

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

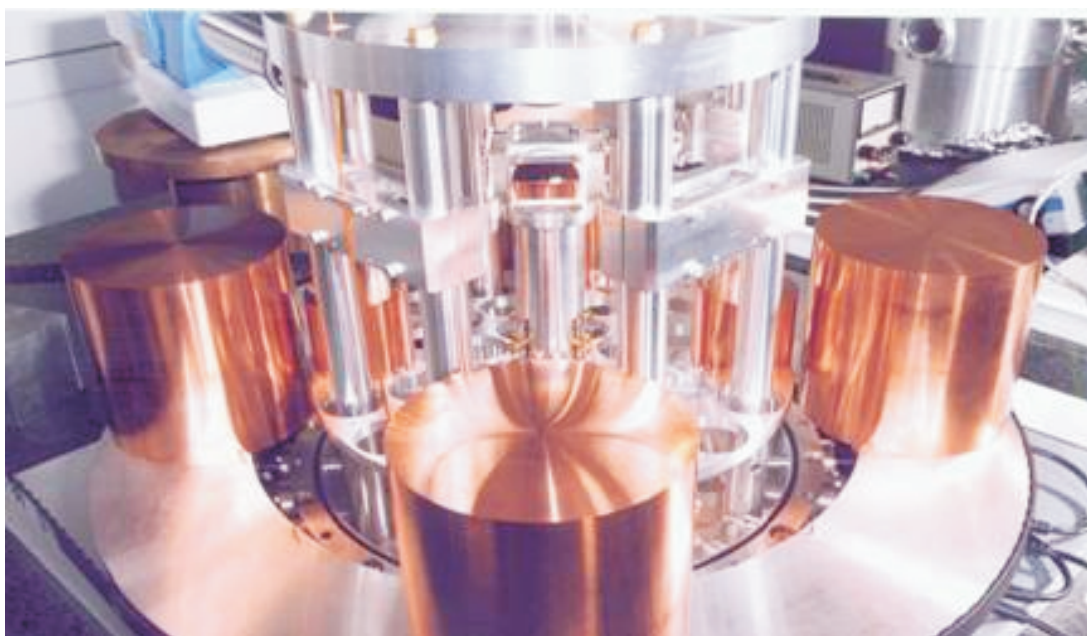
ISSN 0473-7466

2014

Letnik 61

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilno Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2014, letnik 61, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASIX **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2014 DMFA Slovenije – 1950

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljen, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

KAKO IŠČE GOOGLE?

MARJETA KRAMAR FIJAVŽ

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15B48, 15A18, 47H10

Srce spletnega iskalnika Google je algoritem PageRank. V sestavku predstavimo osnovno idejo algoritma ter si ogledamo njegovo teoretično ozadje. Konvergenco algoritma bomo utemeljili na dva načina, s Perron-Frobeniusovo teorijo za pozitivne matrike ter s pomočjo Banachovega izreka o negibni točki.

HOW GOOGLE WORKS?

We present the main idea of the PageRank algorithm which is the core of the Google search engine. We concentrate on the theoretical background of the algorithm and prove its convergence in two different ways, by the Perron-Frobenius theory for positive matrices and using Banach fixed point theorem.

Uvod

Že od začetka leta 1989 (za ustanovitelja velja Tim Berners-Lee) se je svetovni splet zelo hitro širil in kmalu dobil glavno vlogo v prenosu informacij. Svetovni splet je ogromen¹ in neprestano raste. Poleg tega se stalno spreminja: 40 % strani spremeni vsebino tedensko, nastajajo nove in izginjajo stare strani. Splet je samoorganiziran s pomočjo raznovrstnih medsebojnih povezav. Gre torej za ogromno knjižnico podatkov, ki nima ne kataloga ne knjižničarjev. Kako se tu znajti?

Vzporedno z nastajanjem spleta so se razvili spletni iskalniki, ki uporabniku z vnosom ključnih besed pomagajo najti ustrezno stran. Med različnimi iskalniki je zadnja leta najbolj znan Google. Spletni iskalnik Google² sta leta 1998 zagnala Sergey Brin in Larry Page, takrat doktorska študenta na Stanfordski univerzi v Kaliforniji.

Vsak spletni iskalnik ima svojo bazo spletnih strani, ki se seveda neprestano spreminja. Gradi jo s pomočjo avtomatskega programa, ki po spletu stalno pošilja virtualne robote, imenovane *pajki*. Pajki potujejo po spletnih povezavah ter vsako obiskano stran oštevilčijo in indeksirajo njeno vsebino (naslov, ključne besede, imena povezav, sidra ipd.). Tako nastane baza spletnih strani s stvarnim kazalom. Ko uporabnik v iskalnik vtipka poizvedbo,

¹19. 1. 2014 obstaja vsaj 1.75 milijarde spletnih strani, <http://www.worldwideweb.size.com/>.

²Ime Google naj bi izviralo iz angleške besede »googol« (sl. gúgol), ki pomeni število 10^{100} .

želi na vrnjenem seznamu videti najbolj relevantne strani na vrhu. In kako spletni iskalnik določi relevantnost strani? To je ena najzahtevnejših nalog iskalnika, in prav zaradi pametnega razvrščanja je Google, takoj ko se je pojavil, pometel s konkurenco.

Spletni iskalniki rangirajo spletne strani na podlagi dveh osnovnih kriterijev. Prvi kriterij je vsebinski. Tu upoštevajo, kolikokrat se iskani izraz pojavi na posamezni spletni strani, ali se pojavi v naslovu, podnaslovu, poudarjeno ipd. Drugi kriterij pa je *pomembnost* strani, in tega si bomo podrobneje ogledali. Algoritem razvrščanja strani po pomembnosti Page-Rank sta Brin in Page prvič opisala v članku [3] in je še vedno srce iskalnika Google. Podrobnejši opis celotnega postopka delovanja spletnih iskalnikov najde radovedni bralec v izvrstni knjigi [7].

V naslednjem razdelku si bomo ogledali osnovno idejo, na kateri temelji algoritem PageRank. Definirali bomo *Googlovo matriko* in videli, da želimo poiskati lastni vektor te matrike k lastni vrednosti 1. Zato bomo obravnavali spektralne lastnosti pozitivnih matrik in utemeljili konvergenco algoritma. Na koncu bomo pokazali obstoj iskanega lastnega vektorja tudi s pomočjo Banachovega izreka o negibni točki.

Pri tem poudarimo, da nas predvsem zanima teoretično ozadje problema in uporaba metod linearne algebre oziroma funkcionalne analize. Konkretnega izračuna ne bomo obravnavali.

Rangiranje spletnih strani

Posvetimo se vprašanju, kako določiti pomembnost spletne strani. Povezave med spletnimi stranmi si lahko predstavljamo kot demokratične volitve. Avtor spletne strani naredi povezave na druge strani, ki se mu zdijo pomembne (kot glasovi na volitvah). Skupek teh subjektivnih glasov dá globalni pomen strani (zmagovalca volitev).

Uvedimo najprej nekaj oznak. Denimo, da imamo n spletnih strani:

$$\mathcal{W} = \{W_k \mid k = 1, \dots, n\}.$$

Za posamezno stran W_k označimo z $I_k := \{i \mid W_i \rightarrow W_k\}$ množico indeksov vseh *vstopnih povezav*, z $O_k := \{j \mid W_k \rightarrow W_j\}$ množico indeksov vseh *izstopnih povezav* ter z $x_k > 0$ *rang* strani W_k . Kako čim boljše definirati x_k ?

Stran je gotovo pomembnejša, če nanjo kaže več povezav, torej bi lahko za rang strani vzeli število vstopnih povezav. Tako so delali prvi iskalniki, a dobljeni seznam strani niso bili najboljši, poleg tega je tudi hitro prišlo do zlorab (ustvarjalci strani so npr. umetno ustvarili povezave na določeno stran). Brin in Page sta tu odgovorila:

Stran je pomembna, če nanjo kaže druga pomembna stran!

Njuna definicija ranga strani je zato rekurzivna:

$$x_k := \sum_{i \in I_k} \frac{x_i}{|O_i|}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Pri tem sta spet uporabila načelo demokratičnosti in utežila glasove volivcev glede na število oddanih glasov $|O_i|$. Torej, če ima stran W_i veliko izhodnih povezav, je njen kazalec na določeno stran W_k proporcionalno manj vreden. Ob tem predpostavimo, da nobena stran ne pokaže nazaj nase. Enačba je na prvi pogled videti krožno odvisna. Poglejmo, ali je res tako.

Svetovni splet si lahko predstavljamo kot ogromen usmerjen graf na n točkah (tj. spletnih straneh), povezanih s spletnimi povezavami. Priredimo mu *uteženo matriko sosednosti* H velikosti $n \times n$, kjer je

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|O_j|}, & \text{če } W_j \rightarrow W_i, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (2)$$

Elemente H_{ij} lahko razumemo kot verjetnosti dostopanja do strani W_i s strani W_j .

Zberimo range strani v *vektor rangov* $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$. Rekurzivno enačbo (1) lahko zapišemo v matrični obliki

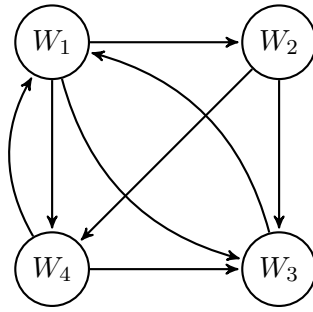
$$x = Hx. \quad (3)$$

Iščemo torej lastni vektor matrike H , ki pripada lastni vrednosti 1. Takemu vektorju rečemo tudi *fiksen ali negiben vektor* matrike H . Od tu naprej bomo privzeli, da je vektor rangov *normiran*, tj. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i = 1$. Zanima nas, ali normiran vektor rangov, ki ustreza enačbi (3), vedno obstaja in ali je enolično določen.

Primer 1. Vzemimo za primer usmerjen graf na sliki 1. Njegova utežena matrika sosednosti je

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

njeni fiksni vektorji pa so oblike $\alpha(12, 4, 9, 6)^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Normiran vektor rangov je v tem primeru en sam, njegove koordinate na 2 decimalni mesti natančno so: $x = (0.39, 0.13, 0.29, 0.19)^\top$. Po pomembnosti razvrščene strani so tako: 1, 3, 4, 2. Če bi upoštevali le število vstopnih povezav, bi bil vrstni red drugačen: 3, 1 & 4, 2. Če pa pri definiciji ranga ne bi upoštevali uteži $\frac{1}{|O_i|}$ glede na število izhodnih povezav (oziroma postavili v matriki H vse neničelne vrednosti na 1), rekurzivna enačba (1) sploh ne bi imela neničelne rešitve!



Slika 1. Primer usmerjenega grafa na 4 točkah.

Pozitivne matrice

Oglejmo si nekaj rezultatov iz teorije pozitivnih matrik, ki jih bomo pri naši obravnavi potrebovali.

Definicija 1. Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ imenujemo *pozitiven vektor*, če so vse njegove koordinate pozitivna realna števila: $x_i \geq 0$. Matriko $A = (a_{ij})_{n \times n}$ imenujemo *pozitivna matrika*³, če enako velja za vse njene elemente: $a_{ij} \geq 0$.

Za vektorja $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ in $y = (y_1, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ označimo

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \text{ za vse } i = 1, \dots, n.$$

Absolutna vrednost vektorja $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{C}^n$ je vektor

$$|x| := (|x_1|, \dots, |x_n|)^\top$$

in absolutna vrednost matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, je matrika

$$|A| := (|a_{ij}|)_{n \times n}.$$

Naslednje lastnosti je enostavno preveriti, dokaz prepuščamo bralcu.

Lema 1. Za poljubno matriko $A = (a_{ij})_{n \times n}$ veljajo trditve:

- (i) A je pozitivna natanko tedaj, ko je $Ax \geq 0$ za vse $x \geq 0$.
- (ii) $|Ax| \leq |A| |x|$ za poljuben vektor x .

³Nekateri avtorji tako matriko imenujejo *nenegativna* ter za pozitivne matrice zahtevajo, da so vsi členi strogo pozitivni: $a_{ij} > 0$.

(iii) Če je A pozitivna matrika, je $|Ax| \leq A|x|$ za poljuben vektor x .

Ponovimo še nekaj izrazov. *Spekter* matrike A je množica vseh lastnih vrednosti matrike,

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x\}.$$

Spektralni radij matrike A je enak

$$r(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Teorija pozitivnih matrik je doživela razcvet v začetku 20. stoletja. Eden od pionirjev te teorije je nemški matematik Perron⁴, ki je v članku [9] dokazal naslednji izrek:

Izrek 2 (Perron, 1907). *Naj bo A pozitivna matrika s spektralnim radijem $r = r(A)$. Potem je r lastna vrednost matrike A in pripadajoči lastni vektor je pozitiven.*

Dokaza izreka na tem mestu ne bomo navedli, radovedni bralec ga najde npr. v [8, 2]. V članku [8] je prikazanih tudi veliko primerov uporabe Perronovega izreka na različnih področjih, od numerične matematike in teorije verjetnosti do biologije in ekonomije.

Definirajmo še nekaj pojmov. Pozitivno matriko A imenujemo:

- (i) *vrstično stohastična*, če je $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ za vse $i = 1, \dots, n$;
- (ii) *stolpčno stohastična*, če je $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ za vse $j = 1, \dots, n$;
- (iii) *stohastična*, če je vrstično in stolpčno stohastična.

Utežena matrika sosednosti H v primeru 1 je stolpčno stohastična, ni pa vrstično stohastična.

Trditev 3. *Za vrstično ali stolpčno stohastično matriko A je spektralni radij $r(A) = 1$ in je lastna vrednost matrike A .*

Dokaz. Najprej se spomnimo znane Gelfandove enačbe za spektralni radij matrike:

$$r(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}, \quad (4)$$

ki velja za katerokoli matrično normo (dokaz najdemo npr. v [10, izrek 8], [2, Prop. 3.1.3] ali [7, Example 7.10.1]). Za vrstično stohastično matriko A je

$$\|A\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1,$$

⁴Oskar Perron (1880–1975)

za stolpčno stohastično pa

$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 1.$$

Zaradi enačbe (4) je tako v vsakem primeru $r(A) = 1$.

Naj bo $e := (1, \dots, 1)^\top$ in A vrstično stohastična matrika. Potem je $Ae = e$, torej je $r(A) = 1$ lastna vrednost matrike A . Če je A stolpčno stohastična, je $A^\top$ vrstično stohastična in po gornjem velja $1 \in \sigma(A^\top) = \sigma(A)$. ■

V dokazu zadnje trditve opazimo, da je za vrstično stohastično matriko normiran lastni vektor k lastni vrednosti 1 enak $\frac{1}{n}(1, \dots, 1)^\top$ in je strogo pozitiven. Pri stolpčno stohastični matriki pa zaradi Perronovega izreka vemo le, da je lastni vektor k lastni vrednosti 1 pozitiven. Nikakor pa ne moremo še ničesar reči o dimenziji ustreznega lastnega podprostora (to je o enoličnosti normiranega lastnega vektorja).

