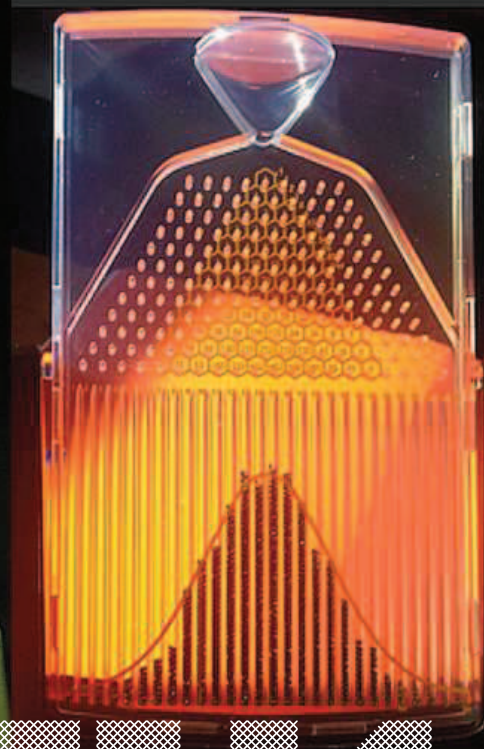




PRESEK LETNIK 50 (2022/2023) ŠTEVILKA 3



- SEMAFORJI IN BARVANJE GRAFOV
- TRI LASTNOSTI ŠTEVILA 2023
- GALTONOVA PLOŠČA
- LOV NA NEZEMLJANE IN
DRAKOVA ENAČBA

ISSN 0351-6652



9 770351 665036

Odmeglitev slike



→ Ste že kdaj fotografirali ptico v letu? Vaša slika bo verjetno zamegljena, a morda jo lahko izboljšate s pomočjo matematike. To vam omogočata linearna algebra in prebrisane numerične metode. Delčki fotografije, ki se imenujejo piksli, so v računalniku shranjeni v obliki seznama števil, ki mu rečemo vektor. Zamegljenost pomeni, da se je svetloba posameznega piksla razlila še v njegove sosedje, in pri tem spremenila vrednosti pikslov na način, ki ga lahko predstavimo z zelo veliko matriko. Toda poznavanje te matrike še ne zadošča, da bi rekonstruirali nezamegljeno sliko.

Razlog je v tem, da imajo piksli v zamegljeni sliki dodatne napake oziroma šum, ki je posledica fizikalnih procesov pri zajemu slike. Brez upoštevanja tega šuma bo popravljanje slike napake še poslabšalo. Matematiki so razvili številne pristope za izboljšanje slik, ki so odvisni od načina zajema slike, ostrine originala, vzroka zamegljenosti in podobno, ob tem jim je uspelo pospešiti nujne izračune in učinkovito shraniti velike količine podatkov. Kadar koli danes občudujete lepo fotografijo narave, posnetek telesa magnetne resonance ali pa oddaljeno galaksijo, je k ostrini slike verjetno pripomogla matematika.

Več informacij najdete v članku *The Image Deblurring Problem: Matrices, Wavelets, and Multilevel Methods*, D. Austin, M. Espanol, M. Pasha, Notices of the American Mathematical Society **69**, 2022. Izvirno besedilo: Deblurring images, Mathematical moments from the AMS.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 50, šolsko leto 2022/2023, številka 3

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2022/2023 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2022 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2162

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Odmeqlitev slike

UVODNIK

- 4 »Vse je na spletu«
(Andrej Likar)

MATEMATIKA

- 5-8 Semaforji in barvanje grafov
(Simon Čopar)
- 8-9 Tri lastnosti števila 2023
(Marko Razpet)
- 14-15 Geogebriin kotiček – Geometrijska
konstrukcija parabole
(Boštjan Kuzman)

FIZIKA

- 10-13 Galtonova plošča
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 18-25 Lov na nezemljane in Drakova enačba
(Vid Kavčič)

SLIKA NA NASLOVNICI: Curek drobnih kroglic se v Galtonovi plošči prebija skozi vrsto ovir in se končno razporedi v zvonasto krivuljo. Glej članek o Galtonovi plošči na straneh 10-13.

RAZVEDRILO

- 9 Križne vsote
- 13 Križne vsote
- 15 Novoletna nagradna uganka
(Uredništvo)
- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 25 Barvni sudoku
- 26-29 Izbrane slike in fotografije v petdesetih
letih Preseka
(Nada Razpet, Marko Razpet in Andrej Likar)
- 29 Barvni sudoku
- 30 Rešitev nagradne križanke Presek 50/2
(Marko Bokalič)
- 15 Bilo je nekoč v reviji Presek – Obisk v
šoštanski elektrarni

TEKMOVANJA

- priloga** Tekmovanje v znanju fizike za bronasto
Stefanovo priznanje – področno
tekmovanje
- priloga** 60. fizikalno tekmovanje srednješolcev
Slovenije – področno tekmovanje
- priloga** 58. tekmovanje iz matematike za Vegovo
priznanje – regijsko tekmovanje

»Vse je na spletu«



ANDREJ LIKAR

→ Nedavno sem se pohvalil kolegu, da sem kar dobro napisal prispevek za Presek. »No,« je odgovoril, »takole tvoje pisarjenje pač ni zelo zahtevno, saj je vse na spletu.« Torej, po njegovem, so prispevki v Preseku le kopije tega, kar je tam. Tisti »pisarjenje« in »vse je na spletu« me niti nista zelo presenetili, saj kolega ni nikoli ničesar objavil v Preseku.

Celo pri pisanju člankov za Presek na spletu ne najdemo vsega, včasih celo bore malo, morda nekaj vsem znanih izjav. Da ne govorimo o pomoči spleta pri pisanju raziskovalnega članka. Na specifična vprašanja s spleta zevajo ogromne praznine. Zelo redko najdemo ustrezne članke, ki jih avtorji postavijo na splet, največkrat jim založniki to celo prepovejo. Ne preostane drugega kot obisk dobre knjižnice in brskanje po priznanih znanstvenih revijah, danes na spletu, če ima knjižnica urejen dostop do njih. Ko pa se avtor odloči napisati članek za Presek, je pomoč spleta lahko dobrodošla, a le do meje, ko dobiš idejo za prispevek in je obravnavano snov bralcem Preseka primerno razložiti in opremiti z nazornimi slikami. Če že imamo srečo in najdemo ustrezne ponazoritve, jih brez dovoljenja ne gre kar kopirati, največkrat pa ustreznih niti ne najdemo.

Tale: »vse je na ...« pa ni ravno sodobna krilatica. V srednjem veku je bilo vse v Svetem pismu. Tycho Brahe je postavil Zemljo v središče Osončja, saj je tako prav po Svetem pismu, »le-to pa je nad vsemi drugimi resnicami«, kot je izjavljal. Kar nekaj časa je minilo, da je zahodni svet sprejel, da v Svetem pismu pač ni najti vseh resnic. Znanstvenih spoznanj pa tam ni, čeprav nekateri trdijo, da najdemo trditve, če jih seveda primerno tolmačimo, do katerih se je znanost dokopala pred nedavnim. Znana je tudi zgodba o antični knjižnici v Aleksandriji, tedanji prestolnici znanosti. Ko so Aleksandrijo zavzeli mu-

slimanski napadalci, so knjižnico v celoti požgali z razlago: »Če so zapisi v knjižnici v nasprotju s Koranom, jih je treba uničiti, če pa so s Koranom skladni, jih ne potrebujemo, saj je že vse v Koranu.« Zgodba je po vsej verjetnosti le urbana legenda, ker je knjižnico večkrat zajel ogenj že davno prej.

