

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **17** (1989/1990)

Številka 3

Strani 154-159

Marija Vencelj:

HOJA PO LABIRINTU

Ključne besede: matematika, teorija grafov, graf, Trémauxov algoritem.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/17/982-Vencelj-labirint.pdf>

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

HOJA PO LABIRINTU

Otok Kreta je bil v sivi davnini središče egejske civilizacije, prve v Evropi, ki je cvetela stoletja pred obdobjem klasične Grčije. Ohranjena je pripoved o mogočnem kralju Minosu s Knososa na Kreti, ki je s pomorsko silo vladal v Egeju. Zdi se, da so bile kralju Minosu podrejene tudi Atene,



saj je od njih zahteval letno dajatev sedem deklet in fantov za hrano Minotavru, pošasti z bikovo glavo, ki je živela v globinah labirinta pod kraljevo palačo.

Krožile so govorice, da ima kralj grdo navado zapreti v labirint Minotavru na voljo tudi vsakega nepovabljenega tujca, ki se je pojavil na otoku. Če natančneje pomislimo, je bila to bržčas samoobramba otočanov pred potujočimi junaki in drugimi morskimi roparji.

Mit iz zgodnjega junaškega obdobja pripoveduje, da te govorice niso prav nič ganile atenskega junaka Tezeja. Kot se za junaka spodobi, se je nemudoma podal v nevarnosti na Kreto. Tam mu je šlo sprva vse narobe. Ujeli so ga in postal naj bi Minotavrova žrtev.

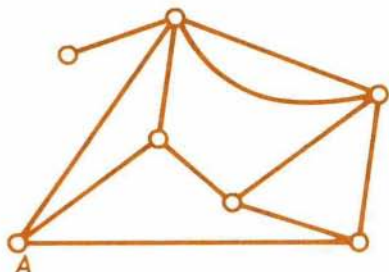
Toda lepa Minosova hči Ariadna – v vseh pripovedkah so kraljične lepe – se je vanj zaljubila in ga sklenila rešiti. Mogoče je bila sama tako zvita, ali pa ji je dala njena dojilja dober nasvet – vsekakor je našla rešitev. Svojemu Tezeju je dala klobčič preje. Junak je en konec niti privezal ob vhodu v labirint in se z odvijajočo se klobko v eni in z mečem v drugi roki pogнал junaštvu nasproti v podzemlje. Tam je našel in ubil Minotavra. Nato je moral samo še na klobčič navijati nit, ki ga je vodila k srečnemu koncu.

Prav lahko bi se zgodilo, da Tezej Minotavra sploh ne bi srečal in ga tako ne bi mogel ubiti. In nič ne bi bilo ne z junaštvom ne z zgodbo!

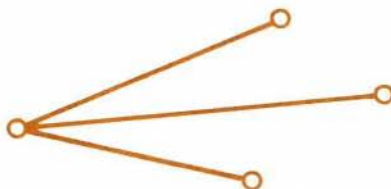
Zato Tezeju pri iskanju raje pomagajmo! Najprej moramo seveda predpostaviti, da je labirint končen in da je mesto, kjer tiči Minotaver, res dosegljivo z vhoda v labirint. Razen tega bomo našega kandidata za junaka, namesto s klobčičem preje, opremili s kosom snovi, ki se v temi sveti. V skrajni sili bo dober tudi trhel les, ki se je svetil že v tistih davnih časih. Z njim bo moral Tezej zaznamovati začetek in konec vsake prehojene poti med dvema križiščema in to vsakokrat, ko bo šel po njej. Po prihodu v posamezno križišče – z izjemo začetnega – bo imel v križišču liho mnogo oznak, po odhodu iz njega pa sodo mnogo. Za začetno križišče velja ravno obratno. Razen tega bo lahko v vsakem križišču med seboj ločil neprehojene poti, enkrat, dvakrat prehojene poti itd. Seveda mu to razlikovanje samo po sebi še ne bo jamčilo, da bo preiskal res ves labirint in na koncu tudi našel izhod iz njega. Za to potrebuje še zanesljiva in čimbolj preprosta navodila.

Labirint lahko preprosto skiciramo tako, da vsako križišče predstavimo s točko, posamezni hodniki pa so povezave med temi točkami. Tako skico imenujemo graf (slika 1).¹⁾ V grafu moramo zaznamovati vhod, to je začetno križišče. Na skici je označeno s črko *A*. Pogoj, naj bo Minotavrov neznani položaj dosegljiv iz vhoda v labirint, pomeni, da mora biti graf

povezan. Tezej mora začeti v točki A , prehoditi vse povezave grafa in se vrniti v točko A . Rekli bomo, da mora napraviti popoln obhod grafa. Le tako bo Minotavra zanesljivo našel in se vrnil iz podzemlja.