Perron je v [9] ob predpostavki, da so vsi členi matrike strogo pozitivni ($a_{ij} > 0$), pokazal tudi močnejšo različico izreka 2. Tu velja, da je lastni vektor k lastni vrednosti r strogo pozitiven in do skalarja natančno določen. Nadomestimo pogoj o strogi pozitivnosti z neko splošnejšo lastnostjo matrike, za katero bomo videli, da je lepo povezana s strukturo grafa, ki ji pripada (glej trditvev 8).

Definicija 2. Matrika $A = (a_{ij})_{n \times n}$ je *razcepna*, če obstaja taka neprazna indeksna množica $M \subsetneq \{1, \dots, n\}$, da je linearen podprostor

$$J_M := \{(x_1, \dots, x_n)^\top \mid x_i = 0 \text{ za } i \in M\}$$

invarianten za A . Matrika, za katero to ne velja, je *nerazcepna*.

Opozorimo, da je ta lastnost matrike odvisna od izbire baze: za obrnljivo matriko P je matrika $P^{-1}AP$ lahko razcepna, čeprav je A nerazcepna, in obratno! Vendar pa hitro opazimo, da permutacija standardnih baznih vektorjev (ne)razcepnost ohranja. Torej je A razcepna natanko tedaj, ko lahko standardne bazne vektorje $\mathbb{R}^n$ preuredimo tako, da je za neki indeks $1 \leq k < n$ podprostor

$$J_k := \{(x_1, \dots, x_n)^\top \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \quad (5)$$

invarianten za A . Matrika v preurejeni bazi je torej bločno trikotna. Preureditev baze pomeni, da v matriki na enak način permutiramo vrstice in stolpce. Dobili smo novo karakterizacijo nerazcepnosti, ki jo je enostavneje preveriti.

Trditev 4. *Matrika A je razcepna, če obstaja taka permutacijska matrika P , da je matrika $P^\top AP$ bločno trikotna:*

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix},$$

pri čemer sta X in Z kvadratni matriki.

Primer 2. Navedimo dva primera nerazcepnih matrik:

- (i) matrika $A = (a_{ij})_{n \times n}$ s strogo pozitivnimi nediagonalnimi elementi: $a_{ij} > 0$ za $i \neq j$, ter
- (ii) permutacijska matrika

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pojem (ne)razcepnosti je uvedel nemški matematik F. G. Frobenius⁵. V delu [6] je pokazal, da Perronov izrek za strogo pozitivne matrike velja tudi za nerazcepne pozitivne matrike.

Izrek 5 (Perron-Frobenius, 1912). *Naj bo A pozitivna nerazcepna matrika. Potem je spektralni radij $r = r(A)$ lastna vrednost matrike A , pripadajoč lastni podprostor je enorazsežen in napet na strogo pozitiven lastni vektor $z = (z_1, \dots, z_n)^\top$.*

Dokaz. Najprej uporabimo Perronov izrek 2, ki nam zagotavlja obstoj pozitivnega vektorja $z = (z_1, \dots, z_n)^\top$, $z_i \geq 0$, za katerega velja $Az = rz$.

Denimo, da z ni strogo pozitiven. Bazne vektorje preuredimo tako, da velja: $z_i > 0$ za $i = 1, \dots, k$ in $z_i = 0$ za $i = k + 1, \dots, n$. To pomeni, da za poljuben $y \in J_k$ (glej (5)) obstaja $c > 0$, za katerega je $|y| \leq c \cdot z$. Uporabimo lemo 1 in dobimo

$$|Ay| \leq A|y| \leq cAz = cr \cdot z,$$

od koder sledi $Ay \in J_k$. Torej je J_k invarianten podprostor za A , kar je v nasprotju z nerazcepnostjo A . Vektor z je zato strogo pozitiven.

⁵Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917)

Pokazati moramo še, da je lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti r , enorazsežen. Denimo, da ima A poleg zgoraj omenjenega strogo pozitivnega lastnega vektorja z še en neničeln lastni vektor $y \in \mathbb{R}^n$ k lastni vrednosti r (realnost vektorja y lahko predpostavimo zato, ker sta tako matrika A kot lastna vrednost r realni; sicer obravnavamo realni in imaginarni del posebej). Potem lahko najdemo tako število $c \in \mathbb{R}$, da je vektor $x := z - cy$ pozitiven, a ne strogo pozitiven. Zdaj ponovimo razmislek iz prejšnjega odstavka in neničelnim koordinatam vektorja x priredimo podprostor J_M , ki je invarianten za A . To je ponovno v nasprotju z nerazcepnostjo A , zato je $z = cy$. ■

V resnici sta Perron in Frobenius ob istih predpostavkah dokazala še malce več: za spektralni radij velja: $r > 0$ in r je pol prvega reda resolvente $R(\cdot, A) := (\cdot - A)^{-1}$, dokaz tega najdemo npr. v [2]. Strogo pozitiven vektor z v izreku imenujemo *Perronov vektor* za A in je določen do množenja s skalarji natančno (tj. je enoličen, če privzamemo $\|z\|_1 = 1$).

Če združimo trditev 3 in izrek 5, dobimo naslednjo posledico za stohastične matrike:

Posledica 6. *Če je pozitivna nerazcepna matrika A vrstično ali stolpčno stohastična, je spektralni radij $r(A) = 1 \in \sigma(A)$, pripadajoč lastni podprostor je enorazsežen in napet na strogo pozitiven lastni vektor.*

Omenimo še eno lastnost pozitivnih matrik, ki ima pomembno vlogo v limitnih procesih. Pozitivno nerazcepno matriko imenujemo *primitivna*, če je $r(A)$ njena edina lastna vrednost na spektralni krožnici $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r(A)\}$. Naslednjo karakterizacijo primitivnosti je podal že Frobenius (najdemo jo npr. v [7]).

Lema 7. *Pozitivna matrika A je primitivna natanko tedaj, ko je pri nekem $m > 0$ matrika A^m strogo pozitivna.*

Googlova matrika

Vrnimo se zdaj k reševanju enačbe $x = Hx$ v (3), katere rešitev je iskani vektor rangov. Zanima nas torej, ali obstaja enolično določen normiran strogo pozitiven vektor, ki jo reši. V luči posledice 6 bi že imeli pozitiven odgovor, če bi bila matrika H pozitivna, nerazcepna ter vrstično ali stolpčno stohastična.

Kaj od tega velja za uteženo matriko sosednosti H , podano z (2)? Gotovo je pozitivna, a ni nujno stohastična, saj strani brez izstopnih povezav pripada v H ničelni stolpec. Kakor hitro pa neka stran W_j ima vsaj eno izhodno povezavo, je

$$\sum_{i=1}^n H_{ij} = \sum_{i \in O_j} \frac{1}{|O_j|} = 1.$$

Če torej vse ničelne stolpce v H nadomestimo s stolpcem $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^\top$, dobimo stolpčno stohastično matriko. Označimo jo s $\tilde{H}$.

Brin in Page sta ta korak utemeljila s t. i. *naključnim obiskovalcem*. Uporabnik z verjetnostjo H_{ij} zapusti stran W_j po povezavi na stran W_i . Če pa pristane na strani brez izhodnih povezav, se od tam reši tako, da v naslovno vrstico brskalnika naključno vtipka neki nov naslov in pri tem skoči na novo stran z verjetnostjo $\frac{1}{n}$.

Kako pa je z nerazcepnostjo matrike H (oziroma $\tilde{H}$)? Odgovor nam dá naslednja trditev (dokazana je npr. v [2, Prop. 6.1.1]).

Trditev 8. *Matrika sosednosti nekega grafa je nerazcepna natanko tedaj, ko je pripadajoč graf krepko povezan (tj. za vsak $i \neq j$ obstaja v grafu pot od W_i do W_j in nazaj).*

Očitno pri spletu to ne velja! Brin in Page sta v odgovor na to težavo definirala *Googlovo matriko* kot

$$G := \alpha \tilde{H} + (1 - \alpha)S, \quad (6)$$

kjer za matriko S velja $S_{ij} = \frac{1}{n}$ za vse $1 \leq i, j \leq n$, $\alpha \in [0, 1]$ pa je neki parameter. Interpretacija je podobna kot zgoraj: naključni obiskovalec spletne strani se kdaj pa kdaj odloči ročno vtipkati neki nov naslov, tudi če na strani obstajajo izhodne povezave.

Googlova matrika G je strogo pozitivna in ji očitno pripada krepko povezan graf. Po trditvi 8 je torej G nerazcepna. Ker je tudi stolpčno stohastična, nam posledica 6 zagotavlja obstoj enoličnega strogo pozitivnega enotskega fiksnega vektorja matrike G .

Posledica 9. *Normiran strogo pozitiven vektor rangov je rešitev enačbe*

$$x = Gx, \quad \|x\|_1 = 1, \quad (7)$$

vedno obstaja in je enolično določen.

Iskani vektor lahko izračunamo z uporabo enostavne numerične metode, imenovane *potenčna metoda*, pri kateri na začetnem približku uporabljamo vedno večje potence matrike G . Definirajmo zaporedje približkov $x^{(k)}$ z

$$\begin{aligned} x^{(0)} &\geq 0, \quad \|x^{(0)}\|_1 = 1 \text{ (začetni vektor)}, \\ x^{(k)} &= Gx^{(k-1)} = G^k x^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Opazimo, da je matrika G tudi primitivna (lema 7), torej je $\lambda_1 = 1$ njena edina lastna vrednost na enotski krožnici. S spektralno teorijo pozitivnih matrik lahko pokažemo, da $x^{(k)}$ vedno konvergira k lastnemu vektorju, ki

pripada dominantni lastni vrednosti 1 matrike G (dokaz je npr. vsebovan v [2]).

V resnici pravi izračun seveda ni tako enostaven. Googlova matrika je ogromna, velikost gre v milijarde. Za (čim hitrejšo) potenciranje tako velikih matrik je treba uporabiti ustrezne algoritme, ki jih na tem mestu ne bomo obravnavali.

Namenimo le še nekaj besed parametru α . Povezan je z drugo največjo lastno vrednostjo λ_2 matrike G , velja $|\lambda_2| \leq \alpha$, zato vpliva na hitrost konvergence potenčne metode. To pomeni, da bo za manjše α metoda hitreje konvergirala. Hkrati želimo imeti čim večji α , da bodo rangi dovolj različni med seboj (pri $\alpha = 0$ dobimo $G = S$ in vektor rangov $x = (1, \dots, 1)^\top$). Parameter α uteži preferenco obiskovalca do potovanja po povezavah v grafu. Google uporablja $\alpha = 0.85$.

Banachov izrek o negibni točki

Za konec si pogledjmo še elegantnejši dokaz obstoja vektorja rangov s pomočjo funkcionalne analize. Pri tem si pomagamo z znanim in zelo uporabnim izrekom, ki velja v poljubnem polnem metričnem prostoru (M, d) .

Preslikavo $T : M \rightarrow M$ imenujemo *skrčitev*, če obstaja tako pozitivno število $q < 1$, da za vse $x, y \in M$ velja

$$d(T(x), T(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

Število q v zgornji enačbi imenujemo *skrčitvena oz. Lipschitzeva konstanta*.

Izrek 10 (Banach, 1922). *Naj bo (M, d) poln metričen prostor in naj bo preslikava $T : M \rightarrow M$ skrčitev. Potem obstaja natanko ena negibna (ali fiksna) točka preslikave T , tj. $x^* \in M$, za katero velja $T(x^*) = x^*$. Še več, če za poljuben $x^{(0)} \in M$ definiramo*

$$x^{(k)} := T\left(x^{(k-1)}\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

potem zaporedje $(T(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergira k x^ , ko gre $k \rightarrow \infty$.*

Izrek se imenuje Banachov⁶ izrek o negibni točki (ali tudi Banachovo skrčitveno načelo) in njegov dokaz bralec najde npr. v učbeniku [11, izrek 14.14].

Pokažimo, kako lahko ta izrek uporabimo v našem primeru. Vzemimo

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \|x\|_1 = 1\} \quad \text{in} \quad d(x, y) := \|x - y\|_1.$$

⁶Stefan Banach (1892–1945)

Ni težko videti, da je (M, d) poln metrični prostor. Opazimo tudi, da za Googlovo matriko G velja: $G(M) \subseteq M$ (uporabimo lemo 1(i) in dejstvo, da stolpčno stohastična matrika ohranja $\|\cdot\|_1$ -normo pozitivnega vektorja).

Za konstantno matriko $S = (\frac{1}{n})_{n \times n}$ je $Sx = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)^\top$ za vse $x \in M$ in zato

$$S(x - y) = (0, \dots, 0)^\top \text{ za poljubna } x, y \in M. \quad (8)$$

Po zgornjem in zaradi $\|\tilde{H}\|_1 = 1$ tako dobimo

$$\begin{aligned} \|Gx - Gy\|_1 &= \|\alpha\tilde{H}(x - y) + (1 - \alpha)S(x - y)\|_1 \\ &\leq \alpha\|\tilde{H}\|_1\|x - y\|_1 = \alpha\|x - y\|_1 \end{aligned}$$

za vse $x, y \in M$. Torej je G skrčitev na M s skrčitveno konstanto α . Po Banachovem izreku o negibni točki je zato enačba (7) vedno enolično rešljiva in potenčna metoda konvergira.

Priznati moramo, da je naš kratki dokaz o obstoju enoličnega vektorja rangov močno odvisen od lastnosti (8) matrike S . Če le-to malo spremenimo tako, da njeni elementi niso več konstantni, a še vedno ostane strogo pozitivna in stolpčno stohastična, naš dokaz ne bo več dober, medtem ko dokaz s pomočjo Perron-Frobeniusove teorije še vedno deluje. Taka sprememba je seveda smiselna, saj lahko vrednosti S_{ij} interpretiramo kot verjetnosti skoka s strani W_j na stran W_i , ki niso nujno vse med seboj enake (strani z bolj podobno vsebino bolj asociirajo druga na drugo, čeprav ne vsebujejo direktne povezave).

LITERATURA

- [1] David Austin, *How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack*, Feature Column from the AMS, december 2006.
- [2] A. Batkai, M. Kramar Fijavž in A. Rhandi, *Positive Operator Semigroups and Applications*, 17th Internet Seminar on Evolution Equations 2013/14, skripta, <http://isem17.unisa.it>, dostopano: 3. 11. 2014.
- [3] Sergey Brin in Lawrence Page, *The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine*, Computer Networks and ISDN Systems, **33** (1998), 107–117.
- [4] Kurt Bryan in Tanya Leise, *The \$25,000,000,000 Eigenvector. The Linear Algebra behind Google*, SIAM Review **48** (2006), 569–581.
- [5] Matthias Frick, *Mathematik hinter Google*, Zulassungsarbeit, Eberhard-Karls Universität Tübingen, 2007.
- [6] G. Frobenius, *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, S.-B. Preuss, Akad. Wiss. (Berlin), 456–477.
- [7] Amy Langville in Carl Meyer, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, 2006.
- [8] C. R. MacCluer, *The Many Proofs and Applications of Perron's Theorem*, SIAM Review **42** (2000), 487–498.
- [9] Oskar Perron, *Zur Theorie der Matrizen*, Math. Ann. **64** (1907), 248–263.
- [10] Ivan Vidav, *Linearni operatorji v Banachovih prostorih*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1982.
- [11] Jože Vrabec, *Metrični prostori*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1990.

