PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 1
Strani 32–37

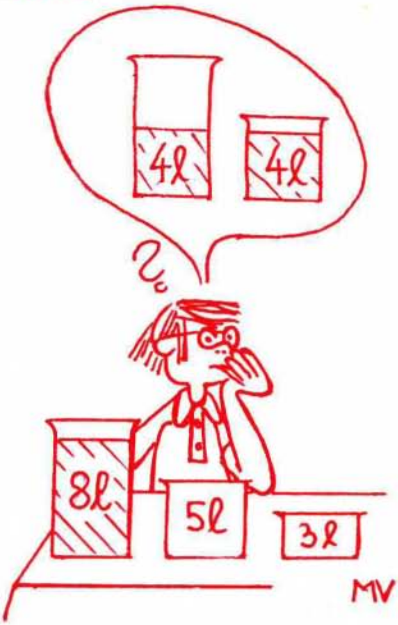
Marija Vencelj:

PROBLEM TREH VRČEV IN TRILINEARNE KOORDINATE

Ključne besede: matematika, algebra.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1075-Vencelj.pdf

PROBLEM TREH VRČEV IN TRILINEARNE KOORDINATE



Pred seboj imate vrč z 8 litri tekočine in dva prazna vrča, ki držita 5 litrov in 3 litre. Ali je mogoče le s temi pripomočki razdeliti tekočino na dva enaka dela in kako, če to gre?

Na voljo nam je samo prelivanje tekočine med posodami. Pri tem je očitno smiselno le tako pretakanje, pri katerem na posameznem koraku ali povsem napolnimo posodo, v katero vlivamo, ali do dna izpraznimo posodo, iz katere vlivamo - kar se pač prej zgodi. Jasno je tudi, da tako prelivanje ne sme potekati kar na slepo srečo, če naj kaj kmalu ali sploh dosežemo želeno.

Ta, sicer zelo stara naloga, je bila zastavljena bralcem Preseka že pred leti. Z njo smo se srečali tudi v članku Razdeliva si vino v lanski 4. številki.

Tokrat si bomo ogledali, kako si pri reševanju takih in sorodnih nalog pomagamo s *trilinearnimi koordinatami*. Še prej pa povejmo, kaj sploh trilinearne koordinate so.

Naj bo v ravnini $\mathcal{R}$ dan enakostraničen trikotnik ABC s stranico a in višino v. Trilinearne koordinate x, y, z točke $T \in \mathcal{R}$ so števila, po absolutnih vrednostih enaka razdaljam točke T od nosilk stranic BC, CA in AB. Posamezna koordinata je pozitivna, če leži točka T na isti strani ustrezne nosilke kot notranjost trikotnika. Sicer je negativna. Označevali bomo $T = (x, y, z)$. Za razliko od kartezičnih koordinat so trilinearne kordinate posamezne točke medsebojno odvisne. Če je T notranja točka trikotnika ABC, kot na sliki 1, nam primerjava ploščin trikotnikov

$$p(ABC) = p(TBC) + p(TCA) + p(TAB)$$

da

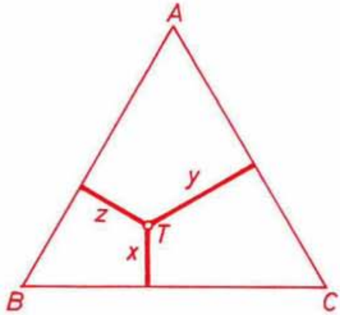
$$\frac{1}{2}av = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az$$

od koder sledi zveza med trilinearnimi koordinatami

$$x + y + z = v \tag{1}$$

Podobno pokažemo, da velja zveza (1) tudi v primeru, če je T robna ali zunanja točka trikotnika ABC. Vedno je torej vsota trilinearnih koordinat enaka višini danega enakostraničnega trikotnika.

Zaradi zveze (1) so trilinearne koordinate idealne za obravnavo problemov, v katerih imajo tri spremenljive količine konstantno vsoto. Če je ena od količin konstantna, drugi dve pa se spreminjata, se ustrezna točka giblje vzdolž vzporednice eni od stranic trikotnika ABC. Oglišča imajo kooordinate



Slika 1

$$A = (v, 0, 0), \;\; B = (0, v, 0), \;\; C = (0, 0, v)$$

in nosilke stranic enačbe

$$x = 0, \;\; y = 0, \;\; z = 0$$

Situacija, primerna za uporabo trilinearnih koordinat, nastopa tudi tedaj, ko je v litrov tekočine porazdeljenih v treh posodah: x litrov v prvi, y v drugi in z litrov v tretji posodi. Ko npr. prelivamo tekočino iz prve posode v drugo, se ustrezna točka (x, y, z) giblje vzdolž premice $z =$ konst v taki smeri, da x pada in y narašča. Če vsaka od posod drži vsaj v litrov, lahko vsaka od koordinat zavzame vrednosti od 0 do v. Tedaj je operacijsko področje problema kar ves enakostraničen trikotnik z višino v. To je trivialen primer, ki ga označimo $[v; v, v, v]$.

