

Krivulja prislonjene lestve

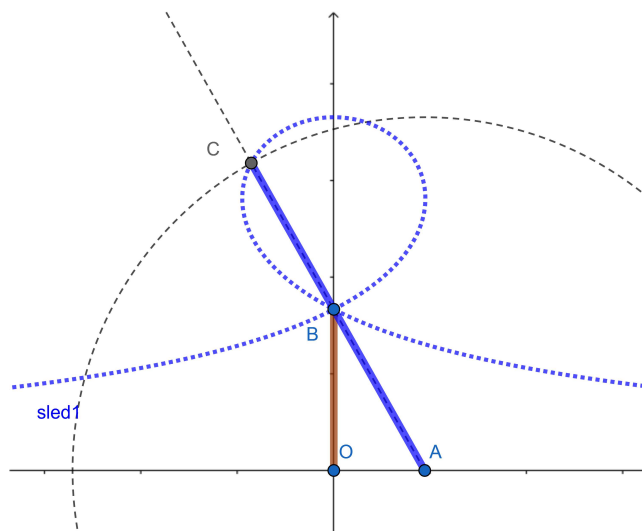
↓↓↓

BOŠTJAN KUZMAN

→ Pomlad je prišla in delo na vrtu kliče tudi matematike. V tokratnem kotičku si bomo ogledali skoraj vsakdanji problem: do kod seže prislonjena lestev. Natančneje, s pomočjo GeoGebre bomo narisali krivuljo, ki jo opiše vrh v fiksni točki prislonjene lestve, če njen spodnji del prosto premikamo po vodoravni površini. Problem bomo rešili na dva načina: najprej zgolj z uporabo preproste geometrijske konstrukcije, nato še z izračunom parametrične enačbe krivulje, za katerega bomo uporabili Pitagorov izrek in podobnost trikotnikov.

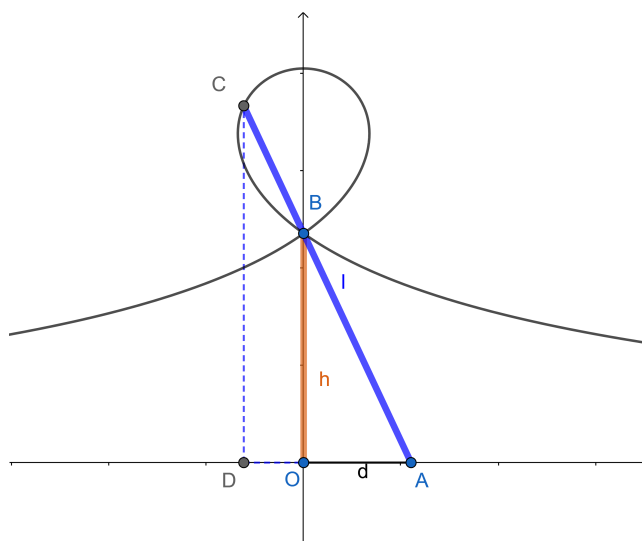
Problem bomo reševali kar v ravnini. Lestev in njeno oporo bosta predstavljali daljici. Opišimo zaporedje korakov za geometrijsko konstrukcijo:

- Vstavimo drsnik z imenom l , ki predstavlja dolžino lestve. Zavzame naj vrednosti med 0 in 10.
- Z orodjem za dodajanje točke in klikom na ustrezno koordinatno os vstavimo poljubno točko A na osi x in poljubno točko B na osi y . Označimo še točko $O = (0, 0)$.
- Narišemo daljico OB . Ta predstavlja oporo, na katero bomo prislonili lestev.
- Narišemo poltrak iz točke A skozi točko B in krožnico s središčem A in polmerom l .
- Označimo s C presečišče poltraka in krožnice. Našo lestev dolžine l zdaj predstavlja daljica skozi A in C . (Po potrebi povečajmo l , da bo lestev res prislonjena na oporo.)
- Zdaj lahko opazujemo gibanje točke C , ki predstavlja vrh lestve, v odvisnosti od pomikanja točke A po vodoravni površini.
- Daljice in točke po želji odebelimo in pobarvamo, ter z risalne površine skrijemo vse nepotrebne elemente.
- Če želimo, lahko narišemo krivuljo gibanja vrha lestve po točkah s pomočjo vklopa sledi točke C , ali pa narišemo celotno krivuljo vnaprej z ukazom $\text{Sled}(C, A)$ (slika 1).