NEKATERE ZGODOVINSKE KONSTRUKCIJE PRAVILNEGA SEDEMKOTNIKA

MILAN HLADNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A20, 01A30, 01A40, 01A60, 97G40

V tem kratkem izletu v zgodovino načrtovanja pravilnega sedemkotnika najprej opišemo dva starejša načina, Arhimedovega in Viètovega. Nato predstavimo pristop z uporabo parabole in za konec podamo še eno preprosto novejšo konstrukcijo z označenim ravnilom in šestilom.

SOME HISTORICAL CONSTRUCTIONS OF THE REGULAR HEPTAGON

In this short excursion into the history of constructing the regular heptagon we first describe two old approaches, one ascribed to Archimedes and the other to Viète. Then, we also present another one involving a parabola and finish with a simple modern marked ruler and compass construction.

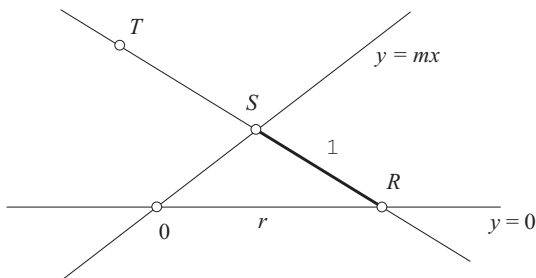
Plemljeva elegantna konstrukcija pravilnega sedemkotnika, o kateri smo poročali v [6], je primeren razlog, da pregledamo še druge znane konstrukcije tega lika iz starejših in novejših časov. Z njimi tudi Plemljev dosežek vidimo v drugačni luči oziroma v širšem zgodovinskem okviru in ga znamo bolj ceniti. Najprej se posvetimo klasični grški in islamski tradiciji neevklidskih konstrukcij.

Metoda vstavljanja in metoda stožnic

Pravilne večkotnike so obravnavali že pitagorejci, vsaj v zvezi s pravilnimi poliedri. Poznali so npr. pentagram in vedeli, da obstajajo samo trije pravilni večkotniki, s katerimi lahko tlakujemo ravnino (enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik).

Zahtevo, da morajo biti vse geometrijske konstrukcije izvedene samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, je postavil Platon v 4. stoletju pred našim štetjem, najbrž v zvezi s problemom podvojitve kocke. To normo je dosledno upošteval Evklid v svojih *Elementih*. Toda drugi grški matematiki so hitro ugotovili, da se ni vedno mogoče držati Platonovih navodil in so za reševanje različnih konstrukcijskih problemov poleg ravnila in šestila izumili še druga bolj ali manj domiselna orodja in postopke.

Nas bo tu zanimalo predvsem tretjinjenje kota, ki ima, kot smo videli v [6], odločilno vlogo pri konstrukciji pravilnega sedemkotnika. Za ta namen so Grki namesto pri premicah in krožnicah iskali pomoč pri stožnicah in



Slika 1. Primer vstavljanja med premicama.

drugih višjih krivuljah (npr. Nikomedovi konhoidi ali Arhimedovi spirali). Toda poznali so tudi neko bolj elementarno, vendar zelo uspešno metodo za tretjinjenje kota (in reševanje drugih problemov): *vstavljanje* (dane razdalje med dve premici, dve krožnici ali med premico in krožnico). Grška beseda za to je *neusis*. Obenem je *Neusis* tudi naslov knjige, ki jo je napisal Apolonij iz Perge (~ 262 –190 pr. n. št.); original je izgubljen, toda sodobni nizozemski zgodovinar matematike Jan P. Hogendijk¹ je Apolonijevo razpravo rekonstruiral na osnovi nekaterih arabskih besedil [7].

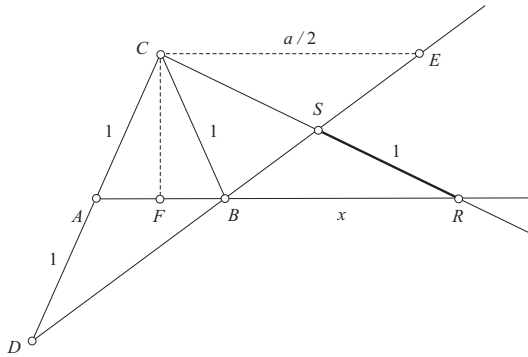
Vstavljanje najlažje realiziramo tako, kot so to storili Grki, z uporabo *označenega ravnila*, tj. ravnila z dvema zareza na robu (razdalja med njima predstavlja enoto): ravnilo npr. položimo skozi točko T tako, da zarezi R in S ležita na vnaprej danih dveh sekajočih se premicah (glej sliko 1).

Zdi se, da je tako označeno ravnilo prvi uporabil Nikomed (~ 280 –210 pr. n. št.) pri geometrijski konstrukciji kubičnega korena iz pozitivnega števila a (Menajhmos je za isti namen že prej, v 4. stoletju pred našim štetjem, uporabil sekajoči se paraboli, glej [13]).

Sledimo postopku, ki je naveden npr. v [11] (glej sliko 2). Naj bo $0 < a < 8$. Načrtajmo enakokrak trikotnik $\triangle ABC$ z osnovnico $AB = a/4$ in krakoma $AC = BC = 1$. Podaljšajmo krak AC do točke D tako, da je A razpolovišče daljice CD . Iz točke C vstavimo razdaljo 1 med premici skozi A in B ter B in D (tako da je razdalja med presečiščema R in S enaka 1 in da je $S \neq A$). Označimo $x = BR$ in pokažimo, da je potem $x = \sqrt[3]{a}$.

Vzporednica z AB skozi C naj seka premico skozi B in D v točki E , razpolovišče daljice AB pa označimo s F . Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle ADB$ in $\triangle CDE$ je $CE = 2AB = a/2$, zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle ECS$ in $\triangle BRS$ pa je $CS/RS = CE/BR$ oziroma $CS = a/(2x)$. S Pitagorovim izrekom za pravokotna trikotnika $\triangle FRC$ in $\triangle FBC$ dobimo $(1 + a/(2x))^2 = (1 - (a/8)^2) + (x + a/8)^2$, preuredimo in najdemo za x enačbo četrte stopnje $4x^4 + ax^3 - 4ax - a^2 = 0$, ki je k sreči razcepna: $(4x + a)(x^3 - a) = 0$, tako da je $x^3 = a$ in x tretji koren iz a . ■

¹Hogendijk je prvi dobitnik nagrade za zgodovino matematike, ki jo je Evropsko matematično društvo začelo podeljevati poleti 2012.

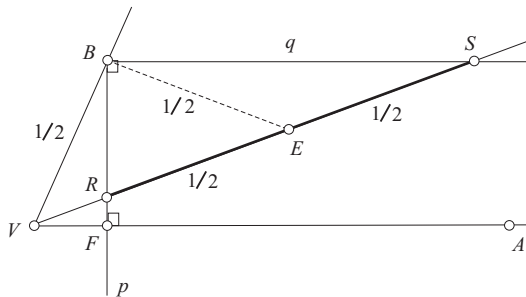


Slika 2. Nikomedova konstrukcija tretjega korena z vstavljanjem.

O tretjinjenju kota z metodo vstavljanja pa poroča Papos iz Aleksandrije ($\sim 290\text{--}350$), zadnji veliki antični grški matematik. Iz njegovih spisov in komentarjev, zbranih v osmih knjigah s preprostim skupnim naslovom *Zbirka* (grško *Synagoge*), vemo za prenekateri dosežke zgodnejših grških matematikov, ki jih sicer ne bi poznali. Naslednja konstrukcija je spet povzeta po viru [11].

Imejmo poljuben kot $\angle AVB$ z vrhom V , vodoravnim krakom AV in nagnjenim krakom BV , dolžine $1/2$ (glej sliko 3). Premica p naj bo pravokotna na krak AV in naj poteka skozi točko B , skozi katero naj gre tudi vzporednica q s krakom AV . Iz vrha V vstavimo razdaljo 1 med premici p in q . Presečišči označimo z R in S , razpolovišče daljice RS pa naj bo E . Ker je trikotnik $\triangle RSB$ pravokoten, je $RE = ES = BE = 1/2$, trikotnika $\triangle VEB$ in $\triangle BES$ sta enakokraka z enako dolgimi kraki, kot $\angle EVB = \angle BEV = 2\angle BSE = 2\angle AVS$, in zato $\angle AVB = 3\angle AVS$. ■

Druga znana grška neevklidska metoda je *metoda stožnic*. Pod tem razumemo metodo, pri kateri predpostavljamo, da lahko po potrebi načrtamo eno ali več stožnic in potem samo z ravnilom konstruiramo vse točke, ki



Slika 3. Paposovo tretjinjenje kota z vstavljanjem.

so presečišča dveh premic, premice in katerekoli stožnice ali dveh poljubnih stožnic. Med stožnice štejemo poleg parabole, hiperbole in elipse seveda tudi krožnico, zato lahko z metodo stožnic načrtamo vse klasične evklidske konstrukcije. Če poleg ravnila dodatno uporabljamo tudi šestilo, zadošča pogosto imeti v ravnini narisano eno samo stožnico, npr. hiperbolo ali parabolo z racionalnimi koeficienti.

Po drugi strani se da dokazati (glej npr. [11]), da lahko dobimo vse klasične evklidske konstrukcije samo z označenim ravnilom. To sledi tudi iz naslednje trditve:

Trditev 1. *Konstrukcija z označenim ravnilom je ekvivalentna konstrukciji z ravnilom in stožnicami.*

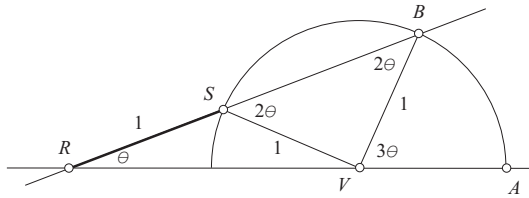
Dokaz. Oboje je namreč v algebrskem smislu ekvivalentno (večkratnemu) reševanju polinomskih enačb kvečjemu četrte stopnje z realnimi koeficienti. Res, oglejmo si z algebrskega stališča najprej vstavljanje. Če ima na primer v kartezičnem koordinatnem sistemu ena premica enačbo $y = mx$, druga pa $y = 0$ (abscisna os), in če ima točka T koordinati (a, b) , presečišče s prvo premico S pa koordinati (p, q) , lahko določimo absciso r presečišča R z abscisno osjo pod pogojem, da je razdalja med R in S enaka 1 (glej sliko 1). Koordinati p in q se izražata z r s formulama $p = br/(mr - am + b)$ in $q = mp$, zato iz pogoja $(p - r)^2 + q^2 = 1$ dobimo s kratkim računom za r enačbo četrte stopnje $m^2(r^2 - 1)(r - a)^2 + m^2b^2r^2 - 2mb(r - a) - b^2 = 0$. Podobno velja za vstavljanje med dve vzporedni ali pravokotni premici.

Obratno lahko, kot je znano [12], vsako polinomsko enačbo četrte stopnje z realnimi koeficienti najprej prevedemo na enačbo tretje stopnje z realnimi koeficienti. Take enačbe smo obravnavali v [6] z uporabo Cardanovih formul (glej izrek 3). Iz njih vidimo, da za določitev realnih korenov iz koeficientov enačbe potrebujemo konstrukcijo tretjega korena iz pozitivnega števila in včasih tudi tretjinjenje kota, kar pa oboje lahko izvedemo po Nikomedu in Paposu z metodo vstavljanja. Prvotno enačbo četrte stopnje potem uženemo z reševanjem kvadratnih enačb s kompleksnimi koeficienti (oziroma geometrijsko s konstrukcijo kvadratnega korena iz pozitivnega števila in razpolavljanjem kota).

Prav tako pridemo pri algebrskem določanju presečišč stožnic do enačb največ četrte stopnje, po drugi strani pa lahko korene vsake enačbe oblike $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ poiščemo kot presečišča parabole $y = x^2$ in stožnice (ali premice, če je $a = b = 0$) $ay^2 + bxy + cy + dx + e = 0$. Tako imamo tudi ekvivalenco med reševanjem enačb kvečjemu četrte stopnje z realnimi koeficienti in geometrijskimi konstrukcijami s pomočjo stožnic. ■

Arhimedova konstrukcija in islamski prispevek

Gotovo je najbolj znano metodo za tretjinjenje kota prispeval Arhimed (287–212 pr. n. št.). Njegov postopek prav tako temelji na vstavljanju, vendar to



Slika 4. Arhimedovo tretjinjenje kota z vstavljanjem med krožnico in premico.

pot med krožnico in premico, zato je poleg označenega ravnila potreboval tudi šestilo. Razlaga same konstrukcije najbrž ni potrebna (glej sliko 4).

Od pravih večkotnikov so Grki znali z ravnilom in šestilom konstruirati enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni petkotnik ter iz njih izpeljane like (npr. pravilni šestkotnik, osemkotnik, desetakotnik, petnajstkotnik itd.). Za konstrukcijo drugih pravih večkotnikov so uporabljali le približke. Za stranico pravih sedemkotnika je znan Heronov približek, ki smo ga v [6] omenili v zvezi s Plemlejevo rešitvijo (t. i. indijski približek).

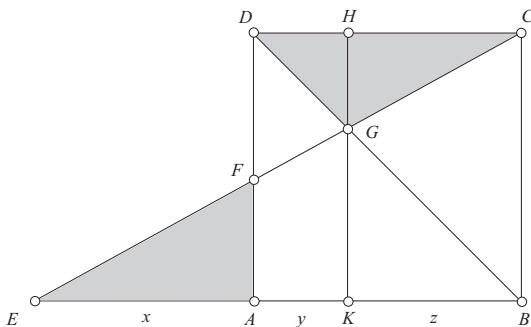
Dolgo časa je veljalo, da kljub poznavanju različnih neevklidskih metod (vstavljanje, stožnice, višje krivulje) nobenemu od grških geometrov ni uspelo eksaktno konstruirati pravilnega sedemkotnika (ali kakšnega drugega pravilnega lika, katerega konstrukcija z ravnilom in šestilom ni možna). Potem pa je v dvajsetih letih 20. stoletja nemški zgodovinar matematike Carl Schoy v Kairu med besedili perzijskega astronoma Al Birunija (973–1048) odkril arabski prevod antične razprave o konstrukciji pravilnega sedemkotnika. Arabski prevod je preskrbel veliki islamski geometer iz 9. stoletja Thabit Ibn Qurra (836–901), ki je delo pripisal Arhimedu². Originalna Arhimedova razprava pa je na žalost izgubljena. Svojo konstrukcijo je Arhimed naslonil na naslednji pomožni rezultat, ki je v antični geometriji nekaj posebnega (glej sliko 5)³.

Lema 2 (Arhimedova lema). V kvadratu $ABCD$ z diagonalo BD naj bo $EFGC$ taka transverzala, da sta ploščini trikotnikov $\triangle EAF$ in $\triangle CDG$ enaki. Iz točke G spustimo na vzporedni stranici AB in CD pravokotnico s presečiščema K in H . Potem velja $AB \cdot BK = AE^2$ in $EK \cdot AK = BK^2$.

