Kdo je ustvaril naravna števila?

Maja Jakovac in Marko Jakovac

Naravna števila uporabljamo v vsakdanjem življenju, a se tega pogosto niti ne zavedamo. Dnevno preštevamo denar, ki ga zapravimo v trgovini. Kmet mora prešteti živino na pašniku, da preveri, ali so še vse živali na paši. Nenazadnje že otroci stari nekaj let samoiniciativno preštevajo stvari, s katerimi se igrajo, pa naj bodo to avtomobilčki, kroglice, ali kakšne druge igrače. Pogosto rečemo, da so naravna števila števila s katerimi štejemo. Skoraj bi lahko rekli, da so naravna števila nekaj, kar nam je prirojeno. Zato se je smiselno vprašati, kaj imajo naravna števila pravzaprav opraviti z matematiko in kako so z njo povezana.

Zgodovina naravnih števil

Pričnimo z znamenitim stavkom, ki ga je izrekel *Leopold Kronecker (7. 12. 1823 – 29. 12. 1891)*: »Bog je ustvaril naravna števila; vse ostalo je delo človeka.« [4]. Po stavku sodeč bi lahko rekli, da naravna števila niso zares povezana z matematiko, so prirojena, v njih ne dvomimo in jih privzemamo takšna, kot jih je za nas pripravila narava. Dejansko to niti ni tako daleč od resnice, saj jih bomo tudi mi opisali z izjavami, v katere praviloma ne dvomimo in jih privzemamo. Govorimo seveda o *aksiomih* oz. temeljnih resnicah [1].

Danes vemo, da so naravna števila temelj *aritmetike* [2, 3] in kot taka potrebujejo vso našo pozornost in previdnost. Iz naravnih števil nastanejo cela števila, iz celih števil racionalna števila itd. A kljub temu nas tudi strokovno razmišljanje privede do istega vprašanja, ki smo ga postavili na začetku: »Kdo je ustvaril naravna števila?«.

Naravna števila so zanimala že starodavne civilizacije. Tako jih lahko v takšni ali drugačni obliki najdemo pri Starih Egipčanih, Babiloncih, Rimljanih, Kitajcih in nenazadnje tudi pri Indijancih v Ameriki (npr. Majevska civilizacija). Daleč najbolj pomembna pa je Antična Grčija. Starim Grkom pripisujemo prvo sistematično obravnavo naravnih števil. Tukaj so izstopali predvsem *Arhimed (okoli 287 pr. n. št. – okoli 212 pr. n. št.)*, *Pitagora (okoli 570 pr. n. št. – okoli 495 pr. n. št.)* in *Evklid (okoli 365 pr. n. št. – okoli 275 pr. n. št.)*.

Ne glede na zgodovino in večtisočletno uporabo naravnih števil raziskovalci niso čutili nuje po matematični pojasnitvi izvora naravnih števil, dokler leta 1860 *Hermann Günther Grassmann* ni pokazal, da lahko večino zapletenih dejstev v aritmetiki pojasnimo z osnovnimi pojmi. S tem je večina tedanjih matematikov spoznala, da aritmetika, in s tem tudi naravna števila potrebujejo formalno vpeljavo. Na podlagi teh idej je *Charles Sanders Peirce* leta 1881 predstavil prve aksiome za naravna števila. Že leta 1888 je *Richard Dedekind* predstavil alternativen nabor aksiomov, ki danes predstavljajo temelj matematičnega razumevanja naravnih števil. A zgodba tukaj še ni bila zaključena, saj je le leto kasneje, leta 1889, *Giuseppe Peano* objavil poenostavljeno različico Dedekindovih aksiomov, ki jih danes imenujemo *Peanovi aksiomi* [5, 6, 7]. Peanovih aksiomov je v osnovi pet in danes matematikom predstavljajo odgovor na vprašanje, kdo je ustvaril naravna števila.

Peanovi aksiomi

Preden navedemo vseh pet Peanovih aksiomov, je potrebno poudariti, da so to strukturni aksiomi in zato v smislu teh aksiomov označitev naravnih števil ni pomembna. Naravna števila običajno označujemo z arabskimi števkami $(0, 1, 2, \ldots, 9)$ in jih praviloma uporabljamo v desetiškem sistemu, saj so v takšnem sistemu najbolj primerna za zapis in nadaljnje računanje. Znano je, da so se matematiki svoj čas prepirali, ali bi prvo naravno število označili z 0 ali z 1. Danes vemo, da je to prerekanje brezpredmetno in označitev za samo strukturo naravnih števil ni pomembna. Bistvo tega pojasnila je, da bi lahko naravna števila pri uporabi Peanovih aksiomov označevali tudi z drugimi objekti. Recimo, število 1 bi lahko bilo tudi jabolko, število 2 hruška, število 3 avtomobil itd. Da ne bomo preveč otežili razumevanje tega članka, bomo tudi v Peanovih aksiomih uporabljali arabske števke, prvo naravno število pa bomo označili z 1.

