PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 3
Strani 142–146

Vilko Domajnko:

ARHIMEDOVA SPIRALA, 1. del

Ključne besede: matematika, Arhimed.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/17/982-Domajnko-Arhimed.pdf

ARHIMEDOVA SPIRALA, 1. del

Stari Grk Arhimed (287? - 212 pr.n.št.) velja za najpomembnejšega antičnega naravoslovca. Bil pa je tudi izredno plodovit pisec. Napisal je kar okrog petnajst knjig ali daljših razprav s področja matematike in fizike. Večina izmed njegovih del je v takšni ali pa drugačni obliki dostopna še danes, za nekaterimi pa je žal že izgubljena sleherna sled.

Arhimedova knjiga O spiralah je med njegovimi sodobniki menda žela največ slave in občudovanja. Vendar pa naj bi bila to ena izmed najmanj branih Arhimedovih knjig, kajti stopnja zahtevnosti je bila za ogromno večino bralcev le previsoka. Pa čeprav nejasnost v razlagi in zapletenost pri razpostavljanju misli nikdar nista bili "odlitki" Arhimedovega pisanja.

Torej - bodimo "pristni" Arhimedovi občudovalci, spoznajmo ga, do koder ni prezahteven.

Knjiga se začne z Arhimedovim nagovorom Dositeju.

"Arhimedov pozdrav Dositeju"

Že večkrat si me prosil za dokaze izrekov, ki sem jih nekoč poslal Kononu in katerih večji del si si lahko tudi ti ogledal v knjigi, ki ti jo je dal Heraklej. V tej knjigi, ki ti jo pošiljam sedaj, pa so zbrani prav vsi omenjeni izreki, skupaj z dokazi. In naj te nikar ne preseneča, kako da sem potreboval toliko časa, preden sem naposled uspel objaviti tudi te dokaze. Želel sem jih pač najprej dodobra preveriti v pogovoru z ljudmi, ki se ukvarjajo z matematiko in ki jim skrbnost pri tem ni v nadlego. Resnično, koliko izrekov, ki so se mi spočetka zdeli celo komajda verjetni, sem uspel izdelati na tak način! Žal pa je Konon umrl prej, preden bi sam izdelal teorijo, ki jo je vzpodbudil. Zagotovo bi že njemu samemu uspelo odkriti in objaviti vse te reči in mislim celo, da bi obogatil geometrijo s še kakšnimi novimi izreki, ki jih ni najti v tej moji knjigi. Kajti njegove sposobnosti v matematiki so bile sijajne, pa tudi pri delu je bil izjemno marljiv. In čeprav je minilo že mnogo let od njegove smrti, mi še zmeraj ni uspelo opaziti, da bi se kdorkoli ukvarjal s problemi, ki nam jih je zapustil. Zatorej ti pošiljam na vpogled svoj prispevek".

