PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 5
Strani 282–287

Peter Petek:

TETA AMALIJA IN KAOS

Ključne besede: računalništvo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/923-Petek.pdf

TETA AMALIJA IN KAOS

Nastopajo: teta Amalija, nje nečaki Jožica, Polonca, Tomaž in trije računalniki

Prolog

J.: Zakaj si nas pa danes povabila? Nobenega rojstnega dne ne praznujemo.

A.: Ne, ne, saj ne gre za rojstni dan. Le stric Alfonz, ki dela na pošti, mi je za danes posodil tri računalnike.

T.: Oh, fino! Zelo radi se igramo Vojno zvezd, Lačnega Horaca, Smučanje in kar je še takih igric.

A.: Zmotil si se! Tokrat bo igrica čisto matematična. Ustvarili bomo kaos.

P.: Kaos? Mama vedno pravi, da imam v sobi kaos, če je ne pospravim. In kolikor te poznam, nam gotovo ne boš dovolila, da ti razmečemo stanovanje.

A.: Priznam, kaos je nekoliko ponesrečena beseda za matematični pojav, ki ga bomo spoznali. Grška beseda *χαος* pomeni nered, razsulo. Stara verstva so učila, da je bil v vesolju kaos, preden so bogovi vzpostavili red.

J.: Zdaj sem pa res radovedna, kaj je to kaos!

A.: No, najprej bomo popili čaj in pojedli pecivo, ki sem ga pripravila, potem pa lepo po vrsti. Kaos pride šele na koncu.

(Pijejo čaj in jedo pecivo.)

I. dejanje. Ponavlja se preprost račun

A.: Preprost račun: Izberemo si X in 0 in 1 in izračunamo $X' = (1 + R)X - RX^2$

T.: Ampak teta, kaj je tu zanimivega. Osnovne računske operacije obvladamo že vrsto let.

P.: In kaj je tukaj R?

A.: Število R imenujmo parameter našega računanja. Vedno mora biti pozitivno. Ko izračunamo X', ga postavimo na mesto X in spet računamo po istem pravilu. In ta račun ponavljamo in ponavljamo in ponavljamo.

T.: To je vse?

A.: Vse! In ravno v tej preprostosti je čar zadeve! Za vajo vzemi $R = 0{,}5$, $X = 0{,}7$ in napravi nekaj korakov!

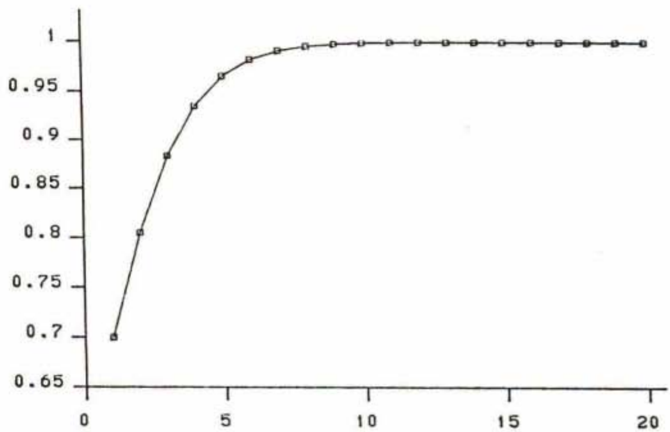
T.: (računa s svinčnikom) 0.5, izračunam 0.805, naslednje število je 0.8834875. Joj, teta, računanje na roko je tako utrudljivo!

P.: Medtem, ko si ti računal, sem jaz že sestavila program, ki bo računal namesto nas. Število *N* pove, kolikokrat želimo ponoviti račun.

```
10 INPUT "R, X, N"; R, X, N
20 FOR I = 0 TO N
30      PRINT I, X
40      LET X = (1 + R) X – R X X
50 NEXT I
```

A.: Sedite zdaj vsak za svoj računalnik, nakrmite ga s programom in se malo igrajte. Vzemite različne *R* in *X*, le za začetek predlagam, da ne vzamete prevelikega *R*; manjši od 1 naj bo.

(Otroci izbirajo, računalniki računajo – glej sliko 1!)



1	0.700000
2	0.805000
3	0.883488
4	0.934956
5	0.965363
6	0.982082
7	0.990880
8	0.995399
9	0.997689
10	0.998842
11	0.999420
12	0.999710
13	0.999855
14	0.999928
15	0.999964
16	0.999982
17	0.999991
18	0.999995
19	0.999998
20	0.999999

R=0.5 X=0.7 N=20

A.: No, kaj opazite?

