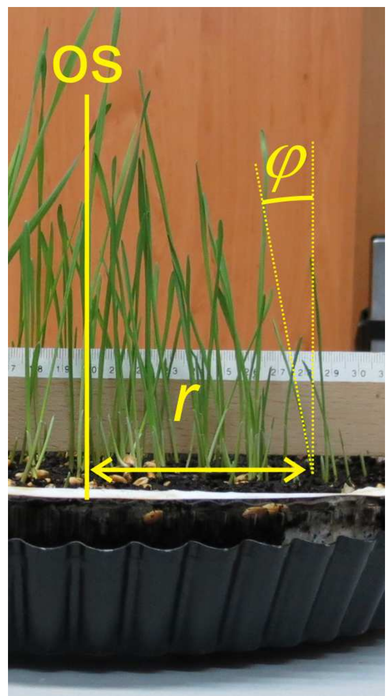
Aleš Mohorič in Vitomir Babič

→ Tokratna naravoslovna fotografija kaže šop mlade pšenice. Pšenica običajno raste navpično navzgor, v nasprotni smeri gravitacijske sile. Tako raste zato, da ohrani stabilnost in se ne prekucne, ko dozori in postane dovolj visoka. Če postavimo posodo z zemljo in pšeničnim semenom na vrteč se gramofon, vzklije seme v svojem, prav posebnem svetu.

Gramofon je priprava z vodoravno ploščo, ki se vrti okoli navpične osi s stalno kotno hitrostjo. V svetu, ki se vrti na gramofonu, dobi »teža« bilke, poleg navpične komponente, še vodoravno komponento, pravokotno stran od osi vrtenja. Komponenta »teže« navzdol je gravitacijska sila mg vodoravna komponenta pa ima velikost $m\omega^2 r$. Pšenica začne rasti poševno. Kratek odsek bilke je povsod vzporeden »teži« na tistem mestu. Komponenta »teže«, ki je posledica vrtenja gramofona, je vodoravna in odvisna od oddaljenosti od osi r. Kot, ki ga bilka ob korenini oklepa z navpičnico in ga označimo s φ (glej sliko 2), je torej odvisen od r. Enostavno lahko pokažemo, da je $\operatorname{tg}\varphi = \omega^2 r/g$.

Slika 1 kaže krožnik napolnjen z zemljo, iz katerega raste šop pšenice. Krožnik je bil dva tedna postavljen na gramofonu, ki se je vrtel s stalno kot-

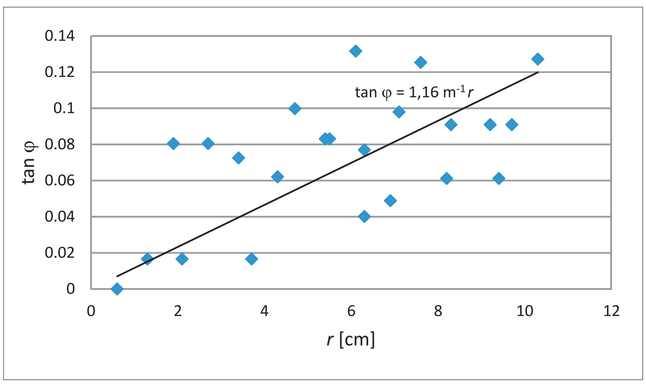
SLIKA 1.
Pšenica, ki je tičala dva tedna na vrtečem se gramofonu, je zrasla nagnjena proti osi vrtenja. Foto: Vitomir Babič.



SLIKA2.
Kot φ, pod katerim raste bilka, je odvisen od oddaljenosti od osi r.

no hitrostjo. Avtor je premišljeno v kader postavil ravnilo, s katerim enostavno odčitavamo oddaljenost posameznih bilk od osi vrtenja. Kot, pod katerim raste bilka, lahko izmerimo s primernim orodjem, ki ga nudi vsak malo boljši program za risanje. Pozorni smo, da podatka izmerimo le za bilke, ki so razporejene po premeru krožnika, ki je vzporeden ravnini slike. Upoštevati moramo namreč, da fotografija kaže le projekcijo bilke na ravnino slike.

