

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 25 (1997/1998)

Številka 6

Strani 354-359

Janez Strnad:

DVESTO LET GRAVITACIJSKE KONSTANTE

Ključne besede: fizika, gravitacijski zakon, gravitacijska konstanta, Henry Cavendish, torzijska tehtnica.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/25/1354-Strnad.pdf>

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

DVESTO LET GRAVITACIJSKE KONSTANTE

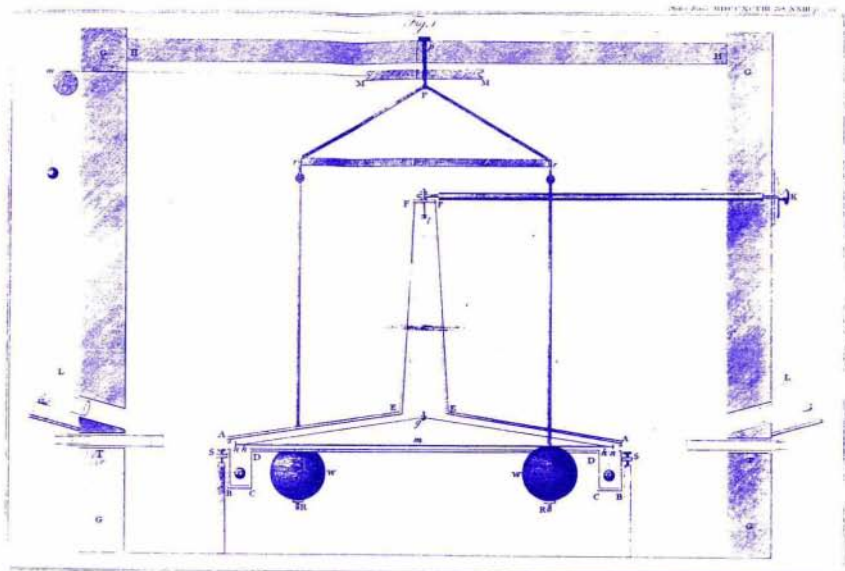
Gravitacijski zakon je leta 1687 objavil Isaac Newton, ne da bi navedel sorazmernostni koeficient. *Newtonov gravitacijski zakon* je samo zagotovil, da je privlačna sila med telesoma sorazmerna z maso prvega in maso drugega telesa ter obratno sorazmerna s kvadratom razdalje: $F \propto m_1 m_2 / r^2$. Telesi z masama m_1 in m_2 sta zelo majhni v primeri z njuno oddaljenostjo r ali pa sta krogelno simetrični in je potrebno upoštevati razdaljo med njunima središčema. Newton je s svojim zakonom, čeprav ni poznal sorazmernostnega koeficienta, uspešno obdelal veliko pojavov, med njimi gibanje planetov okoli Sonca, plimovanje ter precesijo in nutacijo zemeljske osi. Vedel je sicer, kako bi bilo sorazmernostni koeficient moč določiti, a gravitacijska sila med telesoma v laboratoriju je tako šibka, da je z razpoložljivimi napravami ni mogel izmeriti.

Pozneje so izdelali občutljive *torzijske tehtnice*. Na tanko žičko so obesili prečko in merili kot, za katerega se je prečka zavrtela okoli navpične osi, ko so na prečko delovali z navorom. Zasuk je bil sorazmeren z navorom. Pravi mojster pri delu s torzijsko tehtnico je bil Charles Augustin Coulomb (1736 do 1806), ki je okoli leta 1780 z njo raziskal silo trenja in delovanje zemeljskega magnetnega polja na magnetnico. Za to je dobil nagrado, ki jo je razpisala francoska akademija znanosti. Deset let pozneje je Coulomb s torzijsko tehtnico izmeril silo med naelektrenima kroglicama v odvisnosti od razdalje in prišel do zakona, ki ga imenujemo po njem. *Coulombov zakon* je podoben gravitacijskemu, le da v njem električni naboj stopi na mesto mase. Tudi Coulomb pri svojem merjenju ni določil sorazmernostnega koeficienta, ki ustreza gravitacijski konstanti.