Peanovi aksiomi so dejansko lastnosti, ki jih dodelimo množici naravnih števil. Kot rečeno, jih poznamo pet in jih običajno zapišemo v naslednjem vrstnem redu:

(1) Število 1 je naravno število.
(2) Vsako naravno število ima natančno enega naslednika.
(3) Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
(4) Če imata dve naravni števili istega naslednika, potem ti števili predstavljata isto naravno število.
(5) Vsaka množica, ki vsebuje število 1 in naslednike vseh svojih števil, je enaka množici naravnih števil.

Navedeni aksiomi so relativno preprosti in danes predstavljajo temeljno strukturo, ki jo poznamo pod imenom *množica naravnih števil*; označimo jo z $\mathbb{N}$. Čeprav so aksiomi preprosti, jih poskusimo še dodatno pojasniti.

Aksiom (1) pove, da množica naravnih števil ni prazna, zato lahko v njej določimo vsaj en element. Kot rečeno, bomo uporabljali arabske števke, zato se odločimo ta element označiti z 1.

Aksiom (2) zagotavlja, da je struktura naravnih števil nerazvejana, tako da lahko hitro določimo naslednika vsakega števila, ki je le eden za vsako naravno število.

Aksiom (3) zagotavlja, da pred številom 1 ni nobenega naravnega števila oz. da se naravna števila pričnejo pri številu 1.

Aksiom (4) imenujemo tudi injektivnost funkcije naslednikov. Funkcija je namreč predpis, ki vsakemu elementu neke množice priredi natančno en element druge množice. Injektivnost funkcije pa pomeni, da se poljubna različna elementa prve množice nujno preslikata v različna elementa druge množice.

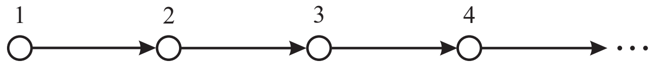
Najbolj prepoznan in verjetno najbolj opevan aksiom med matematiki je zagotovo aksiom (5). Poznamo ga namreč tudi pod imenom *matematična indukcija*. Poenostavljeno povedano, gre za močno matematično orodje, s katerim lahko dokazujemo trditve tako na naravnih številih kot tudi na strukturah, ki so v bijekciji z naravnimi števili. Npr. tudi cela števila so v bijekciji z naravnimi števili, zato lahko princip matematične indukcije uporabljamo tudi na njih.

Sistem oz. seznam Peanovih aksiomov v celoti opisuje množico naravnih števil, hkrati pa noben izmed navedenih aksiomov ni odveč in je nujno potreben, da imajo naravna števila strukturo, kot jo poznamo. Če bi lahko kakšen aksiom izpeljali iz preostalih, potem ne bi bil potreben in bi ga lahko črtali iz seznama. V nadaljevanju se bomo osredotočili na vsak aksiom posebej in pokazali, da je nujno potreben. Formalnih dokazov sicer ne bomo delali, si bomo pa pomagali s slikami struktur, ki jih lahko dobimo v primeru, da vsi aksiomi niso izpolnjeni. Čeprav ne gre za formalni dokaz, lahko takšna intuitivna ilustracija učiteljem v osnovnih in srednjih šolah pomaga na enostaven način učencem in dijakom pojasniti aksiome, ki gradijo naravna števila.

Manjkajoči Peanovi aksiomi

Naravna števila si danes vsi predstavljamo kot enostransko linearen diagram pikic, ki so med seboj povezane z daljicami, na katerih z ustrezno smerjo puščice označimo naslednike (slika 1). V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko dobimo tudi drugačne diagrame, v kolikor niso izpolnjeni vsi aksiomi iz nabora petih Peanovih aksiomov.