SLIKA 1.

Geometrijska konstrukcija točke C in njena sled glede na točko A .



SLIKA 2.

Določanje koordinat točke C s pomočjo podobnih trikotnikov.

-
- Zanimivo je opazovati, kako se spreminja oblika krivulje, če spreminjamo dolžino lestve l ali višino opore (točka B).
 - Pozorni bralec je seveda opazil, da lahko vrh lestve v resnici opiše le zanko, ne pa tudi levega ali desnega kraka krivulje na sliki, saj v tem primeru vrh lestve nima več opore in bi lestev padla na tla.

Kot smo napovedali na začetku, je naloga zanimiva in dovolj enostavna tudi za reševanje s pomočjo enačb. Namesto geometrijske konstrukcije točke C s pomočjo presečišča poltraka in krožnice lahko izračunamo njene koordinate v odvisnosti od položaja točke A . Oglejmo si skico na sliki 2.

Naj bo točka $C = (x_C, y_C)$ krajišče lestve in naj bo $D = (x_C, 0)$ njena pravokotna projekcija na vodoravno os. Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle AOB$ in $\triangle ADC$ velja $|AD| : |AC| = |AO| : |AB|$. Torej je $|AD| = \frac{l \cdot d}{\sqrt{h^2 + d^2}}$, kjer je h dolžina daljice $|OB|$ oziroma višina opore, d pa dolžina daljice OA oziroma x -koordinata točke A . Zato se x -koordinata točke C izraža kot

▪

$$x_C = d - |AD| = d - \frac{l \cdot d}{\sqrt{h^2 + d^2}}.$$

Še enostavneje dobimo y -koordinato točke C iz zveze $|DC| : |AC| = |OB| : |AB|$ in torej

▪

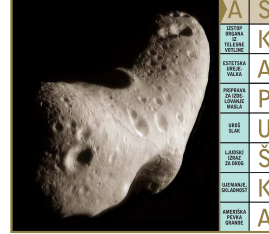
$$y_C = \frac{l \cdot h}{\sqrt{h^2 + d^2}}.$$

Izračun lahko uporabimo pri izdelavi modela tako, da ponovimo prve tri korake prejšnje konstrukcije in označimo daljici $d = \text{Daljica}(0, A)$ in $h = \text{Daljica}(0, B)$, nato pa direktno vnesemo še točko C z ukazom $C = (d - l \cdot d / \text{sqrt}(h^2 + d^2), l \cdot h / \text{sqrt}(h^2 + d^2))$. Potem lahko podobno kot prej model še dopolnimo z dodatnimi daljicami, risbo sledi in podobno.

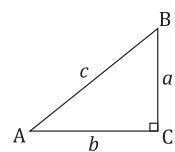
Nadebudni bralci in bralke pa lahko poskusijo krivuljo narisati še na tretji način s pomočjo ukaza **Krivulja** za risanje parametričnih krivulj.

× × ×





FRISCHAU	NEČAKINJA
LAVROVSKI	ERATOŠTEN
AHATATOM	WINONA
ULFLORA	ODAKSEL
OBJEKTIV	PRAVOKOTNI



KANSAS	DRN	IKAROBESPIERRE	JENISEJ
KRVOPRELITJE	ILUSTRACIJA	ILIČNO	
IKONOSKOP	ENCIJAN	LEVIUKANC	OVPAK
HANOJ	TAV	RAZ	ODSEK
ASTEROID	TERARM	LT	KRČETOS
KILANOS	ROSICA	INOVAT	IVNOST
ARANŽERKA	STOAREITER	KOS	POANTA
PINJAREPSIN	AIM		
USERSKINE	FERMAT	MER	
ŠTANGA	VONJSOPLES	SALEC	
KONKORDANCA	CVETA	NIT	
ARIANA	ČAKŠ	OTROK	ANIS

REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 50/4

→ Pravilna rešitev nagraadne križanke iz četrte številke Preseka letnika 50 je **Včrtani lik**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Katarina Šipeč iz Kranja, Tadeja Bone iz Ajdovščine in Neža Korenjak iz Mengša, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

× × ×