Vse bilke ne rastejo enako zaradi različne oddaljenosti od osi. Nekoliko pa se kot naključno razlikuje tudi za bilke, ki so enako oddaljene od osi. Vendarle nam množica meritev za posamezne rastline v grafu na sliki 3, kamor nanašamo vrednosti za tangens kota in oddaljenost od osi, vseeno tvori neko gručo, ki kaže na povezanost med kotom in oddaljenostjo od osi. Bolj kot je bilka oddaljena od osi, pod večjim kotom bo rastla.



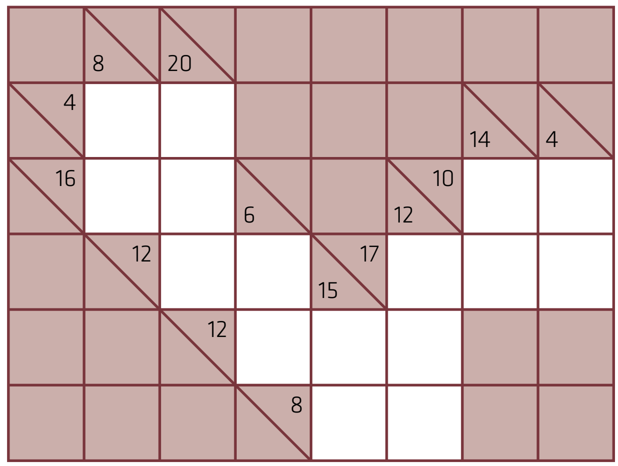
SLIKA 3.
Graf tangensa kota, pod katerim raste bilka, in oddaljenosti od osi. Točke za posamezne bilke ležijo približno na premici.

Smerni koeficient premice, ki se najbolje prilega grafu merskih točk, je kar enak količniku kvadrata kotne hitrosti in gravitacijskega pospeška. S programom za obdelavo podatkov brez težav pridemo do podatka $\omega^2/g = 1{,}16\,\mathrm{m}^{-1}$. Iz znanega gravitacijskega pospeška lahko izračunamo hitrost vrtenja gramofona $\omega = 3{,}4\,\mathrm{s}^{-1}$. Iz zveze $\omega = 2\pi\nu$ dobimo frekvenco 32 vrtljajev na minuto, kar se lepo ujema s standardno frekvenco longplay gramofona $33\frac{1}{3}$ vrtljajev na minuto.

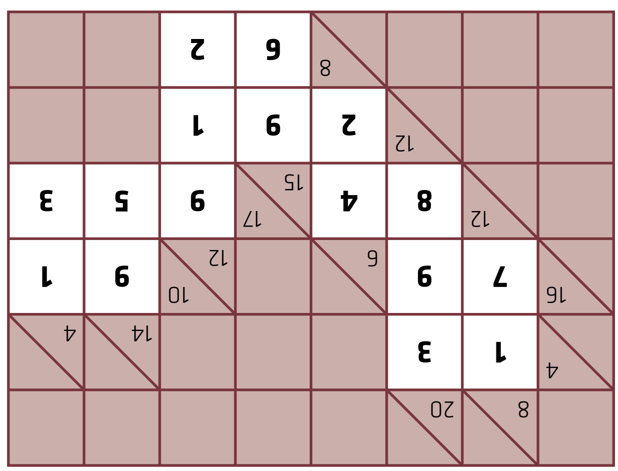
× × ×

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE

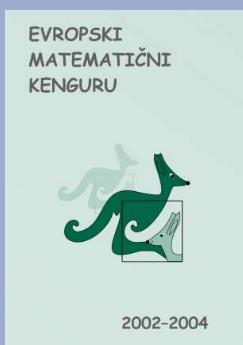


× × ×

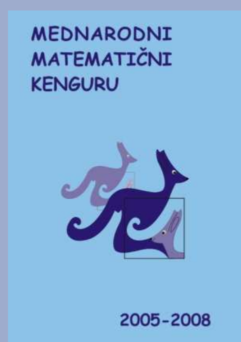
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



10,99 EUR



18,74 EUR

14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016* (novost).