Pozneje, v razsvetljenstvu, so se številni znanstveniki trudili vse znanje zaokrožiti v enciklopedijah. Če česa ne veš, poišči v enciklopediji, »tam je vse«. Kljub skoraj dnevnim dopolnitvam tam seveda nikoli ni bilo in tudi ni vsega. Danes je splet res navdušujoča novost, do takih in drugačnih informacij pridemo bliskovito, vprašanje je le, ali so prave. Ker jih je morje, jih težko vse pregledamo, največja nevarnost pa nam preti, ko jih začnemo izbirati tako, da ustrezajo našim, največkrat zmotnim, prepričanjem. V Wikipediji te nevarnosti sicer ni, a Wikipedija ni nič drugega kot hitro dostopna enciklopedija. Tudi na Wikipediji ni vsega, vsaj ne tako, da bi tam napisano kar prekopirali. V eni od iskric na prvi strani Dela preberemo, da »lahko Google na dano vprašanje vrne sto tisoč odgovorov, knjižničarka pa ti posreduje pravega«.

Ne le v romanopisju, tudi v znanosti in tehnologiji imamo zanimive pripovedi, ki jih radi povemo, posebno mladim ljubiteljem Presekovih strok. A merila za sprejem in objavo prispevka terjajo od avtorjev nekaj izvirnosti, ne zgolj ponavljanja tega, kar najdemo v učbenikih ali na spletu. Presekovih avtorjev sicer ni prav obilo, a Presek je še vedno tu, včasih morda pretežak, a s pomočjo učiteljev ali staršev obvladljiv vir zanimivega branja in originalnih nalog za bistrenje uma in preizkušanje znanja. Torej: vse boljše za prihodnjih 50 let!



Semaforji in barvanje grafov



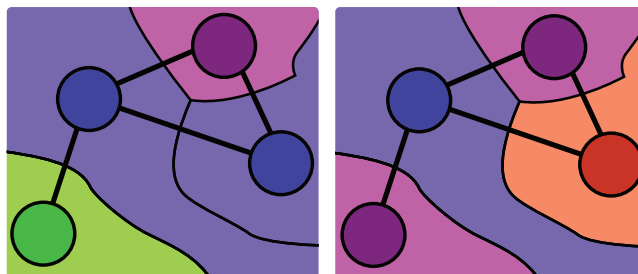
SIMON ČOPAR

→ Namen cestnega omrežja je, da lahko s potjo povežemo poljubni dve lokaciji. To neizbežno vodi v križišča, kjer se poti vozil, namenjenih v različne smeri, morajo sekati. Potrebi po križiščih se lahko izognemo z izrabo tretje dimenzije – z nadvozi. Te uporabimo predvsem pri avtocestah, kjer je pretočnost brez ustavljanja poglobitvenega pomena. Pri drugih cestah, predvsem v naseljih, je to predrago in prostorsko preveč potratno. Tam izkoriščamo nivojska križišča – križišča brez nadvozov in podvozov, kjer lahko varnost zagotovimo s prednostnimi pravili, ki jih morajo vozniki dobro poznati, ali pa s pomočjo semaforja, posebej pri križiščih z visoko pretočnostjo.

Vozniki z vsake ceste v križišču lahko zavijejo v katerokoli smer, česar v nivojskem križišču ne moremo zagotoviti sočasno brez sekanja. Semafor problem križanja poti reši tako, da poti namesto v prostoru razporedi v času. V matematični idealizaciji vsaka stopnja semaforja dovoljuje le poti, ki se med seboj ne križajo. V vseh stopnjah semaforja, preden se cikel ponovi, morajo priti na vrsto vsi, ne glede na to, kam zavijajo.

Kot matematiki se lahko vprašamo, kolikšno je najmanjše število stopenj, ki jih potrebujemo za neko križišče, in koliko različnih kombinacij semafornih stopenj je mogočih. Pred matematično obravnavo moramo problem preoblikovati v bolj čisto in pregledno obliko. Pri tem so bolj kot začetne in končne točke poti pomembne poti same.

Za vsako križišče moramo najprej poiskati vse poti. Pri tem bomo izpustili zavijanje v desno, saj je to



SLIKA 1.

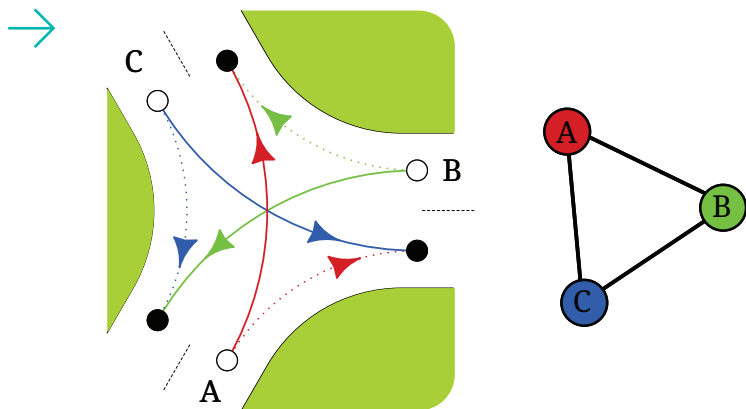
Grafe in zemljevide barvamo tako, da so sosedji različnih barv. Levo: neveljavno barvanje. Desno: veljavno barvanje.

vedno mogoče vsaj takrat, ko je omogočen tudi promet naravnost, ter na splošnem vedno, kadar cesta na desni nima drugih »pritokov«. Za desne zavoje bo zato v semafornem ciklu vedno prostor, ko določimo vse drugo. V nekaterih križiščih ima desni zavojski pas, ki ni odvisen od semaforja. V ZDA je previdno zavijanje v desno dovoljeno celo pri rdeči luči, kar smo v preteklem letu na nekaterih izbranih križiščih dovolili tudi v Sloveniji. Prav tako bomo prepovedali polkrožno obračanje.

Vozniki vemo, da je največji izziv zavijanje v levo, saj s tem sekamo pot nasproti vozečim vozilom. V praksi semaforji pogosto nimajo posebne stopnje za zavijanje v levo, ampak vozniki čakajo v sredini križišča, da se jim pot sprostí. Za našo analizo bo bolj ugodno, da ta primer idealiziramo kot sosledje dveh stopenj – prvo za vožnjo naravnost in drugo za zavijanje v levo. Tako bodo vse naše semaforne stopnje resnično brez sekanja poti.

Naslednji korak je, da poiščemo vse pare poti, ki se križajo. Če se poti križata, vemo, da se morata pojaviti v različnih stopnjah semafornega cikla. Množico poti in križajočih se parov bomo predstavili matematično kot graf – množico vozlišč (poti) in pove-





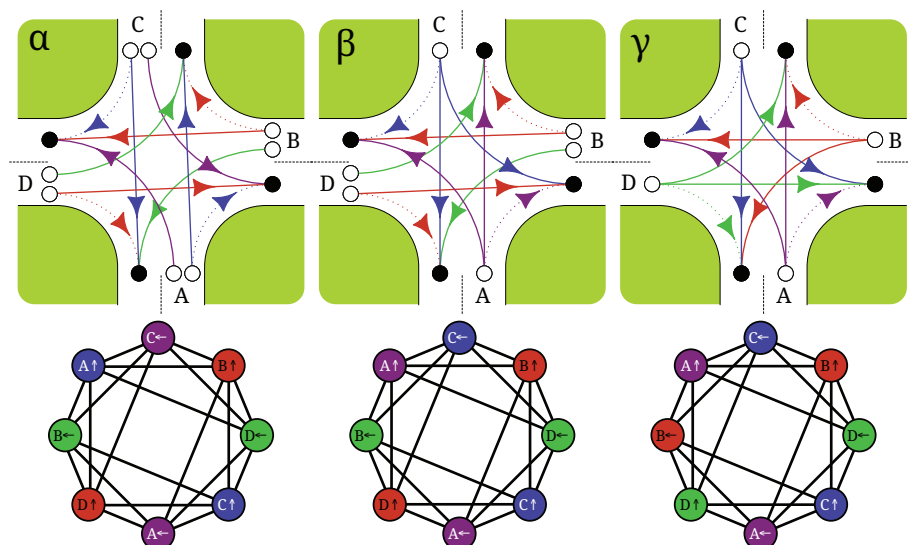
SLIKA 2.

