PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 4
Strani 200–205

Ivan Vidav:

SYLVESTROV IZREK

Ključne besede: matematika, geometrija, konfiguracije.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1522-Vidav.pdf

SYLVESTROV IZREK

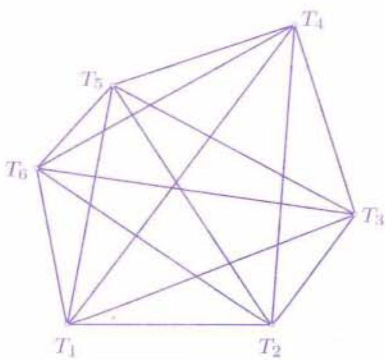
1. Eden od osnovnih aksiomov geometrije pove, da dve (različni) točki določata natanko eno premico, ki ji pravimo zveznica teh dveh točk. Kaj pa, če imamo namesto dveh več točk? Denimo, da je točk n. Vsako izmed njih lahko povežemo s katerokoli izmed preostalih $n-1$ točk in dobimo tako $n-1$ zveznic, ki izhajajo iz izbrane točke. Ker je vseh točk n, je vseh zveznic n-krat toliko, se pravi $n(n-1)$. Toda pri tem smo vsako zveznico šteli najmanj dvakrat, saj dobimo isto premico, če zvežemo točko T s točko R ali pa R s T. Zato je vseh zveznic kvečjemu polovico toliko, torej kvečjemu enako

$$\frac{n(n-1)}{2}\,. \tag{1}$$

Če so npr. naše točke oglišča n-kotnika, so zveznice stranice in diagonale tega večkotnika (slika 1) pravzaprav premice, na katerih ležijo stranice in diagonale. Stranic je n, diagonal pa $n(n-3)/2$, skupaj torej

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\,,$$

v skladu z obrazcem (1). (Šestkotnik na sliki ima 6 stanic in 9 diagonal. Vseh premic, ki vežejo po dve izmed šestih oglišč, je torej $6+9=15$.)



Slika 1.

Seveda niso vse zveznice vselej med seboj različne. Zato daje izraz (1) le največje število premic, ki jih določa množica n točk. V skrajnem primeru, ko ležijo vse točke na isti premici p (rekli bomo, da so točke tedaj **kolinearne**), je zveznica ena sama, namreč premica p.

Denimo zdaj, da naše točke niso kolinearne. Ali se dajo morda tako izbrati, da gre vsaka premica, ki veže dve izmed teh točk, vsaj še skozi eno izmed izbranih točk, da torej ležijo na vsaki zveznici najmanj tri točke iz naše množice? Angleški matematik J. J. Sylvester je pred dobrimi sto leti postavil trditev, da taka konfiguracija točk ni mogoča. Velja namreč naslednji izrek:

Izrek 1. (Sylvester). *Če vzamemo poljubno končno množico točk, ki niso kolinearne, obstaja vsaj ena premica, na kateri ležita dve in samo dve točki te množice.*

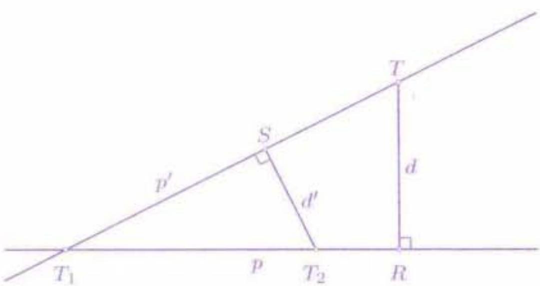
Ni znano, ali je imel Sylvester za svojo trditev tudi dokaz. Prvi je izrek 1 dokazal T. Gallai kakih 40 let pozneje. Tu pa si bomo ogledali preprost dokaz, ki ga je našel L. M. Kelly.

Naj bo

$$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$$

množica n točk, ki niso vse na isti premici. Od tod sledi, da je njihovo število najmanj 3, torej $n \geq 3$. (Dve točki sta namreč vedno na isti premici.) Zaznamujmo s $\mathcal{P}$ množico vseh premic, ki vežejo po dve točki iz množice $\mathcal{T}$. Ker naše točke niso kolinearne, ni v množici $\mathcal{P}$ samo ena premica, temveč jih je več.