Na misel, da bi občutljivo torzijsko tehtnico uporabil za merjenje gravitacijske sile med telesoma v laboratoriju, je prišel že okoli leta 1768 angleški naravoslovec John Michell (1724 do 1793). Izdelal je tudi merilno napravo, a prehitela ga je smrt. Michellovo napravo je nazadnje dobil Henry Cavendish in se lotil merjenj, med katerimi je napravo predelal (slika 1). Z vrsto skrbnih merjenj mu je uspelo določiti gostoto Zemlje, o čemer je leta 1798 poročal v razpravi *Poskusi za določitev gostote Zemlje* v Kraljevi družbi, angleški akademiji znanosti, in jo objavil v njenem glasilu (slika 2). Gravitacijske konstante ni posebej navedel, a vrednost, ki je izhajala iz njegovih merjenj, se ni znatno razlikovala od današnje

$$\kappa = (6,67259 \pm 0,00085) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2.$$

Gravitacijska konstanta je od vseh splošnih konstant izmerjena z najslabšo natančnostjo, kar kaže navedena nenatančnost pri merjenju. Z gravitacij-



Slika 1. Risba Cavendisheve naprave iz leta 1798. Torzijsko tehtnico so lesene stene GHG ščitile pred vetrom. Na približno 1 m dolgi žički lm je visela vodoravna tanka bakrena prečka hmh z dolžino $l = 1,86$ m s svinčenima kroglicama x,x na krajiščih. Cavendish je omenil, da je pri prvih poskusih uporabil posrebreno bakreno žičko s premerom 0,2 mm. Toda njen koeficient D je bil premajhen, ker sta se kroglici toliko odklonili, da sta zadeli v ohišje iz mahagonija ABCDDCBAEFFEA. Zato je uporabil drugo nitko z večjim koeficientom D , a ni omenil, za kakšno nitko je šlo. Svinčeni krogli R,R z maso po $m_2 = 158$ kg sta bili toga vpeti z lesenimi drogovi rR, rr, rPr in rR. Težišči krogel sta bili v enaki višini kot težišči kroglic in z vrtenjem škripca MM je bilo mogoče približati krogli kroglicama s te ali z druge strani, ne da bi se bilo treba približati tehtnici. Lego prečke s kroglicama je opazoval z daljnogledoma T,T na slonokošeni skali z enoto 1,25 mm, ki sta jo osvetljevala svetilki L,L. Na kroglico je bila pritrjen del enake skale, tako da je bilo mogoče meriti še premike za stotino te enote.

sko konstanto zapišemo gravitacijski zakon

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

V zakon vstavimo težo uteži z maso m_1 na površju Zemlje $F = m_1 g$. Pri tem sta $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ pospešek prostega padanja in $r = 6380 \text{ km}$ radij Zemlje. Iz zakona izračunamo maso Zemlje

$$m_2 = \frac{gr^2}{\kappa} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

[469]

XXI. Experiments to determine the Density of the Earth. By Henry Cavendish, Esq. F.R.S. and A.S.

Read June 21, 1798.

MANY years ago, the late Rev. JOHN MICHELL, of this Society, contrived a method of determining the density of the earth, by rendering sensible the attraction of small quantities of matter; but, as he was engaged in other pursuits, he did not complete the apparatus till a short time before his death, and did not live to make any experiments with it. After his death, the

Slika 2. Začetek Cavendishevega članka v Poročilih Kraljeve družbe iz leta 1798.

Z njo dobimo gostoto Zemlje

$$\frac{m_2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Newton je v *Principih* zapisal: "Verjetno je količina vse snovi Zemlje pet ali šestkrat večja, kot če bi jo sestavljala voda." Če bi zaupal tej svoji oceni za gostoto Zemlje, bi lahko z nakazanim računom v obrnjeni smeri 111 let pred Cavendishem vsaj približno določil gravitacijsko konstanto.

Henry Cavendish (slika 3) je bil član premožne angleške družine. Že njegov oče je naredil nekaj pomembnih poskusov v elektriki. Rojen je bil leta 1731 v Nici, kjer je zaradi šibkega zdravja živel njegova mati. Umrli je dve leti po Henryjevem rojstvu. Študiral je na univerzi v Cambridgeu in po tedanji plemiški navadi študija ni končal. Bil je izreden eksperimentator, pa tudi pravi čudak. Nenavadno se je oblačil,



Slika 3. Henry Cavendish (1731 do 1810).

jecljal, da ga je bilo težko razumeti, in se izogibal družbe, posebno ženske. Trdili so, da je "izrekel v svojem življenju manj besed kot kdorkoli, vključno z molčečimi menihi". Leta 1760 je postal član Kraljeve družbe. Sam je kril stroške svojega raziskovanja, živel zelo skromno in leta 1810, ko je v Londonu umrl, zapustil premoženje, vredno več kot milijon funtov. Neki fizik je tedaj rekel, da je bil Cavendish "najbogatejši od vseh učenih mož in najbrž najbolj učen od vseh bogatašev".

