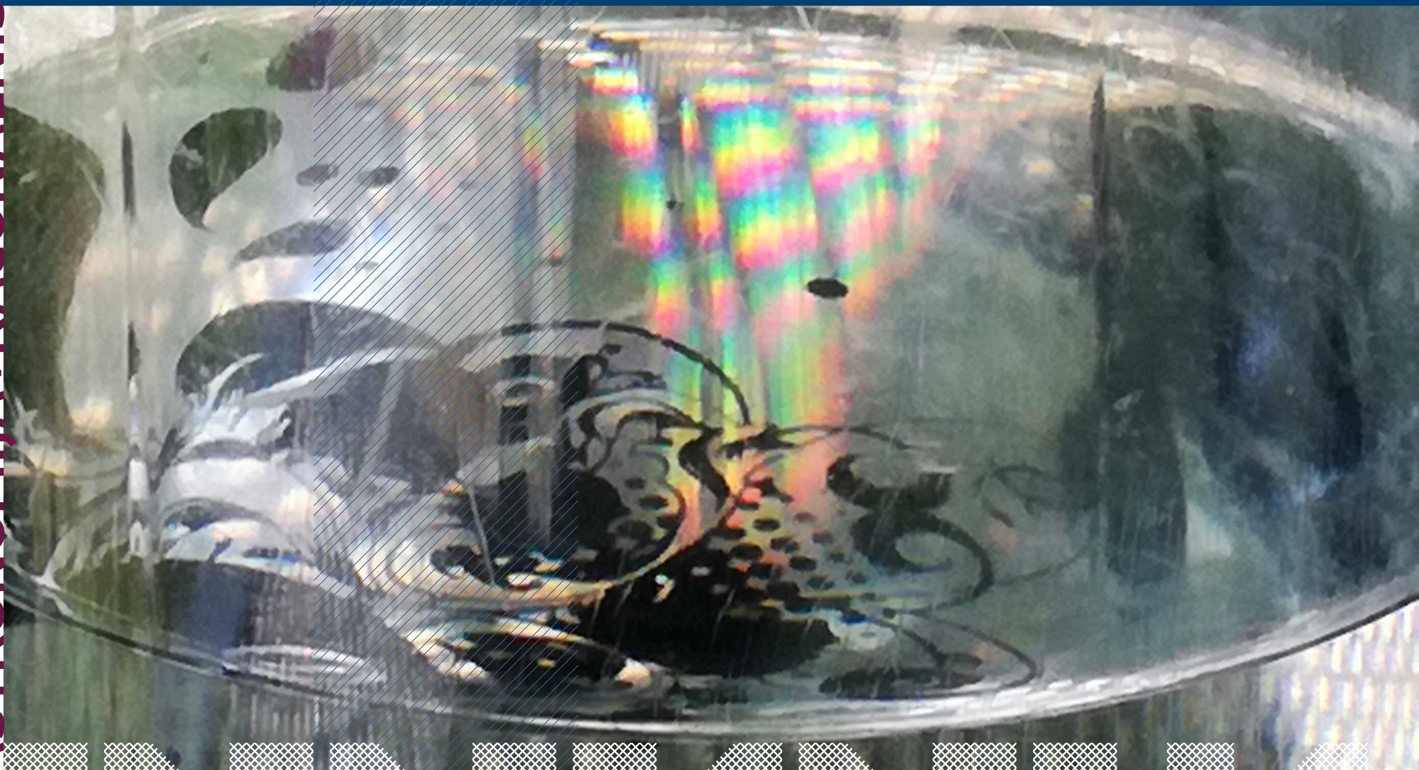
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#1

PRESEK LETNIK 46 (2018/2019) ŠTEVILKA **1**



PRESEK

→ OSTRENJE NA SREDINSKO TOČKO

→ MERJENJE GLOBINE VODNJAKA S STOPARICO

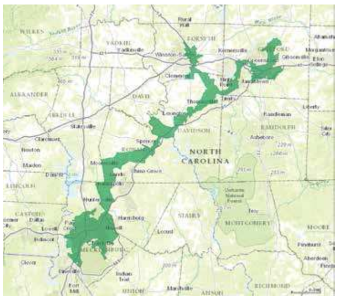
→ IZBOR EKIPE ZA MEDNARODNO OLIMPIJADO

→ ŠE O GENERIRANJU PERMUTACIJ

ISSN 0351-6652

MATEMATIČNI TRENUTKI

Politično prikrojevanje mej volilnih okrajev



Politične stranke, ki so na oblasti v posameznih ameriških volilnih okrajih, pogosto izkoristijo svoj vpliv in preoblikujejo geografske meje okraja. To seveda storijo tako, da z novimi mejami še povečajo svojo prevlado. Včasih gredo v želji po nepravični premoči tako daleč, da uzakonijo resnično bizarne oblike okrajev. S pomočjo geometrije in velike računske moči računalnikov matematiki pomagajo politologom pri oblikovanju milijonov različnih možnih razdelitev države na okraje, pri čemer vsakemu razrezu priredijo nekakšno mero nepravilnosti. Tako lahko predloge o preoblikovanju okrajev primerjajo z matematičnimi modeli in zavrnejo tiste, ki so izjemno nepravični.

Četudi se zdi oblika kakšnega od okrajev zelo nenavadna, jo je mogoče včasih pravno opravičiti ali z geografskimi razlogi ali pa z določili volilne zakonodaje. V idealnem primeru bi tudi matematični modeli vključevali takšne interpretacije, vključno z obstoječimi geometrijskimi. Eden od novih kriterijev meri asimetrijo med okraji s pomočjo primerjave pridobljenih in izgubljenih glasov za dve rivalski stranki v primeru preoblikovanja okrajev. Nedavno je zvezno sodišče zavrnilo eno od predlaganih preoblikovanj ravno s pomočjo tega kriterija. V splošnem so pri dokazovanju nepravičnosti preoblikovanja okrajev potrebne različne meritve in mnenja strokovnjakov z različnih področij, tudi matematike. Opiranje na interdisciplinarno mnenje strokovnjakov ne pomaga le pri razsodbah sodišč, zelo koristno bi bilo že v predhodnih stopnjah načrtovanja novih mej okrajev.

Bolj radovedni bralci si lahko preberete članek *How to Quantify (and Fight) Gerrymandering*, ki ga je aprila 2017 v reviji *Quanta Magazine* objavila Erica Klarreich.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 46, šolsko leto 2018/2019, številka 1

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2018/2019 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Barvite lise na sredini fotografije so posledica disperzije. Nastanejo na temnem robu svetlih ploskev, ki jih opazujemo skozi prozorno posodo napolnjeno z vodo. Več o pojavu v naravoslovni fotografiji. Foto: Aleš Mohorič

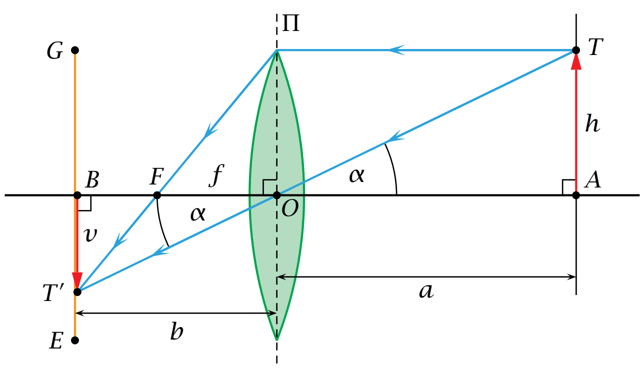
Ostrenje na sredinsko točko

Peter Legiša

Opis problema

Že pred desetletji so fotoaparati dobili samodejno ostrenje – avtofokus. To je fotografu zelo olajšalo delo in omogočilo mnogo hitrejše zajemanje slik.

Kamere imajo navadno v iskalu označene točke, na katere lahko ostrimo. Pri zrcalno refleksnih aparatih je pogosto najbolj točno (in v šibki svetlobi tudi edino mogoče) ostrenje z osrednjo točko, v centru iskala. Zato mnogi fotografi kamero najprej usmerijo tako, da je ta osrednja točka tam, kjer želijo ostrino (npr. na očesu slikane osebe), nato pa aparat premaknejo (zavrtijo), da dobijo pravi izrez. Kot bomo videli, pa to vodi k napaki v ostrenju. Pri bolj oddaljenih objektih in zaprti zaslonki je taka napaka večinoma zanemarljiva. Pri povsem odprti zaslonki in pri slikanju iz bližine pa je tak način ostrenja zgrešen in lahko vzrok za neostre slike.



SLIKA 1.
Leča daljico AT preslika na daljico BT'.

Denimo, da ima objektiv goriščno razdaljo f. Privzeli bomo, da objektiv deluje kot okrogla tanka leča s središčem O in z goriščno razdaljo f. Poglejte si sliko 1. Leča ravno ploščo, vzporedno ravnini Π leče in na sliki 1 za a oddaljeno od te ravnine, ostro upodobi na tipalo, ki je prav tako vzporedno Π in od Π oddaljeno za b, če velja

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}. \qquad (1)$$

To je enačba tanke leče, nedavno izpeljana v Preseku, [1, str. 4].

Leča daljico AT z dolžino h preslika na daljico BT' z dolžino v. Pravokotna trikotnika OAT in OBT' sta podobna, kot AOT označimo z α in je enak kotu BOT'. Razmerje

$$m=\frac{v}{h}=\frac{b}{a}$$

je *povečava*. V tem članku se ne bomo ukvarjali s fotografijo iz bližine, zato bo $m<1$ in »povečava« v resnici pomanjšanje. Če postavimo $b=ma$ v enačbo (1), dobimo

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{a}=\frac{1}{f}$$

in od tod

$$a=\frac{1+m}{m}f=\left(m^{-1}+1\right)f, \qquad b=(1+m)f.$$

Razdalja med tipalom in objektom – daljico AT je

$$a+b=(m^{-1}+2+m)f.$$

To je razdalja, ki jo lahko odčitamo ali nastavimo na nekaterih objektivih.

Primer 1. Naj bo $f=30$ mm in $m=0{,}1$. Potem je $b=33$ mm in $a=330$ mm $=33$ cm. Razdalja med tipalom in daljico AT je 36,3 cm.

Premik

Na sliki 1 je točka T' pri zelenem izrezu in pravi izostritvi (tako, da je točka T ostro upodobljena) oddaljena za v od sredine tipala.

Primer 2. Vzemimo, da je tipalo velikosti APS-C, konkretno 22,2 mm × 14,8 mm. Razdalja v je manjša od polovice diagonale. Ta polovica po Pitagorovem izreku znaša $\sqrt{11{,}1^2 + 7{,}4^2} \approx 13{,}3$ mm. V praktično vseh primerih bo $v \leq 8$ mm.

Dolžina daljice OT' je enaka

- $|OT'| = \sqrt{b^2 + v^2}$.

Zaradi podobnosti je razdalja a_1 od O do T enaka $a_1 = m^{-1}|OT'| = m^{-1}\sqrt{b^2 + v^2}$. Če s sredino iskala izostrimo točko T kot na sliki 2, izmerimo razdaljo $a_1 > a$ med T in ravnino premaknjene leče. Naj bo $a = ka_1$. Seveda je zaradi podobnosti tudi $b = k\sqrt{b^2 + v^2}$. Tu je $k < 1$. Mnogi verjetno veste, da številu k rečemo *kosinus* kota α, torej $k = \cos\alpha$, vendar za naš članek to niti ni pomembno.

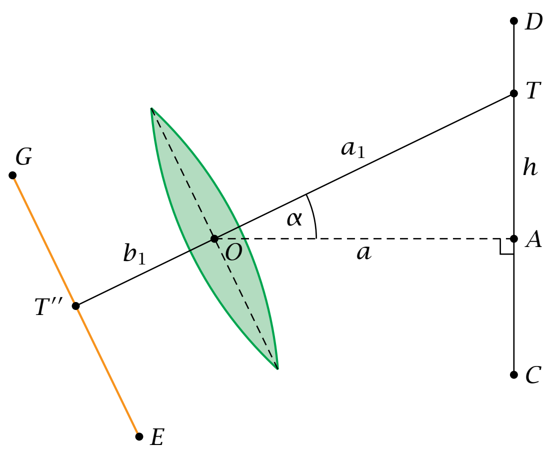
Delimo enakost $b = k\sqrt{b^2 + v^2}$ z b, pa dobimo $1 = k\sqrt{1 + v^2/b^2}$. Upoštevamo še, da je $b = (1 + m)f$, pa je

- $$k = \frac{1}{\sqrt{1+K}}, \qquad K = \frac{v^2}{(1+m)^2 f^2}. \tag{2}$$

Po enačbi 1 se razdalja med točko O in tipalom zmanjša na $b_1 < b$, kjer je

- $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}.$$

Na sliki 2 je to približanje narisano pretirano.



SLIKA 2.

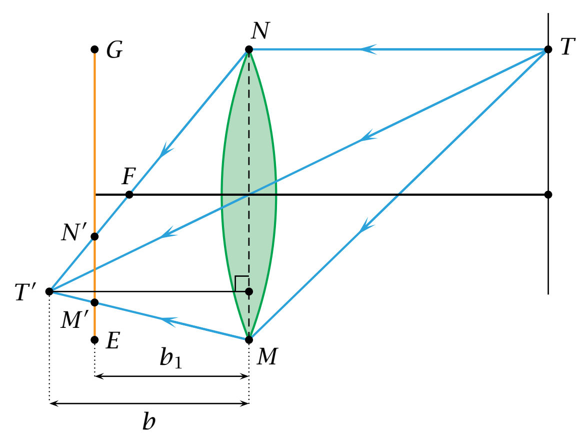
Ko kamero zavrtimo navzgor, se razdalja med T in ravnino leče poveča na a_1.

Primer 3. Če je $f = 30$ mm, $m = 0{,}1$ in $v = 8$ mm, je $|OT'| = \sqrt{33^2 + 8^2} \approx 33{,}96$ mm in tako $a_1 = 10|OT'| \approx 33{,}96$ cm. Ker je bil $a = 33$ cm, se je a povečal za slab centimeter ali za kake tri odstotke. Po enačbi (1) izračunamo $b_1 \approx 32{,}9074$ mm. Ker je bil $b = 33$ mm, je $b - b_1 \approx 0{,}0926$ mm. Kako to vpliva na kakovost slike?

Posledica premika

Denimo, da smo kamero premaknili nazaj navzdol tako, da je točka O spet na praktično istem mestu kot na začetku in da točko A vidimo v sredini iskala. Kamera je zdaj izostrena na preveliko razdaljo. Točka T je spet za a oddaljena od ravnine leče, zato njena ostra slika nastane spet v isti točki T' kot na začetku. Ampak zdaj je T' za tipalom. Razdalja med T' in tipalom je $b - b_1$. Žarke, ki izhajajo iz točke T in padajo na lečo, ta preusmeri v stožec z vrhom T' na sliki 3. Lahko je verjeti, da je presek tega stožca s tipalom krožec s premerom $M'N'$. (Središčni razteg s središčem T', ki M preslika na M', nam krog s središčem O in s premerom $D = |MN|$ preslika na vzporeden krog s premerom $d = |M'N'|$, ki tako leži v ravnini tipala. Ta razteg ohranja stožec žarkov skozi T'.) Število D je premer leče. Trikotnika $T'M'N'$ in $T'MN$ sta podobna. Njuni vodoravni višini sta $b - b_1$ in b, zato je $d : (b - b_1) = D : b$ in od tod

- $d = D(b - b_1)b^{-1}$.