Opomba 1. Z vrtenjem transverzale $EFGC$ okrog krajišča C se lahko prepričamo, da res obstaja položaj, ki ustreza pogoju enakih plosčin. Arhimed ne pove, kako tako transverzalo konstruirati, toda z oznakami x, y, z na sliki 5 se potrebna pogoja glasita $(y + z)z = x^2$ in $(x + y)y = z^2$. Če vzamemo

²Iz arabščine je besedilo leta 1984 prevedel Jan P. Hogendijk, ki smo ga omenili v zvezi z Apolonijevo razpravo *Neusis*. Originalni arabski tekst in njegov prevod najdemo v dodatku k obsežnemu Hogendijkovemu članku [8].

³V tem sestavku smo originalno konstrukcijo zavrteli za 180 stopinj in uvedli druge oznake, matematična vsebina pa je ostala nespremenjena.



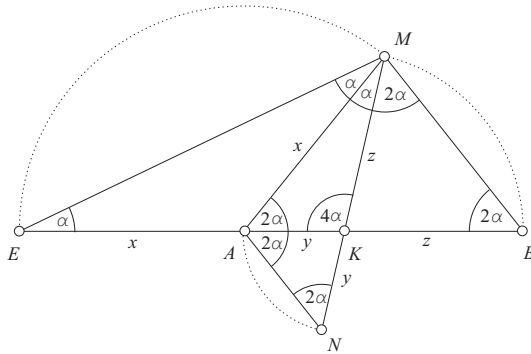
Slika 5. Ilustracija Arhimedove leme.

še, da je stranica kvadrata enaka 1, dobimo $1 - y = x^2$ in $(x + y)y = (1 - y)^2$ oziroma $y = 1 - x^2$ in $xy = 1 - 2y$. Vidimo torej, da ustrezno lego določa presečišče parabole in hiperbole, torej lahko po trditvi 1 pridemo do nje tudi z metodo vstavljanja.

Dokaz. Iz enakosti ploščin trikotnikov $\triangle EAF$ in $\triangle CDG$ najdemo $AE \cdot AF = CD \cdot GH$ oziroma $AE/CD = GH/AF$. Po drugi strani je zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle EAF$ in $\triangle CHG$ res tudi $GH/AF = CH/AE$, tako da imamo $AE/CD = CH/AE$ oziroma, upoštevajoč enakost $CD = AB$ in $CH = BK$, iskano enakost $AB \cdot BK = AE^2$. Drugo enakost dobimo iz podobnosti trikotnikov $\triangle EKG$ in $\triangle CHG$ ter trikotnikov $\triangle BGK$ in $\triangle DGH$, torej $EK/CH = GK/GH$ in $GK/GH = BK/DH$. Ker je $DH = AK$ in $CH = BK$, dobimo od tod $EK \cdot AK = BK^2$. ■

Izrek 3 (Arhimed). *Naj bodo točke E , A , K in B razporejene tako kot pri Arhimedovi lemi, pri čemer je $AB \cdot BK = AE^2$ in $EK \cdot AK = BK^2$. Za točko M naj velja $MA = AE$ in $MK = BK$, točka N pa naj leži na podaljšku daljice MK , tako da je $KN = AK$. Potem je BM stranica, EM in EB pa mala in velika diagonalna pravilnega sedemkotnika.*

Dokaz. Zaradi lažje obravnave spet privzemimo, da je (stranica kvadrata v Arhimedovi lemi) $AB = 1$. Potem je s prejšnjimi oznakami x, y, z očitno $y < 1/2$, torej $y < z = x^2 < x < 1$, tako da trikotnik s stranicami x, y, z oziroma točka M (presečišče obeh krožnic) gotovo obstaja. Označimo $\angle BEM = \alpha$. Ker je trikotnik EAM enakokrak, je zunanji kot $\angle KAM = 2\alpha$. Zaradi $KM^2 = BK^2 = AK \cdot EK$ imamo razmerje $EK/KM = KM/AK$, kar pomeni, da sta si trikotnika $\triangle EKM$ in $\triangle AKM$ podobna. Torej je $\angle KEM = \angle AMK = \alpha$. Zaradi $AM^2 = AE^2 = AB \cdot BK = MN \cdot MK$ pa imamo $AM/MN = MK/AM$, zato sta si podobna tudi trikotnika $\triangle AKM$ in $\triangle ANM$. Torej je $\angle MNA = \angle KAM = 2\alpha$ in tudi $\angle NAK = 2\alpha$ (ker je trikotnik $\triangle ANK$ enakokrak). Zaradi podobnosti



Slika 6. Arhimedova konstrukcija pravilnega sedemkotnika.

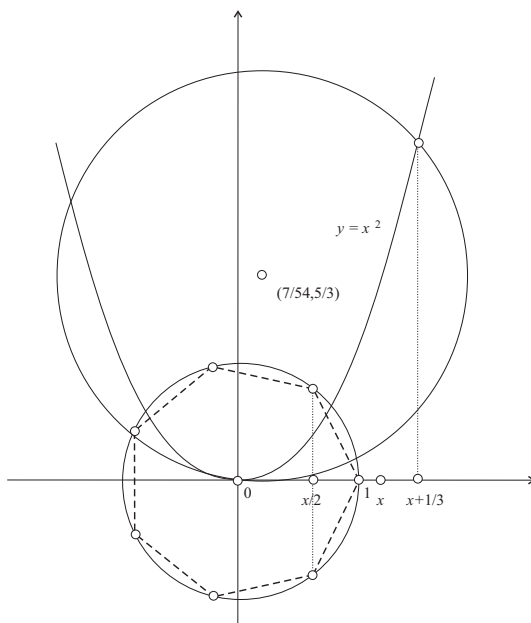
enakokrakih trikotnikov $\triangle ANK$ in $\triangle BMK$ sta enaka tudi kota $\angle KMB$ in $\angle MBK$ (vsi koti so označeni na sliki 6). Iz enega ali drugega trikotnika takoj ugotovimo, da je $\alpha = \pi/7$, kar je obodni kot pri pravilnem sedemkotniku, včrtanem v krog. Obodna kota pri mali in veliki diagonalni sta $2\alpha = 2\pi/7$ in $4\alpha = 4\pi/7$. ■

Zgodovinska opomba. V zgornjem dokazu smo sledili analizi islamskega matematika Abu Sahla al Kuhija (~940–1000), kot je prikazana v [11]. Kuhi je proučil Arhimedovo delo in na osnovi njegove leme podal svojo različico konstrukcije trikotnika s koti v razmerju 1: 2: 4; od tod je izvedel konstrukcijo pravilnega sedemkotnika.

Problem, kako razdeliti dano daljico (pri nas daljico EB) iz Arhimedove leme v pravem razmerju, pa s tem še ni bil rešen. To so skušali storiti mladi bagdaski geometri Abul Jud, Al Sijzi in Al Ala v zadnji tretjini 10. stoletja in sicer z uporabo stožnic. Njihovo na koncu sicer uspešno prizadevanje ni bilo brez napak in popravkov, pa tudi ne brez medsebojnih prepričevanj o prioriteti, podobno kot se je skoraj šest stoletij kasneje dogajalo med Cardanom in Tartaglijo glede reševanja kubične enačbe. Kasneje so se še drugi islamski matematiki ukvarjali s konstrukcijo pravilnega sedemkotnika z uporabo stožnic: zabeleženih je vsaj ducat rešitev, med njimi jih je menda kar pet prispeval veliki arabski matematik in fizik (utemeljitelj fizikalne optike) Ibn al Haytham (965–1040), ki je deloval v Kairu in je na zahodu bolj znan z latinskim imenom Alhazen.⁴

Ko smo že pri stožnicah, si na osnovi konstrukcije v [2] oglejmo, kako bi z uporabo presečišča parabole $y = x^2$ in ustrezne krožnice $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$ skozi koordinatno izhodišče poiskali stranico pravilnega sedemkotnika, včrtanega v enotski krog. Če vstavimo $y = x^2$ v

⁴O islamskem prispevku h konstrukciji pravilnega sedemkotnika se lahko bralec seznani v temeljiti Hogendijkovi študiji [8].



Slika 7. Konstrukcija pravilnega sedemkotnika s pomočjo parabole.

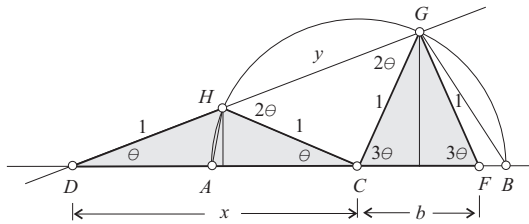
enačbo krožnice in pokrajšamo, vidimo, da abscisa presečišča zadošča kubni enačbi $x^3 + (1 - 2b)x - 2a = 0$. V članku [6] smo spoznali, da je abscisa točki $(1,0)$ najbližjega oglišča pravilnega sedemkotnika enaka $x/2$, kjer je $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Premaknjena vrednost $t = x + 1/3$ torej zadošča enačbi $t^3 - (7/3)t - 7/27 = 0$, in tako s primerjavo s prejšnjo enačbo te oblike ugotovimo, da mora biti $a = 7/54$ in $b = 5/3$ (glej sliko 7).

Konstrukcija je zdaj jasna: S središčem v točki $(7/54, 5/3)$ načrtamo krožnico, ki poteka skozi izhodišče, in jo sekamo s parabolo $y = x^2$. Abscisa presečišča je $x + 1/3$, poiščemo x in nato še $x/2$, ki je abscisa prvega oglišča pravilnega sedemkotnika v prvem kvadrantu (glej sliko 7).

Več o geometrijskih konstrukcijah z uporabo stožnic lahko preberemo npr. v [13].

Viètova konstrukcija

Ustavimo se še ob eni kasnejši konstrukciji pravilnega sedemkotnika, ki je manj znana, odkril pa jo je znameniti francoski matematik François Viète (1540–1603). Bil je prepričan o nezadostnosti ravnila in šestila in je močno zagovarjal uporabo označenega ravnila. Za tretjinjenje kota je podobno kot Arhimed (slika 4) predlagal metodo z vstavljanjem med premico in krožnico. Ker je bila Arhimedova *Knjiga lem*, v kateri je znamenita trisekcija



Slika 8. Viètova rešitev kubične enačbe.

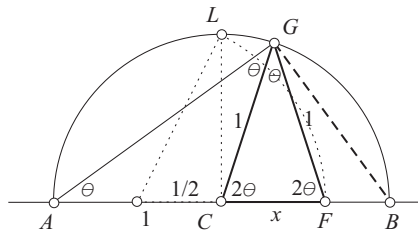
kota, prevedena v latinščino šele leta 1657 (kot *Liber Assumptorum*), je ni mogel poznati. Najbrž pa je bil seznanjen s Paposovo *Zbirko*, ki obravnava podobne metode, zato njegova trisekcija kota morda ni čisto originalna.

Viète je bil odličen algebraik, med drugim je za reševanje splošnih enačb tretje stopnje iznašel svojo metodo, ki je bila drugačna od Cardanove. Takih enačb pa se je lotil tudi geometrijsko, kot vidimo iz naslednjega primera kubične enačbe, ki spada med bolj zahtevne (*casus irreducibilis*). Dokaz, ki ga povzemamo po Hartshornu [4], navajamo z modernimi oznakami, medtem ko ga je Viète še v celoti opisal z besedami.

Trditev 4 (Viète). *Da bi rešili enačbo oblike $x^3 - 3x = b$, kjer je $0 < b < 2$, načrtajmo enakokrak trikotnik z osnovnico b in krakom 1, tretjinimo kot ob osnovnici in načrtajmo drug enakokrak trikotnik s trikrat manjšim osnovnim kotom in krakom 1. Osnovnica novega trikotnika je rešitev enačbe.*

Dokaz. Narišimo si drugega ob drugem dva enakokraka trikotnika, $\triangle DCH$ z osnovnim kotom θ in $\triangle CFG$ z osnovnim kotom 3θ , tako kot kaže slika 8. Ker je drugi kot trikrat večji od prvega, so nujno točke D, H, G kolinearne, zato je slika podobna kot slika 4.

Naj bo $DH = HC = CG = FG = 1$, $CF = b$ in $GH = y$. Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle DAH$ in $\triangle DGB$ dobimo $1/(x-1) = (x+1)/(y+1)$ (isto vidimo, če izračunamo potenco točke D na krožnico skozi točke A, B, G in H). Zaradi podobnosti pravokotnih trikotnikov, ki jih dobimo s projekcijo točk G in H na daljico DB , pa najdemo še $1/y = x/(x+b)$. Torej je $y = x^2 - 2$ in $xy = x + b$, tako da z eliminacijo y dobimo $x^3 - 3x = b$. ■

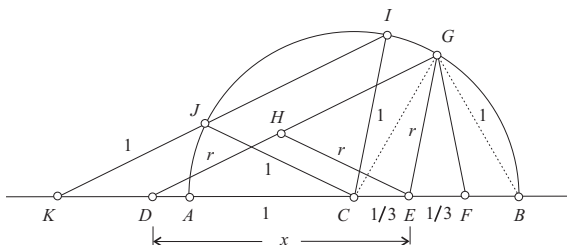


Slika 9. Evklidova konstrukcija pravilnega petkotnika.

Zdaj je Viète pri konstrukciji pravilnega sedemkotnika ravnal podobno kot Evklid pri konstrukciji pravilnega petkotnika, ko je najprej poiskal enakokrak trikotnik s kotom ob vrhu θ in kotom ob osnovnici 2θ (glej npr. trikotnik $\triangle AFG$ ali $\triangle CFG$ na sliki 9). Ker od tod sledi, da je $\theta = \pi/5$, je osnovnica tega trikotnika (na sliki označena z x) stranica pravilnega desetkotnika, daljica BG pa stranica pravilnega petkotnika.

Lema 5 (Viětova lema). *Na podaljšku premera AB kroga s središčem v C obstaja točka D , za katero velja $AD/CD = AC^2/BD^2$.*

Dokaz. Točko D najdemo z naslednjim postopkom (glej sliko 10):

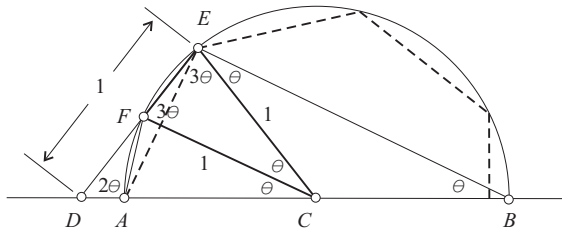


Slika 10. Ilustracija k Viètovu lemi.