Leta 1765 je Cavendish meril specifične in talilne toplete trdnin in delal poskuse v kemiji. Leta 1766 je poslal Kraljevi družbi razpravo o plinih, ki se jih je navadil loviti nad vodo. "Gorljivi zrak" – pozneje so ga imenovali vodik – je nastal, ko je kovino polil s kislino. Opisal je tudi "fiksirani zrak", to je ogljikov dioksid. Med seboj je primerjal gostoto plinov in ugotovil, da ima vodik nenavadno majhno gostoto, zaradi česar mu je pripisoval nenavadne lastnosti. Cavendish je tudi ponovil poskuse Josepha Priestleya in opazil roso, ki je nastala pri gorenju vodika in ki jo je Priestley prezrl. Zanj je ugotovil, da je voda in odtlej voda ni več veljala za element. To je približno ob istem času ugotovil tudi James Watt. Prišlo je do dolgotrajnega spora o prvenstvu, ki je bil dodatno zapleten zaradi tedanje navade, da so lahko pisci in uredniki spreminjali članke v tisku. Spor so zgladili, ko so Watta izvolili v Kraljevo družbo.

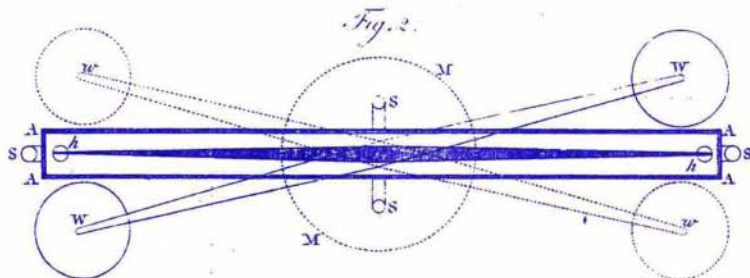
Z električno iskro v zraku je Cavendish spojil dušik in kisik ter dobil leta 1795 dušikovo kislino, ko je spojino raztopil v vodi. Nazadnje je ostal mehurček plina s prostornino, manjšo od stotine prvotne prostornine, na katerega iskra ni delovala. To je bil zlahtni plin argon in drugi zlahtni plini, kot so spoznali sto let pozneje. Dotlej je Cavendishevo odkritje zatonilo v pozabo.

Cavendish je nerad objavljaj, o svojih električnih raziskovanjih je objavil le težko razumljiv članek leta 1771. William Thomson, lord Kelvin je naletel na njegovo neobjavljeno delo, v katerem je opisal tudi merjenje kapacitete kondenzatorjev. James Clerk Maxwell je poskrbel za objavo Cavendishevih *Električnih raziskovanj* leta 1879. Med deli, ki so bila tedaj prvič objavljena, je bil opis poskusov, pri katerih si je Cavendish prizadeval izmeriti influencirani naboj v notranjosti naelektrene kovinske krogle. Ugotovil je, da je ta naboj enak nič, in po tem sklepal, "da morata biti električni privlak in odboj obratno sorazmerna s kvadratom razdalje". Meril je kapaciteto kondenzatorjev in upošteval vpliv snovi. Zanimalo ga je tudi prevajanje elektrike in ugotovil je, da ima nasičena raztopina kamene soli 560-tisočkrat večji upor od železa z enako obliko. Znani *Cavendishev laboratorij* v Cambridgeu, katerega prvi ravnatelj je bil Maxwell

in na katerem je delovalo lepo število znanih angleških fizikov, ima ime po članu Cavendisheve družine, ki je kot kancler leta 1871 univerzi podaril več tisoč funtov.

Ponovimo glavne korake Cavendishevega računa. Po tedanji navadi ni zapisal veliko enačb, v glavnem je sklepal z besedami in uporabljal sorazmerje.