SLIKA 3.

Žarke iz T nam leča lomi v stožec žarkov, ki gredo skozi T'.

Slika točke T se nam tako razmaže v krožec s premerom d. Temu krožcu včasih pravimo *razmazani krožec*, angleško *circle of confusion*. O tem smo pred leti več pisali v Presekovem članku o globinski ostrini [2].

Količnik $w = f/D$ imenujemo *zaslonsko število*. Premer D leče lahko zmanjšamo z zaslonko, ki spušča svetlobo le skozi osrednji del leče. Stožec žarkov tako zožimo in s tem zmanjšamo razmazani krožec. Seveda pa potem na tipalo pada manj svetlobe. Torej:

- $D = \dfrac{f}{w}$.

Večina bralcev pozna ali pa je vsaj opazila zaporedje zaslonskih števil: 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22; 32 ...

Vsako drugo število v tem zaporedju je potenca števila 2. Samo zaporedje pa imamo lahko za zaporedje potenc števila $\sqrt{2}$, zaokroženih na dve mesti. Vsako naslednje število pomeni, da premer odprtine delimo s $\sqrt{2}$, kar pomeni pol manjšo ploščino odprtine in pol manjšo količino svetlobe skozi objektiv. Tako pri zaslonki (zaslonskem številu) 2 skozi objektiv prihaja pol manj svetlobe kot pri zaslonki 1,4. Kamere pametnih telefonov imajo navadno na razpolago le eno zaslonsko število, ki je pogosto okrog 2.

Primer 4. Denimo, da je $m = 0{,}1$, $v = 8$ mm, $f = 30$ mm, $w = 2$. (Najprej smo hoteli vzeti $w = 1{,}4$. Taki objektivi obstajajo, ampak razen pri zelo dragih modelih ostrine na robu pri polni odprtini, $f/1{,}4$ ali $1:1{,}4$, ne moremo doseči, če se še tako trudimo. Moj objektiv z goriščnico 50 mm je pri zaslonki 1,4 za silo dober le v sredini, tako da je nujno pomembni objekt postaviti v center slike.) Za $w = 2$ je $D = 30/2$ mm, torej 15 mm in tako, če upoštevamo številke iz primera 3, v milimetrih

- $d \approx \dfrac{15 \times 0{,}0926}{33} \approx 0{,}0421.$

Razmazani krožec ima premer 42 mikrometrov. Za minimalno kakovost želimo, da ima na sliki velikosti 15 cm × 22 cm razmazani krožec premer največ 0,15 mm, saj je to na meji ločljivosti očesa pri gledanju iz bližine. Sliko te velikosti dobimo s približno desetkratno povečavo slike na tipalu APS-C, torej sme biti premer razmazanega krožca na takem tipalu največ 15 mikrometrov. V našem primeru je razmazani krožec skoraj trikrat prevelik.

Denimo, da imamo na našem tipalu velikosti 22,2 mm × 14,8 mm ≈ 329 kvadratnih milimetrov 24 milijonov pikslov. Na kvadratni milimeter imamo potem približno 73 tisoč kvadratnih pikslov ali približno 270 × 270 pikslov. Stranica piksla meri približno 1/270 milimetra ali približno 3,7 μm, se pravi 3,7 mikrometra (mikrona). Idealno naj razmazani krožec ne bi bil kaj dosti večji od enega piksla.

Približna formula

Če se ne ukvarjamo z makro fotografijo (kjer tako in tako pogosto ostrimo ročno), dobimo dober približek za d po formuli:

- $$d \approx \frac{mv^2}{2fw(1+m)^2}. \tag{3}$$

Primer 5. Denimo, da je $m = 0{,}1$, $v = 8$ mm, $f = 30$ mm, $w = 2$. Potem je po približni formuli (3) v milimetrih

- $d \approx \dfrac{6{,}4}{60 \times 2 \times 1{,}21} \approx 0{,}0441.$

To je blizu vrednosti, ki smo jo izračunali v primeru 4.

Če obdržimo prejšnje podatke in vzamemo $m = 0{,}02$, slikamo na razdalji približno $52f$ od tipala, to je nekaj več kot meter in pol. V milimetrih dobimo

- $d \approx \dfrac{1{,}28}{60 \times 2 \times 1{,}02^2} \approx 0{,}0103,$

torej približno 10 mikronov. Če bi računali natančno, bi dobili 0,0098 ..., tako da je naš približek zelo dober. Packa premera 10 mikronov na tipalu bo na sliki formata A4 videti kot točka. Če dodatno zapremo zaslonko na 4, pa pokrije razmazani krožec približno tako površino kot en piksel in je vse v najlepšem redu tudi pri maksimalni povečavi.

Izpeljava formul

Izpeljimo zdaj najprej natančno enačbo za d. Te račune, ki sicer niso posebno zapleteni, lahko tudi preskočite in si ogledate graf za d kot funkcijo goriščne razdalje f v nadaljevanju.

Iz enačbe (1) dobimo $b = af/(a-f)$ in, ker je $ka_1 = a$, je

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = \frac{ka_1 f}{k(a_1 - f)} = \frac{af}{a - kf}.$$

Od tod je

$$b - b_1 = af\left(\frac{1}{a-f} - \frac{1}{a-kf}\right) = af^2\frac{1-k}{(a-f)(a-kf)}.$$

Pomnožimo zgoraj in spodaj z m^2, upoštevamo $ma = b = (1+m)f$, torej $ma - mf = f$, pa dobimo

$$\frac{b-b_1}{b} = mf\frac{1-k}{(ma-mf)(ma-mkf)} = \frac{m(1-k)}{1+m-mk}.$$

Če ta rezultat pomnožimo z $D = f/w$, upoštevamo $k = \cos\alpha$, dobimo d

$$d = \frac{mf(1-k)}{w(1+m(1-k))} = \frac{mf(1-\cos\alpha)}{w(1+m(1-\cos\alpha))}, \tag{4}$$

kjer je k dan z enačbo (2).

Na sliki 4 imamo graf za d v mikronih kot funkcijo goriščne razdalje f, merjene v milimetrih. Pri tem je $v = 8$ mm, $m = 0{,}1$ in $w = 2$. Na spletni strani [3] pa imate interaktivni graf za d in aproksimacijo p po (3) v GeoGebri s tremi drsniki, s katerimi lahko spreminjate parametre v, m, w. Z grafa vidimo, da je približna formula (3) skoraj povsod zelo dobra.

Sledi še izpeljava približka.

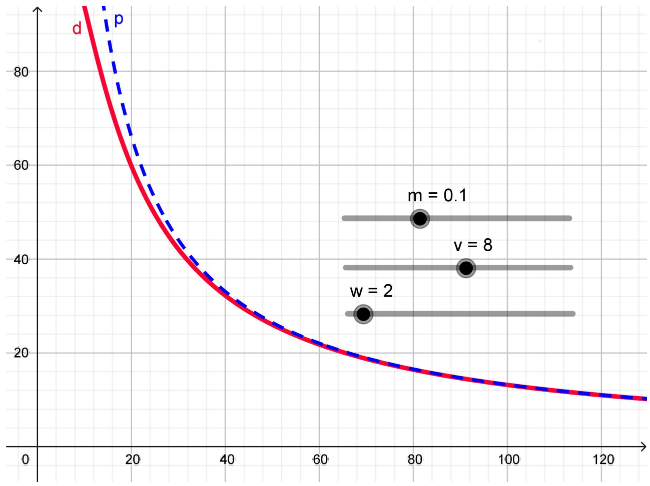
V enačbi (2) bomo privzeli, da je $0 < m < 0,5$ in $v \le f$. Potem je $0 < K < 1$. Ker je $(1+K/2)^2 = 1 + K + K^2/4 > 1 + K$, je

$$1 < \sqrt{1+K} < 1 + \frac{K}{2}.$$

Če je K blizu 0, je $K^2/4$ majhen v primerjavi s K in tako $(1+K/2)^2 \approx 1+K$. Torej:

$$\sqrt{1+K} \approx 1 + \frac{K}{2}.$$

Približek je nekoliko nad pravo vrednostjo.



SLIKA 4.
Graf za d (v mikrometrih) in (črtkano) približka p za d kot funkcija goriščnice f v milimetrih

Primer. $\sqrt{1,21} \approx 1{,}105$, kar je blizu pravi vrednosti 1,1.

Celo $\sqrt{1+1} \approx 1 + 0{,}5$ ni tako slab približek za $\sqrt{2}$.

Za r blizu 0 je r^2 majhen v primerjavi z r in tako lahko vzamemo $(1-r)(1+r) = 1 - r^2 \approx 1$, od tod

$$\frac{1}{1+r} \approx 1 - r.$$

Primer 6. $1 : 1{,}1 \approx 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. To je blizu pravi vrednosti 0,909 ...

Ocenjujmo:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+K}} \approx \frac{1}{1+\frac{K}{2}} \approx 1 - \frac{K}{2}$$

in tako

$$1 - k \approx \frac{K}{2} = \frac{v^2}{2(1+m)^2 f^2}.$$

Primer 7. Za $v = 10$ mm in $f = 30$ mm je $1 - k \approx 1/(18(1+m)^2) < 1/18$ in za $m \le 0{,}1$ je $m(1-k) < 1/180$.

Večinoma sta tako m kot $1-k$ blizu 0 in tako je njun produkt zelo majhen v primerjavi z 1. Fiziki bi rekli, da lahko produkt $m(1-k)$ zanemarimo. V enačbi (4) tako vzamemo $1 + m(1-k) \approx 1$ in dobimo naš približek:

- $$d \approx \frac{mf(1-k)}{w} \approx \frac{mfv^2}{2w(1+m)^2f^2} = \frac{mv^2}{2wf(1+m)^2}.$$

Očitno d narašča praktično s kvadratom razdalje v! Pri $v = 4$ mm bo premer razmazanega krožca le približno četrtina tistega pri $v = 8$ mm.

Kot vidimo, je pri malo bolj zaprti zaslonki in slikanju oddaljenih predmetov uporaba centralne točke za ostrenje čisto v redu, še posebno, če točka, ki jo želimo izostriti, ni daleč od središča želene slike, se pravi da je število v majhno v primerjavi s stranicama tipala. Pri majhnih zaslonskih številih in slikanju bolj od blizu, denimo pri portretih, pa je tak način ostrenja problematičen. Ne samo zaradi gornjih računov: premikanje aparata sem ter tja krade čas. Morda pozabimo na koncu umiriti aparat in tako »stresemo« sliko; oseba se vmes lahko premakne, kakor tudi mi. Bolje je vključiti kako drugo točko za ostrenje (ali premakniti okvirček za ostrenje), tako da bo, recimo, na končni sliki na bližnjem očesu portretiranca. Pri nekaterih aparatih imamo odlično možnost, da lahko izostrimo na določeno točko tako, da se dotaknemo njene slike na zaslonu, včasih celo pri gledanju skozi iskalo. Pri slikanju ljudi lahko vključimo prepoznavanje obrazov, čeprav so zaenkrat le redke kamere sposobne izostriti prav oči. Celo popolna avtomatika, ki navadno izostri na najbližji objekt v osrednjem delu slike, je včasih boljša od ostrenja z osrednjo točko, še posebno, če je ta točka po nesreči ravno med dvema obrazoma, in tako izostrimo ozadje.

Literatura

[1] P. Legiša, *Moteča perspektiva*, Presek **44** 1, 2016, 4–14.

[2] P. Legiša, *Fotografija in matematika, 3. del – globinska ostrina*, Presek **25** 4, 1998, 194–201, dostopno na, `www.presek.si/25/1340-Legisa.pdf`, ogled 28. 6. 2018.

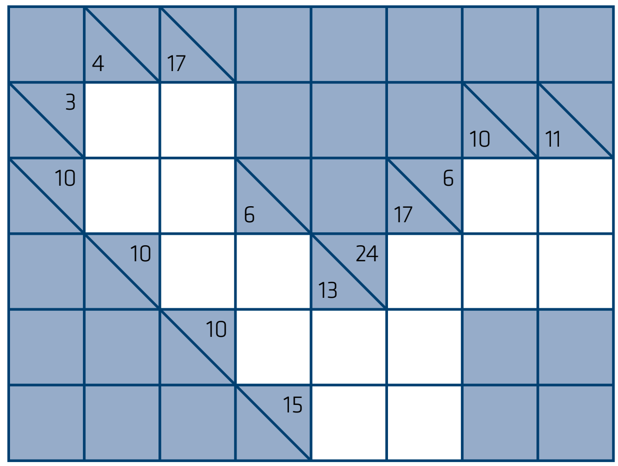
[3] Interaktivna ilustracija napake pri ostrenju z osrednjo točko je na avtorjevi strani na GeoGebra Tube `www.geogebra.org/m/MkndDjE2`, ogled 28. 6. 2018.

× × ×

Križne vsote

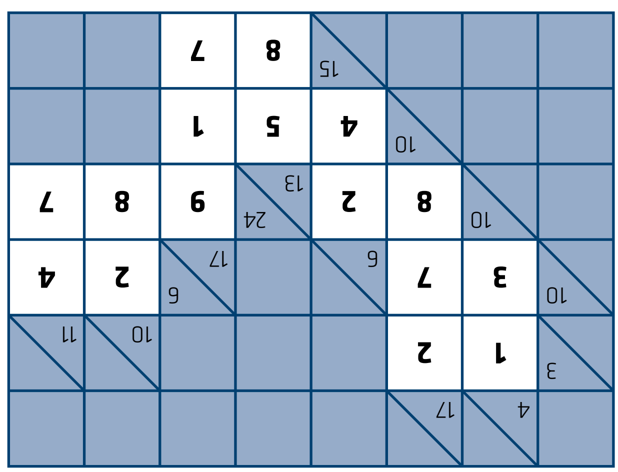
↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×

Merjenje globine vodnjaka s stoparico

↓↓↓
Karel Šmigoc

→ **Spomini na preteklost, ko še ni bilo razvitega vodovodnega omrežja, so tudi vodnjaki. Še danes najdemo skoraj pri vsaki domačiji vodnjak, ki ga zapira domiselno izdelano ohišje, pokrito z izbrano kritino, v nekaterih primerih tudi s slamo. Učenci OŠ Šmarje pri Jelšah prihajajo tudi iz oddaljenih vasi, ki se nahajajo večinoma na gričih, obdanih z vinogradi in gozdiči. Skupina učencev si je izbrala za raziskovalno nalogo opisati in izbrati čim več podrobnosti o vodnjakih, ki se nahajajo na področju občine. Program raziskovanja je bil obsežen. S posebno izdelano napravo za ta namen so merili temperaturo vode na dnu vodnjaka in na gladini. Primerjali so jo s temperaturo ozračja. Ker so računali prostornino vode v vodnjakih, so merili tudi njihovo globino in višino vode.**

Namen tega prispevka ni poročanje rezultatov raziskovanja, ampak opisati zanimiv fizikalni primer, ki je nastal pri merjenju globine vodnjaka v bližini cerkvice svetega Lovrenca (sliki 1 in 2).