Za začetek predpostavimo, da imamo samo aksiom (1). To pomeni, da imamo v množici vsaj eno naravno število. Na diagramu to pomeni eno pikico

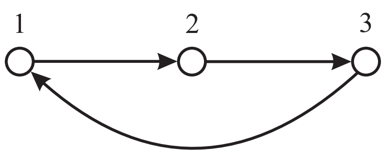


SLIKA 1.
Digram množice naravnih števil

(slika 2). Pikic bi lahko bilo tudi več, vendar o njih ničesar ne vemo, dokler uporabljamo le en aksiom. Ne glede na opisano je jasno, da na sliki 2 ne dobimo diagrama naravnih števil.

SLIKA 2.
Upoštevanje aksioma (1)

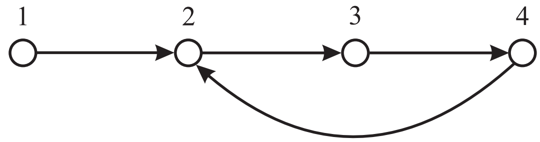
Dodajmo sedaj še drugi aksiom, da bomo imeli dva aksioma, tj. aksioma (1) in (2). Ker je cilj pokazati, da lahko dobimo tudi drugačne strukture, kot je struktura naravnih števil, predstavimo diagram na sliki 3. Hitro preverimo, da diagram zadošča obema aksiomoma, saj imamo na seznamu tako število 1 kot tudi upoštevamo lastnost, da ima vsako število na seznamu natančno enega naslednika. Očitno diagram na sliki 3 spet ni enak diagramu na sliki 1.



SLIKA 3.
Upoštevanje aksiomov (1) in (2)

Če aksiomoma (1) in (2) dodamo še aksiom (3), potem diagram na sliki 3 ni več ustrezen, saj število 1 ne sme biti naslednik nobenega števila. Zato narišemo nov diagram, ki je prikazan na sliki 4. Ideja je zelo podobna kot na sliki 3, le da smo cikel naredili tako, da se več ne sklene pri številu 1. Tako ima še vedno vsako število natančno enega naslednika, saj iz vsakega števila sledi le ena puščica, prav tako pa število 1 ni naslednik nobenega števila.

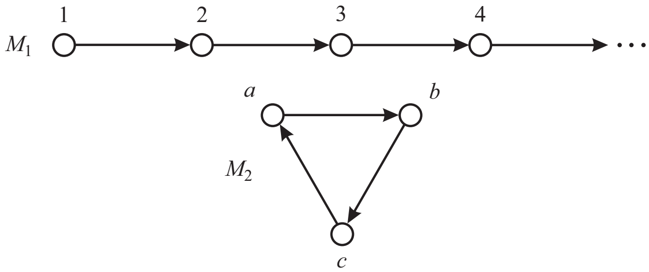
Do sedaj smo pokazali, da prvi trije aksiomi vsekakor niso dovolj, da bi dobili nam dobro znano strukturo naravnih števil. Dodajmo sedaj še aksiom (4).



SLIKA 4.
Upoštevanje aksiomov (1), (2) in (3)

Hitro opazimo, da imata na diagramu slike 4 števili 1 in 4 istega naslednika, kar aksiom (4) prepoveduje. Glede na zapisano torej ne smemo narediti cikla v strukturi, saj bi tako kršili aksiom (4). Zato najprej pomislimo na enostransko linearno strukturo diagrama na sliki 1, ki prikazuje naravna števila. Hitro dobimo občutek, da so prvi štirje Peanovi aksiomi dovolj, da opišemo naravna števila. Toda ta občutek imamo le zato, ker morda nismo razmišljali »izven škatle«. Čeprav je razmišljanje izven škatle fraza, pa nam v tem primeru lahko reši problem, na katerega smo naleteli. Izven škatle lahko namreč razumemo tudi kot »izven diagrama«, kar pomeni, da nas ne sme zavesti intuitivna slika, kjer vnaprej narišemo nekaj, v kar želimo verjeti. Če na diagram na sliki 1 dodamo še eno strukturo, ki je ločena od prve strukture, kjer se nahaja število 1, potem s tem zadostimo prvim štirim Peanovim aksiomom, diagram pa niti približno ne spominja na naravna števila. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da dodatno strukturo sestavljajo trije elementi, a, b, c, tako da je element b naslednik elementa a, element c naslednik elementa b in element a naslednik elementa c. Potem dobimo diagram prikazan na sliki 5, ki iz istih razlogov kot prej še vedno zadošča prvim štirim Peanovim aksiomom. Označimo sedaj obe množici oz. povezani komponenti diagrama na sliki 5 z M_1 in M_2 in preverimo, da ne zadošča aksiomu (5). Če vzamemo poljubno množico, ki vsebuje število 1 in vse svoje naslednike, potem glede na diagram opišemo le množico M_1, ki seveda ni enaka celotni narisani množici $M_1 \cup M_2$, saj množica M_2 ni prazna.

