PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **11** (1983/1984)
Številka 2
Strani 73–78

Edvard Kramar:

PITAGOREJSKE N-TERICE

Ključne besede: matematika, teorija števil, Diofantske enačbe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/11/647-Kramar.pdf

PITAGOREJSKE N-TERICE

Pitagorejsko trojico imenujemo trojico naravnih števil (x_1,x_2,x_3), ki rešijo enačbo

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

Bralec gotovo ve, da se imenuje po Pitagori zato, ker imamo količine x_1, x_2 in x_3 lahko za dolžine stranic pravokotnega trikotnika. Vse rešitve zgornje enačbe v okviru naravnih števil dobimo po znanih formulah

$$x_1 = 2Kpq \ , \quad x_2 = K(p^2-q^2) \ , \quad x_3 = K(p^2+q^2) \qquad (1)$$

kjer so p, q in K poljubna naravna števila in $p > q$. Če vzamemo $K = 1$, od p in q pa eno liho in eno sodo število, dobimo tako imenovane primitivne pitagorejske trojice, to je take, pri katerih števila x_1, x_2 in x_3 nimajo skupnega faktorja (glej npr. Presek 1977/78, str. 196). Namesto treh bi lahko iskali štiri naravna števila, ki imajo lastnost, da je vsota kvadratov prvih treh enaka kvadratu četrtega števila

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$$

Lotimo se še splošnejšega problema. Vzemimo poljubno naravno število $n \geq 3$ in imenujmo *pitagorejsko n-terico* nabor n naravnih števil $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, ki rešijo enačbo

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = x_n^2 \qquad (2)$$

Naša naloga bo najti kakšno pitagorejsko n-terico. Na prvi pogled je videti, da smo si zastavili težko nalogo, vendar bomo videli, da se da sorazmerno lahko najti kar precej rešitev.

Zgornjo enačbo bomo najprej nekoliko preoblikovali. Namesto količin x_1, x_2, x_3, ..., x_n vpeljimo količine u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v in z tako, da velja

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + z \\ x_2 &= u_2 + z \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{n-2} = u_{n-2}$$

$$x_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + v \tag{3}$$

$$x_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + v + z$$

Vsaki n-terici $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ustreza natanko ena n-terica $(u_1,u_2,\ldots,u_{n-2}, v,z)$, kajti brž lahko izrazimo nazaj nove količine s starimi:

$$u_1 = x_1 + x_{n-1} - x_n$$

$$u_2 = x_2 + x_{n-1} - x_n$$

$$\vdots$$

$$u_{n-2} = x_{n-2} + x_{n-1} - x_n$$

$$v = (n-2)x_n - (n-3)x_{n-1} - x_{n-2} - \ldots - x_2 - x_1$$

$$z = x_n - x_{n-1}$$

o čemer se ni težko prepričati. Pri tem je treba povedati, da kakšna od količin u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v in z lahko tudi ni pozitivno število, čeprav so x_1, x_2, ..., x_n vsa pozitivna števila. Če sedaj zveze (3) vstavimo v enačbo (2), po krajšanju dobimo

$$2vz = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + (n-3)z^2$$

Namesto enačbe (2) moramo torej rešiti to enačbo v okviru celih števil. Ker morajo biti x_1, x_2, ..., x_n pozitivna števila, se omejimo na to, da tudi količine u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v in z vzamemo za pozitivna cela števila, s čimer zaradi (3) zgornjo zahtevo gotovo izpolnimo. Rešitve, ki bi jih dobili tako, da bi bila kakšna od količin u_1, u_2, ..., u_{n-2}, v ali z negativna ali nič, nas ne bodo zanimale. Saj nam ne gre za to, da bi našli prav vse rešitve. Zgornjo enačbo lahko pišemo tudi v obliki

$$v = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + (n-3)z^2)/(2z) \tag{4}$$

Videli bomo, da lahko dobimo veliko rešitev te enačbe. Čim večji je n, tem bogatejša je množica rešitev. Oglejmo si samo nekatere od možnih poti do nekaterih rešitev enačbe (4) in s tem potem do rešitev prvotne enačbe (2).

Izberimo najprej $z = 1$; tedaj imamo

$$v = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + (n-3))/2$$

in vidimo, da moremo količine u_1, u_2, ... in u_{n-2} izbrati čisto poljubno, le da je vsota v oklepaju sodo število. To pa dosežemo na primer tako, da izberemo za u_1 sodo število, števila u_2, u_3, ..., u_{n-2} pa so vsa liha, sicer pa čisto poljubna. Namreč če je n sodo število, je $u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2$ kot vsota lihega števila lihih števil tudi sama liho število, táko pa je tudi število n-3. Če pa je n liho število, je $u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2$ sodo število, kakršno pa je tudi število n-3. Iz zvez (3) dobimo potem iskane n-terice

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + 1 \\ x_2 &= u_2 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= u_{n-2} + 1 \\ x_{n-1} &= u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + (u_1^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + n-3)/2 \\ x_n &= x_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

Če uvedemo parametre $q_i = u_i + 1$, za $i = 1, 2, \ldots, n-2$, dobimo preglednejše obrazce

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= q_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= q_{n-2} \\ x_{n-1} &= (q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_{n-2}^2 - 1)/2 \\ x_n &= (q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_{n-2}^2 + 1)/2 \end{aligned} \tag{5}$$

(q_1 - liho število, q_2, ..., q_{n-2} pa soda števila, večja od 1)

Dobili smo n-2 parametrično rešitev, ker števila q_1, ..., q_{n-2} lahko poljubno izbiramo, paziti moramo le na dogovor o parnosti.