Križišče treh cest in pripadajoči graf. Puščice istih barv pomenijo poti, ki imajo hkrati zeleno luč. Te barve ustrezajo barvam vozlišč grafa.

zav (prepovedanih parov poti). Vsako križišče lahko predstavimo torej kot neusmerjen graf, pri čemer je pogoj, da vozlišča, ki so med seboj povezana, ne smejo biti v isti stopnji semafornega cikla. To prepoznamo kot znano vprašanje iz teorije grafov: z najmanj koliko barvami lahko pobarvamo graf (ali zemljevid), da sta dve sosednji vozlišči (državi) vedno različnih barv (glej sliko 1). Še več, vsako različno barvanje grafa pripada drugačnemu semafornemu ciklu, permutacija barv pa ustreza menjavi vrstnega reda stopenj cikla.

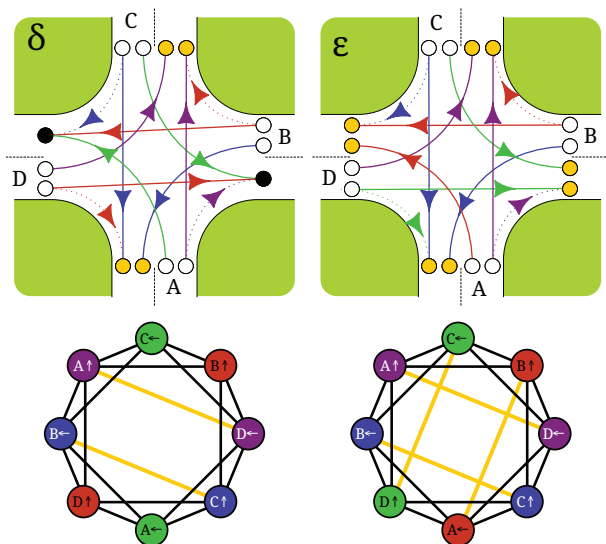
Pri določanju, katere poti se sekajo, moramo sprejeti še nekaj odločitev. Kadar se poti križata v sredini križišča, gre vsekakor za prepovedano kombinacijo. Če se sekata na začetku, pa to pomeni zavijanje z iste vstopne ceste. To ne predstavlja nevarnosti za trk, je pa problematično, če imata dva zaporedna avtomobila namen zavijati v smereh, ki *nimata* hkrati zelene luči. V teh primerih moramo imeti več vstopnih pasov in torej širšo cesto. Če se poti sekata v končni točki, imamo drugačen problem – če v isti izhodni pas *hkrati* vstopajo vozila z različnih smeri, imamo nevarnost trka. Razrešitev te nevarnosti lahko prepustimo previdnosti voznikov, ali pa jim dodelimo več izstopnih pasov, kar spet zahteva širšo cesto. Ta presečišča lahko tudi enostavno prepovemo in dobimo bolj stroge pogoje za veljavne semaforne stopnje.

Najenostavnejši primer je križišče treh cest na sliki 2, katerega pripadajoči graf je kar trikotnik. Tega lahko pobarvamo le na en način, in to s tremi barvami. Raje se posvetimo bolj zanimivemu primeru križišča štirih cest, najprej za primer, ko prepovemo sekanje v končni točki. Pripadajoči graf lahko pobarvamo s štirimi barvami, torej potrebujemo štiri stopnje semafornega cikla. Slika 3 prikazuje vse tri možne semaforne cikle s pripadajočimi pobarvanimi grafi. Semaforni cikel α je najbolj tipičen: najprej imamo vožnjo naravnost v smereh vzhod-zahod, sledi zavijanje v levo z istih cest, potem pa isto ponovimo še za smeri sever-jug. Ta semaforni cikel za-



SLIKA 3.

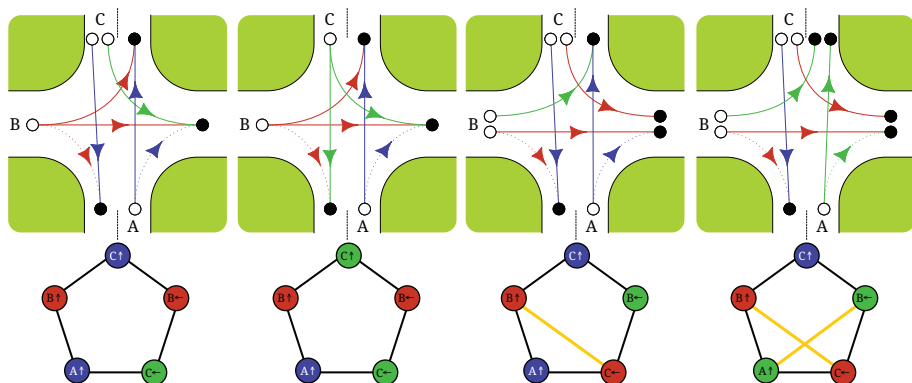
Graf za križišče štirih cest lahko pobarvamo na tri načine. Vozlišča istih barv predstavljajo hkratno zeleno luč, in na grafu niso povezana.



SLIKA 4.

Križišče s štirimi cestami z dovoljenim hkratnim zavijanjem v isto smer.

teva ločen pas za zavijanje v levo. Pri manjših križiščih to ni rešeno z ločeno stopnjo semaforja, ampak vozniki le počakajo v križišču. Cikel γ je najenostavnejši, saj za vsako cesto odpremo zavijanje v vse smeri, medtem ko na preostalih treh cestah čakajo. Ta ne zahteva niti dodatnih pasov niti čakanja v križišču, je pa redko v rabi, saj je v praksi ena cesta prednostna in je zavijanja v levo malo. V teh primerih ima cikel α večji pretok, sploh če je dovolj prostora za čakanje v sredini križišča. Cikel β je kombinacija obeh ciklov – naravnost in levo v smereh vzhod-zahod, posamični cesti v smereh jug in sever.



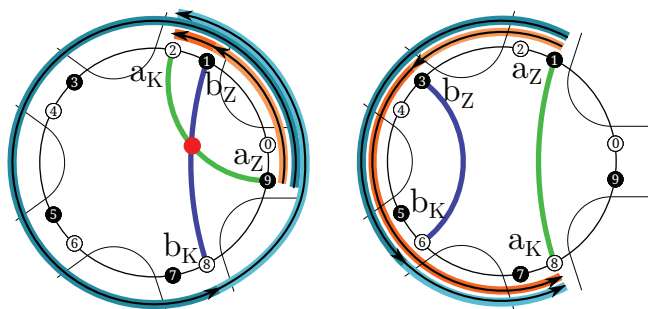
SLIKA 5.

Križišče običajne ceste (sever-jug) in enosmernega izvoza z avtoceste z zahoda in nazaj na avtocesto proti vzhodu.