Katerokoli premico iz $\mathcal{P}$ vzamemo, obstaja vsaj ena točka iz $\mathcal{T}$, ki ne leži na njej. Med temi točkami je ena najbližja naši premici (najbližjih točk je lahko tudi več). Zdaj pa poiščimo med vsemi premicami množice $\mathcal{P}$ tisto, pri kateri je razdalja do najbližje točke iz množice $\mathcal{T}$ najmanjša. Imenujmo to premico p. Točka iz $\mathcal{T}$, ki ne leži na p, ji je pa najbližja, naj bo T (slika 2). Katerokoli premico vzamemo iz množice $\mathcal{P}$, je najbližja točka iz množice $\mathcal{T}$ od nje bolj (ali kvečjemu enako) oddaljena kakor točka T od p.



Slika 2.

Razdaljo točke T od premice p dobimo tako, da iz točke T spustimo pravokotnico na premico p. Če je R presečišče pravokotnice s p, je razdalja d točke T od premice p enaka dolžini daljice $\overline{TR}$, torej $d = \overline{TR}$ (slika 2).

Ker pripada premica p množici zveznic $\mathcal{P}$, sta na njej vsaj dve točki iz množice $\mathcal{T}$, npr. točki T_1 in T_2. Najprej bomo ugotovili, da ležita T_1 in T_2 na premici p na nasprotnih straneh točke R. Denimo namreč, da sta T_1 in T_2 na isti strani in je npr. T_1 bolj oddaljena od R kakor T_2, tako da je vrstni red točk takšenle: T_1T_2R (slika 2). (Točka T_2 se lahko ujema z R.) Premica p', ki veže T in T_1, je ena izmed premic družine $\mathcal{P}$, točki T in T_1 namreč obe pripadata množici $\mathcal{T}$. Različna je od premice p, saj točka T ne leži na p. Kakšna je razdalja točke T_2 od p'? Ta razdalja je enaka dolžini daljice $\overline{T_2S} = d'$, kjer pomeni S presečišče pravokotnice iz T_2 na premico p'. Oglejmo si zdaj trikotnika T_1RT in T_1T_2S na sliki 2. Oba sta pravokotna, pri oglišču T_1 pa imata skupen ostri kot in sta si zato podobna. (Dva pravokotna trikotnika, ki se ujemata v enem ostrem kotu, se ujemata v vseh treh kotih in sta si zato podobna.) Ker je hipotenuza $\overline{T_1T_2}$ trikotnika T_1T_2S del katete $\overline{T_1R}$ trikotnika T_1RT (oziroma enaka tej kateti, če točki R in T_2 sovpadata), v pravokotnem trikotniku pa je kateta manjša od hipotenuze, je zato hipotenuza $\overline{T_1T_2}$ trikotnika T_1T_2S manjša od hipotenuze $\overline{T_1T}$ trikotnika T_1RT. Enako velja potem za enakoležne katete. Zato je kateta $\overline{ST_2} = d'$ prvega trikotnika manjša od katete $\overline{TR} = d$ drugega (obe ti kateti ležita nasproti kotu pri oglišču T_1). Dolžina daljice $\overline{ST_2} = d'$ pa pomeni razdaljo točke T_2 od premice p' in je potemtakem točka T_2 bliže premici p' kakor točka T premici p. Tako smo prišli do protislovja, saj smo izbrali v družini zveznic $\mathcal{P}$ tisto premico p, pri kateri je razdalja od najbližje točke iz množice $\mathcal{T}$ najmanjša. Zato T_1 in T_2 nista na isti strani točke R, temveč na nasprotnih straneh. Ker sta T_1 in T_2 poljubni točki iz množice $\mathcal{T}$, ki ležita na premici p, sklepamo, da na p razen T_1 in T_2 ni nobene druge točke te množice. Če bi namreč tudi točka T_3 ležala na p, bi morali biti bodisi T_1 in T_3 bodisi T_2 in T_3 na isti strani točke R. To pa, kakor smo videli, ni mogoče. Tako smo našli premico p, na kateri sta natanko dve točki množice $\mathcal{T}$, in s tem dokazali Sylvestrov izrek.

2. Izraz (1) pove, kolikšno je največje število zveznic pri množici n točk. Lahko jih je manj. Pri kolinearnih točkah je zveznica ena sama. Denimo zdaj, da točke niso kolinearne. Koliko je tedaj najmanj različnih zveznic? Na to vprašanje daje odgovor naslednji izrek:

Izrek 2. *Množica n točk, ki niso na isti premici, določa najmanj n zveznic.*

Izrek 2 bomo dokazali s popolno indukcijo. Množica nekolinearnih točk vsebuje vsaj tri točke in je zato $n \geq 3$. Naj bo najprej $n = 3$. Tri nekolinearne točke so oglišča trikotnika, ki ima tri stranice. V tem primeru so zveznice tri in izrek 2 pri $n = 3$ velja.