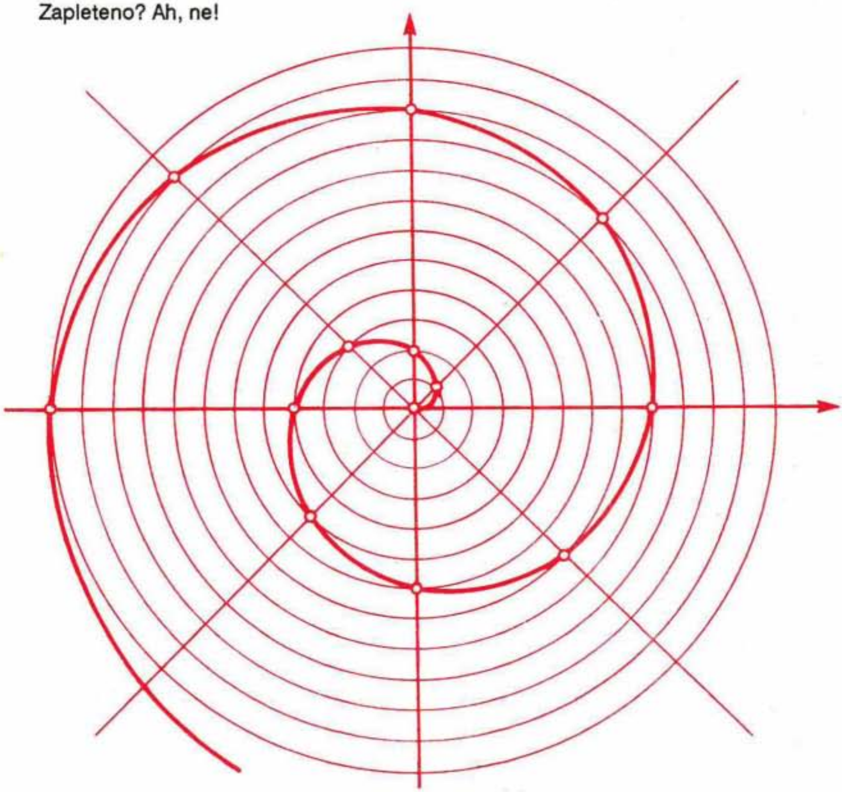
Trojica Arhimed, Dositej in Konon zagotovo ni zgolj po naključju prisotna na uvodni strani te znamenite knjige. S Kononom s Samosa se je Arhimed seznanil v Aleksandriji, kjer sta skupaj študirala matematiko. Do konca življenja sta ostala tesna prijatelja, čeprav sta kasneje živela daleč narazen, in drug drugemu sta pomenila veliko oporo pri snovanju svojih teorij v geometriji. Dositej pa je bil Kononov učenec in z njim si je Arhimed dopisoval kasneje, ko je Konon že umrl.

Poglejmo, kako Arhimed kasneje v knjigi definira spiralo: Zamislimo si, da se v ravnini nek poltrak vrti okrog svojega izhodišča, pritrjenega v izbrani točki. Ves čas se naj vrti s konstantno kotno hitrostjo ω. Iz izhodišča pa naj potuje po poltraku točka, tudi ta ves čas s konstantno hitrostjo v v smeri poltraka. Spirala je sled, ki jo zariše ta točka na svoji poti.

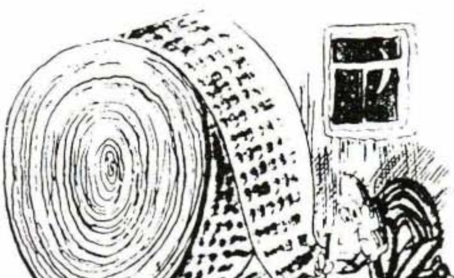
Seveda, kasneje se je te krivulje oprijelo ime Arhimedova spirala. Kar pa Arhimedu zagotovo ne bi bilo pogodu, saj je kot njenega odkritelja ves čas vztrajno omenjal prijatelja Konona.

Arhimedovo spiralo konstruiramo tako, da najprej narišemo koncentrične kroge z enakomerno naraščajočimi polmeri, hkrati pa kar na isto risbo tudi mnogokotnike nekega izbranega kota (recimo 45°), ki predstavljajo lego vrtečega se poltraka ob konstantnih časovnih intervalih; nato s pikami označimo presečišča slehernega izmed poltrakov s pripadajočo krožnico. Naposled označene točke le še elegantno spojimo s krivuljo.

Zapleteno? Ah, ne!

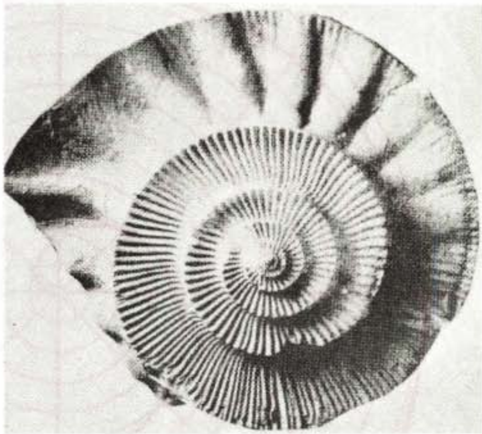


Slika 1



Slika 1 + 1/3. Bralcem seveda toplo priporočamo, naj takšnega modela Arhimedove spirale ne jemljejo niti povsem zares niti ne povsem za šalo.