P.: Števila nraščajo.

T.: Vedno bliže so enojki.

J.: Če dovolj dolgo računaš, se pa kar enke ponavljajo. Ampak t je najbrž zaradi zaokroževanja, ker se nekaj zadnjih decimalk v računalniku izgubi.

A.: Res je. Zdaj pa parameter povečajte malce čez 1. Kaj opazite?

J.: Vzela sem *R* = 1.2, *X* = 0.5 in dobila (slika 2) ...

1	0.500000	11	1.000000
2	0.800000	12	1.000000
3	0.992000	13	1.000000
4	1.001523	14	1.000000
5	0.999693	15	1.000000
6	1.000061	16	1.000000
7	0.999988	17	1.000000
8	1.000002	18	1.000000
9	1.000000	19	1.000000
10	1.000000	20	1.000000

Že v četrtem koraku postane X večji od ena, nato so števila izmenoma večja in manjša od ena, a kmalu se začno ponavljati enke.

A.: Prav, poigrajte se še tako, da pri istem R izbirate različne začetne X.

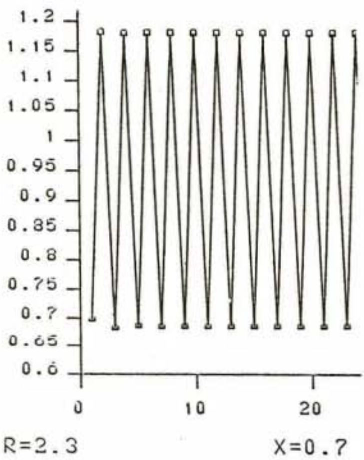
T.: Kakšne posebne razlike ne opazim, način obnašanja je vseskozi enak. Le ko sem za šalo vzel $X = 10$, je računalnik po nekaj korakih ugotovil prekoračitev obsega.

A.: Seveda. No, pravzaprav je X lahko največ $(1 + R)^2/4R$.

II. dejanje. Parameter narašča, dolžina se podvaja.

A.: Zdaj pa si R izberimo večji kot 2, le manjši kot 2.45 naj bo! Kaj opaziš, Jožica?

J.: $R = 2.3$, $X = 0.7$, $N = 50$: račun se ne ustali pri enki kot prej, ampak števila nekaj časa skačejo, dokler se ne začneta izmenoma ponavljati dve števili. (slika 3)



1	0.700000
2	1.183000
3	0.685075
4	1.181294
5	0.688723
6	1.181805
7	0.687631
8	1.181658
9	0.687945
10	1.181701
11	0.687853
12	1.181689
13	0.687880
14	1.181692
15	0.687872
16	1.181691
17	0.687874
18	1.181692
19	0.687873
20	1.181692
21	0.687874
22	1.181692
23	0.687874
24	1.181692

A.: Ker se števili ponavljata v vsakem drugem koraku, pravimo, da imamo cikel dolžine dva. Vzemite sedaj R malo večji od 2.45.

(Vsi računajo)

T.: Dobil sem cikel dolžine 4. Vzel sem $R = 2.48$.

P.: Jaz pa cikel dolžine 8 pri $R = 2.56$

A.: Ugotovite s poskušanjem, kdaj se cikel dolžine 2 spremeni v cikel dolžine 4 in kdaj le–ta v 8–cikel!

(To je naloga za naše bralce!)

T.: Ampak teta, kaj ni vmes še cikla dolžine 3, potem pa še ciklov dolžine 5, 6 in 7?

A.: Ne, dolžine ciklov se le podvajajo. Cikel dolžine 3 boš našel v ocvirku na koncu. Kaj pa pride za 8–ciklom?

P.: Gotovo cikel dolžine 16, pa 32 in tako naprej. In pri tem so prirastki R, ki povzročijo podvojitev dolžine, vedno manjši. Ampak zdi se mi, da bo zaradi zaokroževanja v računalniku to že težko opaziti.

