PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 2
Strani 84–85

Sandi Klavžar:

KOLIKO JE KOCK V RUBIKOVI KOCKI

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

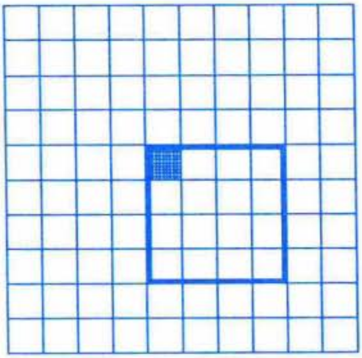
Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/974-Klavzar-Rubik.pdf

KOLIKO JE KOCK V RUBIKOVI KOCKI?

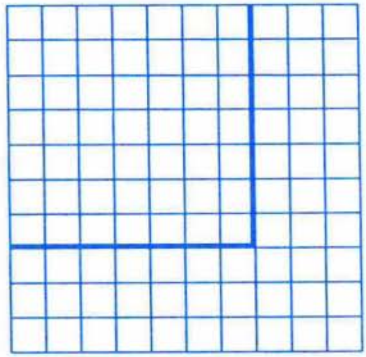
27? No ja, tudi cela kocka je kocka. Torej 28? Ne, prišteti moramo še vse kocke $2 \times 2 \times 2$. Verjamem, da smo z nekaj truda uspeli našteti 36 kock. Je torej naloga že rešena? Ne, šele začenja se, kajti vprašujem po naslednjem: koliko kock je v kocki $10 \times 10 \times 10$ oz. splošneje, koliko kock je v kocki $n \times n \times n$!

Lotimo se naloge postopno. Najprej rešimo lažji problem, in ko bomo tega dobro razumeli, ne bo nobena težava več rešiti zastavljeno nalogo. Vprašajmo se, koliko kvadratov je v mreži 10×10. Resni matematiki bi sicer dejali, saj ni nobene prave razlike med problemoma in bi nalogo rešili kar za n-dimenzionalno kocko. Včasih pa je dobro, če si znamo problem lepo predstavljati, zato ostanimo kar pri kvadratni mreži.

Izberimo si poljuben kvadrat mreže, kot je prikazano na sliki 1a. Kateri podatki ga določajo? Prav gotovo njegova velikost, v našem primeru 4. Seveda so še drugi kvadrati velikosti 4. Toda, to je edini kvadrat te velikosti, ki ima za zgornji levi vogal osenčeni kvadrat s slike. Skratka, kvadratov 4×4 je toliko, kolikor je kvadratov 1×1, ki so lahko zgornji vogal kvadrata 4×4. Ti kvadrati so označeni na sliki 1b. Opazimo, da jih je 7^2. Če se vprašamo še po kvadratih ostalih velikosti, je rešitev že pred nami: $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2$



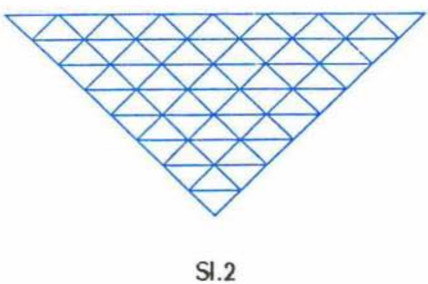
Sl. 1 a



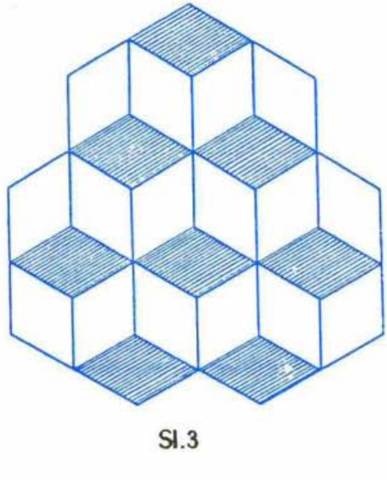
Sl. 1 b

oz. krajše $\sum_{i=1}^{10} i^2$. Pri tem je z 1^2 štet največji kvadrat in 10^2 je število malih kvadratov. Rezultat takoj posplošimo na mrežo $n \times n$: vseh kvadratov je $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Povrnimo se sedaj h kocki $n \times n \times n$. Če smo razumeli gornjo izpeljavo, potem gotovo ni noben problem dokazati, da je v kocki natanko $\sum_{i=1}^{n} i^3$ kock. Naloga je tako rešena.



Sl.2



Sl.3

Za konec še dve (stari) nalogi.

1. Koliko trikotnikov je na sliki?
2. Koliko kock je na sliki? Kaj pa, če Presek obrnemo?

Sandi Klavžar