Najprej krogli z maso po $m_2 = 159$ kg približamo kroglicama z ene strani in z daljnogledom določimo na skali ravnovesno lego prečke (slika 4). Nato krogli približamo kroglicama z druge strani in z daljnogledom določimo novo ravnovesno lego prečke ter ugotovimo, da je zasukana za 5,88 delov skale. Enemu delu skale ustreza ločno merjeni kot $1/766$, tako da ustreza polovici od 5,88 delov skale ločno merjeni kot $\varphi = 3,84 \cdot 10^{-3}$. Za ta kot se zaradi gravitacijskih sil krogel na kroglici zasuče prečka iz ravnovesne lege, v kateri krogel ni v bližini ali pa sta postavljeni simetrično glede na prečko. Središči krogle in kroglice sta v razmiku $r = 0,23$ m. Navor dvojice gravitacijskih sil je $D\varphi = Fl$ in gravitacijska sila je $F = D\varphi/l$. Iz gravitacijskega zakona sledi za gravitacijsko konstanto $\kappa = r^2 F/m_1 m_2 = r^2 D\varphi / l m_1 m_2$.



Slika 4. Legi kroglic in prečke pri Cavendishevem poskusu v prvi skrajni ravnovesni legi krogel WW in v drugi skrajni ravnovesni legi ww. V obeh legah navor dvojice gravitacijskih sil $l \cdot \kappa m_1 m_2 / r^2$ uravnovesi navor žice $D\varphi$. Upoštevali smo, da je zveznica hW (in hw) nagnjena proti prečki za manj kot 90° , delovanje nasprotnih krogel na kroglico $(l \cdot \kappa m_1 m_2 / r^2) [1 - r^3 / (l^2 + r^2)^{3/2}]$ pa je bilo zanemarljivo.

Za nihajni čas prečke izmerimo $t_0 = 14$ minut in z njim izrazimo koeficient žičke D pri torziji, ker velja $t_0^2 = 4\pi^2 J / D$, če je J vztrajnostni moment prečke s kroglicama. K vztrajnostnemu momentu prispevata kroglici $2m_1(\frac{1}{2}l)^2$, prispevek prečke je zanemarljiv. Izraz za D vstavimo v

prejšnjo enačbo in dobimo

$$\kappa = \frac{2\pi^2 l r^2 \varphi}{m_2 t_0^2} = 6,69 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Čeprav Cavendish gravitacijske konstante ni navedel neposredno, je za gostoto Zemlje kot povprečje večjega števila poskusov, ki so dali nekoliko različne izide, dobil 5,48-kratno gostoto vode.

Cavendish je poskus izpeljal tako skrbno, da še danes zbuja spoštovanje. Raziskal je vse mogoče vzroke neželenih motenj. Da ne bi motil veter, je prečko z žičko in vzvodom zaprl v ohišje iz mahagonija. Izračunal je gravitacijsko silo mahagonija na kroglici in se prepričal, da gre le za majhno motnjo. Motila je tudi temperaturna razlika, ki je povzročala tok zraka. Cavendish je poskusil oceniti njen vpliv in je pri poskusu segrel kroglo ter meril zasuk prečke pri različnih temperaturah krogle. Njeno temperaturo je ugotavljal s termometrom, ki ga je vstavil v luknjo v krogli. Naposled je namestil vso napravo v prostoru, katerega temperatura se je kolikor mogoče malo spreminjala.

Sorazmernostni koeficient v Coulombovem zakonu je bilo mogoče določiti šele potem, ko so vpeljali enoto za naboj. Najprej so jo vpeljali prav preko Coulombove sile. Enaka naboja z 1 *absolutno elektrostatično enoto naboja* se v razmiku 1 cm privlačita ali odbijata s silo 1 dine, to je 10^{-5} N. Kolikšna bi bila "absolutna enota mase", če bi jo določili z gravitacijskim zakonom? Telesi s tolikšno maso bi se v razmiku 1 cm privlačili s silo 10^{-5} N. Iz gravitacijskega zakona sledi z $m_1 = m_2$ za absolutno enoto mase $m_1 = (10^{-9}/6,7 \cdot 10^{-11})^{1/2}$ kg = 3,87 kg. Kroglici bi se lahko kvečjemu dotikali in ne bi mogli imeti večjega radija kot $\frac{1}{2}$ cm. Morali bi torej imeti gostoto $3,87 \text{ kg}/\frac{4}{3}\pi(5 \cdot 10^{-3})^3 \text{ m}^3 = 7,4 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^3$. Nobena snov se tolikšni gostoti niti ne približa, zato ne bi bilo mogoče neposredno izmeriti gravitacijske sile med telesoma z absolutno enoto mase.

Janez Strnad