Dodajmo še aksiom (5) in tako uporabimo vseh pet Peanovih aksiomov. Zaradi istega argumenta kot v zgornjem odstavku, diagram na sliki 5 ni več ustrezen. Izkaže se, da je teh pet aksiomov dovolj, da si ne moremo več izmisliti novega diagrama, ki bi te aksiome upošteval in bi hkrati bil različen od diagrama na sliki 1.



SLIKA 5.
Upoštevanje aksiomov (1), (2), (3) in (4)

Operaciji seštevanja in množenja

Čeprav pet Peanovih aksiomov prestavlja preproste strukturne lastnosti množice naravnih števil, lahko iz njih izpeljemo mnogo več. Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ definiramo *funkcijo naslednikov*, ki jo bomo označili s $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pri čemer funkcijska vrednost $S(n)$ predstavlja naslednika naravnega števila $n \in \mathbb{N}$ v strukturi naravnih števil. Da je S res funkcija, nam zagotavlja aksiom (2), ki pove, da ima vsako naravno število natančno enega naslednika. Če naravna števila v strukturi po vrsti označimo z arabskimi števkami, tako kot smo se dogovorili, potem je $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, $S(3) = 4$ itd. Ker je S funkcija, ki slika iz množice naravnih števil nase, jo lahko tudi komponiramo. Tako bi lahko npr. zapisali tudi $S(S(S(1))) = 4$. Slednje pomeni, da če se od števila 1 premaknemo za tri naslednike, dobimo v strukturi naravno število, za katerega smo se dogovorili, da ga označimo s 4. Omenimo še, da aksiom (4) zagotavlja, da je funkcija S injektivna, saj poljubni različni naravni števili preslika v različni naravni števili. Zaradi aksioma (3) pa ni surjektivna, ker v zalogi vrednosti ne dobimo vseh naravnih števil. Namreč, v število 1 se ne preslika nobeno naravno število, ker število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.

Ko imamo definirano funkcija S, lahko definiramo še operaciji seštevanja in množenja. *Operacija seštevanja* je binarna operacija $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki jo praviloma definiramo rekurzivno za poljubni naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$:

- $$m + 1 = S(m),$$
  $$S(m + n) = m + S(n).$$

Rekurziven zapis je morda nekoliko težje razumeti, zato napravimo nekaj primerov. Izračunajmo $5 + 1$. Po definiciji operacije seštevanja je

- $5 + 1 = S(5)$.

Ker smo se dogovorili, da $S(5)$ označimo s 6, dobimo $5 + 1 = 6$. Nadalje, izračunajmo $5 + 2$. Po definiciji je

- $5 + 2 = 5 + S(1) = S(5 + 1) = S(6)$.

Ponovno upoštevamo dogovor, da smo $S(6)$ označili s 7. Zato je $5 + 2 = 7$. Za konec izračunajmo še $5 + 3$. Spet po definiciji dobimo

- $5 + 3 = 5 + S(2) = S(5 + 2) = S(7)$.

Upoštevajmo, da smo $S(7)$ označili z 8. Dobimo $5 + 3 = 8$. Iz teh treh izračunov hitro opazimo, kako lahko s pridom uporabljamo rekurzijo, saj smo vsak naslednji korak izračunali s pomočjo prejšnjega.

Operacija množenja je prav tako binarna operacija $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki jo definiramo rekurzivno za poljubni naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$ na naslednji način:

- $$m \cdot 1 = m,$$
  $$m \cdot S(n) = m + (m \cdot n).$$

Pokažimo izračun množenja še na primeru. Najprej izračunajmo $5 \cdot 1$. Po definiciji operacije takoj sledi $5 \cdot 1 = 5$. Sedaj izračunajmo še $5 \cdot 2$. Po definiciji operacije množenja je

- $5 \cdot 2 = 5 \cdot S(1) = 5 + (5 \cdot 1) = 5 + 5 = 10$.

Bodimo pozorni, da smo v zadnjem koraku izračuna uporabili definicijo operacije seštevanja, ki nam zagotavlja, da je $5 + 5 = 10$. Izračunajmo še $5 \cdot 3$. Po definiciji operacije množenja dobimo

- $5 \cdot 3 = 5 \cdot S(2) = 5 + (5 \cdot 2) = 5 + 10 = 15$.