Na podoben način bi lahko odbili še druge rešitve, ena je na primer tale: za u_1 vzamemo naravno število nasprotne parnosti, kot je število n, za u_2,

$u_3, \ldots, u_{n-2}$ pa vzamemo števila iste parnosti, kot je n. Prepričaj se sam, da je tedaj zopet v naravno število, in sestavi obrazce za $x_1, \ldots, x_n$.

Iz dobljenih izrazov (5) lahko naredimo enostavnejše, vendar manj splošne rešitve. Ena takih možnosti je, če izberemo $q_1 = 2k + 1$, $q_2 = q_3 = \ldots = q_{n-2} = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, tedaj dobimo naslednje pitagorejske n-terice

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k + 1 \\ x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-2} &= 2k \\ x_{n-1} &= 2(n-2)k^2 + 2k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ x_n &= 2(n-2)k^2 + 2k + 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Dobili smo torej enoparametrično družino rešitev, saj lahko samo število k izbiramo še poljubno. Z nekoliko domišljije lahko zopet sam dobiš še kakšne posebne obrazce.

Zgornje rešitve smo dobili pri privzetku, da je $z = 1$. Na podoben način dobimo rešitve tudi za primere, ko postavimo $z = 2$, $z = 3$, itd.

Oglejmo si še eno zelo splošno rešitev, ki jo dobimo tako, da postavimo v (4): $z = 2m^2$ in $u_i = 2mr_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Pri tem so m in $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-2}$ poljubna naravna števila. Za parameter v dobimo izraz

$$v = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{n-2}^2 + (n-3)m^2$$

katerega vrednost je gotovo naravno število. Zaradi lažjega pisanja uvedimo oznake $p_i = r_i + m$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, nakar preko zvez (3) dobimo

$$\begin{aligned} x_1 &= 2mp_1 \qquad\qquad p_i > m \\ x_2 &= 2mp_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= 2mp_{n-2} \\ x_{n-1} &= p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{n-2}^2 - m^2 \\ x_n &= p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{n-2}^2 + m^2 \end{aligned} \tag{7}$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}$ in m poljubna naravna števila, le da je $p_i \geq m+1$, za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (glej, kako smo vpeljali količine p_i). Za pitagorejske n-terice smo torej dobili rešitve, v katerih lahko $n-1$ parametrom izbiramo še poljubne vrednosti. Če pa upoštevamo dejstvo, da vse te količine lahko še pomnožimo s skupnim faktorjem K, dobimo celo n parametrično rešitev, torej zares bogato množico.

Oglejmo si še nekaj posebnih primerov zgornjih rezultatov. Če je $n = 3$, gre za običajne pitagorejske trojice. Zanje dobimo iz (7)

$$x_1 = 2mp, \quad x_2 = p^2 - m^2, \quad x_3 = p^2 + m^2$$

kjer smo pisali $p = p_1$. Pri tem sta p in m poljubna, le $p > m$. Če te zveze pomnožimo še s skupnim faktorjem K, dobimo na začetku omenjene rešitve (1). Iz (6) pa dobimo naslednje trojke:

$$x_1 = 2k + 1, \quad x_2 = 2k^2 + 2k, \quad x_3 = 2k^2 + 2k + 1; \quad k = 1, 2, \ldots$$

ki so najbrž tudi že komu poznane. Iz njih dobimo na primer trojke (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), itd. Vendar seveda ne vseh, npr. trojke (8,15,17) ne dobimo na ta način.

Vzemimo še primer $n = 4$. Iz zvez (5) dobimo naslednje pitagorejske četvorke

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= q_2 \\ x_3 &= (q_1^2 + q_2^2 - 1)/2 \\ x_4 &= (q_1^2 + q_2^2 + 1)/2 \end{aligned}$$

kjer je q_1 liho število, q_2 pa sodo ali obratno. Zveze (6) nam dajo rešitve, ki jih lahko pišemo v obliki

$$\begin{aligned} x_1 &= k \\ x_2 &= k + 1 \\ x_3 &= k(k + 1) \\ x_4 &= k(k + 1) + 1 \end{aligned} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

saj sta števili k in $k+1$ nasprotne parnosti. Dobili smo zelo preprost obrazec, ki nam da četvorke (1,2,2,3), (2,3,6,7), (3,4,12,13), itd. Zapišimo še obrazec, ki ga dobimo iz (7)

$$\begin{aligned} x_1 &= 2mp \\ x_2 &= 2mq \\ x_3 &= p^2 + q^2 - m^2 \\ x_4 &= p^2 + q^2 + m^2 \end{aligned} \qquad (p > m,\ q > m)$$

kjer smo pisali $p = p_1$ in $q = p_2$. Za števila p, q in m lahko izbiramo poljubna naravna števila, le na pogoj na desni moramo paziti.

Problem iskanja pitagorejskih četvork lahko tudi geometrijsko obarvamo. Iščemo take kvadre, ki imajo za dolžine stranic naravna števila $a = x_1$, $b = x_2$, $c = x_3$, pri katerih ima tudi telesna diagonala celoštevilsko dolžino $d = x_4$. Sicer pa tudi pri drugih geometrijskih problemih pogosto nastopajo izrazi oblike $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ in zlasti sestavljalci raznih nalog pogosto radi izberejo za x_1, x_2 in x_3 taka cela števila, da je tudi koren celo število. Tak primer je na primer $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$.

Zapišimo nazadnje nekaj pitagorejskih četvork, ki jih dobimo iz nekaterih zgornjih obrazcev. Zaradi boljše preglednosti so urejene v smislu: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Bralec si bo sam naredil podobne tabele za nekaj pitagorejskih peterk, šesterk, itd.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	2	3
1	4	8	9
2	3	6	7
2	4	4	6
4	4	7	9
3	6	6	9

x_1	x_2	x_3	x_4
2	6	9	11
6	6	7	11
3	4	12	13
2	5	14	15
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....