Če dovolimo tudi sekanje v končni točki, dobimo še dva dodatna cikla, prikazana na sliki 4. V primeru δ pride do hkratnega zavijanja na cesti sever in jug, v primeru ϵ pa v vse štiri izhodne ceste. Na grafu so z rumeno označene povezave, ki pripadajo sekanju v končni točki.

Še zanimivejši problem je križišče običajne ceste in avtocestnih priključkov, kjer je ena izmed enosmernih cest samo vstopna, druga pa samo izstopna. V tem primeru je možnih poti pet, dobljeni graf, ki je kar cikličnen, pa lahko pobarvamo z le tremi barvami, in to na štiri možne načine, prikazane na sliki 5. Opazimo pa, da se prva dva načina razlikujeta le v barvi $C \uparrow$ – to pomeni, da lahko ta dva cikla združimo in pustimo zeleno luč $C \uparrow$ v dveh stopnjah cikla, in povečamo pretočnost križišča. Podobno velja za preostala dva načina – v tem primeru smer $A \uparrow$ lahko pobarvamo z dvema barvama, ne da bi prišlo do presečišč. V resnici imamo torej le dve možnosti.

Kako pa računsko, brez risanja, ugotovimo, ali se dve poti sekata? V ta namen si bomo mislili, da vse vstopne in izstopne točke v križišče ležijo na krožnici in jih oštevilčili s števili od 0 do $n - 1$ v smeri urnega kazalca. a_Z in a_K naj bosta začetni in končni indeks prve poti, b_Z in b_K pa začetni in končni indeks druge. Zdaj potujmo zgolj v smeri urnega kazalca, in poskusimo na poti od a_Z do a_K obiskati eno izmed krajišč poti b , kot na sliki 6. Če sta obe krajišči b vmes ali obe zunaj intervala med a_Z in a_K , potem bomo opisali enak kot za obe krajišči b : bodisi bomo šli direktno od a_Z do a_K in s tem že srečali obe krajišči, ali pa bomo morali enkrat naokrog, da poberejo obe krajišči. V tem primeru se poti ne sekata. Če pa je med a_Z in a_K le eno krajišče b , se poti sekata. V tem primeru sta opisana kota različna.



SLIKA 6.

Prepoznavanje presečišč s pomočjo cikličnega sprehoda. Levo: sprehoda 9-1-2 in 9-8-2 sta različno dolga, torej se poti sekata. Desno: sprehoda 3-1-8 in 3-6-8 sta enako dolga, torej se poti ne sekata.

Če z $\text{mod}(x, n)$ pišemo pozitivni ostanek x po deljenju z n , potem se poti ne sekata, če in samo če velja enačba

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \text{mod}(b_Z - a_Z, n) + \text{mod}(a_K - b_Z, n) = \\ & = \text{mod}(b_K - a_Z, n) + \text{mod}(a_K - b_K, n). \end{aligned}$$

To pa je nekaj, kar računalnik lahko preveri brez znanja geometrije.

Videli smo, da s pomočjo teorije grafov lahko sistematično opišemo možne semaforne cikle in izberemo tistega, ki najbolj ustreza naši situaciji. Tovrstno analizo lahko naredimo za poljubno križišče, na primer za križišče petih cest, pri čemer ugotovimo, da imamo 32 možnih 5-stopenjskih semafornih ciklov, če prepovemo zavijanje na isti izhodni pas. Tako kompleksna križišča so nepraktična in za voznike nepregledna, predvsem pa imajo nizko pretočnost. V takih primerih raje uporabimo dve zaporedni križišči, najraje pa kar krožišče. Krožišča nimajo težav s križanjem poti, še vedno pa imamo poti, ki se zlivajo v isti vozni pas – vozila se vključujejo na pas, po katerem z leve lahko prihaja vozilo, ki je že v krožišču.

Bralce vabim, da med čakanjem pri rdeči luči opazujejo, katera različica semafornega cikla velja, kako se razvrščajo v pasove, in kako se razrešujejo zavoji, ki jih semafor mogoče ne regulira ločeno. S tem bo tudi čakanje mogoče postalo nekoliko manj nadležno.



Tri lastnosti števila 2023



MARKO RAZPET



1. Število 2023 je petkrat pohlevno, ker se ga da izraziti na pet načinov kot vsoto nekaj zaporednih naravnih števil, denimo $x, x+1, \dots, x+n-1$. Pri tem sta števili x in n naravni. Veljati mora torej relacija

$$\blacksquare \quad x + (x+1) + \dots + (x+n-1) = 2023.$$

Vsoto na levi strani znamo poenostaviti, tako da dobimo

$$\blacksquare \quad \frac{n(x + (x+n-1))}{2} = 2023$$

oziroma

$$\blacksquare \quad n(2x + n - 1) = 2 \cdot 7 \cdot 17^2.$$

Desno stran te relacije lahko zapišemo na pet načinov kot produkt dveh faktorjev: $2 \cdot (7 \cdot 17^2), 14 \cdot 17^2, 34 \cdot (7 \cdot 17), 17 \cdot (14 \cdot 17), 7 \cdot (2 \cdot 17^2)$. Zato lahko izberemo $n = 2, 2x + n - 1 = 7 \cdot 17^2$ in dobimo $x = 1011$. Podobno sledi za $n = 14, 2x + n - 1 = 17^2$ še $x = 138$ itd. To pomeni, da veljajo zapisi

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & 2023 = 1011 + 1012 = 138 + 139 + \dots + 151 \\ & = 43 + 44 + \dots + 76 \\ & = 111 + 112 + \dots + 127 \\ & = 286 + 287 + \dots + 292. \end{aligned}$$

2. Število 2023 je kongruentno, kar pomeni, da obstaja pravokoten trikotnik, ki ima za stranice racionalna števila in ploščino 2023.

Ker je $2023 = 7 \cdot 17^2$, je dovolj pokazati, da je 7 kongruentno število. Ni vsako naravno število kongruentno. Najmanjše kongruentno število je 5, kar je vedel že Fibonacci.

Pravokotne trikotnike, ki imajo za stranice a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$) naravna števila, to je pitagorejske trikotnike, znamo poiskati s formulami

$$\blacksquare \quad a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2.$$

Pri tem sta m in n naravni števili in $m > n$. Če sta m in n tuji si števili različnih parnosti, potem a, b, c nimajo skupnega faktorja in pitagorejski trikotnik se imenuje primitiven. Ploščina trikotnika je $p = ab/2 = (m-n)(m+n)mn$. Poiskati moramo m in n tako, da bo p sedemkratnik nekega popolnega kvadrata. S poskušanjem ugotovimo, da za $m = 16$ in $n = 9$ dobimo

$$a = 175, b = 288, c = 337, p = \frac{ab}{2} = 7 \cdot 60^2.$$

Pravokoten trikotnik s stranicami

$$a' = a/60 = \frac{35}{12}, b' = b/60 = \frac{24}{5},$$

$$c' = c/60 = \frac{337}{60}$$

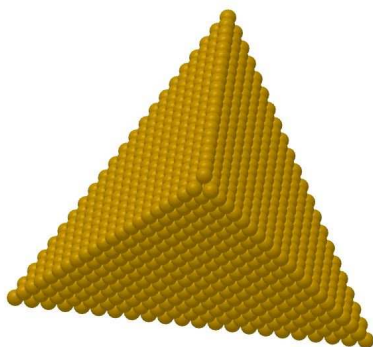
ima ploščino $p' = 7$, zato je 7 kongruentno število. Pravokoten trikotnik, ki ima 17-krat daljše stranice, to se pravi

$$a'' = 17a' = \frac{595}{12}, b'' = 17b' = \frac{408}{5},$$

$$c'' = 17c' = \frac{5729}{60},$$

ima ploščino $p'' = 17^2 p' = 7 \cdot 17^2 = 2023$. Zato je število 2023 res kongruentno.