Izberimo $AC = 1$ in odmerimo $CE = EF = 1/3$ in $BG = 1$. Povežimo EG in narišimo vzporednico CI . Zdaj pa (z metodo *neusis*) iz točke I vstavimo dolžino $JK = 1$ med krožnico in premico skozi A in B ter potegnimo vzporednico GD k daljici IK . Potem je D iskana točka. Res: Če je daljica EH vzporedna daljici CJ , označimo njeno dolžino z r , razdaljo DE pa z x . Slika 10 je potem podobna sliki 8 z raztegom r , pri čemer je zdaj $b = 1/(3r)$, tako da za razmerje x/r velja $(x/r)^3 - 3(x/r) = 1/(3r)$ oziroma $x^3 - 3r^2x = r^2/3$. Toda r lahko izračunamo iz trikotnikov $\triangle CBG$ in $\triangle EFG$, velja $r = \sqrt{7}/3$, tako da zadošča x enačbi $x^3 - 7x/3 = 7/27$. Ker je $AD = x - 4/3$, $CD = x - 1/3$, $AC = 1$ in $BD = x + 2/3$, lahko z uporabo zadnje relacije hitro preverimo, da res velja $AD/CD = AC^2/BD^2$. ■

Opomba 2. Pozorni bralec je gotovo opazil, da smo enačbo $x^3 - 7x/3 = 7/27$ že srečali pri konstrukciji pravilnega sedemkotnika s parabolo in krožnico. Sporočilo je jasno: resnica je v matematiki ena sama, različni zgodovinski in modernejši postopki pri reševanju istega problema so med seboj povezani. To bomo ponovno spoznali še pri eni konstrukciji pravilnega sedemkotnika v naslednjem, zadnjem razdelku.

Izrek 6 (Viète). Naj bo razpored kolinearnih točk A, B, C, D tak, kot ga zahteva Viètova lema, E taka točka na krožnici s premerom AB in središčem v C , da je $DE = 1$, in F drugo presečišče daljice DE s krožnico. Potem je daljica AE stranica pravilnega sedemkotnika, včrtanega v enotski krog.



Slika 11. Viètova konstrukcija pravilnega sedemkotnika.

Dokaz. Po eni strani je $AD \cdot BD = DE \cdot DF$ (glej sliko 11), po konstrukciji pa tudi $AD/CD = AC^2/BD^2$. Ker je $DE = 1$ in $AC = 1$, imamo od tod $DE/BD = 1/BD = (AD \cdot BD)/CD = DF/CD$. To pomeni, da sta daljici BE in CF na sliki 11 vzporedni in zato kota pri B v trikotniku $\triangle DBE$ in pri C v trikotniku $\triangle DCF$ enaka, npr. oba enaka θ . Zaradi enakokrakih trikotnikov $\triangle CBE$, $\triangle DCE$ in $\triangle CEF$ najdemo še preostale kote, ki so označeni na sliki. Iz enega ali drugega trikotnika tudi hitro izračunamo, da mora biti $\theta = \pi/7$, tako da središčnemu kotu 2θ (ali obodnemu kotu θ) pripada sedmina krožnega obsega. ■

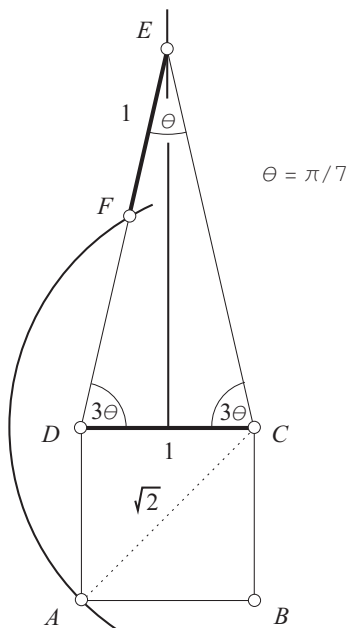
Viètova konstrukcija je ostala kasneje skoraj neopažena, zanjo vemo po zaslugi Roberta Hartshorna [4]. Kot kaže, je nista poznala niti Plemelj niti Gleason, čeprav temelji njuna konstrukcija pravilnega sedemkotnika, opisana v članku [6], na podobni ideji, tj. na reševanju kubične enačbe s tretjinjenjem kota.

Johnsonova konstrukcija

Leta 1975 je ameriški slikar in ilustrator David Johnson Leisk (1906–1975), znan pod umetniškim imenom Crockett Johnson⁵, v časopisu *The Mathematical Gazette* [9] objavil presenetljivo preprosto konstrukcijo (stranice) pravilnega sedemkotnika z vstavljanjem, ki spominja na Arhimedovo tretjinjenje kota ali Viètovo metodo konstrukcije pravilnega sedemkotnika. Pravzaprav je, tako kot Viète, najprej poiskal enakokrak trikotnik s kotom ob vrhu θ in kotom ob osnovnici 3θ , zato je, kot bomo videli, tudi dokaz pravilnosti njegovega postopka enak Viètovemu. Johnsonova metoda je naslednja (glej sliko 12).

Izrek 7 (Johnson). *Kvadratu $ABCD$ s stranico 1 načrtajmo simetralo stranice AB (ali CD) ter krožnico s središčem v oglišču C skozi nasprotno oglišče A , tako da je njen polmer enak $\sqrt{2}$. Zdaj uporabimo metodo*

⁵Na spletu najdemo celo galerijo zanimivih Johnsonovih barvnih slik, ki ponazarjajo različne zgodovinske in moderne geometrijske zakonitosti (glej [10]).



Slika 12. Johnsonova metoda konstrukcije pravilnega sedemkotnika z vstavljanjem.

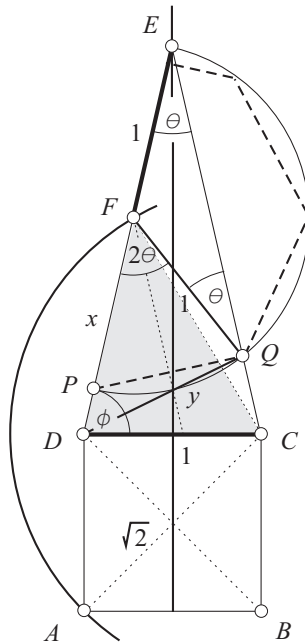
vstavljanja (neusis) razdalje 1 med premico in krožnico, izhajajoč iz točke D. Potem je kot enakokrakega trikotnika $\triangle DCE$ ob vrhu E enak $\pi/7$.

Dokaz. Za dokaz pravilnosti konstrukcije bomo morali zadnjo sliko nekoliko dopolniti. Kot pri vrhu E v enakokrakem trikotniku $\triangle DCE$ označimo s črko θ , kot ob osnovnici pa s ϕ (glej sliko 13). Pokazali bomo, da je $\phi = 3\theta$ in zato seveda $\theta = \pi/7$.

Dolžina daljice DF naj bo x , tako da velja $2 \cos \phi = 1/(1+x)$. Po drugi strani ima trikotnik $\triangle CFD$, ki smo ga na sliki potemnili, eno stranico DC enako 1, drugo CF enako $\sqrt{2}$, tretja DF pa je enaka x . Kosinusni izrek zanj pove, da je $1 = x^2 - 2x \cos \phi$. Oboje skupaj nam da zvezo $4x \cos^2 \phi = x - 1$. Če iz obeh relacij izločimo ϕ , pa dobimo enakost $1 = x^2 - x/(1+x)$ oziroma $(x-1)(x+1)^2 = x$.

Polkrožnica s središčem v F in polmerom 1 naj seka kraka trikotnika $\triangle DCE$ v točkah P in Q . Pokažimo, da je dolžina y daljice DQ enaka 1. Po kosinusnem izreku za trikotnik DQF je $y^2 = x^2 + 1 - 2x \cos 2\theta$. Upoštevajmo, da je $\theta = \pi - 2\phi$ in $2\theta = 2\pi - 4\phi$, pa imamo $y^2 = (x+1)^2 - x(2 + 2 \cos 4\phi)$. Ker je $2 + 2 \cos 4\phi = 4 \cos^2 2\phi = 4(2 \cos^2 \phi - 1)^2 = (4 \cos^2 \phi - 2)^2$, dobimo na koncu

$$xy^2 = x(x+1)^2 - (4x \cos^2 \phi - 2x)^2 = (x-1)(x+1)^2 = x,$$



Slika 13. Ilustracija dokaza Johnsonove konstrukcije stranice pravilnega sedemkotnika.

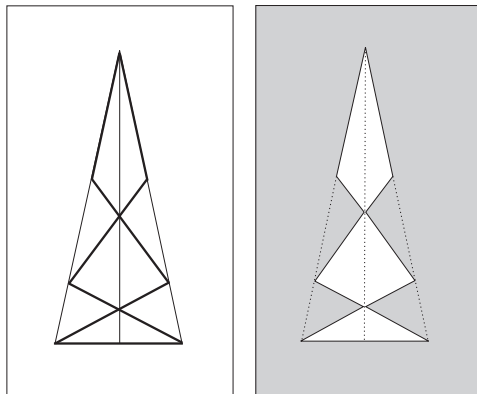
od koder vidimo, da mora biti $y = 1$. Iz enakokrakih trikotnikov $\triangle EFQ$, $\triangle FDQ$ in $\triangle DCQ$ potem ugotovimo, da je kot $\angle QDF$ enak 2θ in kot $\angle DQC$ oziroma $\angle QCD$ enak 3θ . Se pravi, da je tudi $\phi = 3\theta$. Stranica pravilnega sedemkotnika, včrtanega v enotski krog s središčem v točki F , je torej enaka PQ . ■

Opomba 3. Opisana Johnsonova konstrukcija enakokrakega trikotnika $\triangle DCE$ in njena utemeljitev imata tesno zvezo z Viètovo metodo. Najprej iz relacije $(x - 1)(x + 1)^2 = x$ oziroma $(x - 1)/x = 1/(x + 1)^2$ vidimo, da so točke D, P, F, E razporejene natanko tako kot točke D, A, C, B v Viètovi lemi. Tudi samo Viètovo konstrukcijo pravilnega sedemkotnika lahko, zasukano, opazimo na sliki 13. Poleg tega lahko na tej sliki, če smo dovolj pozorni, prepoznamo tudi Viètovo metodo reševanja kubične enačbe iz trditve 3 oziroma slike 11 (zdaj imata enakokraka trikotnika osnovnici EQ in QC).

Enakost za x lahko celo prepišemo v obliko $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, ki jo dobro poznamo; zato je $x = 2 \cos(2\pi/7)$ dvojna abscisa pravilnega sedemkotnika, kar je nova potrditev, da je Johnsonova konstrukcija pravilna.

Za konec kot zanimivost omenimo, da lahko obris Johnsonovega enakokrakega trikotnika $\triangle DCE$ (na sliki 12 ali 13), na katerem temelji konstrukcija pravilnega sedemkotnika, sestavimo iz štirih enako dolgih daljic

(dolžine 1) CD , DQ , QF , FE , če jih le poravnamo tako, da so njihova krajišča izmenično kolinearna (tako točke D, E, F kot točke C, E, Q na sliki 13). Simetrizirano verzijo te *palične konstrukcije* s sedmimi enako dolgimi daljicami si lahko ogledamo na sliki 14. Kot kaže, pa ta ideja ni nova, pojavila se je že prej v zvezi s poljubnimi pravičnimi večkotniki [3].



Slika 14. Palična konstrukcija Johnsonovega trikotnika.

LITERATURA

- [1] A. Aaboe, *Episodes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L. W. Singer Co. 1964.
- [2] A. Baragar, *Constructions Using a Compass and Twice-Notched Straightedge*, Amer. Math. Monthly **109** (februar 2002), 151–164.
- [3] A. H. Finlay, *Zig-zag Paths*, Math. Gazette **43** (oktober 1959), 199.
- [4] R. Hartshorne, *Viete's construction of the regular heptagon*, spletna stran: <http://www.math.berkeley.edu/~robin/Viete/construction.html>, dostopano: 3. 11. 2014.
- [5] T. L. Heath, *Greek Mathematics*, Dover Publ., New York 1963.
- [6] M. Hladnik, *Plemelj in pravični sedemkotnik*, Obzornik mat. fiz. **60** (2013), 161–172.
- [7] J. P. Hogendijk, *Arabic Traces of Lost Works of Apollonius*, Archive for History of Exact Sciences **35** (1986), 187–253.
- [8] J. P. Hogendijk, *Greek and Arabic constructions of the regular heptagon*, Archive for History of Exact Sciences **30** (1984), 197–330.
- [9] C. Johnson, *A Construction for a Regular Heptagon*, Math. Gazette **59** (1975), 17–21.
- [10] Crockett Johnson Home Page: Paintings (spletna stran: www.k-state.edu/english/nelp/purple/art.html, dostopano: 3. 11. 2014.).
- [11] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
- [12] I. Vidav, *Algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1989.
- [13] C. R. Videla, *On Points, Constructible from Conics*, The Mathematical Intelligencer **19** (1997), 53–57.

ZAPLETI Z GRAVITACIJSKO KONSTANTO

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 04.80.-y

V seznamu osnovnih konstant CODATA so relativno negotovost gravitacijske konstante $\mathcal{G}$ v zadnjem času dvakrat povečali. Razlike med izmerjenimi vrednostmi so večje od navedenih negotovosti. $\mathcal{G}$ je najbolj negotova od vseh osnovnih konstant. Izmerili so jo tudi v Mednarodnem uradu za uteži in mere. Zelo natančna merjenja so zanimiva tudi s fizikalnega gledišča.

COMPLICATIONS WITH THE NEWTONIAN GRAVITATIONAL CONSTANT

Recently in the CODATA list of fundamental constants the relative uncertainty of the gravitational constant $\mathcal{G}$ has been increased twice. The differences between measured values are greater than the quoted uncertainties. $\mathcal{G}$ is the most uncertain of all fundamental constants. The constant has been measured also at the International Bureau of Weights and Measures. Very precise measurements are interesting also from the viewpoint of physics.

Uvod

Gravitacija je najšibkejša sila v naravi. Gravitacijske konstante ni mogoče povezati z drugimi konstantami v količine, ki bi jih natančno izmerili. Izjema je produkt gravitacijske konstante in mase Zemlje, ki ga izmerijo z relativno negotovostjo $2 \cdot 10^{-9}$. Vendar mase Zemlje ni mogoče natančno izmeriti. Zato morajo gravitacijsko konstanto meriti neposredno [10].

Ob raziskovanju možnosti za zaznavanje gravitacijskega valovanja so podrobno preiskali nihanje prožnih teles z majhno frekvenco. Kazuaki Kuroda je obravnaval nihanje torzijskih nihali z žičkami in leta 1995 ugotovil, da merjenje moti odstopanje od idealne prožnosti in z njim povezano dodatno dušenje [10]. Pri sobni temperaturi se pojavijo napake, zaradi katerih je izmerjena gravitacijska konstanta prevelika za člen, obratno sorazmeren z dobroto nihala Q . O tem so se prepričali pri merjenju z žarjeno volframsko žičko, kremenovo nitko in hladno vlečeno volframsko žičko. V tem vrstnem redu se je zmanjšala dobrota in so za gravitacijsko konstanto dobili vse večje vrednosti. Odtlej gravitacijske konstante ne merijo več s torzijskim nihalom z žičko. Poleg drugih merilnih načinov pa še naprej uporabljajo torzijsko nihalo, v katerem žičko nadomestijo s tankim trakom.