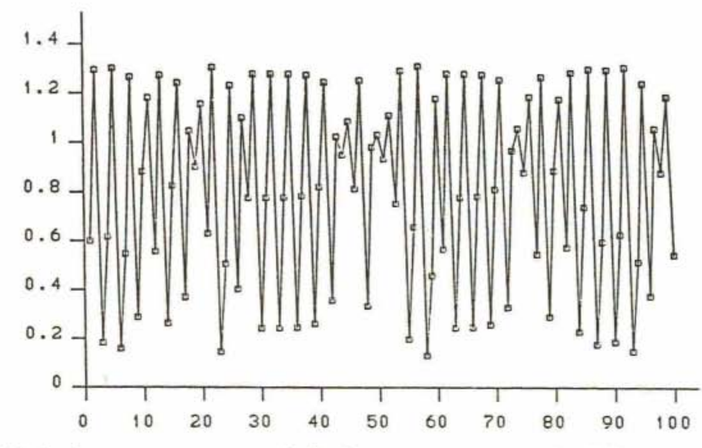
III. dejanje. Kaos

A.: Povečajmo R čez 2.57 in zašli bomo v kaos.

J.: Kaos! Takoj moram poizkusiti.

(Spet vsi računajo)

J.: Ničesar posebnega ne opazim. Vzela sem $R = 2.9$, izgleda pa tako, kot bi bila števila slučajno posejana (slika 4).



T.: Jaz pa sem vzel $R = 3.2$ in spet sem prekoračil obseg.

A.: Oh, pozabila sem reči, da ne smete s parametrom čez tri. Ta navidezna neurejenost, ki jo je opazila Jožica, je že kaos. Vendar bomo tudi v kaosu opazili nekaj pravilnosti. Najprej bomo programu vgradili zvonček, na interval širine D okrog točke S ga obesimo. In vsakič, ko pade X v to okolico, bo zacingljal.

```
15  INPUT "S' D"; S, D
35  IF  ABS(S – X) < D/= THEN PING
```

J.: Izbrala bom $R = 2.95$, $X = 0.6$, $N = 1000$, pa $S = 0.7$ in širino intervala 0.01. Zanima me, kolikokrat bo zazvonilo.

(Računalnik računa in enkrat zacinglja.)

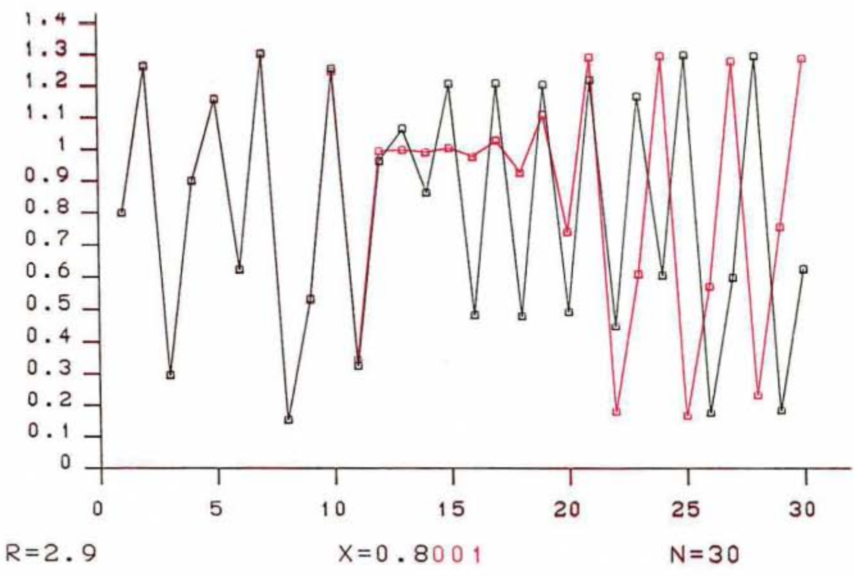
T.: Jaz bom pa le razširil interval in vzel $D = 0.1$

(Računalnik neprestano cinglja.)

A.: Kamorkoli med 0 in 1 postavite zvonček, na še tako majhen interval, prej ali slej bo zazvonilo. Seveda, če vzamete zelo ozek interval, bo treba dolgo čakati. Vzeti bo treba primerno velik N.

Druga zanimiva lastnost je pa občutljivost na začetno vrednost. Jožica in Polonca, izberita si isti R, isti N, le začetna X-a naj bosta čisto malo različna.

(Jožica in Polonca poženeta vsaka svoj program — glej sliko 5!)



T.: Dvanajst korakov še lahko nekako sledimo podobne X–e, potem se računa popolnoma razideta.

A.: Da, še tako majhna sprememba začetne vrednosti povzroči povsem drugačno zaporedje števil.

Epilog

Za konec le še ocvirek za naše bralce. Vzemite $R = 2.83$, torej sredi kaosa, in poženite program. Kaj opazite? V resnici se skriva v tej preprosti formuli še precej skrivnosti.

Peter Petek

slike *Andrej Vitek*