3. Število 2023 je za 1 manjše od 22. tetraedrskega števila. To pomeni, da lahko 2023 enakih kroglic zložimo v tetraeder, ki mu manjka vrh. V k -ti plasti, šteto od vrha navzdol, je $T_k = k(k+1)/2$, to je trikotniško število kroglic.



Tetraedrsko število $\mathcal{T}_n$, n -to po vrsti, je vsota prvih n trikotniških števil:

$$\mathcal{T}_n = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Lahko ga zapišemo tudi kot

$$\mathcal{T}_n = \binom{n+2}{3}.$$

Ker je

$$2023 + 1 = 2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23 = \frac{1}{6} \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = \mathcal{T}_{22},$$

lahko zapišemo $2023 = \mathcal{T}_{22} - 1$.

xxx

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števe v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	11	10					
6						17	12
12			10		14	15	
	10			24			
		14		9			
			4				

xxx

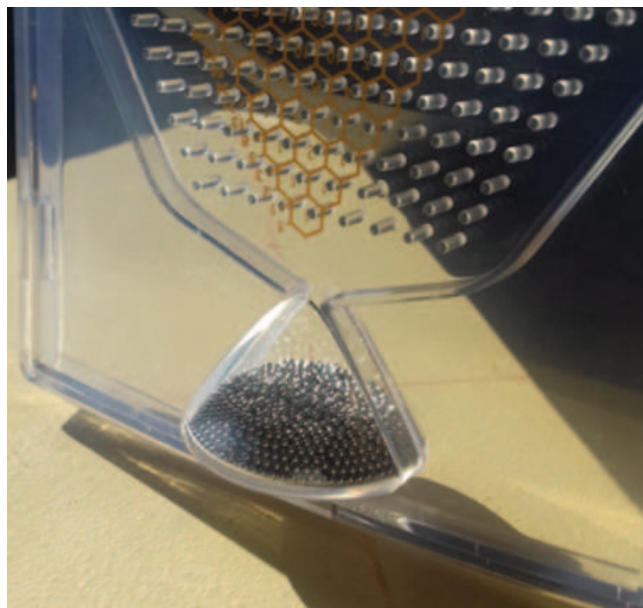
Galtonova plošča



ANDREJ LIKAR

→ Nedavno mi je prišla v roke industrijsko izdelana Galtonova plošča (glej sliko na naslovnici). Včasih smo jo naredili sami. V desko smo enakomerno pribili žebličke v več vrstah. Ti so predstavljali mrežo ovir za kroglice, ki smo jih spuščali po malo nagnjeni deski navzdol. Kroglice so pri tem trkale ob žebličke, se pri tem preusmerjale sem in tja in končno, ko so se izvile iz mreže, pristale v žlebičkih na dnu.

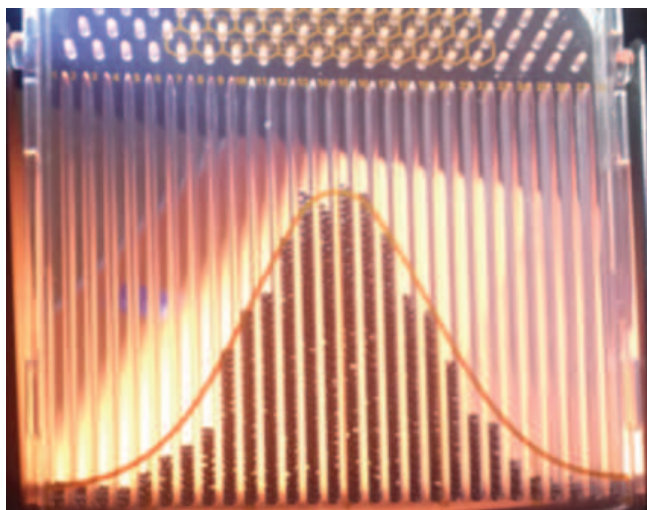
Čeprav smo kroglice spuščali z istega mesta, je vseeno vsaka izbrala svojo pot skozi žebličke. Sedaj lahko tako ploščo kupimo v kakšni spletni trgovini. Kupljena plošča deluje enako kot doma narejena, le da je mreža ovir iz plastičnih valjčkov, plošča pa je zaprta, da množica majhnih jeklenih kroglic ne more pobegniti iz nje. Ko je plošča obrnjena na glavo, se kroglice zberejo v stožčasti posodici na dnu skozi drobno luknjico na njenem vrhu (glej sliko 1). Ko ploščo obrnemo, da je posodica na vrhu, se iz nje začnejo vsipavati kroglice na mrežo ovir. Kroglice se prebijajo skozi mrežo, se od ovir odbijajo in se končno ujamejo v enakomerno nastavljene kanalčke vzdolž plošče. Ko so vse kroglice v kanalčkih, opazimo, da so se porazdelile v obliki zvonaste krivulje. V kanalčkih dlje od sredine jih je malo, v kanalčkih blizu sredine pa več. V srednji kanalček se običajno ujame največ kroglic. S ponovnim obratom se kroglice iz kanalčkov vsujejo nazaj v posodico in poskus lahko ponovimo. Pri vsakem poskusu opazimo zelo podobno porazdelitev kroglic v kanalčke. Včasih je v izbranem kanalčku malo več, včasih malo manj kroglic, a njihovo število je vedno blizu povprečne vrednosti v tem kanalčku, ki je vrisana na plošči (glej sliko 2).



SLIKA 1.

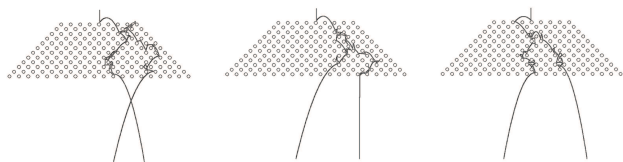
Na glavo obrnjena Galtonova plošča s kroglicami v posodici

Ko iztekajo kroglice skozi drobno odprtino posodice, nimajo vse povsem enakega startnega mesta. Tudi njihove hitrosti na mestu prvih ovir niso povsem enake. Res so si startna mesta zelo blizu, a tudi še tako majhne razlike se sčasoma, ko se kroglice prebijajo skozi ovire, močno povečajo. Na Galtonovi plošči je tirom posameznih kroglic zelo težko slediti. Zato smo jo »preselili« v računalnik. Kroglice se tudi v programu skoraj elastično odbijajo od nepremičnih valjastih ovir, kot se to dogaja pri realni plošči. Sedaj lahko sledimo tiru dveh kroglic, ki iz mirovanja startata zelo blizu druga drugi. Na sliki 3 vidimo, da se tira na začetku poti tako malo razlikujeta, da razlike niti ne opazimo. Potem pa se njuna tira začneta močno razlikovati in sta po izhodu iz

**SLIKA 2.**

Število kroglic se v posameznih kanalčkih pri vsakem poskusu nekoliko spremeni, a zvonaste krivulje kljub temu ne moremo spregledati

mreže povsem različna. Gibanje kroglic skozi ovire je torej zelo nepredvidljivo. Pojav spominja na tegobe vremenoslovcev. Iz skoraj enakih začetni razmer se vreme lahko nepredvidljivo obrne v katerokoli smer. Zato se vremenske napovedi, večinoma sicer presenetljivo točne, včasih povsem ponesrečijo. Govorimo o vplivu metulja, ki lahko z zamahom kril v nestabilnem ozračju v oddaljenem kraju povzroči nevihto.

