PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 1
Strani 9–10

Ivan Pucelj:

POSPLOŠITEV PITAGOROVEGA IZREKA

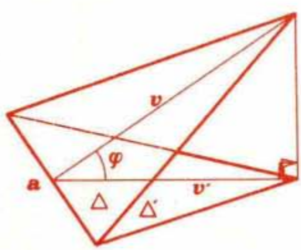
Ključne besede: matematika.

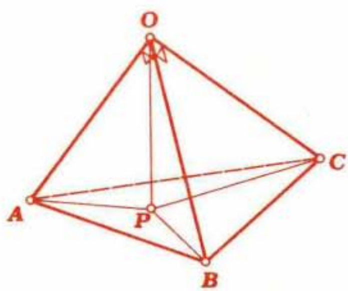
Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/410-Pucelj.pdf

POSPLOŠITEV PITAGOROVEGA IZREKA

1. Naj imata trikotnika Δ in Δ' skupno stranico a in nanjo ustrezni višini v, v'. Če je poleg tega trikotnik Δ' pravokotna projekcija trikotnika Δ, je količnik med njunima ploščinama enak količniku med višinama v'/v. Kot φ, ki ga višini oklepata, je kot med Δ in Δ'. Količnik v'/v je odvisen samo od kota φ.

2. Zdaj si oglejmo tristrano piramido (četverec) $OABC$, ki ima tri paroma pravokotne robove $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Seveda so si potem paroma pravokotni tudi trikotniki OAB, OBC, OCA; zaznamujmo jih na kratko Δ_1, Δ_2, Δ_3.





3. Označimo z Δ trikotnik ABC; trikotnike Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ imenujemo stranice četverca $OABC$. Pokažimo, da velja tale izrek:

   Če ima četverec tri paroma pravokotne stranice, je vsota kvadratov njihovih ploščin enaka kvadratu ploščine četrte stranice.

   Dokaz. Iz točke O spustimo pravokotnico na ravnino trikotnika Δ, pa dobimo v Δ točko P. Če jo zvežemo z A, B, C, smo Δ razcepili na tri trikotnike $\Delta_1' = ABP$, $\Delta_2' = BCP$, $\Delta_3' = CAP$ in za ploščine velja

$$p(\Delta_1') + p(\Delta_2') + p(\Delta_3') = p(\Delta) \qquad (1)$$

   Vidimo, da je Δ_1' pravokotna projekcija trikotnika Δ_1 in da je Δ_1 pravokotna projekcija trikotnika Δ. V obeh primerih imata trikotnika skupno stranico in oklepata isti kot. Velja enakost

$$p(\Delta_1')/p(\Delta_1) = p(\Delta_1)/p(\Delta)$$

in sledi

$$(p(\Delta_1))^2 = p(\Delta_1')p(\Delta)$$

Analogno dobimo

$$(p(\Delta_2))^2 = p(\Delta_2')p(\Delta)$$
$$(p(\Delta_3))^2 = p(\Delta_3')p(\Delta)$$

Seštejmo! Zaradi (1) dobimo, kar trdi izrek!

Ta izsledek je le ena od zanimivih posplošitev znanega "ravninskega" Pitagorovega izreka.

Ivan Pucelj