Denimo zdaj, da smo izrek dokazali za kak $n \geq 3$. Vzemimo množico $n + 1$ nekolinearnih točk $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1}\}$. Po izreku 1 obstaja taka premica p, na kateri ležita dve in samo dve točki te množice. Naj bosta ti dve točki T_n in T_{n+1}. Odstranimo iz množice $\mathcal{T}$ točko T_{n+1} in si oglejmo množico preostalih točk $\mathcal{T}' = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. Dve možnosti sta:

a) Točke množice $\mathcal{T}'$ so kolinearne.
b) Točke te množice niso kolinearne.

Obravnavajmo najprej primer a). Ker so točke iz $\mathcal{T}'$ kolinearne, ležijo vse na isti premici, ki jo imenujmo q. Točka T_{n+1} ne leži na njej, saj točke množice $\mathcal{T}$ niso kolinearne. Če zvežemo T_{n+1} z vsemi n točkami množice $\mathcal{T}'$, dobimo n različnih premic. Vse so zveznice po dveh točk množice $\mathcal{T}$. Ker je tudi premica q, na kateri ležijo točke iz množice $\mathcal{T}'$, ena od zveznic, določajo točke množice $\mathcal{T}$ v tem primeru natanko $n + 1$ zveznic.

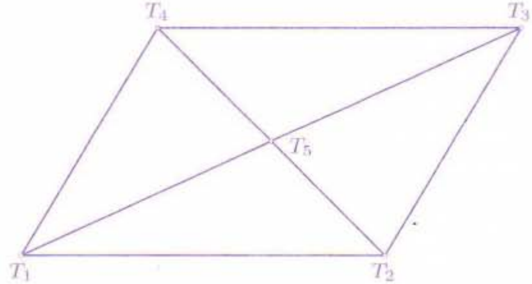
Oglejmo si zdaj možnost b). Ker točke iz $\mathcal{T}'$ niso kolinearne, njihovo število pa je n, določajo vsaj n premic, saj smo privzeli, da izrek 2 za n točk velja. Med te zveznice ne sodi premica p, ki veže T_n in T_{n+1}. Na njej ležita le dve točki iz množice $\mathcal{T}$, namreč T_n in T_{n+1}, od njiju pa je samo prva v množici $\mathcal{T}'$, druga T_{n+1} pa ni. Ker je p zveznica dveh točk množice $\mathcal{T}$, imamo tudi v tem primeru najmanj $n + 1$ zveznic, namreč najmanj n zveznic točk množice $\mathcal{T}'$ in še premico p.

Zato velja izrek 2 za $n + 1$ točk, če velja za n točk. S tem smo dokaz končali.

3. Vzporedne premice imajo isto smer. Nekatere zveznice, ki jih določa množica n točk, so lahko med seboj vzporedne in je zato včasih smeri manj, kakor je različnih premic. Zastavimo si vprašanje: Koliko je najmanjše število različnih smeri pri n točkah? Seveda spet izvzamemo primer kolinearnih točk, saj je tedaj zveznica ena sama in tudi smer je ena sama.

Tri nekolinearne točke so oglišča trikotnika, ki ima tri stranice in zato tudi tri smeri.

Izberimo zdaj štiri točke T_1, T_2, T_3 in T_4 tako, da so oglišča paralelograma (slika 3). Zveznic je šest, namreč štiri stranice in dve diagonali. Nasprotni stranici pa sta v paralelogramu vzporedni in imata zato isto smer. Potemtakem določajo oglišča paralelograma štiri smeri: dve smeri nam dajo stranice, dve diagonali.



Slika 3.

Dodajmo k našim štirim točkam še presečišče diagonal kot peto točko T_5. Ker se število zveznic z dodano točko ni povečalo, imamo zdaj pri petih točkah štiri smeri.

Brez težave se prepričamo, da določajo štiri nekolinearne točke najmanj štiri smeri. Pravkar pa smo videli, da lahko izberemo pet točk tako, da so smeri samo štiri. Število 4 je sodo, 5 liho. Odgovor na vprašanje, koliko je najmanj različnih smeri pri n točkah, je odvisen od tega, ali je n sod ali lih.