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

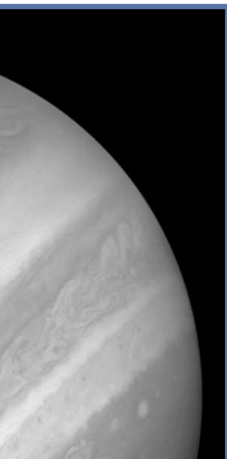
http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Nagradna križanka

NEMŠKI FIZIK, ODKRITELJ DOPPLERJEVEGA POJAVA V KANALSKIH ŽARKIH (JOHANNES)
OSNUTEK, ZAMISEL
POLJE IZVEN IGRIŠČA
AMERIŠKI FIZIK IN KEMIK ONSAGER
CVETNI, ČUDOVITI, ZVEZDNI ?
ZABAVNA IGRA S POSEBNIMI KARTAMI
METNA ZANKA ZA LOV NA DIVJE ŽIVALI

KIRURŠKI NOŽ
1
VELIK INDUSTRIJSKI OBRAT
VRANIČNI PRISAD
3
RAČUNALNIŠKI CENTER
KIT. DIRIGENT PRI NAS (EN)
ŠPELA LOBE
GOTOVINA
LIKOVNI ZNAK, KI KAJ SIMBOLIZIRA
VZHODNI DEL ČEŠKE
RIMSKI EPSKI JUNAK
ANGLEŠKA IGRALKA HURLEY
NEZMOŽNOST IZVAJANJA HOTENIH GIBOV
NAŠ MATEMATIK (JOSIP)
GL. MESTO JEMNA
SAMEC GOZDNE DIVJADI
VESLAŠKI CENTER NA BLEDU
ZAČIMBNA ZMES, V KATERO SE NAMOČI DIVJAČINO
FIZIKALNA PRIPRAVA ZA MERJENJE FREKVENCE VRTENJA Z UTRIPAJOČO SVETLOBO
PODROČJE ALGEBRE
NAŠA PEVKA
VANJO SE KDO UJAME
TELUR
POLJSKI OPERNI SKLADATELJ (STANISLAW)
6
NAUK O RAVNOVESJU SIL
STARO IME ZA TURŠKO MESTO ODRIN
STANJE BREZ PRAVIC
MESO MLADIČEV GOVEDA
OJDIPOV OČE
KRATKA LJUDSKA MODROST
INKOVSKI VLADAR
AMERIŠKI PEVEC ORBISON
NAŠA ALPSKA SMUČARKA
INTERNET OKRAJŠANO
18
NAŠA IGRALKA IN NEKDANJA TV VODITELJICA
FILOZOF MARX
FRANCOSKI IN BRIT. OPERATER MOBILNE TELEFONIJE
7
NEKDANJA TV OLGA
NEKD. ŠPAN. KOLESAR (LUIS)
4
NOVOZELANDSKA PAPIGA
ANG. IGRA S KARTAMI
MESTO V TOSKANI
FR. SKLADATELJ (JACQUES)
BIZMUT
OBDOBJE PRAVEKA, ALGONKIJ
BALKANSKA DRŽAVA
DELCI S TRETJINO OSN. NABOJA
STREŠNO ČELO
NEIMENOVANA REČ ALI OSEBA ONEGA
VOJSKA
VRH NA ZAHODU KAMNIŠKO-SAVINJSKIH ALP
NEKD. IME DRŽAVE KONGO
TRAPA, AVŠA
SENZACIONALNA ZADEVA
NEKD. HRV. VLADAR
IZDELOVALEC OSTREŠIJ
NEKDANJI NIZ. NOG. VRATAR (EDWIN VAN DER)
ARHEOLOŠKO NAJDIŠČE V INDIJI
14
AM. IGRALEC (CHRISTIAN)
NEKD. JAP. DRŽAVNIK (HIROBUMI)
12
ZLOGLASNA SOVJETSKA VARNOSTNO-OBVEŠČEV. SLUŽBA
14. GRŠKA ČRKA
RUDNINA KALCIJEV GLINENEC
SPANJE
20
FRANCOSKI MATEMATIK (PIERRE)
SVETOPIS. OČAK
11
ANTILOPA Z ZELO DOLGIMI, KONIČAST. ROGOVI
LOVSKI POJEM, PRINOSILO
KARL ERJAVEC
LABILNOST
SPLETNA DOMENA NIZOZEMSKE
PRAŠIČEK
15
SLOVITA ITALIJAN. IGRALKA DUSE
NEKDANJI AM. IGRALSKI PAR (JOHN IN BO)
ANGLEŠKO-AMERIŠKI POLITIČNI TEORETIK IN FILOZOF (THOMAS; *ČLOVEKOVE PRAVICE*)
NAŠA OBLIKOVALKA STEKLA (JANJA)
MITIČNI BRITANSKI KRALJ
DEKLICA IZ ČUDEŽNE DEŽELE (PONAŠENO)