Slika 1



Slika 2

Načelno je to prav gotovo mogoče. Če Tezeja zamenjamo s konico svinčnika, ki drsi od točke A po povezavah grafa, se sicer lahko vrnemo v A prej, kot konica svinčnika opiše ves graf. Toda to ni nič hudega. Gremo pač ponovno na pot, le da tokrat v tisti del grafa, ki ga še nismo obšli. To počnemo tako dolgo, dokler ne izčrpamo vseh povezav grafa. Pri tem bomo sicer morda kakšno povezavo prehodili večkrat, a to za nalogo ni bistveno.

Toda Tezejeva naloga je težja. On labirinta oziroma grafa ne pozna. Ob povratku v A ne more vedeti, ali je še kaj labirinta neprehojenega, niti ne ve, v katero smer naj ponovno krene, da bo naletel na tak predel. Navodila, ki mu jih bomo dali, morajo biti taka, da bodo razrešila te dileme in da bo napravil popoln obhod.

V teoriji grafov so zanimivi tako imenovani *Eulerjevi obhodi*. Pri njih začnemo in končamo v isti točki in preidemo vse povezave grafa natanko enkrat. Seveda bi bilo najbolj gospodarno, če bi lahko sestavili taka navodila, ki bi Tezeja vodila po vsaki povezavi samo enkrat. Toda obstajajo grafi, ki ne premorejo Eulerjevega obhoda. Preprost primer takega grafa imamo na sliki 2.

Torej s takimi navodili ne bo nič. Velja pa naslednja trditev:

Dani povezani graf premore Eulerjev obhod natanko takrat, ko se v vsaki njegovi točki steka sodo mnogo povezav.²⁾

¹⁾ Študij grafov je v matematiki posebna veja. Nekaj osnov sta za bralce Preseka zbrala Drago Bajc in Tomaž Pisanski v knjižici Najnужnejše o grafih, ki je pred 4 leti izšla pri Presekovi knjižnici. Še vedno jo je moč kupiti pri Komisiji za tisk DMFA.

Od tod sledi naslednja ugotovitev:

Vsak povezan graf premore obhod, pri katerem gremo po vsaki povezavi natanko dvakrat.

Res. Mislimo si, da v grafu vsako povezavo podvojimo. Potem se v vsaki točki tako popravljenega grafa steka sodo mnogo povezav in torej zanj obstaja Eulerjev obhod. Ta obhod pa ni nič drugega kot obhod prvotnega grafa, pri katerem gremo po vsaki povezavi natanko dvakrat.

Ker labirinta oziroma grafa ne poznamo, bomo torej morali biti zadovoljni z navodili, ki bodo usmerjala našega junaka tako, da bo prehodil vsako povezavo labirinta natanko dvakrat in pri tem zaključil pohod v začetni točki. Možnih načinov je več. Mi si bomo ogledali le enega, ki je v teoriji grafov znan pod imenom *Trémauxov* algoritem. Poglejmo njegovo vsebino:

Ko pridemo v dano točko grafa, ravnamo takole:

I: Če v točki še nismo bili, jo zapustimo po še neprehojeni povezavi, če taka povezava obstaja. Sicer se vrnemo po isti povezavi.

II: Če smo v točki že bili, potem gremo

IIa: nazaj po zadnji povezavi, če smo jo uporabili prvič

IIb: v neprehojeno povezavo, če taka povezava obstaja in smo zadnjo povezavo prehodili že dvakrat

IIc: v enkrat prehojeno povezavo v ostalih primerih

Pravila so ilustrirana na sliki 3. Številka pri posamezni povezavi pomeni, kolikokrat je bila povezava prehojena pred obravnavanim prihodom v križišče.

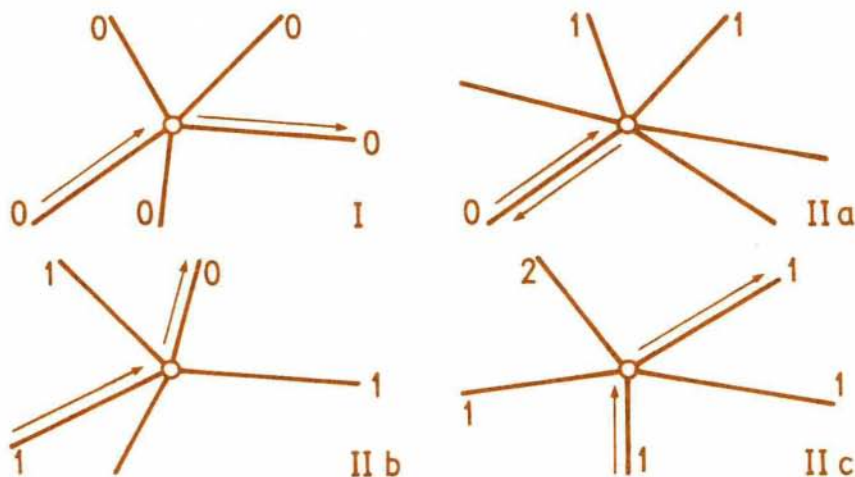
V vsaki od A različni točki pride vsakokrat v poštev natanko eno od zgornjih štirih navodil. Ne more se zgoditi, da bi v kakšni taki točki obtičali, to je, da bi vanjo prišli in je ne bi mogli zapustiti. Morda je to še najmanj jasno pri zadnjem navodilu. Toda po prihodu v tako od A različno točko, kjer naj bi uporabili zadnje pravilo, je število oznak povezav liho. Ker smo prišli po drugič uporabljeni povezavi, ki ima tedaj dve oznaki, mora biti na razpolago vsaj ena povezava z eno oznako, torej vsaj ena samo enkrat prehojena povezava.