Vodnjak, ki je bil predmet raziskovanja, spada med najbolj zanimive na Kozjanskem. Predvsem nas je presenetila njegova globina – 23 m. Izmerili so jo gasilci pri čiščenju vodnjaka. Njegov lastnik nam je povedal, da je gladina vode nevidna, dobro pa se sliši zvok, ki nastane, ko nanjo udari kamenček. Z lastnikovim dovoljenjem so tudi učenci spustili kamenček v vodnjak in izmerili čas od izpusta do nastanka zvoka pri udarcu na gladino vode. Pri večkratni meritvi časa je bil povprečen čas 2,2 sekunde. Po obrazcu za prosti pad in pri upoštevanju vrednosti za zemeljski pospešek 9,81 m/s^2 so izračunali glo-

SLIKA 1.

SLIKA 2.

→

bino 23,74 m. Če upoštevamo, da je bilo ob času meritve po pripovedovanju lastnika v vodnjaku en meter vode, je kamenček preletel v izmerjenem času razdaljo 22 m, kar je za 1,7 m več od pričakovane vrednosti. Poskusili smo pojasniti nastalo razliko.

Čas, ki so ga izmerili učenci s stoparico, je sestavljen iz dveh delov: iz časa prostega pada kamenčka t_1 in časa t_2, ki ga potrebuje zvok na razdalji od gladine vode do mesta, kjer so spustili kamenček. Če označimo izmerjeni čas s T, je $T = t_1 + t_2$. Razdaljo do gladine vode, ki je v nekaterih primerih, ko so sušna obdobja, tudi enaka globini vodnega jaška, označimo s H in iz obrazca za prosti pad $H = \frac{g}{2}t_1^2$ izračunamo čas $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, kjer pomeni g zemeljski pospešek. Označimo s c hitrost zvoka in iz obrazca za enakomerno gibanje izračunamo čas $t_2 = \frac{H}{c}$.

Izmerjeni čas T je

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{c}. \tag{1}$$

Dobljeni izraz zapišimo v obliki: $\left(T - \frac{H}{c}\right) = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, po kvadriranju obeh strani enačbe dobimo

$$H = \frac{g}{2}\left(T^2 - \frac{2T}{c}H + \frac{H^2}{c^2}\right).$$

Globine vodnjakov oziroma vodnih jaškov so na podeželju navadno pod deset metrov, vodnjaki nad deset metrov globine so že redkost. Ker je hitrost zvoka pri 20 °C 340 m/s, lahko člen $\frac{H^2}{c^2}$ zaradi majhne vrednosti izpustimo in dobimo za H linearno enačbo z rešitvijo

$$H = \frac{g}{2}T^2\frac{c}{c + gT}. \tag{2}$$

Če vstavimo v izraz (2) za pospešek $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, za izmerjeni čas 2,2 sekunde in za hitrost zvoka že omenjeno vrednost 340 m/s, je globina vodnjaka oziroma gladina vode v njem 22,31 m, kar se približuje pravi vrednosti 22 m. Seveda pa moramo pri računu upoštevati razne omejitve: pri merjenju s stoparico lahko merimo največ na 0,1 sekunde natančno, reakcijski čas osebe, ki meri, pa lahko doseže tudi desetinko sekunde. Upoštevanje časa zvoka prispeva k natančnosti meritve približno 1,7 m.

Poglejmo še primer, ko člen $\frac{H^2}{c^2}$ ni več zanemarljiv, npr. pri merjenju globine jaškov v gorah ali višine nebotičnikov. Povrnimo se na začetek; obe strani enačbe (1) pomnožimo s c in jo spremenimo v obliko $(cT - H) = c\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Po kvadriranju in združevanju členov dobimo kvadratno enačbo

$$H^2 - 2\left(cT + \frac{c^2}{g}\right)H + c^2T^2 = 0,$$

iz katere izračunamo globino H: $H_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Ker je v našem primeru $a = 1$, $b = -2\left(cT + \frac{c^2}{g}\right)$ in $D = 4\left(cT + \frac{c^2}{g}\right)^2 - 4c^2T^2 = \frac{4c^2}{g^2}\left(c^2 + 2cTg\right)$, je

$$H_{1,2} = \left(cT + \frac{c^2}{g}\right) \pm \frac{c}{g}\sqrt{2cTg + c^2}. \tag{3}$$

Zaradi pozitivnega in negativnega predznaka pred korenom dobimo za H dve rešitvi: če izberemo negativni predznak, je pri $T = 0$ tudi $H = 0$, kar ustreza začetnemu stanju; rešitev pri pozitivnem predznaku pa nima fizikalne osnove, ker je pri $T = 0$, $H = \frac{2c^2}{g}$. Po kratkem preoblikovanju izraza (3) in upoštevanju negativnega predznaka je globina H

$$H = cT - \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2Tg}{c}} - 1\right).$$

Kolika bi bila globina vodnjaka, če bi izmerili pri prostem padu čas $T = 3$ s?

Po izrazu (4) dobimo za globino $H = 40{,}7$ m, po obrazcu za prosti pad, ko ne upoštevamo časa zvoka, pa 44,2 m. V tem primeru, ko smo upoštevali čas zvoka, se je natančnost meritve povečala za 3,5 m.

Vprašajmo se še, pri kateri razdalji je čas zvoka enak času pri prostem padu. V uvodu smo že zapisali čas prostega pada $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ in čas zvoka $t_2 = \frac{H}{c}$. Oba izraza izenačimo, kvadriramo dobljeno enačbo in izračunamo to razdaljo: $H = \frac{2c^2}{g} = 23\,568$ m. Zanimivo, če upoštevamo pri izrazu (3) pred korenom pozitivni predznak, dobimo enak rezultat.

Pripis. Kako se je končala raziskovalna naloga učencev? Z načinom merjenja globine se učenci niso posebno ukvarjali, ostali so pri opisu preprostih vaških vodnjakov in od župana prejeli zasluženo denarno nagrado.

× × ×

Več kot medalje

Luka Školč

→ Skupaj z Markom Čmrlecem, Klemnom Bogatajem, Andražem Jelinčičem in Gregorjem Kikljem ter mentorjema Jurijem Bajcem in Barbaro Rovšek sem preživel šest nepozabnih dni v Rusiji na drugi evropski fizikalni olimpijadi. Objavljene so bile že tako naloge kot naši dosežki ob reševanju le-teh. A medalje in pohvale še zdaleč niso vse, kar smo ta teden pridobili. Ostala so nam prijateljstva s čudovitimi ljudmi iz celega sveta in spomini na neskončno zabavnih stvari, ki smo jih počeli.

Absurdno bi bilo poročati le o medaljah, ko pa se je zgodilo še toliko drugega. Prav zato sem se odločil, da napišem reportažo o našem popotovanju v Rusijo, ki bo bralcem omogočila, da si tudi sami ustvarijo sliko o vzdušju in dogajanju na fizikalni olimpijadi. Naša pot se je začela v ponedeljek 28. maja zjutraj. S kombijem smo se odpravili do letališča v Zagrebu, kjer se nam je pridružila še hrvaška ekipa. Pristali smo na moskovskem letališču, kjer so nas pričakale naše skrbnice in vodičke, študentke tujih jezikov, ki so se prostovoljno javile za pomoč pri organizaciji olimpijade. Spet s kombijem so nas prepeljali od letališča do kampusa moskovskega inštituta za fiziko in tehnologijo v Dolgoprudnem, kjer je potekala olimpijada. Med vožnjo smo si zadali prvi izziv – ugotoviti, po kakšnem ključu so narejene na videz kaotične ruske registrske tablice.

Na kampusu so nam dodelili stanovanje s kuhinjo, kopalnico, straniščem in dvema spalnima prostoroma. Najbolj poseben objekt v stanovanju je bil tuš, pri katerem je zaradi puščajoče cevi masni pretok vode padal s kubom razdalje od pipe. Tako je do šobe pritekla količina vode, ki bi v fiziki veljala za zanemarljivo. Če si si hotel umiti hrbet, si se priklonil pipi in si cev kot ovratnik zavil okoli vratu.

Zaradi neugodnega termina leta smo na otvoritveno slovesnost pošteno zamudili, večerja pa je odpadla kar v celoti. Na pobudo vodičk smo naročili nekaj

SLIKA 1.

Slovenska ekipa z vodičkama Dašo in Vlado

pic. Sam sem že ležal v postelji, ko je v sobo prišla skupina prostovoljcev, ki so tekmovalcem pobirali elektronske naprave, da ne bi med tekmovanjem goljufali. Nekaj članov slovenske ekipe so na lastno grozo ujeli v samih spodnjih hlačah ali nasploh v pomanjkanju oblačil. Z veliko smeha smo jim izročili telefone in končno zaprli oči.

V torek zjutraj smo se spopadli z eksperimentom. Tako kot lanski je bil tudi letošnji genialno zamišljen, zelo kakovostno izdelan in izjemno zahteven. Med drugim smo morali pihati skozi tube in s senzorji preverjati pogosto sumljivo vsebino naših dihov. Več članov ekipe nas je bilo nad orodjem zelo navdušenih, saj smo se s polarizatorji, diodami in lepilom lahko igrali kot z lego kockami. V petih urah, ki so bile na voljo, sem z energetskimi tablicami požrl toliko kalorij, da bi lahko odtekel maraton. Tekli sicer nismo, je pa zato naša hitra hoja do stranišča in nazaj nemalo vodičk spravila ob dih.

Ker pet ur eksperimentiranja očitno ni bilo dovolj, so fiziki na inštitutu za nas pripravili demonstracije 25-ih eksperimentov iz univerzitetne zbirke. Pokazali so nam magnetno lebdenje, eksplozivne tuljave, dvojni uklon laserske svetlobe, žiroskopsko žičnico in še mnogo drugih zanimivih stvari.

Po predavanju si je bilo treba prezračiti glavo, zato smo se Marko, Gregor in jaz odpravili na košarkarsko igrišče. Tam smo naredili združeno ekipo z dvema fantoma iz Azejbardžana ter igrali proti Latvijcem, za katere je treba priznati, da košarko res obvladajo. Po večerji smo ugotovili, da je zelo zapleteno priti na stopnišče naše stavbe od zunaj in pa da se s staro rusko varnostnico ni šaliti (kljub njenim grožnjam z žuganjem pesti sem jo v naslednjih dneh nemalokrat potegnil za nos). Glede zgodnjega odhoda v posteljo nam je povzročal težave polarni dan, zaradi katerega je bilo ob desetih zvečer zunaj še vedno svetlo.

V sredo je bil čas za teorijo. Vse tri naloge so bile tako težke, da nisi vedel niti, kako bi ocenil njihovo relativno težavnost. Sicer nam je šlo dobro pri 3A, smo pa trdo padli po stopnicah 3B. V drugi nalogi smo prejeli koristen podatek, ki bi lahko v krizni situaciji rešil življenje. Če boste kdaj izgubljeni v divjini brez gorilnika, a bosta z vami velikanski vir napetosti in tuljava, nikar ne skrbite – z magnetnim poljem tuljave je namreč mogoče zavreti vodo! Točno kako se to zgodi, s tem pa se raje ne obremenjujte.

Po kosilu so nas z avtobusi peljali do vesoljskega paviljona kozmonavtskega muzeja v Moskvi. Na poti sem imel priložnost bolje spoznati kitajsko kulturo, saj je poleg mene sedel prijazen in zgovoren prostovoljec iz Kitajske. Medtem je Gregor nekaj vrst za mano izdeloval računalniško simulacijo, s katero je kasneje prvo teoretično nalogo rešil na tisočinko odstotka natančno. Paviljon, v katerega so nas peljali, je bil resnično veličasten. Tridesetinvečmetrski kovinski oboki so se, okrašeni s premnogo bronastimi srpi in kladivi, bočili visoko nad nami in številnimi razstavnimi eksponati. Videli smo originalno kapsulo, v kateri je Jurij Gagarin kot prvi človek potoval v vesolje, in 1:1 model ruske vesoljske postaje MIR. Le-ta je bil presenetljivo majhen in zazdelo se nam je, da je moralo biti bivanje tam zelo klavstrofobično. Pokazali so nam tudi veliko skafandrov, modelov vesoljskih ladij in eno pravo sovjetsko raketo, ki je bila tako velika, da je morala stati na prostem.

Po naravi sem zelo radoveden, zato sem ob ogledu vozila za vožnjo po Luni vprašal, zakaj so kolesa iz prepletene žice in kovinskih ploščic. S tem preprostim vprašanjem mi je uspelo povzročiti neznansko zmedo, saj je naša muzejska vodička poiskala tri druge, ki prav tako niso znale odgovoriti, in nato so vse štiri mrzlično brskale po telefonih in iskale nekoga, ki bi mi znal odgovoriti. Kljub temu da sem jih poskušal prepričati, naj odnehajo in da se ne bo podrl svet in da lahko pogledam tudi doma in da res ni take velike panike, da me samo malo zanima, so živčno klicarile vse do našega odhoda iz muzeja.

Na poti nazaj se mi je zdel posebej lep pogovor z našima vodičkama o njunih rojstnih krajih in ljubezni do narave. Z njima smo se vseh šest dni veliko družili in na tej točki se mi zdi pomembno povedati nekaj več o vodičkah nasploh, saj bo o njih v nadaljevanju še veliko govora. Punce so se mi zdele, pošteno povedano, neverjetne. Ne le da so odlično opravljale svoje delo in skrbele, da se nam ni zgodilo nič hudega in da nismo bili nikoli preveč pozni, bile so še veliko več – zanimive sogovornice, šaljivke in izvrstne učiteljice ruščine. Vedno so nam bile pripravljene ustreči in zares so naredile vse, da bi se imeli čim bolje. Mi smo jih v skromno zameno zabavali, kolikor smo le mogli.

Pet ur najtežje teorije, ki sem jo kdaj videl, seveda ni bilo dovolj – potreben je bil še večerni »intellectual game« organiziran s strani olimpijade. Ugotovili smo, da je igra, ki naj bi jo igrali, kviz o svetovni geografiji. To se mi je zdelo malo pusto, zato sem stvari dodal estetski pridih. Na vsak listek z odgovorom, ki ga je slovenska ekipa poslala vodji kviza, sem nekaj narisal. Na začetku so bile to majhne stvari, sončki in podobno. Kmalu sem se zagrel in v minuti, ki sem jo imel za vsako risbo, ustvarjal vedno več.

Po prvem delu kviza smo imeli desetminutni odmor. Izkoristil sem ga zato, da sem spoznal vodičko belgijske ekipe, Mašo, in preizkusil, koliko lahko Rusi razumejo slovenščino. Potem je ona preizkusila mene in z nekaj truda mi je uspelo razumeti skoraj vse, kar je povedala. Tudi kasneje sva z Markom videla, da ruščine ni nemogoče razumeti, če imaš nekaj časa za premislek o tem, kar si prebral ali slišal.