**SLIKA 3.**

Kaotična tira dveh kroglic pri njunih zelo bližnjih startnih mestih - trije poskusi

S kupljeno Galtonovo ploščo ne moremo opazovati vpliva manjšega števila ovir na porazdelitev kroglic po kanalčkih. Radi verjamemo, da porazdelitev kroglic le pri eni oviri še ne bo zvonasta. Toda kakšna je potem? Narediti bi morali ploščo, kjer bi vr-

ste z ovirami postopoma dodajali. A z računalnikom je kakršnokoli dodajanje ali odstranjevanje ovir pač najpreprostejše.

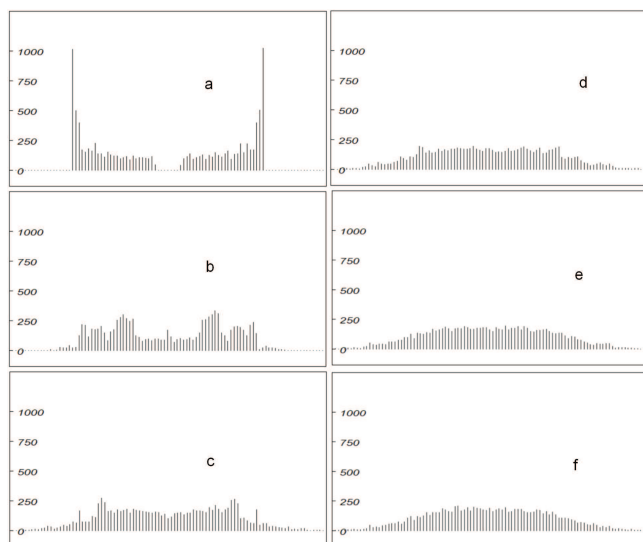
Najprej imejmo le eno valjasto oviro pod odprtino, skozi katero zaporedoma spuščamo 10000 kroglic. Kroglicam z enakim polmerom, kot ga imajo ovire, smo sledili in ugotovili, v kateri kanalček se je določena kroglica ujela. Vse kroglice so spočetka mirovale, potem pa smo jih spuščali iz enake višine. Naključno smo spreminjali le njihovo začetno lego levo-desno, vendar tako, da so vse zadele oviro. Potem smo po vrsti dodajali vedno več vrstic z ovirami in opazovali končne porazdelitve kroglic (glej sliko 4). Na sliki 5 smo prikazali porazdelitve pri eni oviri (a), oviri in dodani vrsti ovir (b) do dodanih petih vrstic ovir. Vrstice z ovirami so vedno širše, kot je to videti pri otipljivi plošči na sliki na naslovnici. Pregledno vidimo, kako se porazdelitve kroglic bližajo zvonasti obliki. Tej končni porazdelitvi pravimo normalna ali Gaussova porazdelitev. Srečamo jo pri številnih pojavih, kjer so pomembni naključni vplivi, denimo pri opisu difuzije delcev. Kroglice pri padanju in odbijanju od ovir dobivajo različno velike sunke, za izid poskusa so pomembne le komponente sunkov v vodoravni smeri levo-desno. Da bi to ugotovitev podkrepili, smo naredili še en računalniški poskus. Na sliki 6 je porazdelitev desetstisočih kroglic, ki so prvotno bile vse v izhodišču (tega označuje zelena pika) in smo jih z naključno velikimi sunki sem in tja tisočkrat preusmerili. Po vsakem sunku so se kroglice ustavile, potem pa je sledil nov sunek. Spet vidimo, da je porazdelitev kroglic po zadnjem sunku prepričljivo zvonasta. Poskus priča, da na porazdelitev podrobnosti o naravi trkov ne vplivajo. Zato normalno porazdelitev v fiziki, pa tudi na drugih področjih, zelo pogosto srečamo.

Do matematične oblike zvonaste krivulje pridemo z naslednjim razmišljanjem. Denimo, da spuščamo z balkona na lepljiva tla lahke stiroporne kroglice. Zaradi vetra, ki naključno popihlja zdaj sem zdaj tja, vse kroglice ne padajo proti tlu enako, čeprav jih spuščamo s kolikor se da istega mesta. Na tla postavimo mrežo drobnih predalčkov, kamor padajo kroglice. Predalčki naj imajo kar se da tanke stene in naj so tesno skupaj (glej sliko 7). Narišimo na tla še pravokotni koordinatni sistem (x,y) , ki naj ima izhodišče natančno pod mestom, odkoder spuščamo kroglice. Sredina vsakega predalčka ima sedaj določeni koor-



**SLIKA 4.**

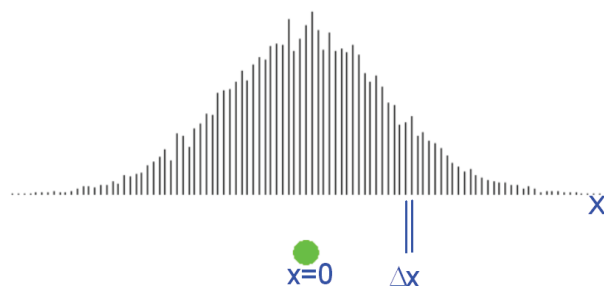
Mreža treh vrst ovir (polni krožci) pod najvišjo oviro pri naših računalniških poskusih. Prazen krožec predstavlja trenutno lego ene od kroglic, ki se prebija skozi mrežo ovir

**SLIKA 5.**

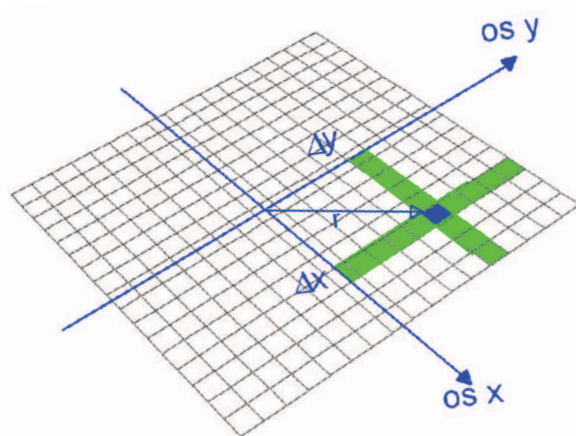
Porazdelitve kroglic pri eni oviri (a), eni dodani vrsti ovir (b), dveh dodanih (c)..., petih dodanih vrsticah (f)

dinati x in y , predalčki pa naj imajo vsi dolžino Δx in vsi širino Δy . V teh predalčkih se sedaj nabirajo kroglice.