Veliko zanimivejši je primer $[v; a, b, c]$, ko je v litrov tekočine porazdeljenih v treh posodah s prostorninami a, b in c litrov in je

$$v \geq a > b > c$$

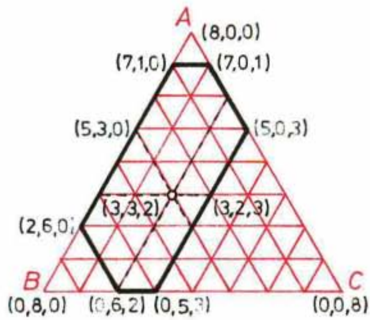
Denimo, da bi v takem primeru radi le s prelivanjem tekočine med posodami odmerili d litrov. Tedaj je operacijsko področje problema določeno z neenačbami

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c$$

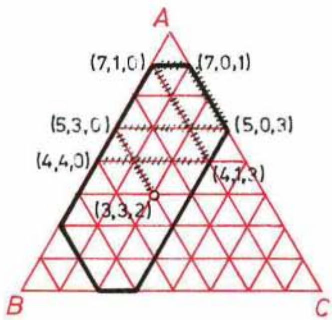
Točke na robu območja pripadajo takim porazdelitvam tekočine, pri katerih je vsaj ena od posod bodisi polna bodisi prazna. Področje samo je v splošnem šestkotnik, ki ga omejujejo premice

$$x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b,\ z = 0,\ z = c$$

Ta šestkotnik je lahko reduciran v petkotnik, štirikotnik ali trikotnik. Za primer [8; 7, 6, 3] je operacijsko področje skicirano na sliki 2.



Slika 2



Slika 3

Začetni porazdelitvi tekočine v treh posodah ustreza neka točka v notranjosti ali na robu operacijskega področja. Ko prelivamo tekočino med posodami, tako da posode polnimo in praznimo, se točka giblje vzdolž vzporednice eni od stranic trikotnika do roba operacijskega območja, nato vzporedno z drugo stranico spet do roba območja in tako dalje. Če se točka giblje po robu območja, lahko spremeni smer le v oglišču šestkotnika. Želeno količino d bomo odmerili, če bomo pri takem gibanju prišli v robno točko, ki bo imela eno od trilinearnih koordinat enako d.

Seveda to ni vedno mogoče. Če so posode celolitrske in v njih celolitrske začetne količine, ne bomo mogli z njimi odmeriti pollitrske količine. V tem primeru imajo namreč robne točke, ki jih lahko dosežemo, očitno samo celoštevilske koordinate.

Tudi problemi, v katerih nastopajo le cela števila, so lahko rešljivi ali nerešljivi. Različne situacije, ki se lahko pojavijo, si oglejmo na nekaj primerih.

Poglejmo najprej primer $[8; 7, 6, 3]$, katerega operacijsko področje prikazuje slika 2. Denimo, da imamo v prvi (sedemlitrski) posodi 3 litre tekočine, prav toliko v drugi in 2 litra v tretji posodi. Radi bi odmerili dvakrat po 4 litre tekočine. Začetnemu stanju ustreza točka (3, 3, 2). Črtkano je na sliki 2 označenih šest možnih prvih prelivanj tekočine. Daljica med (3, 3, 2) in (5, 3, 0) predstavlja praznenje tretje posode v prvo, daljica od (3, 3, 2) do (3, 2, 3) polnenje tretje iz druge itd.

Na sliki 3 imamo označeno eno od možnih poti, ki vodijo od točke (3, 3, 2) do točke (4, 4, 0) in iz katere lahko preberemo, kako naj prelivamo tekočino, da jo bomo razdelili na dva enaka dela po 4 litre. Poglejmo! Najprej izpraznimo tretjo posodo v prvo, nato drugo v tretjo in iz tretje napolnimo prvo. Preostali liter izlijemo iz tretje posode v drugo in nato napolnimo tretjo posodo iz prve. Tako že imao v prvi posodi 4 litre tekočine. Nato izpraznimo še tretjo posodo v drugo in naloga je opravljena. Ves postopek lahko na kratko zapišemo z zaporedjem točk:

$$(3,3,2),\quad (5,3,0),\quad (5,0,3),$$

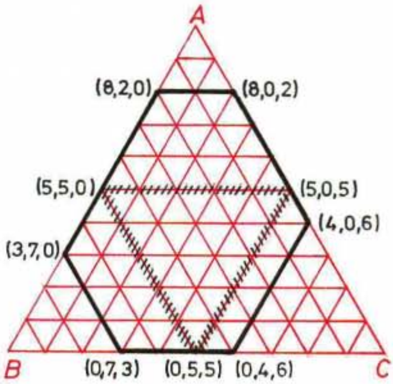
$$(7,0,1),\quad (7,1,0),\quad (4,1,3),\quad (4,4,0)$$

Sami lahko nadaljujete pot od točke (4, 4, 0) dalje. Paziti morate le na to, da sme potekali le po operacijskem območju vzporedno stranicam trikotnika ABC in sme spremeniti smer le, ko doseže ali rob ali oglišče operacijskega območja. Videli boste, da lahko z njo dosežete vsako robno točko s celoštevilskimi koordinatami, kar pomeni, da lahko v problemu $[8; 7, 6, 3]$ odmerimo poljubno celolitrsko količino, manjšo kot 8 litrov.