Kakšnih deset minut po začetku drugega dela kviza je voditeljici kviza prekipelo. »Team Slovenia, could you stop drawing on every answer you send!«[1] je zavpila. Vstal sem in jo vprašal, kaj je narobe.

[1] Slovenska ekipa, bi lahko prosim nehali risati na vsak listek, ki ga pošljete!

SLIKA 2.
Naša ekipa na kvizu v timskih majicah

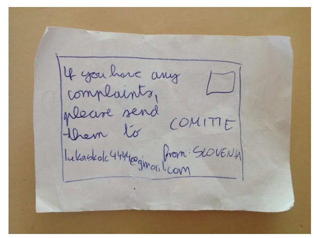
»I cannot read this!«[2] je odgovorila in visoko v zrak dvignila listek, na katerega sem narisal zemljevid do zaklada. Razprl sem roke in rekel: »But all you had to do was follow the treasure map!«[3] Dvorana je izbruhnila v smeh in aplavz in voditeljica je le nemočno gledala, kako so nam nasmejani člani drugih ekip prihajali čestitat. Seveda me njeno opozorilo ni ustavilo. Pošiljal sem ji še bolj udarne, bolj slikovite ilustracije in jih nemalokrat opremil z napisom »from team Slovenia«[4] in srčkom. Ker se mi je zdelo primerno, da ji omogočim, da se pritoži nad mojim ravnanjem, je dobila tudi sporočilce na desni (slika 4).

[2] Tega ne morem prebrati!

[3] A morali bi samo slediti zemljevidu do zaklada!

[4] od slovenske ekipe

SLIKA 3.
Porisani odgovori slovenske ekipe



SLIKA 4.

Vodički ruske ekipe, ki je naše listke vestno nosila komiteju, sem v zahvalo narisal samoroga, ki zdaj krasi zadnjo stran njene EuPho značke. Na koncu sicer nismo zmagali po točkah, smo pa bili absolutni prvaki v srcih vseh udeležencev kviza v dvorani. Poleg tega sem vodičko hrvaške ekipe, Eleno, ki me prejšnji dan med eksperimentom na poti do stranišča ni mogla dohajati, naučil osnovne tehnike hitre hoje.

V dvigalu smo srečali člana švicarske ekipe, francoskega Švicarja korejskega porekla, in takoj v svojo sobo povabili vse Švicarje. Petnajst minut kasneje je prišel sicer samo on, ker so ostali šli igrati odbojko, a nič zato: ob njegovih zgodbicah smo do enih zjutraj jokali od smeha. Bil je izjemno zabaven in odprt. Slednje je bila, na moje majhno presenečenje, vrlina večine udeležencev olimpijade. Sam sem skoraj z vsako osebo, ki sem jo srečal, začel pogovor in le redko se ta ni razvil. Edina potencialna težava je bilo pomanjkljivo znanje angleščine nekaterih udeležencev olimpijade, pa še to ni bilo nepremostljivo! Na kosilu sem nekega dne srečal Rusa, ki se je kljub skoraj nični angleščini iskreno želel pogovarjati z mano. S pomočjo Google prevajalnika nama je na veselje obeh uspelo!

S sredinim večerom se je začela dolžina spanja krajšati. Primeren model bi bil najbrž eksponenten, saj se je v naslednjih dveh nočeh za naju z Markom skoraj dvakrat prepolovila.

V četrtek zjutraj smo se odpravili na izlet v Moskvo. Ta ni bil v uradnem načrtu, samo za nas sta ga pripravili naši vodički. Samoiniciativnost, ki sta jo izkazali, mi je ogrela srce. Predlagal sem, da s sabo vzamemo še kakšno ekipo, zdelo se mi je vredno spoznati čim več ljudi, ker so takšne priložnosti na žalost redke. Predlagal sem švicarsko in belgijsko ekipo; slednjo se mi je zdelo pač zanimivo spoznati.

Na koncu smo na izlet šli Belgijci, Hrvati, pristojne vodičke, vodje ekip in naša ekipa. Do Moskve smo potovali z vlakom in se nato prestavili na podzemno železnico, ki ni bila le zelo lepo urejena, temveč tudi absurdno poceni (za karto smo plačali manj kot 70 centov!!!). Med vožnjo smo, fiziki po srcu, z nagibanjem merili pospeševanje vlaka, računali globino, na kateri je bil tunel, in razlagali posebno teorijo relativnosti vodičkam. Takšnih sproščenih pogovorov na temo fizike je bilo v tistem tednu mnogo in prav vsi so bili intelektualno stimulativni, nenavadni in predvsem zabavni. Kadar smo le mogli, smo poiskali pojav ali napravo in debatirali o fizikalnih aspektih letega ter pri tem uporabljali svoje šolsko znanje na nove načine. Za odkrivanje novega je ključna nenehna iskrena, skoraj otroška radovednost in te v Moskvi ni manjkalo. Poleg spoznavanja novih kultur in reševanja fizikalnih problemov sem se lotil tudi učenja cirilice. Pri tem bi se srčno zahvalil svojemu dobremu mentorju Marku, ki je potrpežljivo prenašal moje nenehno pozabljanje črk š, c in č.

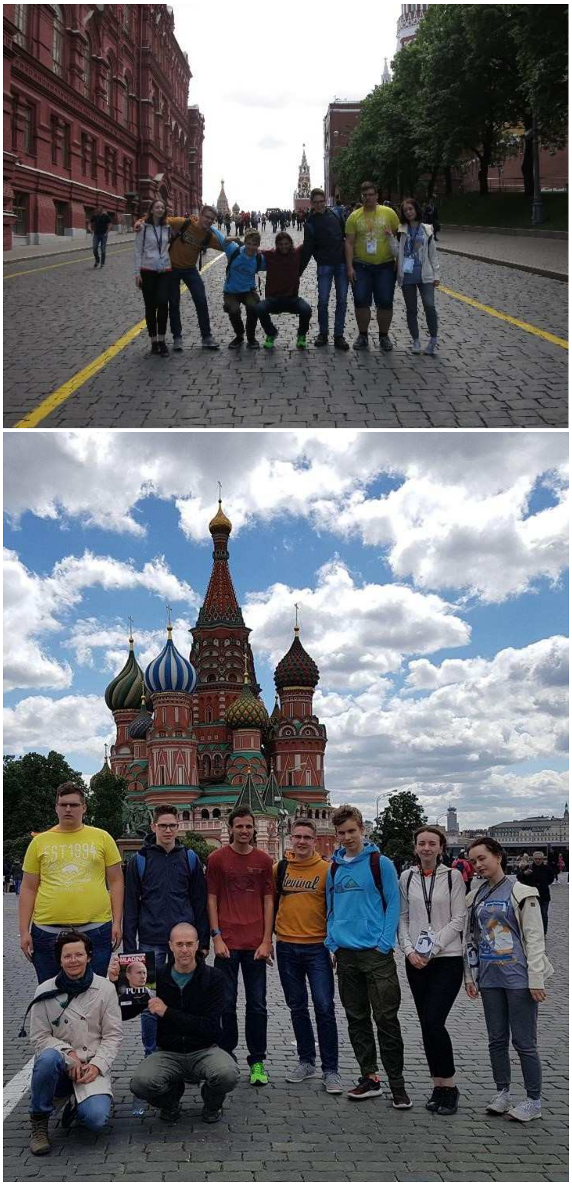
Za razliko od prejšnjih dni je bilo v četrtek zaradi vetra kar hladno. Ugotovili smo, da lahko zebe tudi ljudi ruskega porekla, kar nas je kar presenetilo. Vsekakor se niso mogli primerjati z Markom, ki je vse dni preživel v kratkih rokavih. Edina konkurenca je bil morda Estonec, ki je povsod hodil bos. Na vprašanje, zakaj to počne, je odgovoril, da je tako bolj udobno, je pa priznal, da ob prvem snegu vendarle obuje čevlje.

SLIKA 5.
Moskovski okrožni vlaki in podzemna železnica

Za dalj časa smo se ustavili na Rdečem trgu, kjer smo se slikali s Putinom.

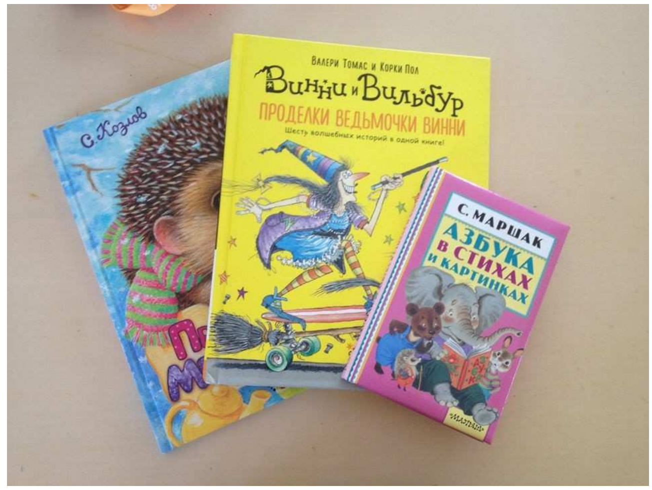
Z Markom sva se odločila, da bova popeljala svojo ljubezen do ruščine dlje. Na stojnicah knjižnjega sejma nama je navdušena prodajalka priporočila najboljše slikanice. Vsak sva kupila po tri, da se bova ob njih lahko učila ruščine. Glede na razneženost in odobravanje vodičk, ko sva jima pokazala svoje nove knjige, sva dobro izbrala.

Ob vrnitvi v Dolgoprudni smo izvedeli, koliko točk je vsak dosegel. Hitro smo pojedli kosilo in se šli pripravit za moderacijo, kjer smo ocenjevalcem lahko razložili naše razmišljanje ter sklepe pri reševanju



SLIKA 6.

nalog in si potencialno zvišali točke. Moderacija je potekala gladko in profesionalno – ocenjevalci so bili prijazni in so cenili tudi alternativne pristope, hkrati pa so se do potankosti držali točkovnika. Ko sem ocenjevalcu prve teoretične naloge po končanem uradnem delu povedal, da sem si zadevo najprej poskušal predstavljati, je rekel, da je to storil tudi on. »Se ni obneslo?« sem ga previdno vprašal. Utrujeno se je nasmehnil: »Ne, se ni.« Takšna odkritost in skromnost se mi zdita zelo lepi vrlini.



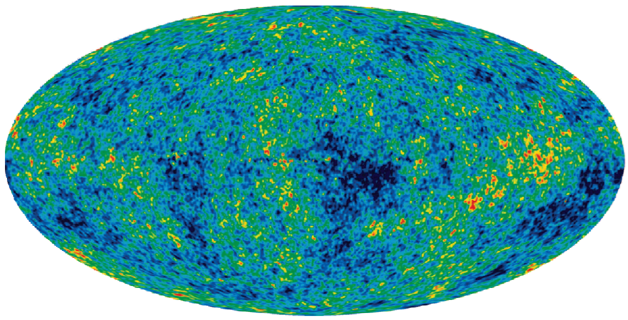
SLIKA 7.
Slikanice v ruščini

Po še enem mentalnem naporu si je bilo potrebno spet prezračiti glavo, zato sva z Markom potrkala na vrata švicarske ekipe, da bi jih povabila na odbojko. Na žalost je bil v sobi le en član ekipe, zato sva šla iskat Latvijce. Težava je bila v tem, da nisva vedela, kje se nahajajo. Storila sva edino smiselno stvar in trkala na vsa vrata, ki sva jih našla. Na neki točki nama je odprla azerbajdžanska vodička in vprašala sva jo, če ve, kje stanuje latvijska ekipa. S tem sva povzročila naslednjo veliko zmedo.

Azerbajdžanska vodička je šla do sobe, kjer sta stanovali belgijska in hrvaška vodička. Zelo hitro so govorile med seboj in ravno, ko je belgijska vodička govorila najhitreje, kar sem tisti teden slišal koga govoriti, mi je uspelo čisto vse v enakem tempu prevesti Marku, kar jih je popolnoma šokiralo. Kmalu se je pridružila še ena naših vodičk in namesto da bi preprosto ugotovile, kje je latvijska soba, so nama želele organizirati nogomet s Turkmenistanom. Nato smo šli ven in srečali švedsko ekipo, ki se je odpravljala igrat odbojko. Z Markom sva se z veseljem pridružila in sledilo je mnogo dobrih iger, pa tudi plezalni izziv, ko smo žogo nabili na drugo stran šest metrov visoke ograje. Na igrišče so nenehno prihajali novi igralci iz drugih ekip in zelo hitro smo lahko odbojko igrali kar pet na pet. Eden od Švedov mi je

18 nadaljevanje na strani →

Nagradna križanka



GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
PEVEC SKUPINE BIG FOOT MAMA (GREGA)
SEZNAM BLAGA ALI STORITEV S CENAMI
OPOGUMLJANJE KOGA
NEKDANJI SRBSKI POLITIK (ALEKSANDAR)
NEMŠKA IN NAŠA ČRKA
HITER TEK V SKOKIH
HUMORISTKA PUTRIH
PREDLOG

AVSTRIJ. KVANTNI FIZIK (ERWIN)
USTVARJALKA IZ ŽGANE GLINE
SVETOPISEMSKI "ZAČETNIK" ONANIJE
3
RADIJSKI DETEKTOR OBJEKTOV
ALEŠ VALIČ
KOKOŠKA, PUTKA (NAREČNO)
IGRALKA FARROW
ATLETSKI KLUB
NESTABILEN
AMERIŠKI GLASBENIK KING COLE
KRASEK

AVTOR MARKO BOKALIČ
ANJA KLINAR
NAG KOPALEC
ZAPOR
SLABŠALNI IZRAZ ZA DUHOVNIKA
ČEŠKI FILMSKI REŽISER VAVRA
PARIŠKI VEČERNI DNEVNIK
RAFKO IRGOLIČ
14
RIMSKA 4
NAJVIŠJI VRH FILIPINOV, VULKAN
MLEČNA BELJAKOVINA, SIRNINA

GIBANJE DELCEV V RAZTOPINI PROTI ANODI
9
OČKA, OČI
JUŽNOAMERIŠKO DREVO IN NJEGOV ZELO LAHEK LES
NA MAJHNEM ŠTEVILU NEDOLOČENIH KRAJEV

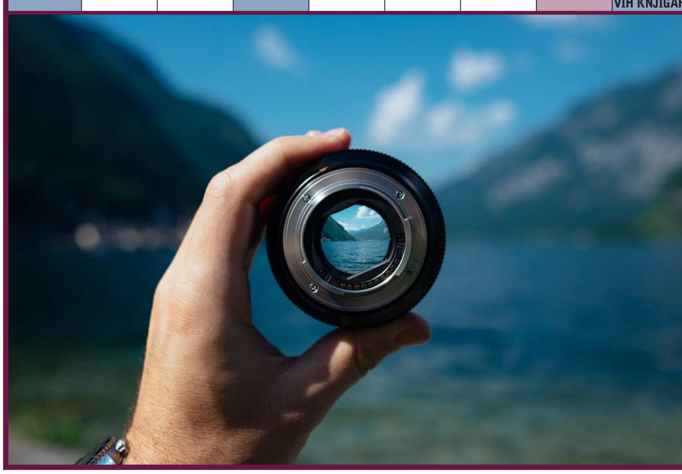
ČE PREVENTIVA NE DELUJE, JE POTREBNA ?
17
FINSKI ARHITEKT (ALVAR)
MESTO NA KOSOVU
MRAČNOST RAZPOLOŽENJA
12
IGRALKA JOVOVICH
URJENJE, VEŽBANJE