Ne vem, ali se tudi bralcu zdi ta krivulja zapletena in nenavadna. Sam moram reči, da se mi je v srednješolskih letih izmed vseh krivulj v knjižici z zbranimi grafi elementarnih funkcij zdela prav Arhimedova spirala morda najbolj nenavadna. Tuja in čisto drugačna od vseh, kar smo jih takrat spoznali pri pouku matematike. Neujemljiva, nespoznavna. Morda bi jo imel celo za eno najpopolnejših krivulj, če me ne bi nenehno spominjala na polža in na njegovo hiško. Hm, kako sem se nasmejal kasneje ob spominu na to miselno povezavo, ko sem spoznal, da je polževa hiša pravzaprav mnogo bliže logaritemski kakor pa Arhimedovi spirali.



Slika 2 Nekateri polži imajo narejene svoje hišice v obliki logaritemske spirale. Na sliki je hišica amonita, že davno izumrle živali iz mezozoika.

Da bi tudi vam ta navihana krivulja ne burila preveč domišljije, morda ne bo odveč, če pokažem, da je prav Arhimedova spirala ena izmed najbolj normalnih in običajnih krivulj. Potrebno si jo je ogledati pač tudi z drugega zornega kota.

V definiciji spirale izvemo, da sta kot zasuka poltraka (imenujmo ga ϕ), po katerem potuje točka, in pa oddaljenost te točke (imenujmo jo r) od izhodišča v linearni zvezi. Seveda, saj točka v enakih časovnih intervalih, torej pri enako velikih zaporednih kotnih zasukih, opravi zmeraj enako dolgo pot po poltraku.

Torej $r = a \cdot \phi$

pri čemer je: ϕ - kot zasuka

r - oddaljenost točke od izhodišča

a - koeficient v razmerju (Če je σ kotna hitrost vrtenja poltraka okrog izhodišča, v pa hitrost točke na poltraku, je $a = v/\sigma$. In enačbo Arhimedove spirale sedaj takole preberem - če se spremeni za enoto velikosti, se r spremeni za a enot dolžine.)

Gornja enačba seveda prav sumljivo spominja na nam vsem dobro poznano enačbo premice

$$y = k \cdot x$$

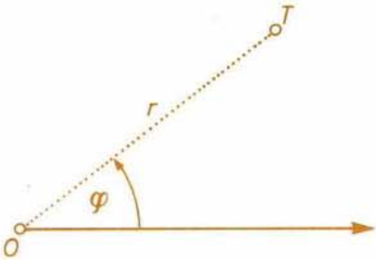
kjer je pač natanko ista pesem - ob enakih spremembah spremenljivke x se tudi spremenljivka y spremeni za zmeraj enako vrednost. Pri tem k odigra vlogo koeficienta v sorazmerju (če se x spremeni za enoto, se y spremeni za k enot).

Tako. Sedaj bi bilo pa nemara dobro razčistiti z vprašanjem - le kako torej, da imata enačbi, ki vsaka zase opisujeta pravzaprav povsem enako vrsto odvisnosti med dvema spremenljivkama (linearna odvisnost je očitna tako v $r = a.\phi$ kakor tudi v $y = k.x$), tako zelo različni krivulji za svojo ponazoritev?

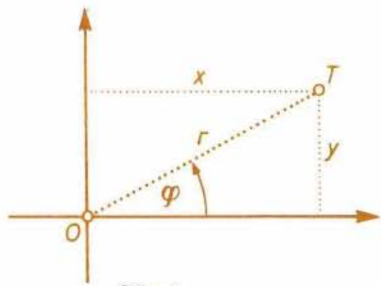
Pa pri tem ne bo šlo drugače, kakor da hočeš-nočeš napravimo majhen zamik in se na hitro poučimo o raznovrstnosti koordinatnih sistemov v ravnini.