Trak in žička

Pri torziji je zasuk φ sorazmeren z navorom M , če navor ni prevelik: $M = D\varphi$. Pri merjenju gravitacijske konstante *torzijski koeficient* D za tanek trak sestavijo iz dveh členov [7]:

$$D = \frac{Gbs^3}{3l} + \frac{Fb^2}{12l}. \quad (1)$$

Prvi – prožnostni – člen je povezan s prožnostjo neobremenjenega traku. V njem je G strižni modul, b širina, s debelina in l dolžina traku. Drugi – obremenitveni – člen je povezan z obremenitvijo. F je sila, ki napenja trak, to je teža mg , če je na trak obešeno telo z maso m . Za primerjavo navedimo torzijski koeficient žičke s krožnim presekom s premerom $2R$:

$$D' = \frac{G\pi R^4}{2l} + \frac{FR^2}{2l} = \frac{\pi R^4}{2l}(G + \sigma), \quad \sigma = F/(\pi R^2). \quad (2)$$

Prožnostna člena je utemeljil Barreé de Saint-Venant leta 1864 in ju najdemo v večini učbenikov prožnosti. Učbenik L. D. Landaua in E. M. Lišica ju skrbno obdela in poudari, da je račun podoben kot pri obremenjeni opni in toku viskozne tekočine po ceveh [3]. Obremenitvena člena so odkrili precej pozneje [1]. V večini učbenikov ju ni najti in tudi sicer ju večkrat spregledajo. Pri traku drugi člen postane pomemben pri veliki obremenitvi.

Nakažimo izpeljavo obremenitvenih členov. V navpičnem tankem obremenjenem traku z debelino s opazujemo pramena traku s širino dr v razdalji r na eno in na drugo stran od osi na sredini. Pramen na spodnjem krajišču v navpični smeri obremenjuje sila $(F/bs)sdr$. Zunanji navor M na spodnjem krajišču povzroči, da se trak zasuče za kot φ . Zaradi tega se opazovana pramena za kot $\sin \phi = \phi = (r/l)\sin \varphi = (r/l)\varphi$ odklonita od navpičnice. Upoštevali smo, da sta kota majhna, in sinusa nadomestili z ločno merjenima kotoma. Vodoravna komponenta sile je $(F/bs)sdr(r/l)\sin \varphi = (F/bs)sdr \cdot (r/l)\varphi$. Na simetrični pramen na nasprotni strani osi deluje nasprotno enaka vodoravna komponenta sile. Komponenti sestavljata dvojico sil z razdaljo prijemališč $2r$ in navorom dvojice $(F/bs)sdr \cdot (r/l)\varphi \cdot 2r$. Celotni navor dobimo, ko seštejemo prispevke vseh pramenov v traku od 0 do $\frac{1}{2}b$:

$$M = \varphi(F/lbs) \cdot 2s \int_0^{\frac{1}{2}b} r^2 dr = (Fb^2/12l)\varphi = D\varphi.$$

Podobno računamo pri obremenjeni žički. Opazujemo silo $(F/\pi R^2)rdrd\alpha$ na pramen, ki ima na spodnjem krajišču presek $rdrd\alpha$. Integriramo po r od 0 do R in po α od 0 do π :

$$M = \varphi(F/l\pi R^2) \int_0^R 2r \cdot r^2 dr \int_0^\pi d\alpha = (FR^2/2l)\varphi = D\varphi.$$

V drugem zapisu zveze (2) je napetost σ veliko manjša, denimo sto-krat, od strižnega modula. Pri žički zato prožnostni člen vselej prevlada obremenitvenega in se ni mogoče izogniti odstopanju od idealne prožnosti in dodatnemu dušenju. Upoštevajmo samo prožnostni člen v (2) in izračunajmo razmerje torzijskih koeficientov D/D' , če je na traku obešeno telo z enako maso kot na žički in sta preseka enaka, $bs = \pi R^2$. Razmerje $D/D' = 2\pi s/(3b) + \pi b\sigma/(6sG)$ je pri zelo tankem in močno obremenjenem traku manjše kot 1. Torzijska tehtnica s trakom je bolj občutljiva kot tehtnica z žičko. V tem primeru obremenitveni člen znatno preseže prožnostnega in dodatno dušenje postane nepomembno.

Naprava

V Mednarodnem uradu za uteži in mere BIPM v Sevresu blizu Pariza je raziskovalna skupina pred letom 1997 pripravila načrt za napravo, ki omogoči merjenje gravitacijske konstante na dva načina [9].¹ Z napravo z nekaterimi podobnimi lastnostmi so leta 2000 merili na univerzi Washington v Seattlu [10]. Vse kaže, da je skupina na BIPM načrte naredila neodvisno od te skupine. Leta 1999 je poročala o poizkusnem merjenju [9]. Leta 2001 je objavila rezultat prvega merjenja na oba načina [5]. Z izdatno predelano napravo je poskus ponovila leta 2013 [6]. Člani skupine so poleg tega sproti objavljali zanimive delne ugotovitve, do katerih so prišli na opisani poti.

Za torzijsko tehtnico so izbrali trak iz zlitine bakra in 1,8 % berilija z debelino 0,03 mm, širino 2,5 mm in dolžino 160 mm. Na traku je visel aluminijast krožnik s premerom 295 mm in debelino 8 mm. Njegovo maso so zmanjšali z okroglimi odprtini. Na krožniku so bile simetrično nameščene štiri valjaste uteži s premerom in višino 55 mm iz zlitine bakra in 0,7 % telurja z maso po 1,2 kg in s središči v razdalji 120 mm od osi (slika na naslovnici). Ves krožnik z utežmi je imel maso okoli 6 kg. To ustreza približno $\frac{4}{5}$ porušne obremenitve in zmanjša delež prožnostnega člena na samo 4 % torzijskega koeficienta. S tem so se znebili dodatnega dušenja. Vse to je bilo nameščeno v vakuumski posodi. V njej je nihalo, to je krožnik s štirimi majhnimi valji na traku, nihalo z nihajnim časom 120 s in dobrotto 10^5 .

Zunaj vakuumske posode so bile na vrtiljaku simetrično nameščene štiri večje uteži iz enake zlitine bakra in telurja s premerom 120 mm in višino 115 mm z maso po 11 kg. Osi večjih uteži so bile v razdalji 214 mm od osi nihala. Vrtiljak so preko jermena premikali s koračnim motorjem. Če so velike uteži stale nasproti manjših uteži, z gravitacijo nanje niso izvajale

¹Terry Quinn se je leta 2004 upokojil kot direktor in Richard Davis kot višji raziskovalec BIPM, Clive Speake je član univerze v Birminghamu, Harold Park pa je bil raziskovalec na BIPM.

navora. Ko so vrtiljak zavrteli za $18,898^\circ$ na eno ali na drugo stran, pa je bil navor gravitacije velikih uteži na majhne uteži največji.

Zasuk so merili z avtokolimatorjem z veliko ločljivostjo na ravnem zrcalu na nihalu. Nanj so bila zaradi simetrije pritrjena tri enaka zrcala, ki jih niso uporabljali. Celotna naprava je bila v posebnem prostoru, v katerem se med merjenjem temperatura ni spremenila za več kot za $0,1^\circ$. Naprava je stala na osnovni plošči merilnika koordinat.

Prvi način s prostim nihalom

Pri prvem merilnem načinu so najprej vrtiljak spravili v položaj, v katerem so bili veliki valji nasproti majhnih in je bil navor gravitacije enak nič. Z avtokolimatorjem so določili v tej legi zasuk $\varphi = 0$. Potem so zasukali vrtiljak za $\varphi = 18,898^\circ$ na eno stran, da je bil gravitacijski navor največji, in po pol ure za toliko na drugo stran ter so to ponavljali. Nihalo je prosto nihalo in preko računalnika so vsake 4 s izmerili njegov zasuk (slika 1). Nihajni čas T so povezali s torzijskim koeficientom:

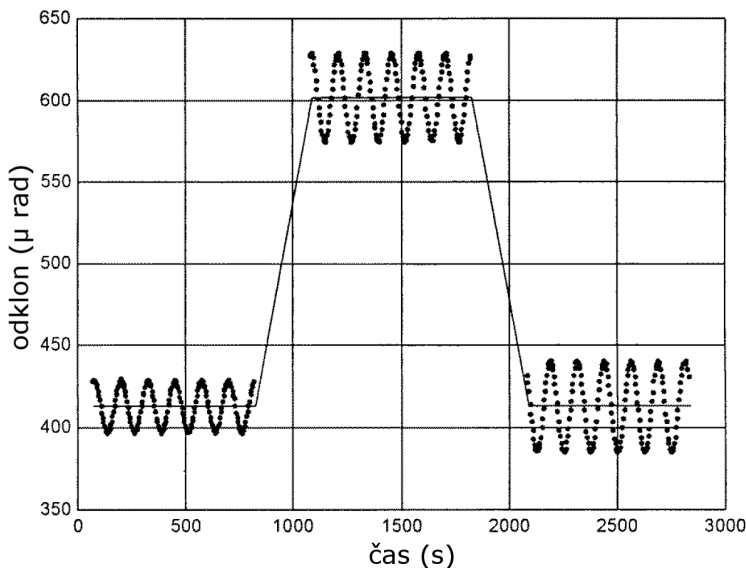
$$D = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 J \quad (3)$$

preko vztrajnostnega momenta nihala J . Enačbi za zasuk $M = D\varphi$ so dodali enačbo $M = \mathcal{G}\Gamma$ in z njo vpeljali funkcijo gravitacijske sklopitve med nihalom in vrtiljakom Γ . Enačbi za skrajno lego dasta skupaj z zvezo (3) gravitacijsko konstanto:

$$\mathcal{G} = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \frac{J}{\Gamma} \varphi_0. \quad (4)$$

Vztrajnostni moment nihala J in funkcijo sklopitve Γ so izračunali po porazdelitvi mas sestavnih delov naprave, nihajni čas T in zasuk φ_0 pa izmerili.

Preizkusili so natančnost merilnika koordinat in ugotovili, da so koordinate določili na $0,4 \mu\text{m}$ natančno. Posebno skrbno so premerili lego osi manjših in večjih valjev. Vztrajnostni moment nihala so preizkusili tako, da so posebej izmerili vztrajnostne momente sestavnih delov. Pri računanju vztrajnostnega momenta nihala so si pomagali z računalniškim programom. Po dveh poteh so dobili tudi sklopitveno funkcijo. Najprej so jo izračunali s privzetkom, da gre za točkasta telesa, in dobili $\Gamma = 70Mmr^4/R^5$, če je r razdalja središč majhnih valjev z maso m od osi in R razdalja središč velikih valjev z maso M od osi. Nihalo s štirimi simetrično razmeščenimi manjšimi valji ima 16-polni masni moment nasproti kvadrupolnemu momentu prečke pri nekdanjih merjenjih. Tako motilni gravitacijski navor oddaljenih gibajočih se teles v laboratoriju pojema s peto potenco oddaljenosti. Pri prečki pa ta navor pojema s tretjo potenco oddaljenosti. Podrobno so premislili, kako natančni so bili posamezni koraki v računih in pri merjenju.



Slika 1. Časovni potek nihanja nihala med dvema skrajnima legama vrtiljaka [5].

Nihalo se je odklonilo za $31,5'' = 0,153$ miliradiana, ko so vrtiljak premaknili za $\pm 18,898^\circ$. Tako so dobili za torzijski koeficient traku $D = 2,06 \cdot 10^{-4}$ Nm/radian pri gravitacijskem navoru približno $3 \cdot 10^{-8}$ Nm. Ta je bil za več velikostnih stopenjši kot pri nekdanjih merjenjih s prečko.

Desetkrat so izmerili zasuk φ s tem, da so pri vsakem merjenju upoštevali 34 podatkov v tridesetminutnih časovnih intervalih, v katerih so zasukali vrtiljak za $18,898^\circ$ na eno ali drugo stran. Tako so dobili za gravitacijsko konstanto $6,67566 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ z relativno negotovostjo $5 \cdot 10^{-5}$.

Drugi način z vezanim nihalom

Pri drugem merilnem načinu so z električnim poljem dosegli, da se nihalo ni premaknilo iz začetnega položaja glede na vrtiljak in je prožni trak ostal nedeformiran. S tem so popolnoma izločili morebitne motnje zaradi neidealne prožnosti traku. V ta namen so nasproti štirim manjšim valjem na vrtiljak postavili štiri majhne valjaste elektrode. Kot druge elektrode so uporabili manjše valje same. Električno polje s frekvenco 1 kHz med pari elektrod je preko servomotorja poskrbelo, da je nihalo sledilo zasuku vrtiljaka in je trak ostal nedeformiran. Torzijski koeficient so dobili naravnost z odvisnostjo elektrostatične potencialne energije od zasuka: $dU/d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 (dC_{ij}/d\varphi)(V_i - V_j)^2$. Pri tem so C_{ij} kapacitete med obema elektrodama in med elektrodo in preostankom naprave. Odvode $dC_{ij}/d\varphi$ so

dobili tako, da so vsako od kapacitet izmerili v odvisnosti od zasuka. Tako so izrazili navor in nazadnje $\mathcal{G} = M/\Gamma$. Sklopitvena funkcija Γ je bila enaka kot pri prvem merilnem načinu.

Drugi merilni način je za gravitacijsko konstanto dal $6,67520 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ z relativno negotovostjo $6,1 \cdot 10^{-5}$. Ta rezultat so sestavili z rezultatom pri prvem merilnem načinu v vrednost gravitacijske konstante $6,67545 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ z relativno negotovostjo $2,7 \cdot 10^{-5}$. Po mnenju merilcev ta vrednost statistično ni nasprotovala njihovi vrednosti $6,67559 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ z relativno negotovostjo $4,1 \cdot 10^{-5}$ iz leta 2001. Vrednosti iz leta 2001 in iz leta 2013 precej presegata podatke skupine CODATA.

CODATA	objavljeno	$\mathcal{G}$	negotovost
2010	2013	$6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
2006	2008	6,67428	1,0
2002	2005	6,6742	1,5
1998	2000	6,673	15
1986	1986	6,67259	1,3
1973	1973	6,6720	6,1

V BIPM so postopno izboljševali napravo in zmanjševali relativno negotovost [9, 5, 6]. Skrbno so preizkusili, kako je najbolje vpeti trak. Preiskali so premikanje vpetega dela. Zaradi tresljajev zemeljskega površja se namreč spreminja nagib tal v laboratoriju. Merili so ponoči, ko je bilo tresenja čim manj. Po merjenju v letu 2001 so napravo popolnoma predelali, da bi zmanjšali relativno negotovost. Ostali so le večji valji, pa še tem so zmanjšali višino.

Kako dalje?

Telesi z masama po 1 kg v razdalji 1 m se privlačita s silo, ki ustreza teži nekaj živih celic. Zelo zahtevno je tako majhne sile med kilogramskimi telesi izmeriti na 4 ali 5 mest natančno. Veliko drugih učinkov lahko preseže gravitacijo in vse te učinke je treba spoznati in upoštevati. Prednost naprave na BIPM je v dveh merilnih načinih. »Težko je uvideti, kako naj bi dva različna merilna načina dala dve števili, ki sta napačni, a se ujemata med seboj.« [4]

Metrologi se zavedajo težav. Več deset let so z radarjem natančno sledili gibanju planetov in ugotovili, da se gravitacijska konstanta s časom ne spreminja. Ugotovljene razlike jasno opozarjajo na »resne napake ali močno podcenjene relativne negotovosti« [2].