Radi verjamemo, da mora biti porazdelitev kroglic v predalčkih z dano ordinato y in različnimi x neodvisna od te ordinate, saj smo predpostavili, da veter pihlja v vse smeri z enako verjetnostjo, torej nobena smer, torej tudi nobena koordinata, ni na boljšem. Sedaj pa pogledjmo, kako daleč od sredine našega ko-

**SLIKA 6.**

Porazdelitev kroglic po tisočih naključnih sunkih v vodoravni smeri sem in tja. Višina daljic je sorazmerna s številom kroglic v danem intervalu Δx , ki je za x oddaljen od izhodišča, ki ga nakazuje zelen krožec

**SLIKA 7.**

Koordinatni sistem in izbrani pravokotni predalček s stranicama Δx in Δy

ordinatnega sistema padajo kroglice. Ker velja po Pitagorovem izreku $r^2 = x^2 + y^2$, vemo, kako daleč od izhodišča je padla. Označimo število kroglic, ki so padle med $x - \frac{\Delta x}{2}$ in $x + \frac{\Delta x}{2}$ ne glede na koordinato y s $p(x)\Delta x$, tiste, ki so padle med $y - \frac{\Delta y}{2}$ in $y + \frac{\Delta y}{2}$ ne glede na koordinato x , pa s $p(y)\Delta y$. Tu smo vpeljali porazdelitveni funkciji $p(x)$ in $p(y)$, saj ni vseeno,

kako daleč od osi x ali osi y je izbrani predalček. Daleč od katerekoli osi je v predalčkih zelo malo kroglic ali pa je predalček celo prazen. Tudi ni vseeno, kako velik je predalček, to upoštevamo z Δx in Δy . Število kroglic, ki so padle v prav izbrani predalček s koordinatama x in y , je potem $p(x)\Delta x p(y)\Delta y$. To je zato, ker za kroglico pri danem x ta x ne vpliva na njen y in za kroglico pri danem y ta y ne vpliva na njen x . Sedaj pa odločilni sklep: porazdelitev kroglic po r mora imeti enako odvisnost, kot velja za porazdelitev po predalčkih z x ali po predalčkih z y . Če sta namreč porazdelitvi za x in za y neodvisni, je porazdelitev po r ravno enaka porazdelitvi po x , ko je $y = 0$. Na splošno mora torej veljati:

$$p(r)\Delta x\Delta y = p(x)\Delta x p(y)\Delta y,$$

ali

$$p(r) = p(x)p(y).$$

Velja tudi:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Edina odvisnost $p(x)$, ki zmore zadovoljiti obe zgornji zahtevi, je:

$$p(x) = Ae^{kx^2}.$$

Ker se mora število kroglic v kanalčkih z naraščajočim x zmanjševati, mora biti k negativen, torej

$$p(x) = Ae^{-|k|x^2}.$$

Tu je A sorazmeren s številom kroglic. Z deljenjem $p(x)$ s tem številom preidemo na verjetnost, kar pa za nas niti ni pomembno.

Plošča nosi ime po angleškem polihistorju Francisu Galtonu (1822–1911), ki je občudoval lastnost kroglic, da se vedno porazdelijo po zvonasti krivulji. Ploščo je sam izdelal in z njo navdušeno prikazoval to lastnost svojim učencem. Znan je tudi po tem, da je v statistiko vpeljal pojem korelacijskega koeficienta, ki pove, če ena meritev kako vpliva na drugo in priporočal uporabo krivulj, ki se meritvam najbolj tesno prilagajajo, namesto zgolj povprečnih vrednosti, ki so bile do tedaj v uporabi. Vpeljal je statistične metode v meteorologijo in humanistične vede.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	4	13			
11			11		
14				16	
		8			12
			8		
			15		

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

7	8	15			
5	3	8			
12	5	3	8		
	16	8	5	1	14
		11	8	3	11
		13	4		

3

× × ×

Geometrijska konstrukcija parabole



BOŠTJAN KUZMAN

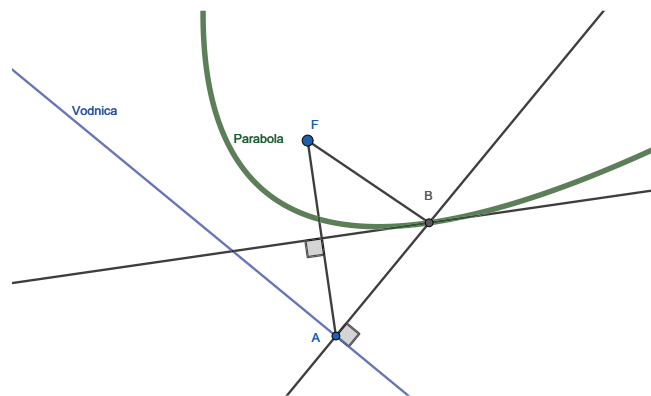
→ Pri pouku matematike v srednji šoli dandanes parabolo običajno spoznamo kot graf kvadratne funkcije. Hitro se naučimo računsko določiti njeno temo, morebitni ničli in presečišče z ordinatno osjo, izvirna geometrijska definicija parabole pa pri obravnavi pogosto ostane v ozadju. V tem kratkem prispevku si bomo ogledali, kako v GeoGebri konstruirati parabolo z uporabo sledi točke ob premikanju po premici.

Spomnimo se: parabola je množica vseh točk v ravnini, ki so enako oddaljene od neke vnaprej izbrane točke, ki jo imenujemo *gorišče* ali *fokus*, in vnaprej izbrane premice, ki jo imenujemo *vodnica* ali *direktrisa*.

Narišimo torej skico s poljubno premico in točko v ravnini. Pri tem gorišče F izberimo tako, da ne leži na premici vodnici. Označimo na premici poljubno točko A in narišimo daljico AF . Naj bo točka B presečišče simetrale daljice AF in pravokotnice na vodnico skozi točko A (Slika 1). Ker B leži na simetrali, je enako oddaljena od točk A in F . Ker pa leži tudi na pravokotnici na vodnico, je njena razdalja od vodnice enaka razdalji od točke A . Torej je točka B ena od točk iskane parabole. Na ta način vsaka točka A na premici vodnici določa neko točko na paraboli.

Izjema bi bil primer, ko bi gorišče F ležalo na premici vodnici. Bralec bo s pomočjo lastne skice zlahka opazil, da je tedaj ustrezna parabola enaka kar pravokotnici na vodnico skozi točko F .

Zdaj je kot na dlani tudi ustrezna konstrukcija parabole v GeoGebri:



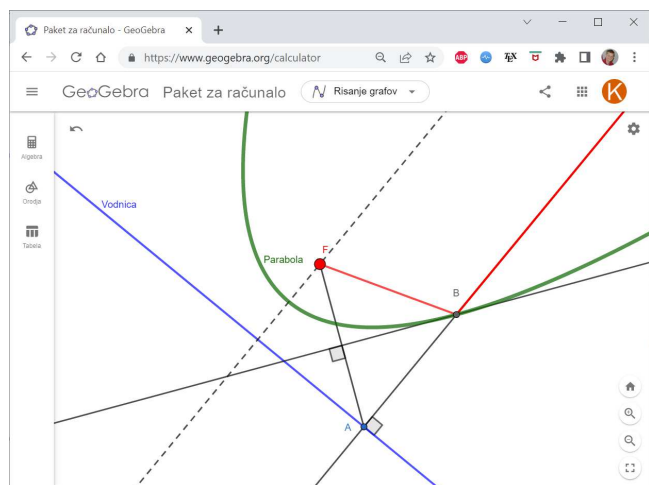
SLIKA 1.

Če gorišče F ne leži na premici vodnici, potem vsaka točka A na premici določa natanko eno točko B na paraboli.

- Na delovni površini skrijemo koordinatni sistem.
- Skozi dve poljubno izbrani točki narišemo premico vodnico. Točki nato skrijemo.
- Izberemo poljubno točko zunaj premice in jo označimo s F .
- Zdaj na premici izberemo neko poljubno točko in jo označimo z A . (Pozor, ta točka ni enaka nobeni od dveh točk, ki določata premico).
- Narišemo daljico AF in njeno simetralo, ter pravokotnico na vodnico skozi A .
- Presečišče prej narisane simetrale in pravokotnice označimo z B .
- Klikanje in prikaz pomočnih objektov pri prejšnjih dveh korakih nam prihrani vnos ukaza `Presečišče(Simetrala(A,F), Pravokotnica(A,f))`.
- Zdaj lahko vklopimo sled točke B in opazujemo krivuljo, ki nastaja ob premikanju točke A po premici.