Ponovno smo v zadnjem koraku uporabili znanje, ki smo ga pridobili pri operaciji seštevanja, v predzadnjem koraku pa smo uporabili znanje, ki smo ga pridobili s predhodnim izračunom, kjer smo dokazali, da je $5 \cdot 2 = 10$. Torej smo spet s pridom uporabili rekurzivno definicijo operacije.

Ko imamo definirani obe operaciji, lahko pokažemo, da sta *komutativni*, *asociativni* in da ju povezuje *distributivni* zakon. Operaciji $+$ in $\cdot$ sta komutativni, če za poljubni naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$ velja

- $m + n = n + m$,
  $m \cdot n = n \cdot m$.

Operaciji $+$ in $\cdot$ sta asociativni, če za poljubna naravna števila $m, n, \ell \in \mathbb{N}$ velja

- $m + (n + \ell) = (m + n) + \ell$,
  $m \cdot (n \cdot \ell) = (m \cdot n) \cdot \ell$.

Operaciji $+$ in $\cdot$ povezuje distributivni zakon, če za poljubna naravna števila $m, n, \ell \in \mathbb{N}$ velja

- $m \cdot (n + \ell) = m \cdot n + m \cdot \ell$,
  $(m + n) \cdot \ell = m \cdot \ell + n \cdot \ell$.

Oba pogoja distributivnosti imenujemo levi in desni distributivni zakon, a ker vemo, da je operacija množenja komutativna, lahko enega izpustimo. Lastnosti komutativnosti, asociativnosti in distributivnosti dokažemo s pomočjo matematične indukcije, ki jo omogoča aksiom (5), in rekurzivnih definicij seštevanja in množenja. Ker je dokaz vseh treh lastnosti dolgotrajen, pokažimo eno izmed lastnosti, npr. komutativnost seštevanja, na primeru.

Za poljubno naravno število $n \in \mathbb{N}$ dokažimo trditev $n + 1 = 1 + n$. Po definiciji operacije seštevanja takoj sledi $n + 1 = S(n)$. Preverimo sedaj, da je tudi $1 + n = S(n)$. To trditev najprej preverimo za prvo naravno število, tj. 1. Tudi tale trditev sledi takoj iz definicije operacije seštevanja, saj je $1 + 1 = S(1)$. Predpostavimo sedaj, da trditev $1 + n = S(n)$ velja za neko izbrano naravno število n in pokažimo, da velja tudi za njegovega naslednika $S(n)$. Torej moramo dokazati trditev $1 + S(n) = S(S(n))$. Po definiciji operacije seštevanja sledi $1 + S(n) = S(1 + n)$. Če uporabimo še predpostavko $1 + n = S(n)$, dobimo $1 + S(n) = S(S(n))$, kar smo tudi želeli. Aksiom (5) zagotavlja, da smo trditev $1 + n = S(n)$ dokazali za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$. Ker je $n + 1 = S(n)$ in hkrati tudi $1 + n = S(n)$, sledi $n + 1 = 1 + n$. S pomočjo rekurzije lahko nato dobimo tudi splošen rezultat $m + n = n + m$, kjer sta m in n poljubni naravni števili.

Literatura

[1] *Aksiomi*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Axiom`, ogled 16. 9. 2020.

[2] *Arithemtic*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic`, ogled 16. 9. 2020.

[3] G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, 2. izdaja, Northwestern University Press, Evanston, ZDA, 1981.

[4] *Leopold Kronecker*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Leopold\_Kronecker`, ogled 16. 9. 2020.

[5] G. Lolli, *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*, Proceeding of the International Conference in honour of Giuseppe Peano on the 150th anniversary of his birth, 2008, 47–67.

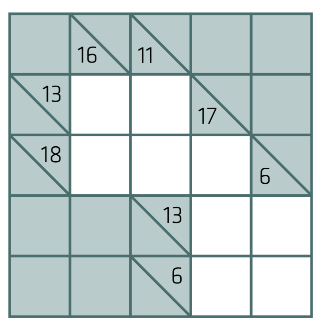
[6] *Peanovi aksiomi*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Peano\_axioms`, ogled 16. 9. 2020.

[7] M. Vencelj, 100 *let Peanovih aksiomov*, Presek **19** (1991/1992), 108–110.

× × ×

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×