Februarja je Kraljeva družba v Londonu priredila dvodnevno mednarodno srečanje *Newtonova gravitacijska konstanta, konstanta, ki je pretežavna za merjenje?* Udeleženci so poročali o merjenjih gravitacijske konstante in o tem, kako razumejo in obravnavajo razhajanja med njimi ter razpravljali o ukrepih [11]. Po srečanju so oblikovali sklepe. Ni verjetno, da bi zadrego rešilo eno merjenje ali dve. Česa podobnega pri merjenju osnovnih konstant v fiziki še ni bilo. Izhod je treba najti, da ne bo nastal dvom o zmožnosti metrologov. Sklenili so, da bodo osnovali mednarodni konzorcij, ki bo spremljal merjenja gravitacijske konstante in v okviru katerega bo mogoče o merjenjih razpravljati še pred objavo, ne samo po njej.

Oktobra so v okviru delavnice na ameriškem Državnem inštitutu za standarde in tehnologijo v Bouldru razpravljali o mednarodnem konzorciju, o načinih za merjenje gravitacijske konstante in o predlogu, da bi si raziskovalne skupine izmenjale merilne naprave. O tem bodo objavili članek v reviji *Metrologia*.

Raziskovalna skupina Mednarodnega urada za uteži je zaradi treh napak v svojih računih za malenkost povečala ugotovljeno vrednost gravitacijske konstante [8]. Pri merjenju na prvi način je navedla $6,67586(36) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ in pri merjenju na drugi način $6,67515(41) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$. To je dalo končno vrednost $6,67554(16) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$.

LITERATURA

- [1] J. C. Buckley, *The bifilar properties of twisted strips*, Phil. Mag. **28** (1914) 779–787.
- [2] J. Cartwright, *The lure of G* , Physics World **27** (2014) 34–37 (2).
- [3] L. D. Landau in E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, Oxford 1970, 59–64.
- [4] C. Moskowitz, *Puzzling measurement of »big G « gravitational constant ignites debate*, Scientific American, (18. sept. 2013), <http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=puzzling-measurement-of-big-g-gravitational-constant-ignites-debate-slide-show/>, dostopano: 3. 11. 2014.
- [5] T. J. Quinn, C. C. Speake, S. J. Rihman, R. S. Davis in A. Picard, *A new determination of G using two methods*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 111101–1–4.
- [6] T. Quinn, H. Parks, C. Speake in R. Davis, *Improved determination of G using two methods*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 111102–1–5.
- [7] T. J. Quinn, C. C. Speake in R. S. Davis, *Novel torsion balance for the measurement of the Newtonian gravitational constant*, Metrologia **34** (1997) 245–249.
- [8] T. Quinn, C. Speake, H. Parks in R. Davis, *Erratum: Improved determination of G using two methods*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 039901.
- [9] S. J. Richman, T. J. Quinn, C. C. Speake in R. S. Davis, *Preliminary determination of G using the BIPM torsion strip balance*, Meas. Sci. Technol. **10** (1999) 460–466.
- [10] C. Speake in T. Quinn, *Newton's constant*, Phys. Today **67** (2014) 27–33 (7); J. Strnad, *O gravitacijski konstanti*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001) 19–25.
- [11] *The Newtonian Constant of Gravity, a Constant too Difficult to Measure?* royalsociety.org/events/2014/gravitation/, dostopano: 3. 11. 2014.

KAKO PREDSTAVITI CASIMIRJEV TLAK?

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 04.80.-y

V prispevku predlagamo izpeljavo Casimirjevega tlaka, ki ga lahko predstavimo pri predavanju iz osnov kvantne elektrodinamike. Najprej predstavimo osnovne prijeme pri enodimenzionalnem primeru, potem pa brez posebnih zapletov pridemo do slavne Casimirjeve enačbe. Namesto da bi računali gostoto energije, se raje takoj osredotočimo na tlak, kar eliminira razpravo v zvezi s polarizacijo nekaterih stoječih valov. Pokažemo tudi, da regularizacijska funkcija ne sme ostro odsekati področja z visokimi frekvencami, kot je to predlagano v nekaterih učbenikih.

HOW TO PRESENT CASIMIR PRESSURE

The article introduces simple derivation of Casimir pressure which could be presented in a course on basics of quantum electrodynamics. One dimensional case is introduced first which allows smooth transition to famous Casimir equation for pressure between two metal plates. We avoid calculation of energy density but start from the beginning with pressure, therefore eliminating discussion of polarization of certain standing waves. We show that regularizing function with sharp cut of high frequency region should not be used, as suggested in some textbooks.

Osnovno stanje elektromagnetnega polja v kvantni elektrodinamiki je stanje, kjer nimamo fotonov. To pa ne pomeni, da v tem stanju tudi polja ni. Kvantna elektrodinamika uči, da je energija v osnovnem stanju povezana s frekvenco tega stanja, in sicer znaša za dano polarizacijo $\frac{\hbar\omega}{2}$.

Obravnava valovanja v prostoru je bolj zapletena kot v tankem koaksialnem kablu. Zato si najprej oglejmo slednji primer. Stoječe valove tu opredelimo podobno, kot to storimo na struni z dolžino l , vpeti na dveh koncih. Stoječi valovi so tedaj podani z jakostjo električnega polja:

$$E(x, t) = E_0 \sin(\omega t) \sin(kx),$$

kjer mora valovno število k zadoščati pogoju:

$$k = \frac{\omega}{c}$$

in

$$kl = n_l\pi, \quad \omega_l = \frac{c\pi}{l}n_l,$$

kjer je n_l poljubno naravno število. Vsak n_l določi način nihanja in vsak način nihanja nosi energijo $\frac{\hbar\omega}{2}$. V klasični fiziki je lahko stoječi val prazen,

ga ni, preprosto predpostavimo, da je amplituda E_0 enaka nič. V kvantni elektrodinamiki pa ni tako. Vsak način nihanja nosi hočeš nočeš energijo $\frac{\hbar\omega}{2}$ in z njo fluktuacije elektromagnetnega polja. Ker je različnih načinov nihanja neskončno, je neskončna tudi energija vakuuma. Težko verjetno, verjetno tudi napačno. Načini nihanja pri zelo visokih frekvencah gotovo ne prispevajo toliko, da bi energija vakuuma divergirala. A kje je meja, danes še ne vemo.

Sedaj pa si po Casimirju zamislimo zelo dolg kabel, ki je na sredi predeljen z dvema tankima kovinskima stenama K_1 , K_2 , na katerih mora biti jakost električnega polja enaka nič. Razdalja med stenama K_1 in K_2 naj bo D . Casimir trdi, da na steni sedaj deluje sila, ki ju skuša zblížati. To presenetljivo ugotovitev bomo sedaj utemeljili.

Oglejmo si torej levo prevodno steno K_1 in si mislimo, da je levo od nje še zaključen kabel z dolžino l (glej sliko 1). Dolžino l bomo v računih na primernem mestu raztegnili preko vseh meja. V tem delu kabla imamo načine nihanja, ki smo jih pravkar opredelili. Med stenama K_1 in K_2 pa imamo kos kabla z dolžino D , zato so načini nihanja tu podani prav tako kot zgoraj, le da moramo namesto l pisati D . Seveda se spekter načinov nihanja spremeni, postane redkejši, kot je razvidno iz:

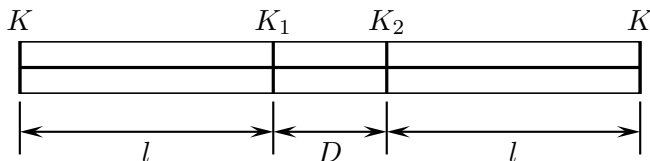
$$\omega_D = \frac{c\pi}{D}n_D.$$

Tako levi kot desni del kabla deluje na steno K_1 s silo. Vsak način nihanja prispeva svoj delež, ki ga brez težav določimo tako, da nekoliko premaknemo steno, denimo, da razdaljo l malo zmanjšamo. Zaradi tega premika se energija izbranega načina nihanja z n_l poveča, ker se poveča frekvenca tega načina. Torej je delo zunanje sile F_{lz} , ki zelo počasi premakne steno K_1 proti levi, enako spremembi energije izbranega načina nihanja:

$$dA_l = F_{lz}dl = \frac{\hbar}{2}d\omega_l.$$

Tako sila F_{lz} kot dl sta tu negativna, če privzamemo pozitivno smer sile proti desni. Torej je sila polja samega:

$$F_l = -\frac{\hbar}{2} \frac{d\omega_l}{dl} = \frac{\hbar\pi c}{2l^2}n_l.$$



Slika 1. Tanek koaksialni kabel s prevodnima stenama K_1 in K_2 , kjer je vozle jakosti električnega polja. Na levi strani od K_1 in na desni od K_2 je dolžina kabla l , med stenama pa D .

Podobno je sila na steno z desne zaradi načinov nihanja tam:

$$F_D(n_D) = -\frac{\hbar\pi c}{2D^2}n_D.$$

Rezultanta teh sil je:

$$\Delta F = F_l + F_D = \frac{\hbar\pi c}{2} \left(\sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} - \sum_{n_D=1}^{\infty} \frac{n_D}{D^2} \right).$$

Vsaka vsota zase divergira, razlika pa ne bi smela. Robnemu pogoju za jakost električnega polja na steni pač ne moremo povsem zadostiti, še posebno če imamo v mislih zelo visoke frekvence, denimo tiste, ki pripadajo sevanju gama. Padajoči sili F_D se torej z naraščajočo frekvenco vse bolj pridružuje sila F_l na račun prepuščenega valovanja, pri zelo visokih frekvencah se obeh meja ne čuti več in namesto F_D ostane le sila F_l . Vsoto po n_D moramo zato z naraščajočo frekvenco zmanjševati in ji ustrezno vse bolj dodajati del vsote po n_l . Vpeljemo padajočo odrezno funkcijo $f(\omega)$, ki od 1 pri nizkih frekvencah mehko in monotonno prehaja proti nič pri visokih, denimo s

$$f(\omega) = \exp(-\epsilon\omega)$$

s primerno izbranim pozitivnim ϵ . Rezultanto potem zapišemo takole:

$$\Delta F = \frac{\hbar\pi c}{2} \left[\sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} - \left(\sum_{n_D=1}^{\infty} \frac{n_D}{D^2} f(\omega_D) + \sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} (1 - f(\omega_l)) \right) \right]$$

ali pregledneje:

$$\Delta F = \frac{\hbar\pi c}{2} \left[\sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} f(\omega_l) - \sum_{n_D=1}^{\infty} \frac{n_D}{D^2} f(\omega_D) \right].$$

Vidimo, da sedaj posamezni vsoti pri vsakem pozitivnem ϵ konvergirata in lahko rezultanto brez težav izračunamo. V literaturi zasledimo trditve, da vpeljemo odrezno funkcijo le zato, da lahko sploh kaj izračunamo in se ji potem odrečemo (pri nas z limitiranjem ϵ proti nič), in da je to le eden od možnih predpisov za odpravo singularnosti. Tako razmišljanje pa privede do protislovja, saj lahko z različnimi predpisi pridemo do različnih rezultatov. Videli bomo, da izbira odrezne funkcije pri nas ni kritična, zadošča že vsaka dovolj hitro padajoča funkcija frekvence, ki upošteva, da se snovi pri zelo visokih frekvencah ne razlikujejo od vakuumu.

Preden se lotimo računanja vsot, uvidimo, da lahko vsoto po n_l zapišemo z integralom, ker je vsak člen vsote z naraščajočim l vse bolj podoben $\frac{\omega_l}{c\pi} \exp(-\epsilon\omega_l) \Delta(\frac{\omega_l}{c\pi})$, ki za $\Delta n_l = 1$ in z naraščajočim l pada proti nič. Torej:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} \exp(-\epsilon\omega_l) = \int_0^{\infty} \frac{\omega_l}{(c\pi)^2} \exp(-\epsilon\omega_l) d\omega_l.$$

Končno zapišemo rezultanto tako, da je povezava med integralom in vsoto vidna na prvi pogled:

$$\Delta F = \frac{\hbar\pi c}{2D^2} \left(\int_0^\infty v \exp\left(-\epsilon \frac{c\pi}{D} v\right) dv - \sum_{n_D=0}^\infty n_D \exp\left(-\epsilon \frac{c\pi}{D} n_D\right) \right),$$

kjer smo vpeljali $v = D\omega_l/c\pi$. V limiti, ko gre ϵ proti nič, lahko dobimo rezultanto v zaključeni obliki, saj si lahko v tem primeru pomagamo z Euler-Maclaurinovo sumacijsko formulo, prirejeno za naš primer:

$$\int_a^b F(x)dx - \sum_{n=a}^b F(n) = -\frac{1}{2}(F(a) + F(b)) - \frac{1}{12}(F'(b) - F'(a)) + R,$$

kjer za ostanek velja:

$$|R| \leq \frac{1}{120} \int_a^b |F'''(x)|dx. \quad (1)$$

Pri nas je torej

$$\int_0^\infty F(x)dx - \sum_{n=0}^\infty F(n) = \frac{1}{12}F'(0) + R$$

in $R = 0$, ker je v limiti $\epsilon \rightarrow 0$ tretji odvod funkcije $F(x) = x \exp(-\epsilon \frac{c\pi x}{D})$ enak nič za vse x . Torej je končno rezultanta

$$\Delta F = \frac{\hbar\pi c}{24D^2}.$$

Enodimenzionalnega primera smo se lotili zato, ker je tu računanje preprosto, nauči pa nas, kako ravnati v tridimenzionalnem primeru, kjer bomo izračunali tlak med dvema vzporednima kovinskima ploščama K_1 in K_2 .

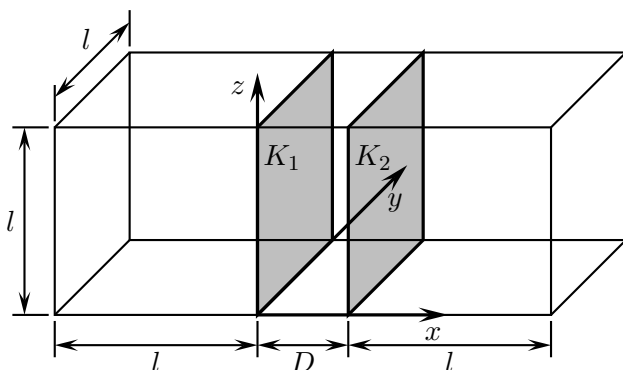
Analogno kot pri enodimenzionalnem primeru si zamislimo kvadratično prizmo z robovi l , l in dolžino $2l + D$ (glej sliko 2). Leva in desna kocka imata povsem odbojne površine, prav tako kvadratična prizma z osnovnima ploskvama, ki ju tvorita plošči. Jakost električnega polja v vseh ploskvah mora biti bodisi enaka nič ali pa pravokotna nanje. S superpozicijo stoječih valov si lahko pričaramo kakršnokoli valovanje znotraj kocke daleč od njenih sten. V kocki so stoječi valovi podani podobno kot pri kablu, le da za njihov opis potrebujemo tri cela števila $n_x \geq 0$, $n_y \geq 0$ in $n_z \geq 0$, od katerih sme biti le eno enako nič [2].