ODER ZA SUŠENJE ZRNJA
ŽGANA PIJAČA
FRANCOSKI DRAMATIK (ARTHUR)
RIMSKI HAD
VALJČEK
10

NAŠA NAJREDKEJŠA ZVER
OSRBOVALEC KONJ
VLADIMIR ČADEŽ
GRŠKA BOGINJA LOVA, APOLONOVA SESTRA DVOJČICA
UREDNIK PRESEKA MOHORIČ
18

KREATORKA
MESTO V JUŽNI RUSIJI OB REKI KUBAN
ZVENENJE Z NIZKIMI GLASOVI

MOUNT
PISNI ZNAKI ZA GLASOVE
JUDOVSKA POSTAVA V PETIH MOJZESOVIH KNJIGAH
5
EMIR KUSTURICA
ITALIJAN. FIZIK FERMI
ZADNJA DESKA IZ HLODA
MATEMATIČNI ZNAK



POKOJNI ANGLEŠKI PEVEC COCKER
IZGUBLJANJE LESKA ALI SVETLOBE
LATINSKI IZRAZ ZA MORJE
KAČON
GLAVNA ARTERIJA
VPREŽNI DROG PRI VOZU
DLAKAV ZELENI SAD AKTINIDIJE
OSNOVNA KRŠČANSKA MOLITEV
IVO DANEU
SEŠTEVANJE
19
HRVAŠKI POLITIK MESIĆ
ČAROVNIK
21
PREJŠNJI REKTOR MARIBOR. UNIVERZE (IGOR)

HABSBUR. DRŽAVNIK IN KARDINAL V 16. STOL. (ANTOINE)
FILMSKA UPODOBITEV LITERAR. DELA
SIMBOL ZA RADIJ

dMFA
VELIKI ŠMAREN JE MARIJINO ?
ITALIJAN. TRIVRSTIČNA KITIČNA OBLIKA
RADIKAL, IZVEDEN IZ ETANA
CELJSKI ŽUPAN (BOJAN)
NAŠ VESLAČ (IZTOK)
ANGLEŠKA PEVKA MOYET
PASJE OGLAŠANJE
OHRANJEN V OBLIKI FOSILA

1
2

KRIČAV, VREŠČEČ OTROK
NITROCELULOZNI LAK
TISOČ KILOGRAMOV
AFRIŠKA DRŽAVA
JAMAJŠKI SPRINTER (USAIN)
REŽISER MENDES
ENOTA ZA ZRAČNI TLAK
8
SOSEDI ČRKE P
AMERIŠKA PEVKA JAMES
NEMŠKO MESTO
ZGODOVIN. JORDANSKA DEŽELA
ZAČENJANJE GORENJA, VŽIGANJE
15
ČEŠKI TRAKTOR
OPERACIJA MED MNOŽICAMI
4
EMANUEL LASKER

dMFA
RAČUNALNIŠKA TOMOGRAFIJA
ZRAKOPLOV, KI VZLETA NAVPIČNO
AZIJSKO RIŽEVO ŽGANJE
ČEBELJI PANJ
KOLESAR. DIRKA PO ŠPANIJI
KRAVJA IZJAVA
PRVI SAMOGLASNIK IN PRVI ŠUMEVEC
NAJVEČJI PRITOK DNEPRA V UKRAJINI
ZAČETNA FAZA SKOKA
JUNAKINJA IZ LINHARTOVEGA MATIČKA

FRANCOSKO MESTO OB MARNI
ALPINIST ZAPLOTNIK
16
ANGEL SMRTI
GLASBENA MEDIGRA
NINA RAKOVEC
VRATA PRI IGRAH Z ŽOGO
NADLEŽNA ŽUŽELKA, KI LAHKO PIČI
POKOJNA TELEVIZIJKA (JANA)
VNETJE KOŽE
13
TEBANSKI KRALJ
IGRALEC ŠKRLEC
ČRNOGOR. VLADAR IN PESNIK
STIKALNA NAPRAVA
BISTVO, JEDRO, SRČIKA
LJUBLJANA
6
ŽELEZOV OKSID
POLJSKI MATEMATIK (ALFRED)
POSODA ZA BRUS ZA KOSO
PRELAZ V JULIJCIH
AVSTRIJSKI FIZIK MACH
OKUS VINA, KI SE KISA
EKONOMISTKA PETRIN
POT NEBES. TELESA
VRH V KAMNIŠKIH ALPAH
POZITIVNA ELEKTRODA
FRANCOSKI FILMSKI KOMIK (JACQUES)
DRSALEC NA SUHEM
NAŠ PATER ZELIŠČAR (SIMON)
MESTO NA JUGU PORTUGALSKE
PRETLAČENA JED
11
ŠVICARSKA SMUČARKA (SONJA)
ENOTA JALOVE MOČI
POSAMEZNA RASTLINA VINSKE TRTE
PASCAL
BREZ NJE NI ŽIVLJENJA
VIKI GROŠELJ
OGLATO GEOMETRIJSKO TELO
7
20
PRIPRAVA NA OTROŠKEM IGRIŠČU

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra 2018**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

→ 15 nadaljevanje s strani

kasneje povedal, da trenira parkour. Za skoraj vse tekmovalce, s katerimi sem se pogovarjal, sem ugotovil, da imajo poleg fizike tudi druge pomembne interese. Spoznal sem plesalce, tabornike, hokejiste, večkratne državne prvake v ping pongu – fiziki so zelo večplastna sorta ljudi!

Po večerji so nam organizatorji pripravili nogometni turnir. Še pred začetkom smo se še bolj zbližali s švicarsko ekipo in skoraj bi sestavili skupno moštvo, ko nas je sodnik razdelil v ekipe. Z mano je igral Rus, ki mu princip podajanja zelo očitno ni bil jasen, saj je ob vsaki priložnosti nabijal žogo na gol iz sredine igrišča. Nasprotno so se Švicarji izkazali za vrhunske nogometaše, sploh pa vratarje.

Po večerji so organizatorji za nas pripravili predstavo z ognjem. Sicer ni bila zelo fascinantna, je bilo pa zato toliko boljše plesanje na ulici in spoznavanje ruskega popa. Vodičke so rekle, da bi rade večer preživele s slovensko ekipo, a imajo pred tem še sestanek z organizatorji. Do takrat sta bili vsaj še dve uri, zato smo šli Marko, Klemen in jaz delat monopol nad vaflji v hotelu. V avtomat v pritličju smo metali kovance, dokler nam jih ni zmanjkalo, in si tako pridobili pet roza paketov vafljev. Zame so bili ti posebno dragoceni, ker je prejšnja škatla čez noč v celoti izginila in nisem uspel priti niti do enega samega grižljaja.

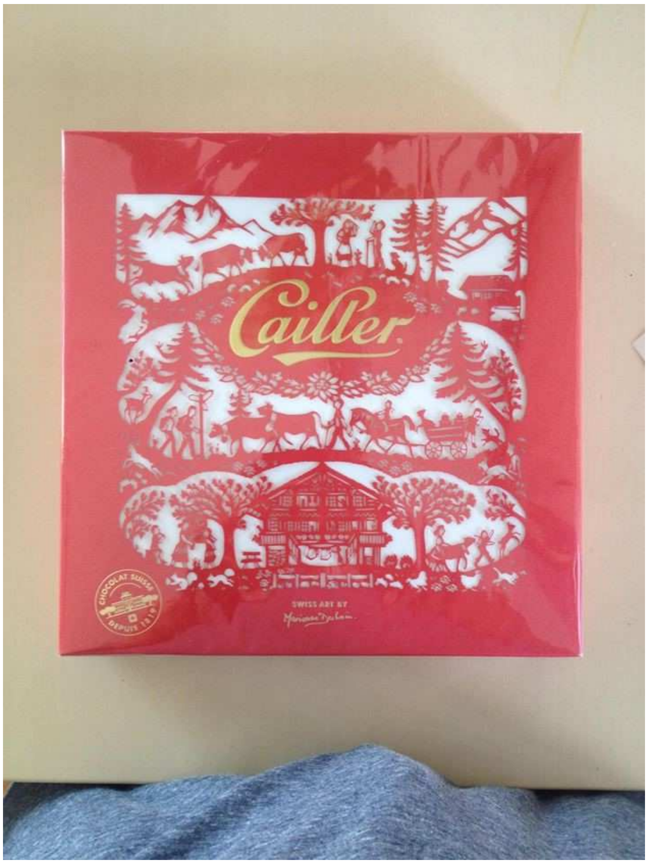
Z Markom sva se lotila slikanice z abecedo in preživela naslednjo uro v nenehnih krčih smeha, ki so izbruhnili vsakič, ko sva ugotovila, kaj kateri verz pomeni. Sicer nisva takoj razumela vseh besed, a sva s pomočjo slik in sklepanja prišla do dna večine abecednih rim. Glede izgovorjave sva naletela na kar nekaj zagat, pri katerih so nama kasneje pomagale vodičke. Nekaj čez polnoč so v našo sobo prišle belgijska, hrvaška in obe slovenski vodički. Pogovarjali smo se o slovnici, filmih in izdelavi nelegalnega ruskega alkohola. Glede izgovorjave so naju naučile, da obstaja š in š, i in i, ter znak, ki ga pri izgovorjavi preprosto ignoriraš. Največ pozornosti so posvetile znaku bl, pri katerem moraš izpustiti zvok, kot da bi te nekdo močno udaril v trebuh.

SLIKA 8.
Monopol

V petek sem imel najlepšo možno budnico – izvedel sem, da smo jaz, Marko in Andraž osvojili bronaste medalje, Klemen pa pohvalo. Odprl sem okna in se na ves glas drl »SLOVENIJA IMA TRI BRONASTE MEDALJE!!!!!« ter skakal po celem stanovanju. Zajtrk je bil tisti dan daleč najboljši – končno mi je uspelo najti sladico, ki ni bila prenasičena s sladkorjem. Zunaj so Švicarji kot vedno delili čokolado, a naš favorit je imel pripravljeno presenečenje. Slovenski ekipi je podaril dve čudoviti škatli z umetelno izrezanimi papirnatimi vzorci na pokrovu in božanskimi pralineji, mi pa smo mu dali enega od magnetkov s slikami Slovenije, ki jih je Marko v ta namen prinesel s sabo.

Nato smo se z avtobusi peljali do Zaradie parka, na novo zgrajenega zelenega mestnega središča s pogledom na Kremelj. Vožnja je bila zaradi prometnih zamaškov dolga, a zabavna. Pravil glede odstavnih pasov v Moskvi očitno ni, a kar je najbolj pomembno, uspelo nam je ugotoviti, za kaj gre pri registrskih tablicah! Zadnje tri številke so namreč regionalna koda. Povzročale so težave, ker smo v Moski videli toliko različnih. Na koncu smo ugotovili, da mora tako veliko mesto pač imeti več kod. Ko smo preverili hipotezo, se je izkazala za pravilno! Videli smo tudi avto s slovensko zastavo in v park nam je kasneje prišla čestitat diplomatka s slovenskega veleposlaništva.

Če smo na začetku povsod zamujali, je slovenska ekipa bila PRVA na prizorišču podelitve! V parku smo izkusili bolj »rusko« poletje. Bril je namreč močen veter in temperatura se je spustila na kakšnih 13 stopinj Celzija. Na srečo so bili organizatorji pripravljeni tudi na to in kmalu so vodičke delile odeje. Dobili smo dve živo roza, ki sta se ujemali z našimi timskimi majicami (medtem je Marko seveda vztrajal



SLIKA 9.
Švicarska bonboniera

v kratkih rokavih). Kasneje sta naši vodički sicer ugotovili, da se je veliko bolje kot v odejo ogrniti v slovensko zastavo, ki ti poleg telesa pogreje tudi srce. Okoli dvanajstih se je začela prireditev. Med podelitvami so bile pripravljene plesne in pevske točke, podeljevalci nagrad pa so pripravili kratke govore. Dotaknilo se me je, ko je eden glavnih organizatorjev in pobudnik projekta rekel, da »fizika ne pozna mej in ras, je le ena za vse«. Mislim da prijateljstva, ki smo jih spletli ta teden na olimpijadi, to trdno dokazujejo.

Vpili in ploskali smo en za drugega kot se spodobi. Najbolj bučen aplavz je požel član hrvaške ekipe, ki je ugotovil, da so mu dodelili preveč točk, in je to povedal na moderaciji. Dobil je nagrado za najbolj poštenega tekmovalca in bronasto medaljo. Po koncu podelitve so na oder povabili vse ekipe in mi smo se

SLIKA 10.
Odeje v timskih barvah

SLIKA 11.
Tribune v Zaradie parku

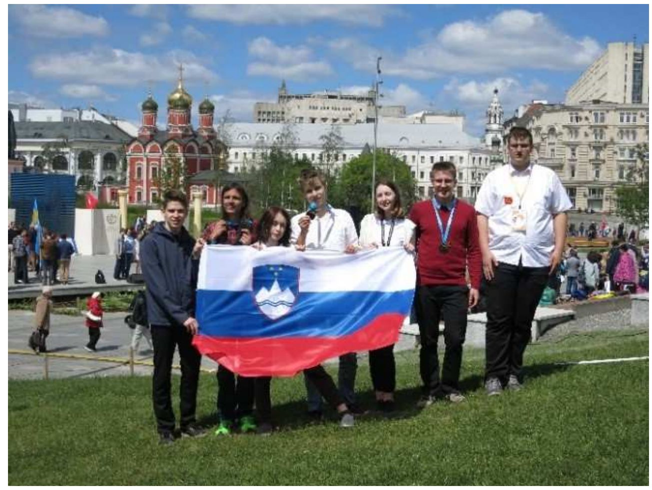
postavili kar na sredo, slovensko zastavo pa smo dvignili do neba. Slikali smo se s pogledom na Kremelj in nato odšli na voden ogled Zaradie parka. Zastavo naj bi sicer vrnili, a smo jo raje ponosno nesli s sabo. Kasneje jo je vihtel tudi eden od naših švicarskih prijateljev.

V parku so nas peljali v orjaški simulator, v katerem te video in premični sedeži popeljejo na polet nad Moskvo. Posnetek je bil izjemno dobro nare-

SLIKA 12.
Plesna točka

SLIKA 13.
Podelitev bronastih medalj

jen, zaradi zakrivljenega zaslona je zelo prepričljivo dajal vtis prostora, kljub temu da nismo imeli 3D očal. Med ogledom parka smo poizkusili tradicionalne švedske bombone, ki so zaradi enormne količine soli na njih pekli kot feferoni. Nato je večina ekip odšla na letališče in le s težavo smo se poslovili od Švicarjev. V slovo sem dobil podpis na svojo rdečo kapo in obljubili smo si, da bomo ohranili stike.