Omenili bomo dva: pravokotni koordinatni sistem (odslej PRKS) in polarni koordinatni sistem (odslej POKS).

PRKS ali pa tudi kartezični koordinatni sistem (na čast njegovemu iznajditelju) je v matematiko uvedel Rene Descartes (1596 - 1650). Dandanašnji ga učenci matematike srečamo že v osnovnošolskih klopeh in nam je zaradi tega zagotovo najbolj domač. Le dobrega pol stoletja za uvedbo PRKS-a pa so si matematiki (med njimi omenimo vsaj Isaaca Newtona (1643 - 1727) in Jacoba Bernoullija (1654 - 1705)) izmislili še POKS. Opazili so namreč (o, tudi mi bomo!), da PRKS za obravnavo nekaterih krivulj preprosto pač ni najbolj primeren.



Slika 3



Slika 4

V POKS je položaj točke v ravnini določen z oddaljenostjo r te točke od središča sistema in pa s kotom ϕ, pod katerim vidimo točko iz središča sistema glede na izbrani poltrak skozi izhodišče.

Položaj vsake točke v ravnini je torej določen z urejenim parom (r,ϕ).

Izberimo sedaj v ravnini točko 0 in ta naj bo izhodišče obema sistemoma hkrati v tej ravnini. Nadalje izberimo še poljubno točko T. Ta je v PRKS-u določena z urejenim parom koordinat (x,y) v POKS-u pa z urejenim parom (r,ϕ).

Recimo, da poznamo vrednosti koordinat x in y točke T v PRKS-u. Potem sta polarni koordinati r in ϕ z njima takole določeni

$$r = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad f = \text{arc tg } y/x$$

Če pa izmerimo najprej razdaljo r do točke T in kot ϕ v POKS-u, sta s tema dvema podatkoma tudi koordinati x in y iz PRKS-a natanko določeni

$$x = r \cdot \cos\phi \quad \text{in} \quad y = r \cdot \sin\phi$$

Oba koordinatna sistema sta torej vsaj načelno povsem enakovredna med seboj. Vendar pa se v praksi izkaže, da so enačbe nekaterih krivulj v enem izmed teh dveh

Slika 5 Brazda na gramofonski plošči je verjetno eden izmed najnazornejših modelov Arhimedove spirale. Si predstavljate, da je na ploščo vrezan komajda začetek spirale?

Slika 6. Pogled iz zraka na ogromno "risbo" na zemlji v obliki dvojne Arhimedove spirale, zgrajeno iz nanošenega kamenja. Območje v Peruju, od koder je posnetek, je tudi sicer znano po ogromnih reliefnih figurah na zemlji.

sistemov manj "divje" kakor v drugem. Tako je recimo enotsko krožnico, ki ima v PRKS-u enačbo $x^2 + y^2 = 1$, precej ugodneje zapisati v POKS-u, kjer se njena enačba glasi kar $r = 1$. S premicami pa je ravno nasprotno. V POKS-u je njihov zapis (in torej tudi njih študij) veliko okornejši od zapisa v PRKS-u.

Vrnimo se sedaj znova k Arhimedovi spirali.

Zapišimo njeno enačbo v POKS-u

$$r = a..\phi$$

in v PRKS-u

$$x^2 + y^2 = a.\mathrm{arc\ tg}\ y/x$$

Pojasnilo za dejstvo, da nam je prvi zapis Arhimedove spirale toliko simpatičnejši od drugega, lahko najdemo kar v sami definiciji spirale. Ta je postavljena namreč povsem v duhu POKS-a (pa čeprav je Arhimed definicijo zapisal skoraj dve tisočletji pred rojstvom tega koordinatnega sistema - kar je seveda prav tako povsem svojevrsten hec).

Za konec pa razburimo domišljijo še z naslednjo enačbo

premica proti PRKS = Arhimedova spirala proti POKS

Ja, saj smo o tem pravzaprav skorajda ves čas pripovedovali. Mar ne?

Vilko Domajnko