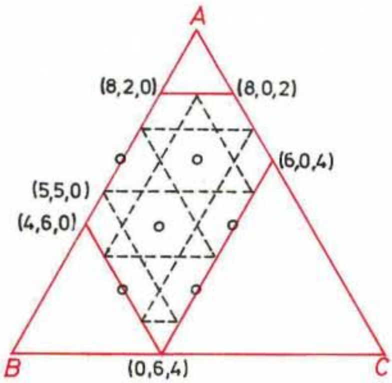
Na sliki 4 je ilustrirana naloga $[10; 8, 7, 6]$, v kateri bi radi 10 litrov tekočine razdelili na dva enaka dela z uporabo posod, ki drže po 8, 7 in 6 litrov. Vsaj eno koordinato enako 5 imajo na robu operacijskega področja le točke $(0, 5, 5)$, $(5, 0, 5)$ in $(5, 5, 0)$. Te tri točke pa povezuje zaključena trikotna pot, v katero ne moremo vstopiti z nobene druge poti. Torej ne bomo nikoli s prelivanjem dosegli količine 5 litrov, razen če bi že na samem začetku v eni od posod imeli 5 litrov tekočine. Te vrste težave se pojavijo v vsakem problemu $[v; a, b, c]$, pri katerem je

$$v = 2d \geq a > b > c > d$$

Nekoliko drugačna anomalija se pojavi v problemu $[10; 8, 6, 4]$, prikazanem na sliki 5. Pot, ki poteka skozi točko (5, 5, 0), je tudi tu zaključena lomljenka, le precej bolj prepletena kot v prejšnjem primeru. Poteka skozi vse točke z lihimi koordinatami. Vanjo ne moremo prodreti iz točk s sodimi koordinatami. Gre za ilustracijo preprostega dejstva, da lihega števila litrov ne moremo odmeriti samo s posodami, katerih kapacitete so vse sode. Težave takega tipa lahko pričakujemo pri vsakem problemu $[v; a, b, c]$, pri katerem števila a, b, c niso tuja.



Slika 4



Slika 5

V ugankarskih kotičkih poljudnoznanstvenih revij največkrat naletimo na probleme $[v; a, b, c]$, pri katerih je

$$v = a = 2d = b + c \qquad (2)$$

Operacijsko območje je pri teh problemih paralelogram z oglišči $(a, 0, 0)$, $(c, b, 0)$, $(0, b, c)$ in $(b, 0, c)$.

Taka je tudi naloga, ki smo si jo zastavili na samem začetku: razdeliti 8 litrov tekočine na dva enaka dela s pomočjo dveh praznih posod, ene 5-litrske in ene 3-litrske. Prva posoda, v kateri je tekočina na začetku, lahko sicer drži več kot 8 litrov, vendar bo v vsakem primeru potekalo prelivanje natanko tako, kot če bi bila 8-litrska. Imamo torej problem $[8; 8, 5, 3]$, ki res ustreza pogoju (2).

Ker je najprej vsa tekočina v prvi posodi, začne pot v točki $(8, 0, 0)$. Na prvem koraku lahko ali napolnimo 5-litrsko posodo, kar je prikazano na sliki 6, ali 3-litrsko posodo, kot na sliki 7. Prva izbira nas po sedmih korakih pripelje v točko (4, 4, 0), druga po osmih korakih. Tedaj imamo v večjih dveh posodah v vsaki po 4 litre tekočine. Zapišimo obe poti:

$$(8,0,0),\ (3,5,0),\ (3,2,3),\ (6,2,0),\ (6,0,2),$$

$$(1,5,2),\ (1,4,3),\ (4,4,0)$$

in

$$(8,0,0),\ (5,0,3),\ (5,3,0),\ (2,3,3),\ (2,5,1)$$

$$(7,0,1),\ (7,1,0),\ (4,1,3),\ (4,4,0)$$

Slika 6

Slika 7

Vidimo še, da obe poti skupaj dosežeta vsako robno točko paralelograma s celimi koordinatami. Torej bi z danimi posodami lahko odmerili vsako celo količino med 0 in 8 litri, ne samo razdelili tekočino na dva enaka dela. To gre pri poljubnem problemu, ki izpolnjuje pogoj (2), če sta le b in c tuji števili.

Marija Vencelj