AVTOR MARKO BOKALIČ | PREJEMNICA POŠILJKE, ADRESATKA | NEMŠKI SLIKAR IN SKULPTOR (HORST) | NICOLE HOSP | SPOJINA, KI NASTANE IZ KISLINE IN BAZE | RAZVID | PREIZKUSNA DOBA ZA SPREJEM NOVINCEV V RED

NORVEŠKI POLARNI RAZISKOVALEC (FRIDTJOF)

INDUSTRIJSKO NASELJE OB SOČI

22

STAREJŠI

IGRALKA ULLMANN

PRIPRAVA ZA SEJANJE

DREVESNI MATERIAL

ODTENEK, TANČINA

2

DRAGO IVANUŠA

MESTO V SEVERNI IRSKI

OTON JUGOVEC

NEMŠKA POKRAJINA OB SREDNJEM RENU | JAMICA V ČELJUSTI, LEŽIŠČE ZOBNE KORENINE | BRAZILSKI NOGOMETAŠ (DAVID) | POKOJNI FRANCOSKI GOSPODAR. POLITIK (JEAN) | MEHIŠKI TENORIST (FRANCISCO) | 501 Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI | SKANDINAVSKI DROBIŽ, OER | IVAN VIDAV | JEZIKOSLOVEC PLETERŠNIK

RIBE IZ DRUŽINE SKUŠ

ZMRZNJENA VODA

NAŠA BIATLONKA (ANJA)

10

DODAJANJE FLUORA

STOJEČA VODA

PRISTAJALNI POMOL

KRAJ PRI DRAŽGOŠAH

8

SOSEDA TRIGLAVA

MOJZESOV BRAT

9

POLKROŽNA KLOP ALI NIŠA

BARVNA TEHNIKA

21

PRIZNANJE VELIKE VELJAVE, SLAVA

CESTNO VOZILO

5

POLJSKA REKA

NAMESTNIK PRVEGA MOŽA OBČINE

AM. UTEŽNA MERA

NEM.-FRANC. DADAIST (HANS)

GRŠKI PISEC BASNI

ČUDEŽNI NAPOJ

BANJA

VZKLIK ZARADI BOLEČINE

SOSEDI ČRKE P

ZRAČNO VOZILO

MIROSLAV VILHAR *JAMSKA ?*

SODOST

ODREZAN KOS

16

IRANSKA DENARNA ENOTA

DVE NA KVADRAT

STARO IME OLIMPIJSKE DVORANE V SARAJEVU

SREDNJEEVROPSKA REKA

VENO TAUFER

DRUGO NAJVEČJE PORTUGALSKO MESTO

ZABAVNA ODDAJA

NORVEŠKI MATEMATIK (HENRIK)

IZMEČEK

DO, RE, MI, FA, ?

VZDRŽEN ČLOVEK

POLJSKI AFORIST (STANISLAW)

13

UROŠ ZORMAN

PARNI ORGAN VIDA

GLASBENA USPEŠNICA

DIVJA MOČVIRSKA ZELENA

KRVNA SKUPINA

19

17

PREBIVALCI AZIJSKE DRŽAVE

URAD PREDSTOJNIKA JUDOVSKE VERSKE SKUPNOSTI

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. januarja 2018**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×