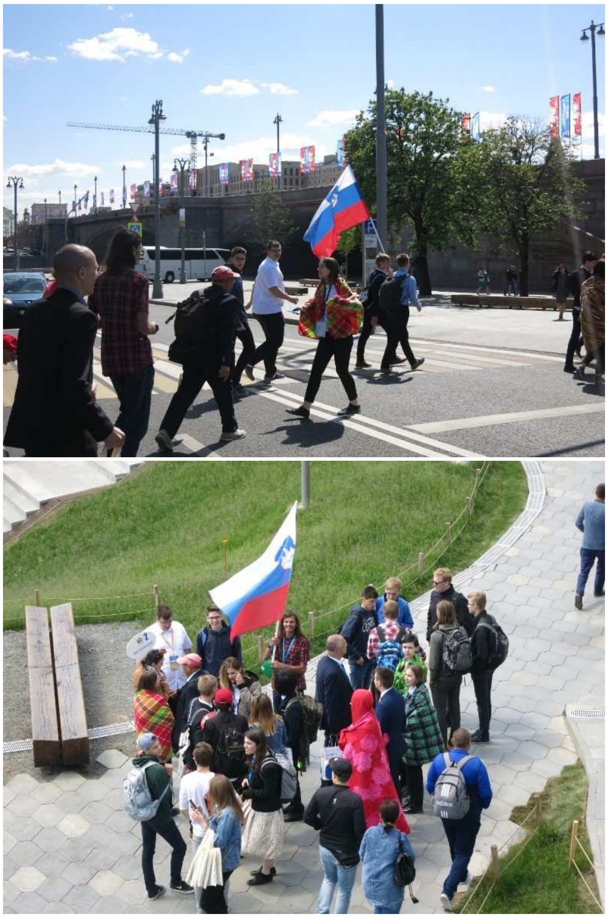


SLIKA 14.
Na hribčku v parku po podelitvi

SLIKA 15.
Slovenska zastava na sredi

Ob vrnitvi v Dolgoprudni smo naši vodički peljali na kosilo v restavracijo po imenu Teorija (te očitno v prejšnjih dneh ni bilo dovolj). Ko sem v ruščini prosil za palčke, so me narobe razumeli in mi prinesli dve majhni steklenici vode (»paličke« se namreč sliši izjemno podobno kot »vodičke«).

Potrebno je bilo vsaj še enkrat povzročiti zmedo, zato smo se spet odločili igrati odbojko. Pretrkali smo vrata pet nadstropij, dokler nismo naleteli na hrvaško vodičko. Ta je rekla, da bi rada igrala, in dogovorili smo se za čez petnajst minut na igrišču. Ko smo prišli tja, smo ugotovili, da nimamo žoge,



SLIKA 16.
Zastava je plapola povsod, kamor smo šli

imajo pa Turki eno za košarko. Ravno takrat sta prišla še Barbara in Jurij, ki smo jima tudi obljubili igro. Vse se je izteklo dobro: Barbara in hrvaška vodička sta se zapletli v pogovor, Jurij pa se je izkazal za izjemnega igralca košarke in Slovenci smo si kljub številski premoči Turkov priborili zmago!

Po igri smo spoznali še turško vodičko, za katero se je izkazalo, da lahko nadpovprečno dobro razume slovensko! Preizkusil sem jo s petimi preprostimi stavki in za skoraj vse je ugotovila, kaj pomenijo. Dogovorili smo se, da se bomo v naši sobi igrali igrico »krokodila«, neke vrste besedno pantomimo.

Kasneje smo se igrali še morilca in mafijo. Belgijska in hrvaška vodička sta se želeli posloviti od nas, saj sta se vračali na svojo univerzo za izpite. Njima

SLIKA 17.
Na razgledni ploščadi z našim najljubšim Švicarjem

SLIKA 18.

in pa našima vodičkama smo za spomin podarili magnetke in majhne slovenske zastavice, izmenjali pa smo si tudi telefonske kontakte. Pozno ponoči sva z Markom imela priložnost poslušati turški rock in finski metal elektro ter jesti odlično medeno torto, ki so jo vodičke posebej za nas okrasile. Šele pozno ponoči smo se razšli in nato sva se z Markom pogovarjala do svita, ko se nama je zazdelo, da bi bilo morda smiselno za kakšni dve uri zatisniti oči.

Zbudili smo se ob petih in se skupaj s Hrvati vkrcali na kombi za letališče. Do tja so nas pospremile naše vodičke in malo je manjkalo, da se ob slovesu nismo razjokali. Na letališču sem moral iz nahrbtnika vzeti medaljo, ki bi lahko najbrž bila uporabljena kot orožje. Z Markom sva si uredila skupne sedeže, da sva lahko trenirala branje ruščine med letom. Uspelo nama je zaključiti odsek s črkami in prišla sva do pesmic o mesecih. Imel sem še priložnost preizkusiti svojo hrvaščino, saj je poleg naju sedel eden članov hrvaške ekipe.

V Zagrebu nas je čakal kombi in že smo bili na poti v Ljubljano. Med vožnjo in na kavi v Tivoliju smo na Barbarino pobudo zavzeto delali načrt za to reportažo ...

In zdaj je tu. Zapisana, objavljena. Želim si, da bi lahko začutili energijo našega ruskega tedna. Da bi se med branjem navzeli vsaj kančka tiste čudovite otroške svobode, ki nas je prevevala in ki je omogočala seganje izven cone udobja do novih kultur, početij in izkustev. Da bi se kdaj predali »norosti« in naredili, kar se vam v nekem trenutku zazdi zanimivo, ne da bi se obremenjevali. Ker nam je to uspelo in prav zato, je bil zadnji teden zame najlepši v tem letu. In žal mi je, da nisem ljubezni do fizike in tekmovanj odkril prej, a vseeno sem neskončno vesel, da mi je bila dana možnost za udeležbo na tej olimpijadi in da sem izkoristil VSAKO SEKUNDO, ki sem jo tam preživel. Da sem se z veseljem predal nalogam, da sem spoznal čudovite ljudi, sodeloval v lepih pogovorih, počel prisrčne neumnosti. Tekmujte, bodite radovedni in zabavajte se, ker fizika JE zabavna. In ko se vam uspe prebiti na vrh, ko imate čast dvigniti slovensko zastavo na mednarodnih tekmovanjih, takrat ne pozabite, kaj je najbolj pomembno. Da se odprete in užijete vsak trenutek čudovite priložnosti, ki vam je dana.[5]

× × ×

[5] Za pomoč pri izdelovanju osnutka se zahvaljujem celotni slovenski ekipi, še posebej Marku.

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

	1			2	5		6
7				1			
	2	3					
			6			5	
4							
		2				3	8
				3		8	
8		7		5		1	

→→→ REŠITEV BARVNI SUDOKU

3	1	8	4	2	5	7	6
7	5	6	2	1	8	4	3
5	2	3	7	8	4	6	1
1	8	4	6	7	3	5	2
4	3	1	8	6	7	2	5
6	7	2	5	4	1	3	8
2	4	5	1	3	6	8	7
8	6	7	3	5	2	1	4

× × ×

Izbor ekipe za 12. mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike

↓↓↓
Dunja Fabjan, Andrej Guštin

→ **Izbor ekipe za mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike (MOAA) je dolgotrajen proces.**

Tekmovalke in tekmovalci so se morali najprej udeležiti šolskega tekmovanja iz znanja astronomije, ki je bilo v začetku decembra 2017. Potem so se najboljši spopadli z nalogami na državnem tekmovanju, ki je bilo v začetku januarja 2018. Prejemniki zlatih priznanj na tem tekmovanju so postali tudi kandidati za olimpijsko ekipo. Še v januarju 2018 je bil zanje izbirni krog Sanktpetrburške astronomske olimpijade (SAO), ki šteje kot del izbirnega postopka za MOAA. Najboljši so se uvrstili v teoretični in praktični krog SAO, ki se je zaključil marca, za srednješolce pa je potekal na Gimnaziji Bežigrad. Marca bi se morali kandidati za olimpijsko ekipo udeležiti Messierjevega maratona, ki je preiskus znanja praktične astronomije. Žal je bilo letos vreme slabo in je Messierjev maraton odpadel, zato smo morali praktični del izbirnega postopka premakniti na dan končnega teoretičnega izbirnega testa, ki je bil 8. maja na Konservatoriju za glasbo in balet Ljubljana. Ob koncu napornega izbirnega postopka smo dobili ekipo za 12. MOAA, ki bo letos med 3. in 11. novembrom v Pekingu na Kitajskem.

Člani in članica ekipe za 12. MOAA so:

- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad;
- Gregor Humar, Gimnazija in srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik;
- Andraž Jelinčič, Gimnazija Bežigrad;
- Klemen Keršič, Srednja šola Slovenska Bistrica;
- Ema Mlinar, Gimnazija Vič, Ljubljana.

Naloge teoretičnega dela izbirnega tekmovanja za 12. MOAA

1. Dne 24. junija opazujemo zvezdo Vego ($\alpha = 18^h36^m56^s$, $\delta = +38°47'1{,}2''$) iz Ljubljane ($\varphi = 46°\ 13{,}4'$ N, $\lambda = 14°\ 27'$ E).

(a) Kdaj kulminira Vega? Kolikšna je njena višina ob kulminaciji?
(b) Kolikšna sta višina (h) in azimut (A) zvezde, če jo opazujemo ob 23h?

Podatki. Vega: $\alpha = 18^h36^m56^s$, $\delta = +38°47'1{,}2''$
Ljubljana: $\varphi = 46°13{,}4'$N, $\lambda = 14°27'$E

(a) Za dan 24. junij lahko brez težav izračunamo zvezdni čas na Greenwichu ob 0^hUT, ki je enak

- $$S(0^hUT, 24.\,6.) = S(0^hUT, 21.\,6.) + \dot{S}\Delta t = 18^h + \frac{4\text{min}}{\text{dan}}\,3\text{dni} = 18{,}2^h.$$

Ko zvezda kulminira, je njen časovni kot enak 0, torej velja

- $$0 = H = S(0^hUT, 24.\,6.) + \lambda + \gamma\,(t_k - t_0) - \alpha$$
$$t_k = t_0 + \frac{1}{\gamma}(\alpha - S(0^hUT, 24.\,6.) - \lambda) = 1{,}453^h.$$

Ker je $\varphi > \delta$, je višina Vege ob kulminaciji enaka

- $$h_k = 90° - \varphi + \delta = 82{,}56°.$$

→

(b) Če zvezdo opazujemo ob 23^h, je njen časovni kot takrat enak

$$H = S(0^h UT, 24.\,6.) + \lambda + \gamma\,(t - t_0) - \alpha(= 21{,}6053^h) = -2{,}39^h,$$

saj je H definiran na intervalu od $-\pi/2$ do $\pi/2$ oziroma med -12^h in 12^h.
S pomočjo višinske enačbe izračunamo višino Vege ob 23^h:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H = 0{,}88902.$$

Ker je h definiran med $-\pi/2$ in $\pi/2$, obstaja samo ena rešitev in ta je

$$h = 62{,}75^\circ.$$

Azimut ob kulminaciji izračunamo s pomočjo sinusnega in kosinusnega izreka, ki pravita

$$\sin\delta = \sin\varphi\sin h + \cos\varphi\cos h\cos A$$
$$\frac{-\sin A}{\cos\delta} = \frac{\sin H}{\cos h}.$$

Preverimo lahko posebej rezultate za sinus in kosinus kota ali pa dobimo rešitev iz enačbe

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = 1{,}05028.$$

Azimut je

$$A = 92{,}8098^\circ.$$

2. Dvozvezdje sestavljata kefeidna spremenljivka in masivna zvezda. Za kefeido velja zveza $M_{\text{abs}} = 2{,}81 \cdot \log_{10} P_{[\text{dni}]} - 1{,}43$, kjer je $P_{[\text{dni}]}$ perioda kefeide v dnevih, M_{abs} pa njena absolutna magnituda. Njena izmerjena perioda spremembe izseva je $P_A = 3{,}97$ dni, navidezna magnituda pa $m_A = 1{,}97$. Masivna zvezda leži na glavni veji HR diagrama, ima navidezno magnitudo $m_B = -0{,}8$ in temperaturo $T_B = 30000$ K.

(a) Kolikšen je izsev kefeide L_A? Izrazi ga v Sončevih izsevih ($L_\odot$).
(b) Kolikšen je radij druge zvezde (R_B), ko je še na glavni veji? Izrazi ga v radijih Sonca ($R_\odot$).
(c) Izračunaj maso kefeide (M_A), če je perioda sistema 76 let, razdalja zvezd pa 51 a.e. Rezultat izrazi v radijih Sonca ($R_\odot$). *(Namig: najprej izračunaj maso masivne zvezde, M_B.)*
(d) Ko bo masivna zvezda porabila vodik v sredici, bo del življenja preživela kot orjakinja in kasneje eksplodirala kot supernova. Takrat se bo njeno jedro skrčilo v nevtronsko zvezdo s polmerom 10 km, ovojnica pa se bo razletela. Med eksplozijo bodo večino sproščene energije odnesli nevtrini, le majhen del pa se bo porabil za gibanje snovi. Kolikšen del sproščene energije bo v kinetični energiji ovojnice? Izmerjena hitrost ovojnice je $v = 1200$ km/s. Predpostavi, da je v jedru zbrane 10 % mase zvezde in da sta jedro in ovojnica homogena.