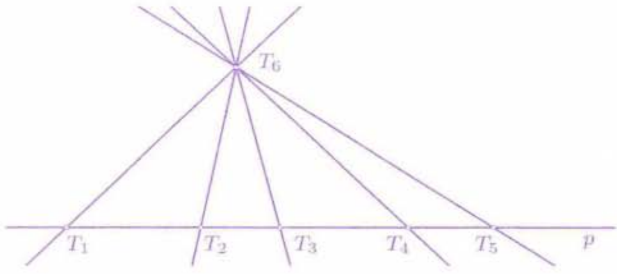
Izrek 3. *Množica točk, ki niso kolinearne, njihovo število n pa je večje od 3, določa najmanj n različnih smeri, če je n sod, in $n-1$ različnih smeri, če je n lih.*

Dokaz tega izreka je precej zahteven, namreč bolj kakor pri prejšnjih dveh, in ga zato tu ne bomo navedli. Pokažimo le to, da zadostuje dokaz za sodo število točk.

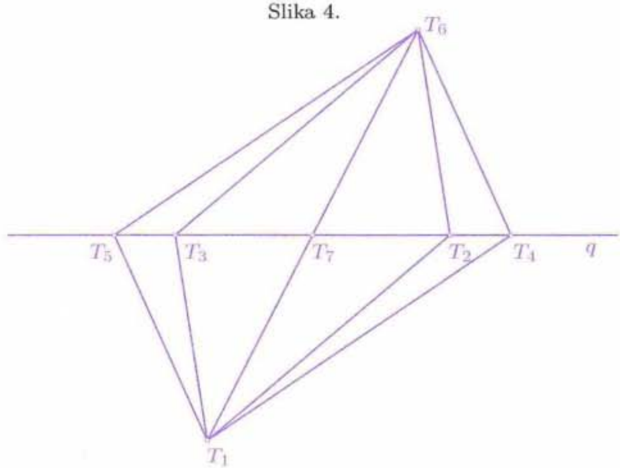
Denimo namreč, da izrek 3 velja za sodo število točk. Naj bo zdaj $\mathcal{T}$ množica n nekolinearnih točk, kjer je število n liho in večje od 3, torej $n \geq 5$. Iz $\mathcal{T}$ izberimo $n-1$ točk, ki ne ležijo na isti premici. Ker je število $n-1$ sodo in večje od 3, izrek za to množico, ki jo imenujmo $\mathcal{T}'$, velja. Torej določa $\mathcal{T}'$ najmanj $n-1$ smeri. Prvotna množica $\mathcal{T}$ pa določa kvečjemu več smeri, torej najmanj $n-1$. Zato velja naš izrek prav tako za lihe n.

Pri vsakem $n > 3$ obstaja konfiguracija n nekolinearnih točk, pri kateri je število različnih smeri najmanjše, se pravi pri sodem n enako n, pri lihem n pa $n-1$.

Denimo najprej, da je n sod. Izberimo poljubnih $n-1$ točk T_1, T_2, ..., T_{n-1} na isti premici p, n-to točko T_n pa kjerkoli, da le ni na tej premici p (slika 4, kjer je $n = 6$). Premica p in zveznice T_1T_n, T_2T_n, ..., $T_{n-1}T_n$ določajo n različnih smeri. Ker so to vse možne zveznice pri izbrani množici točk, drugih smeri ni.



Slika 4.



Slika 5.

Če je n lih in večji od 3, ga lahko pišemo v obliki $n = 2k + 3$, kjer je k celo število, $k \geq 1$. Izberimo najprej $n - 1 = 2k + 2$ točk tako, da sestavljajo oglišča k paralelogramov, pri čemer imajo vsi ti paralelogrami skupni dve nasprotni oglišči T_1 in T_{n-1}, torej tudi eno skupno diagonalo, namreč zveznico T_1T_{n-1} (slika 5). Druga diagonala vsakega od teh paralelogramov naj leži na premici q, tako da sta drugi dve oglišči vsakega od k paralelogramov na njej. Vseh oglišč je $2k + 2$; dve oglišči sta namreč T_1 in T_{n-1}, oglišča T_2, T_3, $\ldots$, T_{n-2}, teh je $n - 3 = 2k$, pa ležijo na premici q. Kot zadnjo točko T_n izberimo presečišče diagonale T_1T_{n-1} in premice q, tako da je potem vseh točk $2k + 3 = n$. Stranice teh k paralelogramov določajo $2k$ smeri, diagonali dve, torej imamo skupaj $2k + 2 = n - 1$ različnih smeri. Slika 5 prikazuje primer, ko je $k = 2$. Paralelograma sta dva, namreč $T_1T_2T_6T_3$ in $T_1T_4T_6T_5$, točk je 7, vseh različnih smeri pa 6.

Ivan Vidav