Iz valovne enačbe dobimo frekvenco ω danega načina nihanja, in sicer v kocki

$$\omega_l = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{l}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l}\right)^2},$$

v prizmi pa

$$\omega_D = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{D}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l}\right)^2}.$$



Slika 2. Originalna Casimirjeva naloga – v prostoru sta veliki vzporedni prevodni plošči. Na levo ploščo deluje na levi strani tlak zaradi ničelnih kolebanj v veliki kocki z robom l , na desni pa tlak v prizmi z robovi (D, l, l) . Iščemo razliko teh tlakov δp . Na sliki je prikazan eden od uporabljenih koordinatnih sistemov.

V kvantni elektrodinamiki vsak način nihanja z dano polarizacijo nosi ničelno energijo $\frac{\hbar\omega}{2}$. Če kocko vzdolž osi x počasi malo stisnemo, se frekvenca nihanja poveča in s tem tudi ničelna energija. Delo, ki smo ga pri stiskanju opravili, je enako spremembi te energije, torej

$$dA = F_{lz}dx = \frac{\hbar d\omega}{2}.$$

Naprej sklepamo enako kot v enodimenzionalnem primeru in za tlak dobimo

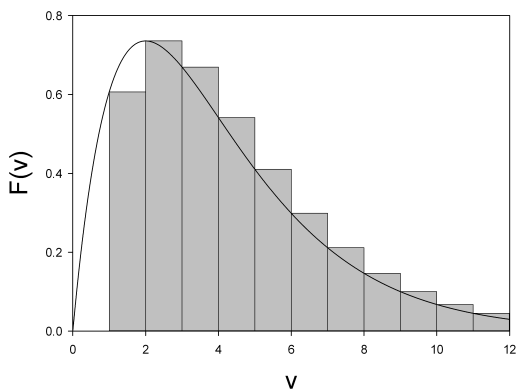
$$p_l = \frac{\hbar c \pi}{2l^3} \left(\frac{n_x}{l} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_x}{l} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{l} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{l} \right)^2}}.$$

V prizmi, kjer malo premaknemo eno od plošč tako, da s tem spremenimo razdaljo D , pa imamo

$$p_D = \frac{\hbar c \pi}{2l^2 D} \left(\frac{n_x}{D} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_x}{D} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{l} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{l} \right)^2}}.$$

Razliko teh tlakov sedaj izračunamo po enodimenzionalnem zgledu. Seštevanje po n_y in n_z opravimo z integracijo, kjer namesto $n_y^2 + n_z^2$ pišemo n^2 in vsoti v limiti $l \rightarrow \infty$ zamenjamo z integralom: $\sum_{n_y, n_z} \rightarrow \frac{1}{4} \int 2\pi n dn$. Faktor $\frac{1}{4}$ upošteva, da sta n_x in n_y lahko le nenegativni celi števili. Tako dobimo za razliko tlakov

$$\Delta p = p_l - p_D = \frac{\pi^2 \hbar c}{8D^4} \left(\int_0^\infty F(v) dv - \sum_{n=0}^\infty F(n) \right),$$



Slika 3. Slika funkcije $F(v)$ za enodimenzionalni primer. Prispevki k rezultanti sil ΔF so ponazorjeni kot razlike ploščin likov med krivuljo in histogramom. Torej so pri naraščajočem delu funkcije pozitivni, pri padajočem delu pa negativni.

kjer je funkcija $F(v)$ to pot nekoliko bolj zapletena:

$$F(v) = \int_0^\infty \frac{v^2 du}{\sqrt{u+v^2}} f\left(\frac{c\pi}{D} \sqrt{u+v^2}\right).$$

Integracijska spremenljivka u je preprosto povezana z n^2 . Za eksponentno odrezno funkcijo $f(\zeta) = \exp(-\epsilon\zeta)$ je funkcija $F(v)$ podana s

$$F(v) = \frac{2v^2}{\epsilon \frac{c\pi}{D}} \exp\left(-\epsilon \frac{c\pi}{D} v\right).$$

Od tu dalje moramo poznati parameter ϵ ali, še bolje, kar celotno odrezno funkcijo, ki najbolje opiše dejanske razmere, s katerimi imamo opravka. Presenetljivo pa je, da dobimo končen rezultat, če povsem nefizikalno predpostavimo, da sega odrezna funkcija poljubno globoko v visokofrekvenčno območje. Pri nas to dosežemo z limito $\epsilon \rightarrow 0$, pri kateri dobimo za Δp končen izraz z uporabo Euler-Maclaurinove formule. Upoštevati jo moramo do odvoda tretjega reda:

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx - \sum_{n=a}^b F(n) &= -\frac{1}{2}(F(a) + F(b)) - \frac{1}{12}(F'(b) - F'(a)) + \\ &+ \frac{1}{720}(F'''(b) - F'''(a)) + R. \end{aligned}$$

Ostanek R se izraža do faktorja tako kot v (1), le da je pod integralskim znakom četrti odvod funkcije $F(x)$. V limiti $\epsilon \rightarrow 0$ so vsi odvodi funkcije

$F(x)$ enaki nič, zato je tudi R enak nič, z izjemo tretjega odvoda, ki je enak 12, zato je limitna razlika tlakov

$$\Delta p = p_l - p_D = \frac{\pi^2 \hbar c}{480 D^4}.$$

Zapisano velja za izbrano polarizacijo električne poljske jakosti. Ker imamo v vsakem transverzalnem načinu nihanja dve neodvisni polarizaciji (način z $n_x = 0$ ima sicer le eno, a ne prispeva k tlaku), je končno

$$\Delta p = p_l - p_D = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 D^4}.$$

To je znamenita Casimirjeva enačba. Ker velja Euler-Maclaurinova enačba za vsako dovolj pohlevno funkcijo, o rezultatu ne dvomimo, tudi ne za našo prav posebno odrezno funkcijo.

V nekem učbeniku najdemo takle predlog za odrezno funkcijo: $f(\zeta) = 1$ za $\zeta < \zeta_0$ in 0 drugje. Da z njo ne pridemo do rezultata, se hitro prepričamo kar na preprostem enodimenzionalnem primeru. Razliko sil bi po tem predlogu zapisali kot:

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{2D^2} \left(\int_0^N v dv - \sum_{n_D=0}^N n_D \right).$$

Tako integral kot vsoto z lahkoto izračunamo v zaključeni obliki in dobimo

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{2D^2} \left(\frac{N^2}{2} - \frac{N(N+1)}{2} \right),$$

kar seveda ne konvergira. Konvergenco sicer dosežemo s spremenjeno zgornjo mejo pri integralu $N + \delta$ in potem določimo δ tako, da pri danem N predpišemo razliko integrala in vsote. A rezultat je potem seveda nedoločen do multiplikacijske konstante. Odrezna funkcija preprosto mora mehko padati proti nič, in prav padajoči del funkcije $F(v)$ zagotavlja konvergenco. Fizikalno s tem ni težav, saj vsaka prava stena začne tako ali drugače prepuščati valovanja pri dovolj velikih frekvencah.

Pri Casimirjevem primeru dveh prevodnih plošč sicer prevlada privlak med ploščama, krogelno lupino, na primer, pa tlak razganja. Pri tem tlak celo divergira, če odrezna funkcija prepočasi pada proti nič. Več o tej zanimivi tematiki najdemo v [1], ki je na voljo v naši fizikalni knjižnici.

LITERATURA

- [1] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohiden in V. M. Mostapenko, *Advances in Casimir Effect*, Oxford Univ. Press, 2009.
- [2] S. M. Dutra, *Cavity Quantum electrodynamics*, Wiley, 2005.

KAJ JE NOVEGA V HIŠI POLIEDROV?

V okviru Seminarja za diskretno matematiko smo si 5. 11. 2013 ogledali Hišo poliedrov na Tržaški cesti 2 v Ljubljani. Impresivna zbirka poliedrskih modelov (iz papirja, plastike, lesa), plakatov (z razlagami osnovnih pojmov v zvezi s poliedri), slik najpomembnejših razredov poliedrov, najrazličnejših sestavljanek za grajenje tridimenzionalnih struktur ter revij na temo poliedrov in simetrij je (po treh letih od prejšnjega obiska) precej narasla. Modeli poliedrov so ne samo urejeno razpostavljeni na dolgih lesenih policah ob eni steni, ampak se gnetejo tudi na mizicah, ob oknih in na osrednji mizi, nekateri pa celo visijo obešeni na nitkah z visokega stropa, od koder vladajo prostoru kot nekakšni oddaljeni planeti.

Izdelovanje poliedrskih modelov meji na umetnost, kot je to npr. izdelovanje origamijev, v katerem so tako dobri Japonci, ki npr. izdelujejo miniaturne papirnate figurice celo iz vstopnic na koncertih. Poliedri že od nekdaj privlačijo ne le matematike, ampak tudi umetnike (Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Paolo Uccello, idr.). Nekaj umetniških upodobitev poliedrov najdemo tudi na plakatih. In tudi sama Hiša poliedrov na vsakem koraku spominja na umetniški atelje, v katerega obiskovalci vstopijo s spoštljivim občudovanjem in si, ko se počasi pomikajo od eksponata do eksponata, ne morejo kaj, da se ne bi kakšnega modela dotaknili ter si ga kot uročni pozorno ogledovali z vseh strani.

Najlepsi so modeli uniformnih poliedrov (med katere sodijo tudi platon-ska in arhimedska telesa), ki imajo najbogatejše grupe simetrij, in ne samo da imajo ogliščni vzorec lic enak v vsakem oglišču (npr. trikotnik-kvadrat-trikotnik-petkotnik), ampak so tudi ogliščno-tranzitivni. Takih teles je (po leg dveh neskončnih družin prizem in antiprizem), kot je pravilno domneval Coxeter, 75. Takoj za njimi so po lepoti Johnsonova telesa (konveksna, s pravilnimi poligonskimi lici in z vsaj dvema orbitama oglišč); teh je 92, kot so dokazali Johnson, Grünbaum, Zallgaler idr. okrog 1960. Zanimiva so tudi Catalanova telesa (dualni arhimedskih), pa telesa iz samih romboedrskih gradnikov, pa telesa, ki zapolnjujejo prostor brez vrzeli. Srečamo pa tudi druge poliedre manj pravilnih oblik, kot so npr. nerigidni poliedri, ki jim lahko z vlečenjem spreminjamo obliko.

Obiskovalci si lahko ogledajo tudi zares impresivne tridimenzionalne strukture, kot je npr. velik torus, sestavljen iz drobnih gradnikov trikotne oblike, pa skulpture, sestavljene iz paličic in kroglic, v katerih so koncentrični poliedri vgnezdjeni drug v drugega in dejansko oblikujejo hiperploskve

(pri katerih se v vsakem robu sekajo vsaj tri lica). Podobe in podrobnosti teh čudovitih objektov, pa tudi njihova medsebojna razporeditev, se mimogrede vtisnejo v spomin, tako da se zlahka spomnimo celo njihovih točnih lokacij. Eno od sten krasi dvodimenzionalna spiralna struktura, prav tako zložena iz poliedrskih sestavljanek.

Obisk Hiše poliedrov je posebno doživetje. Delno si ga lahko pričaramo, če pogledamo na ustrezno spletno stran mathema.si, a vsakomur priporočam, da si razstavo ogleda tudi v živo.

Drugod po svetu je kar nekaj podobnih zbirk poliedrov, čeprav so tako bogate zbirke redke. Eno od ameriških zbirk je menda izdatno finančno podprla firma Google. Morda bi veljalo tudi tej zbirki v Hiši poliedrov, ki se bo zagotovo še širila in dopolnjevala ter predstavlja ne samo matematični, ampak že tudi umetniški in kulturni fenomen, zagotoviti večji prostor in boljše možnosti za nadaljnjo rast in razcvet.

Še ena nedavna, četudi morda težje uresničljiva pobuda v zvezi s poliedri (ki pa so jo podprli udeleženci Seminarja za zgodovino matematičnih znanosti 11. 11. 2013) pa je, da bi poliedrom, in s tem geometriji v prostoru, veljalo nameniti več pozornosti tudi v pedagoškem procesu in morda kdaj organizirati kakšno konferenco o poliedrih (z delavnicami za otroke, predavanji, tekmovanji, zbornikom, poliedrskim sejmom, ipd.). Za zgled bi si lahko vzeli npr. konferenco *Shaping Space* 1984, ki je zbrala na enem mestu matematike in umetnike ter številne druge ljubitelje poliedrov z vsega sveta in po kateri so kasneje izdali tudi knjigo (*Shaping Space: A Polyhedral Approach*, 1988), kot tretji del projekta pa oblikovali srednješolski tečaj prostorske geometrije, v katerem so igrali pomembno vlogo tudi poliedri.

Razumevanje osnovnih poliedrskih struktur ni le del osnovne matematične izobrazbe, ampak tudi naše kulturne dediščine (s poliedri so se ukvarjali že pitagorejci, pa starogrški in renesančni matematiki in umetniki), pomaga pa tudi v vsakdanjem življenju, npr. oblikovalcem, arhitektom, kemikom, kristalografom, naravoslovcem in drugim. Mnoge oblike v naravi, pa tudi mnoge konstrukcije človeških rok imajo poliedrsko strukturo. Moderni kiparji s svojimi stvaritvami nenehno širijo meje našemu razumevanju, kaj sploh so poliedri.

Res bi bilo škoda, da poliedrov, teh čudovitih teles, ki po zaslugi predanih izdelovalcev modelov ne obstajajo le v Platonovih nebesih, ampak jih lahko tudi vidimo in otipamo, ne bi bolje poznali prav vsi, ki jih zanimata matematika in umetnost. To je področje, ki je vseh praktično vsakomur, je poučno, zabavno, za razliko od nekaterih drugih matematičnih področij, ki so že skorajda izčrpana in dokončana, odpira vedno nove in nove probleme.

Jurij Kovič

VSEBINA

Članki	Strani
Kako išče Google? (Marjeta Kramar Fijavž)	121–131
Nekatere zgodovinske konstrukcije pravilnega sedemkotnika (Milan Hladnik)	132–145
Zapleti z gravitacijsko konstanto (Janez Strnad)	146–152
Kako predstaviti Casimirjev tlak? (Andrej Likar)	153–159
Vesti	
Kaj je novega v Hiši poliedrov? (Jurij Kovič)	160–XV

CONTENTS

Articles	Pages
How google works? (Marjeta Kramar Fijavž)	121–131
Some historical constructions of the regular heptagon (Milan Hladnik)	132–145
Complications with the Newtonian gravitational constant (Janez Strnad)	146–152
How to present Casimir pressure (Andrej Likar)	153–159
News	160–XV

Na naslovnici: Fotografija naprave za merjenje gravitacijske konstante v Mednarodnem uradu za uteži in mere. Dobro je mogoče videti štiri velike mirujoče valje. Med njimi je krožnik s štirimi majhnimi valji, ki pri merjenju na prvi način sučno niha (glej članek na strani 146).