Podatki. $m_A = 1{,}97$
$m_B = -0{,}8$
$T_B = 30000$ K
$M_{A,abs} = -3{,}11$ (iz formule za kefeide)

(a) Najprej izračunamo razdaljo do zvezd:

$$m_A - m_{A,abs} = -2{,}5\log\left(\frac{10\text{pc}}{d}\right)^2$$
$$d = 10\,\text{pc}\,10^{(m_A - m_{A,abs})/5}$$
$$d = 10\,\text{pc}\,10^{(1{,}97-(-3{,}11))/5} = 103{,}9\text{ pc}$$

Izračunamo izsev kefeide:

$$M_{A,abs} - M_{\odot,abs} = -2{,}5\log\left(\frac{L_A}{L_\odot}\right)$$
$$L_A = 10^{(M_{A,abs}-M_{\odot,abs})/-2{,}5}\cdot L_\odot = 10^{(-3{,}11-4{,}83)/-2{,}5}\cdot L_\odot = 1499{,}7\cdot L_\odot$$

(b) Izsev druge zvezde je

$$m_B - m_A = -2{,}5\log\left(\frac{L_B}{L_A}\right)$$
$$L_B = 10^{(m_B-m_A)/-2{,}5}\cdot L_A = 10^{(-0{,}8-1{,}97)/-2{,}5}\cdot L_A = 19231{,}1\cdot L_\odot$$

Radij druge zvezde je

$$\begin{aligned} R_B^2 &= \frac{L_B}{\sigma T_B^4 4\pi} \\ &= \frac{19231{,}1 \cdot 3{,}826 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{5{,}6726 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W}m^{-2}K^{-4}\; 30000^4\, K^4\, \pi} \\ &= 9{,}9 \cdot 10^{17}\mathrm{m}^2 \\ R_B &= 9{,}9 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m} \\ &= 1{,}4 R_\odot \end{aligned}$$

(c) Izračunamo maso M_B, in sicer iz zveze za zvezde na glavni veji, kjer vemo, da je $L \propto M^{3,5}$ (kot pravilen se upošteva faktor med 3 in 3,5; rešitve so podane za faktor 3,5).

$$\begin{aligned} M_B &= \left(\frac{L_B}{L_\odot}\right)^{1/3,5} M_\odot \\ &= 16{,}7 M_\odot \end{aligned}$$

(d) Zapišemo posamične komponente začetne in končne skupne energije, kjer je R_z (M_z) začetni radij (masa) zvezde, R_k (M_k) pa končni. Upoštevamo homogenost zvezd, oznake tot, tot ns, ovoj in ν pa se nanašajo na skupno energijo, skupno energijo nevtronske zvezde, ovojnice ter nevtrine:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{tot,z}} &= \frac{1}{2} W_{g,z} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} G \frac{M_z^2}{R_z}\right) \\ W_{\mathrm{tot,k}} &= W_{\mathrm{totns,k}} + W_{\mathrm{ovoj,k}} + W_\nu \\ W_{\mathrm{totns,k}} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} G \frac{M_k^2}{R_k}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} G \frac{0{,}01 M_z^2}{R_k}\right) \\ W_{\mathrm{ovoj,k}} &= \frac{1}{2} M_{\mathrm{ovoj}} v^2 = \frac{1}{2} 0{,}9 M_z v^2 \end{aligned}$$

Upoštevamo ohranitev energije in zapišemo začetno energijo zvezde in končno energijo zvezde, ovojnice ter nevtrinov:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{tot,z}} &= W_{\mathrm{totns,k}} + W_{\mathrm{ovoj,k}} + W_\nu \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} G \frac{M_z^2}{R_z}\right) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} G \frac{0{,}01 M_z^2}{R_k}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} 0{,}9 M_z v^2 + W_\nu \end{aligned}$$

Zanima nas delež energije v ovojnici glede na sproščeno energijo. Ker večino energije odnesejo nevtrini, nas zanima delež $W_{\mathrm{ovoj,k}}/W_\nu$. Tega lahko izrazimo s pomočjo zgornje enačbe, kjer opazimo, da bomo pri odštevanju $W_{\mathrm{tot,z}} - W_{\mathrm{totns,k}} - W_{\mathrm{ovoj,k}}$ dobili termin $(1/R_z - 0{,}01/R_k)$. Vendar $R_k << 0{,}01 R_z$, kar lahko preverimo, če kot začetni radij vstavimo R_B. (Pred eksplozijo bo zvezda orjakinja, njen radij bo bistveno večji od R_B, zato ga pri izračunu ne uporabimo.) Ocenimo, da je $W_\nu \simeq -W_{\mathrm{totns,k}} - W_{\mathrm{ovoj,k}}$:

$$\frac{W_{\mathrm{ovoj,k}}}{W_\nu} = 0{,}0009725\ ,$$

kjer uporabimo vrednosti $v = 1200$ km/s, $R_k = 10$ km. Posamične energije so $W_{\mathrm{totns,k}} = -2{,}2219 \cdot 10^{46}$ kg m^2 s^{-2}, $W_{\mathrm{ovoj,k}} = 2{,}1589 \cdot 10^{43}$ kg m^2 s^{-2}, $W_\nu \simeq 2{,}21978 \cdot 10^{46}$ kg m^2 s^{-2}.

3. Izračunaj rdeči premik, na katerem sta bili gostoti energije snovi in sevanja enaki. Prasevanje ima temperaturo 2,7 K, vrednost Hubblove konstante danes ($H(t_0)$) je podana. Privzemi, da so nevtrini (takrat relativistični) prispevali k gostoti energije sevanja, njihov prispevek je gostoto energije sevanja povečal za 69 %.
Nasvet. Upoštevaj, da je gostota energije sevanja enaka $\frac{4j}{c}$, kjer je j gostota svetlobnega toka črnega telesa! Pri izračunih upoštevaj tudi, da je parameter gostote snovi danes $\Omega_{m,0} = 0{,}27$.

Gostota energije snovi in gostota energije sevanja se spreminjata s skalirnim faktorjem R na sledeči način:

$$\begin{aligned} \rho_m c^2 &= \frac{\rho_{m,0} c^2}{R^3} \\ \rho_r c^2 &= \frac{\rho_{r,0} c^2}{R^4}. \end{aligned}$$

Uporabimo enačbo $R \propto \frac{1}{1+z}$ in zapišemo

$$\begin{aligned} \rho_m c^2 &= \rho_{m,0}\ (1+z)^3 \\ \rho_r c^2 &= \rho_{r,0}\ (1+z)^4 \end{aligned}$$

Iščemo rdeči premik, pri katerem sta $\rho_m c^2$ in $\rho_r c^2$ enaka, torej

$$\rho_{r,0} c^2\ (1+z)^4 = \rho_{m,0} c^2\ (1+z)^3.$$

→

Gostoto energije snovi lahko izrazimo kot

- $\rho_{m,0} = \Omega_m \rho_{cr,0} = \Omega_m \dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$.

Gostoto energije sevanja izrazimo kot

- $\rho_{r,0}c^2 = 1{,}69\,\dfrac{4j}{c} = 1{,}69\,\dfrac{4\sigma T^4}{c}$,

kjer smo upoštevali tudi prispevek relativističnih nevtrinov:

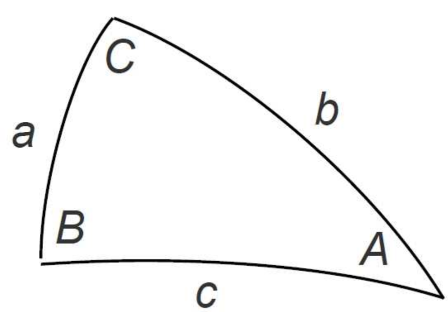
- $$\begin{aligned}\rho_{r,0}c^2\,(1+z)^4 &= \rho_{m,0}c^2\,(1+z)^3\\ \rho_{r,0}c^2\,(1+z) &= \rho_{m,0}c^2\\ (1+z) &= \frac{\Omega_m \rho_{cr,0}c^2}{1{,}69\,\frac{4\sigma T^4}{c}}\\ &= \frac{\Omega_m \frac{3H_0^2}{8\pi G}c^2}{1{,}69\,\frac{4\sigma T^4}{c}}\\ &= \frac{\Omega_m\,3H_0^2}{1{,}69\cdot 4\cdot 8\cdot \pi G c \sigma T^4}\\ z &= 3285\end{aligned}$$

Konstante

kratica/simbol	količina	vrednost
$a.e.$	astronomska enota	149597870691 m
R_Z	povprečni polmer Zemlje	6371000 m
$M_\odot$	masa Sonca	$1{,}9891\times10^{30}$ kg
$m_\odot$	navidezna magnituda Sonca	$-26{,}8$
$M_{\mathrm{bol},\odot}$	absolutna (bolometrična) magnituda Sonca	4,82
$M_{K,\odot}$	absolutna magnituda Sonca v K filtru	3,31
$L_\odot$	izsev Sonca	$3{,}826\times10^{26}$ J s^{-1}
$R_\odot$	radij Sonca	$6{,}955\times10^{8}$ m
j_Z	solarna konstanta	1370 W m^{-2}
R_L	radij Lune	1738000 m
d_L	povprečna razdalja med Zemljo in Luno	384399000 m
G	gravitacijska konstanta	$6{,}6726\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
σ	Stefan-Boltzmannova konstanta	$5{,}6705\times10^{-8}$ J s^{-1} m^{-2} K^{-4}
h	Planckova konstanta	$6{,}6261\times10^{-34} Js$
c	svetlobna hitrost	$2{,}9979\times10^{8}$ m/s
k	Boltzmannova konstanta	$1{,}38065\times10^{-23}$ m^2 kg s^{-2} K^{-1}
pc	parsek	$3{,}0860\times10^{16}$ m
$H_0 = H(t_0)$	vrednost Hubblove konstante danes	70 km/s Mpc^{-1}

Osnovne enačbe sferne trigonometrije:

- $$\begin{aligned}\sin a \sin B &= \sin b \sin A\\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A\\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\end{aligned}$$



Osnovne enačbe za kozmologijo:

- Hubblov čas: $t_H(t_0) = \frac{1}{H_0}$
- kritična gostota: $\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$
- Starost vesolja:
  $t_0 = \frac{2}{3}t_H$ (kritični model, $k=0$, $\Lambda=0$)
- Skalirni faktor: $a \propto t^{2/3}$

× × ×

Še o generiranju permutacij

Aleksander Vesel

Uvod

Permutacija je bijektivna preslikava končne množice A nase. Predstavimo jo lahko kot razporeditev elementov množice v neko zaporedje. Brez izgube splošnosti lahko pri tem predpostavimo, da množico A sestavlja prvih n naravnih števil oziroma $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Zanimajo nas torej urejene izbire vseh elementov iz A, pri čemer ponavljanje elementov ni dovoljeno. Permutacijo množice A z n elementi bomo označili kot zaporedje $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kjer $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in $a_i \neq a_j$, če $i \neq j$, za vse $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Znano je, da je število permutacij v množici z n elementi enako $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, pri čemer z zapisom $n!$ označimo *fakulteto* naravnega števila n. Opazimo lahko, da število permutacij glede na število elementov v množici zelo hitro narašča. Če je $n = 20$, je število permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ enako $20! = 2432902008176640000$.

V Preseku [2] so nas že zanimali algoritmi za konstruiranje vseh permutacij množice z n elementi. Spomnimo, da je včasih zaželeno, da algoritem vrne urejeno zaporedje permutacij. Pri tem običajno mislimo na *leksikografsko urejenost*. Permutacija $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je manjša od permutacije $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ glede na leksikografsko urejenost, če in samo če je $a_j < b_j$ za najmanjši j, v katerem se a in b razlikujeta. Permutacija $a = (4, 2, 3, 1, 5)$ je tako manjša od permutacije $b = (4, 2, 3, 5, 1)$, saj se, gledano od leve proti desni, prvič razlikujeta v četrtem elementu in je $a_4 < b_4$. Najmanjša permutacija množice z n elementi v leksikografski ureditvi je permutacija $(1, 2, \ldots, n)$, največja pa $(n, n-1, \ldots, 1)$. Vse permutacije lahko leksikografsko razporedimo od najmanjše do največje in oštevilčimo od 0 do $n! - 1$.

Zaradi hitrega naraščanja števila permutacij generiranja vseh permutacij večje množice v praksi ne moremo izvesti, saj je permutacij hitro zelo veliko in njihovo generiranje traja preveč časa. Pri reševanju nekaterih problemov se zato zadovoljimo s tem, da konstruiramo samo izbrane permutacije, pogosto pa nas zanima tudi konstrukcija zaporedja naključno izbranih permutacij.

Na spletni strani `projecteuler.net/` so zbrani nekateri zanimivi matematično računalniški problemi v okviru Projekta Euler. Problem 24 je zastavljen takole: Poišči milijonto leksikografsko permutacijo množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Povedano drugače, poišči permutacijo množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ z zaporednim številom 999999 glede na leksikografsko ureditev.

V tem prispevku bomo opisali način, kako konstruiramo permutacijo z zaporednim številom i glede na leksikografsko ureditev ter algoritem, ki vrne naključno izbrano permutacijo. Za majhne množice bi lahko za ta namen uporabili tudi algoritem, ki generira leksikografsko zaporedje vseh permutacij ter potem vrne i-to permutacijo, kjer je i vhodni podatek ali naključno generirana vrednost med 0 in $n! - 1$. Opisana rešitev pa je prostorsko zelo potratna in za večje množice neuporabna, saj število permutacij, ki jih moramo straniti, hitro preseže velikost delovnega pomnilnika v računalniku.

Konstruiranje i-te permutacije v leksikografski ureditvi

Kot smo pokazali v uvodnem poglavju, lahko permutacije glede na leksikografsko ureditev razvrstimo od najmanjše do največje oziroma jih oštevilčimo z zaporednimi števili od 0 do $n! - 1$. Konstrukcija i-te permutacije je osnovana na posebnem številskem sistemu, kjer posamezne števke zmnožimo s fakultetami števil od 1 do $n - 1$ in ga zato imenujemo *faktorialni številski sistem*. V faktorialnem številskem sistemu je vsako celo število i iz množice $\{0, 1, \ldots, n! - 1\}$ na enoličen način predstavljeno kot

- $i = x_1(n-1)! + x_2(n-2)! + \ldots + x_{n-1}1! + x_n 0!$,

kjer za $j \in \{1, \ldots, n\}$ velja, da $x_j \in \{0, 1, \ldots, n-j\}$.

Ker je $x_n = 0$, lahko zadnji člen tudi izpustimo in dobimo

- $i = x_1(n-1)! + x_2(n-2)! + \ldots + x_{n-1}1!$.

Kot primer predstavimo število 81 v faktorialnem številskem sistemu. Pretvorbo lahko opravimo na podoben način kot pretvorbo iz desetiškega v dvojiški številski sistem. Namesto zaporednih delitev s številom 2 v tem primeru po vrsti delimo z zaporednimi naravnimi števili $1, 2, 3, \ldots$, tako da po deljenju celoštevilski količnik postane deljenec na naslednjem koraku, ostanek pa predstavlja števko faktorialnega številskega sistema x_j, za vsak j med n in 1:

- $81 = 81 \cdot 1 + 0, \quad x_5 = 0$
  $81 = 40 \cdot 2 + 1, \quad x_4 = 1$
  $40 = 13 \cdot 3 + 1, \quad x_3 = 1$
  $13 = 3 \cdot 4 + 1, \quad x_2 = 1$
  $3 = 0 \cdot 5 + 3, \quad x_1 = 3$

Preverimo, da velja

- $81 = 3 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 3 \cdot 24 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1.$

Algoritem, ki pretvori naravno število v števke faktorialnega številskega sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$, prepuščamo za vajo bralcu.

Najmanjši permutaciji $(1, 2, \ldots, n)$ v leksikografski ureditvi ustreza število 0, ki je v opisanem številskem sistemu predstavljeno s števkami $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Značilnost najmanjše permutacije je, da je na j-tem mestu permutacije vedno število j oziroma $a_j = j$. To tudi pomeni, da desno od števila a_j ni nobenega števila, ki bi bilo manjše od a_j. V splošnem za poljubno permutacijo $(a_1, \ldots, a_n)$ velja, da je pripadajoča števka faktorialnega številskega sistema x_j enaka številu elementov manjših od a_j, ki so v permutaciji desno od števila a_j.

Ker je v permutaciji $(4, 2, 3, 1, 5)$ element 4 na prvem mestu, so desno od njega trije manjši elementi in dobimo $x_1 = 3$. Na podoben način dobimo še druge vrednosti x_j, ki so prikazane v levem delu tabele 1. Na podlagi števk x_j lahko izračunamo zaporedno število permutacije $(4, 2, 3, 1, 5)$:

- $3 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 80.$

Poskusimo še ugotoviti, katera je permutacija množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ z zaporednim številom 81. Kot smo že izračunali, velja $x_5 = 0$, $x_4 = x_3 = x_2 = 1$ in $x_1 = 3$. Ker je $x_1 = 3$, morajo biti desno od a_1 tri števila manjša od a_1, iz česar sledi, da je a_1 četrti najmanjši element množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ oziroma $a_1 = 4$. Podobno, ker je $x_2 = 1$, je a_2 drugi najmanjši element množice $\{1, 2, 3, 5\}$, torej $a_2 = 2$. Zaradi $x_3 = x_4 = 1$ dobimo $a_3 = 3$ in $a_4 = 5$. Ko vstavimo v permutacijo prve štiri vrednosti, ostane množica z elementom 1, zato je $a_5 = 1$.