Potovanje nadaljujemo tako dolgo, dokler je mogoče. Ker je labirint končen in so pravila taka, da nobene povezave ne prehodimo več kot dvakrat, se pot zanesljivo konča. To se lahko zgodi le v začetni točki A , ker smo ugotovili, da ne moremo obtičati v nobeni drugi točki.

Sedaj pa hitro svinčnike v roke, narišite poljuben povezan graf in

²⁾ Tudi dokaz te trditve najdemo v knjižici Najnужnejše o grafih.

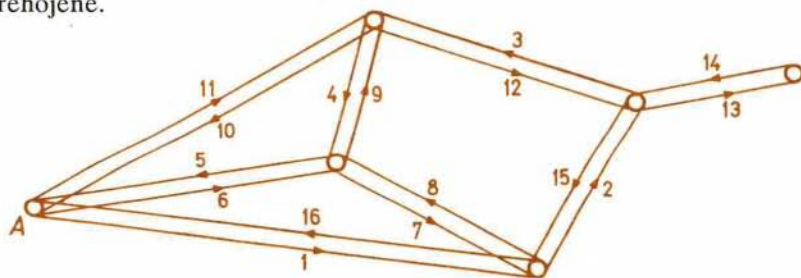
preskusite pravila! Slika 4. – Vam je uspelo prehoditi vse povezave grafa natanko dvakrat in zaključiti v začetni točki?



Slika 3

Po tem oddihu še dokažimo, da se to res mora zgoditi. Dokazati moramo le še, da ob uporabi pravil I – II c izčrpamo vse povezave grafa, vsako natanko dvakrat.

Dokaz: Denimo, da poti ne moremo več nadaljevati. Torej smo po zgornji ugotovitvi v začetni točki A . Vrnimo se korak za korakom po že opravljeni poti v obratni smeri. Pri tem se domenimo, da bomo na tej poti preskočili vse slepe povezave in vse povezave, ki smo jih v skladu s pravilom IIa prehodili dvakrat zapored. Zanje ni kaj dokazovati, saj so dvakrat prehojene.



Slika 4

Označimo z X točko, ki je na tej povratni poti prva. Na prvotni poti je morala biti povezava XA ob prihodu v A dvakrat prehojena, ker bi se sicer lahko po njej vrnili v skladu s pravilom IIa. To pomeni, da smo iz X v A krenili po že enkrat prehojeni povezavi, torej tedaj v X nismo bili prvič. Razen tega se ob tem prehodu točke X ni mogla v X stekati nobena še neprehojena povezava, ker bi sicer morali iti v skladu s pravilom IIb po njej namesto po XA .

Pojdimo še korak nazaj. Denimo, da smo prišli v točko X iz točke Y . Potem je morala biti pred tem povezava YX že enkrat prehojena, ker bi se sicer morali zaradi IIa vrniti po XY , namesto da smo nadaljevali po XA . To spet pomeni, da je bila točka Y prehojena tudi že nekoč pred tem zadnjim pohodom proti točki A . Enako, kakor prej za X , tudi za Y ugotovimo, da se v njej ne izteka več nobena še neprehojena povezava.

Če se tako vračamo točko za točko po prehojeni poti, korak za korakom ugotovimo, da se v nobeni obravnavani točki ne izteka nobena neprehojena povezava in da so vse poti XA , XY itd. dvakrat prehojene.

Dokazati moramo le še, da smo prešli vse točke grafa. To sledi iz povezanosti grafa. – Pa denimo, da neka točka grafa, recimo B , ne bi bila prehojena. Ker je graf povezan, obstaja neko zaporedje različnih povezav med točkami, ki vodi od točke A do točke B . Pojdimo po tej poti od točke B proti točki A in naj bo C na tej poti prva točka, ki smo jo pri našem obhodu grafa prešli. Pri tem je seveda lahko $A = C$. V točko C se mora tedaj očitno stekati neka neprehojena pot, kar je v protislovju s prvim delom dokaza.

Marija Vencelj