Vrednosti x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 za permutaciji $(4, 2, 3, 1, 5)$ in $(4, 2, 3, 5, 1)$ so prikazane v tabeli 1.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	1	1	0	0	3	1	1	1	0

TABELA 1.
Vrednosti x_j za permutacijo $(4, 2, 3, 1, 5)$ (levo) in $(4, 2, 3, 5, 1)$ (desno)

Na podlagi zapisanega bi lahko zapisali algoritem, ki najprej pretvori vhodni podatek i v števke faktorialnega številskega sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in nato poišče pripadajočo permutacijo. Algoritem lahko poenostavimo, saj se izkaže, da ni potrebno shranjevati števk faktorialnega številskega sistema. V ta namen je potrebno pretvorbo v faktorialni številski sistem spremeniti tako, da izračun poteka v obratni smeri: od prve števke x_1 do zadnje x_n.

Postopek spet pojasnimo za primer $i = 81$. Najprej 81 delimo s 4!. Dobimo količnik 3, ki je enak vrednosti x_1. Na naslednjem koraku ostanek pri prejšnjem deljenju delimo s 3!, da dobimo x_2. Nato postopek nadaljujemo še za x_3 in x_4. Kot vemo, vedno velja $x_5 = 0$, zato lahko zadnji izračun izpustimo:

- $81 = 3 \cdot 4! + 9, \quad x_1 = 3$
  $9 = 1 \cdot 3! + 3, \quad x_2 = 1$
  $3 = 1 \cdot 2! + 1, \quad x_3 = 1$
  $1 = 1 \cdot 1! + 0, \quad x_4 = 1$

Algoritem Vrni permutacijo (Algoritem 1) vrne i-to najmanjšo permutacijo množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ glede na leksikografsko ureditev. V zanki algoritem za vrednost spremenljivke j med 1 in $n-1$ izračuna element permutacije a_j. Pri tem si pomaga z množico

E, v kateri imamo elemente množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, ki še niso bili uporabljeni za konstrukcijo permutacije. Na začetku seveda velja $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Algoritem spremenljivki x v j-ti ponovitvi zanke priredi vrednost x_j. Kot smo že pojasnili, je a_j enak $(x_j + 1)$. neporabljenemu elementu množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, kar ustreza $(x_j + 1)$. elementu množice E, saj po vstavitvi v permutacijo element a_j odstranimo iz E.

Algoritem 1: Vrni permutacijo

Vhod: *Naravno število n in nenegativno celo število i*
Izhod: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *i-ta permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ glede na leksikografsko ureditev*

$E := \{1, 2, \ldots, n\}$;
for $j := 1$ **to** $n - 1$ **do**
  $x := \lfloor \frac{i}{(n-j)!} \rfloor$;
  $i := i \bmod (n - j)!$;
  $a_j := (x + 1)$. najmanjši element iz E;
  $E := E \setminus \{a_j\}$;
$a_n :=$ element iz E;

Če želimo izračunati permutacijo množice, ki ni enaka $\{1, 2, \ldots, n\}$, je potrebno ustrezno spremeniti začetno vrednost spremenljivke E. Za rešitev problema 24 bi tako določili $E := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ter poklicali algoritem Vrni permutacijo za vhodna podatka $i = 999999$ in $n = 10$.

Konstruiranje naključno izbrane permutacije

V tem razdelku bomo pojasnili, kako zapišemo algoritem, ki vrne naključno permutacijo množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Glede na prejšnji razdelek se enostavna rešitev ponuja kar sama: na naključen način izberemo število i med 0 in $n! - 1$ ter nato uporabimo algoritem Vrni permutacijo (Algoritem 1), ki poišče i-to permutacijo v leksikografski ureditvi.

Opisana rešitev je sicer res enostavna, a je primerna le za manjše množice. Na začetku prispevka smo zapisali vrednost 20!, ki je število s kar 20 števkami, kar že presega največje celo število, ki ga imamo običajno na voljo v programskem jeziku. Potrebno je torej poiskati algoritem, ki bo deloval tudi za množice z večjim številom elementov.

Poglejmo najprej, kako bi lahko skonstruirali permutacijo množice $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Če začnemo od desne proti levi, velja:

- a_n lahko izberemo na n načinov (izbiramo iz $\{1, 2, \ldots, n\}$);
- a_{n-1} lahko izberemo na $n - 1$ načinov (izbiramo iz $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a_n\}$);
- a_{n-2} lahko izberemo na $n - 2$ načinov (izbiramo iz $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{a_n, a_{n-1}\}$);
- $\vdots$;
- a_2 lahko izberemo na 2 načina.

Zgornjo konstrukcijo uporabimo v algoritmu naključna permutacija (Algoritem 2). Algoritem vrne naključno izbrano permutacijo, ki jo zgradi iz najmanjše permutacije leksikografske ureditve $a = (1, 2, \ldots, n)$, določene v prvi zanki algoritma. V drugi zanki spremenljivka j teče od n do 2. Na j-tem koraku zanke algoritem v spremenljivko i shrani naključno število iz množice $\{1, 2, \ldots, j\}$ in nato zamenja i-ti in j-ti element permutacije a.

Algoritem 2: naključna permutacija

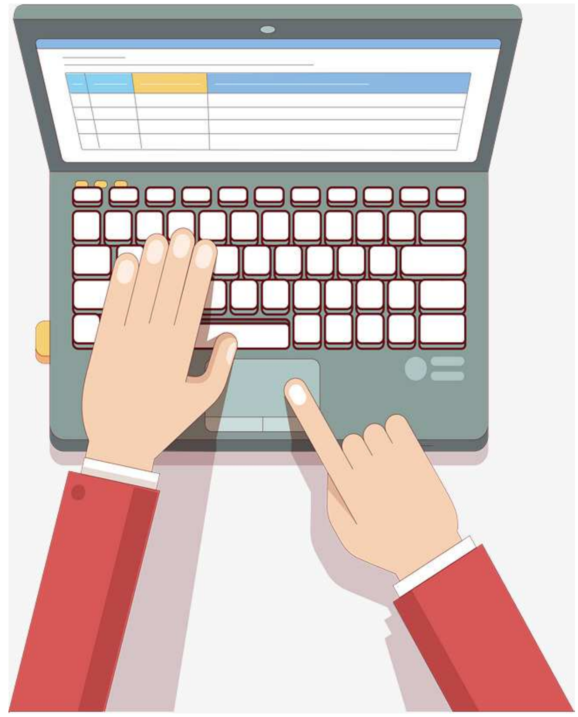
Vhod: *Naravno število n*
Izhod: *naključno izbrana permutacija $(a_1, \ldots, a_n)$ množice $\{1, 2, \ldots, n\}$*

for $j := 1$ **to** n **do**
  $a_j := j$
for $j := n$ **downto** 2 **do**
  $i :=$ naključno celo število med 1 in j;
  zamenjaj(a_i,a_j);

j	i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
		1	2	3	4	5
5	1	5	2	3	4	1
4	1	4	2	3	5	1
3	3	4	2	3	5	1
2	2	4	2	3	5	1

TABELA 2.
Delovanje algoritma naključna permutacija za $n = 5$

V tabeli 2 je prikazano delovanje algoritma naključna permutacija za $n = 5$, če so spremenljivki i prirejene zaporedne naključne vrednosti 1, 1, 3 in 2.



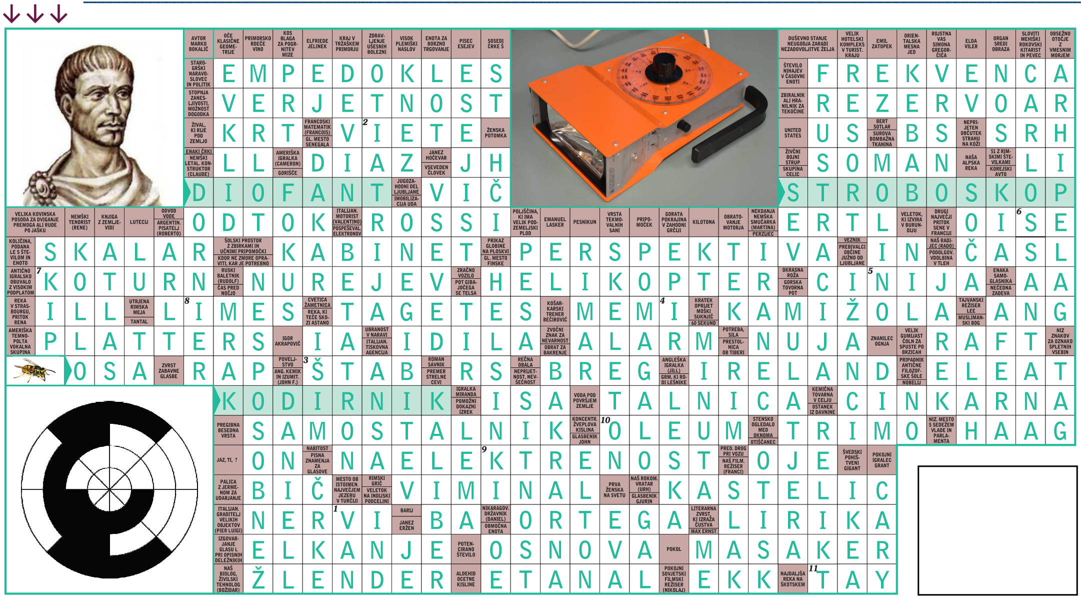
Literatura

[1] A. Bacher, O. Bodini, H. Hwang in T. Tsai, *Generating Random Permutations by Coin Tossing: Classical Algorithms, New Analysis and Modern Implementation*, ACM Transactions on Algorithms, **13**, 1–43, 2017.

[2] A. Vesel, *Nekaj algoritmov za generiranje permutacij*, Presek, **44** (2016/2017) 26–29.

[3] M. A. Weiss, *Data Structures and Algorithm Analysis*, Benjamin-Cummings Pub Co, 1991.

× × ×



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 45/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke Preseka je **Višinski kot.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Rok Strah iz Ljubljane, Marijana Marinšek iz Celja in Marko Kubale iz Rogaške Slatine, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Disperzija

↓↓↓
Aleš Mohorič

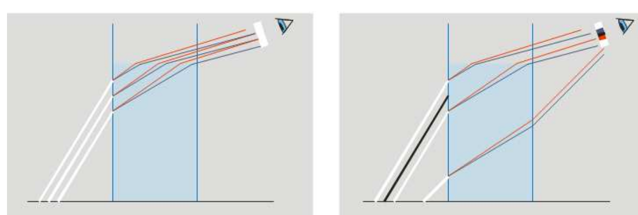
→ **Slika na naslovnici je povečava dela vodne gladine s slike 1. Plastenka vode stoji na mizi s temno, luknjasto ploščo.**

Luknje so osvetljene od spodaj in tvorijo kontrasten vzorec, v katerem svetlo preide v temno na kratki razdalji. Skozi valjasto plastenko so luknje videti razpotegnjene v vodoravni smeri, pravokotno na geometrijsko os plastenke. Plastenka deluje kot cilindrična leča. Rob lukenj ni obarvan, je tak kot rob lukenj, ki jih vidimo neposredno. Luknje vidimo tudi skozi gladino vode v plastenki. Te luknje imajo izrazito obarvan rob, kot vidimo na fotografiji z naslovnice.

Kako pojasnimo ta pojav? Svetloba se na meji med prozornima snovema lomi tako, da je razmerje sinusov vpadnega kota α in lomnega kota β enako razmerju lomnih količnikov lomne in vpadne snovi: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$. Lomni količnik snovi je količnik hitrosti svetlobe v praznem prostoru in hitrosti svetlobe v snovi. Plastična stena posode pri lomu ne igra pomembne vloge, ker so njene stene enakomerno debele in tanke. Disperzija ali razklon je pojav, da je hitrost svetlobe v snovi odvisna od valovne dolžine svetlobe. V vodi je lomni količnik za vijolično svetlobo z valovno dolžino 400 nm enak 1,339. Manjša se približno sorazmerno z valovno dolžino in je za rdečo svetlobo z valovno dolžino 700 nm enak 1,331. Disperzija povzroči, da se vzporedni žarki svetlobe z različnimi valovnimi dolžinami lomijo v snov pod različnimi koti. Če na mejo vpade curek bele svetlobe, se v snovi razkloni v mavrični šop žarkov.

SLIKA 1.
Plastenka z vodo na mizi s kontrastnim vzorcem.

Zakaj potem ne vidimo mavric kjerkoli pogledamo skozi vodo? Svetloba se vidno razkloni le, če vpada pod dovolj velikim kotom. Curek svetlobe mora biti vsaj na eni strani zaslonjen, sicer se barve zlijejo med seboj. To kažeta primera na sliki 2. Skica kaže ravnino, ki vsebuje geometrijsko os navpične valjaste plastenke na vodoravni podlagi in oči opazovalca desno od posode. Narisani so le tisti žarki iz površine, ki vodijo do očesa. Žarki se na navpični steni posode zlomijo proti vpadni pravokotnici, modri bolj kot rdeči. Na levi skici je podlage bela in snop žarkov bele svetlobe se razkloni v šope mavričnih barv. Te barve se po lomu zlijejo nazaj v belo. Na desni skici opišimo najprej žarek iz dela podlage bližje plastenki. Ta se najprej lomi, kot prej opisano, nato pa se zlomi še na nasprotnem navpičnem robu plastenke. Žarki modre in rdeče svetlobe so vzporedni. Pojav razklona je manj izrazit. Žarki iz bolj oddaljenega dela podlage izstopijo iz vode na vodoravni gladini, kjer se ponovno lomijo, tokrat stran od vpadne pravokotnice, spet modri bolj kot rdeči. Zato nastane iz žarka bele svetlobe divergentni šop žarkov različnih barv. Na desni skici je vmes med belima ploskvicama temna ploskev, iz katere svetloba ne izhaja (ponazorjeno s črnim žarkom). Po razklonu se barve v omejenem območju okoli roba med svetlo in temno ploskvijo ne zlijejo. Od zgoraj se v temni rob prelije modra, od spodaj pa rdeča svetloba in zato vidimo robove svetlih ploskev obarvane.



SLIKA 2.

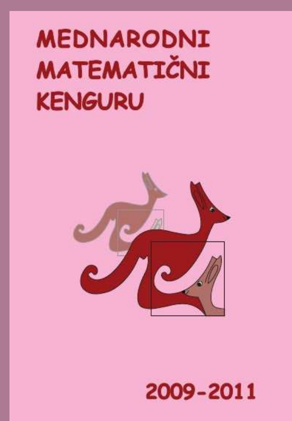
×××

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR



14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!