- Z ukazom $s1ed(B,A)$ lahko izrišemo celotno parabolo in opazujemo, kako se pri premikanju gorišča F spreminja njena oblika. Posebej si lahko ogledamo tudi primer, ko gorišče leži na vodnici.

Opisana geometrijska konstrukcija seveda ni edina možna, je pa najbolj neposredna glede na našo definicijo parabole. Iz izdelanega prikaza lahko razberemo tudi znamenito odbojno lastnost parabole – vsak žarek, vzporeden osi simetrije parabole, se na paraboličnem zrcalu odbije v gorišče (slika 2). Bralec bo z brskanjem zlahka našel še kakšno zanimivo geometrijsko konstrukcijo parabole. Z uporabo pojma ekscentričnost lahko geometrijsko definicijo parabole posplošimo tako, da z njo zajamemo tudi druge stožnice. Več o tem pa v eni od prihodnjih števil.


SLIKA 2.

Geometrijska konstrukcija lepo poudari tudi odbojno lastnost parabole.

www.dmfa.si
www.dmfa-zaloznistvo.si
www.presek.si

Novoletna nagradna uganka

↓ ↓ ↓

UREDNIŠTVO

→ Ana ima 2023 enakih kock.

- Iz svojih kock je sestavila nekaj večjih kock in pri tem uporabila vse kocke. Koliko najmanj kock je sestavila?
- Iz svojih kock je sestavila nekaj kvadratnih ploškev (višine 1) in pri tem uporabila vse kocke. Koliko najmanj kvadratov je sestavila?
- Ana je 2023 enakim kockam dodala še nekaj enakih kock, ki jih je dobila z razstavljanjem večje kocke. Zdaj lahko iz vseh kock skupaj sestavi dve večji kocki. Koliko najmanj kock je dodala?

Naloge je prispevala Katarína Hriňáková. Kratko rešitev s svojimi podatki pošljite na e-naslov info@dmfa-zaloznistvo.si do 20. januarja 2023. Med prispelimi rešitvami bomo izžrebali 3 in jih nagradili s knjižno nagrado.

× × ×

Križne vsote

REŠITEV S STRANI 9

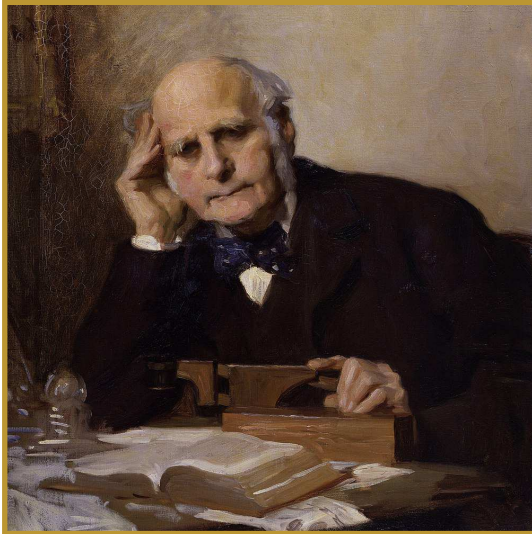
↓ ↓ ↓

	11	10					
6	4	2				17	12
12	7	5	10		15	9	5
	10	3	7	9	24	9	8
		14	3	6	5		
			4	3	1		

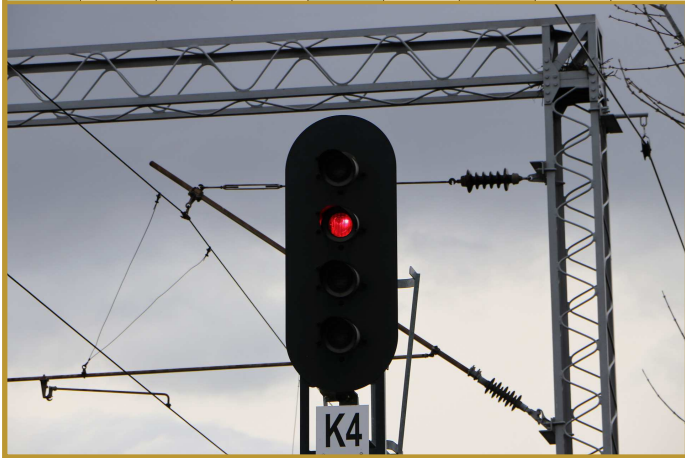
× × ×



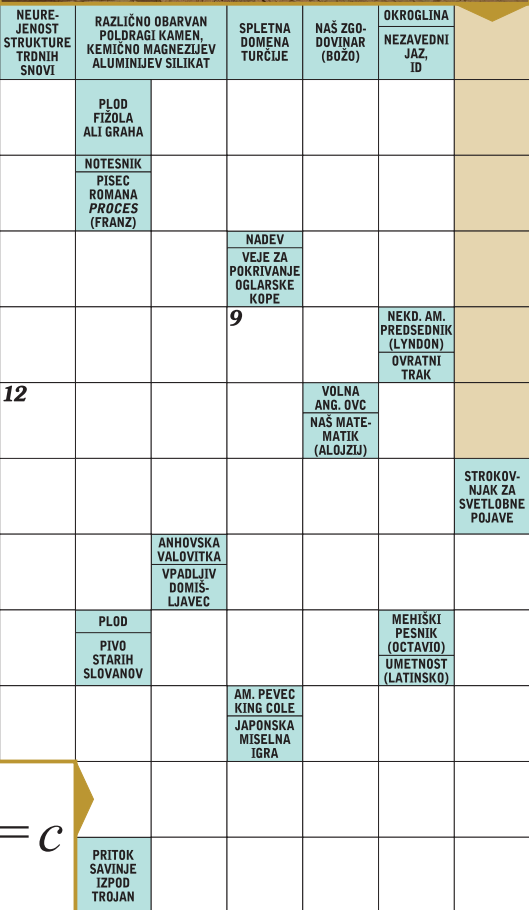
Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALČIČ										STARO-INDIJSKI KNJIŽNI JEZIK	DALJŠI TEORETIČNI SESTAVEK	BRITANSKA PEVKA ORA	KRAJ PRI ČRNOMLJU Z ŽELEZNIŠKIM VIADUKTOM	BOJAN MAGAJNA	STOTINA ŠVEDSKE KRONE, ERE	NEKDANJI VZHODNO-NEMSKI POLITIK (WILLI)	VELIKA ENOTA ZA MASO	NEDOV- ZETNOST ZA NOVOSTI, RIGIDNOST	POGOST VEZNIK
SVETLOBNI MERILNIK FREKVENČE PERIODIČ. PROCESOV																			
VEDA O ŠTEVILIH IN RAČUNSKIH OPE- RACIJAH																			
ATLANTSKI PAKT											2			NAVOJNO SENČILO NAJMANJŠE LIHO PRA- ŠTEVILLO					IGRALKA BELAK
GOZDOVNIK															PREDHODNIK BIG BANDA RTV SLOV. SOSED LATVIJCA				
KATJA TRATNIK												MIT. ATEN- SKI KRALJ						8	
RIMSKI BOG PLODNOSTI												NEVTRAL ZA SEŠTE- VANJE							
																NEKDANJI NORVEŠKI BIATLONEC BJØRNDALEN VNEMA			
GRAFIČNO OBLIKO- VANJE MATEVŽ BOKALČIČ	KRATICA SLUŽBE ZA STIKE Z JAV- NOSTMI	VEČJE GRUČASTO NASELJE V LOŠKEM POTOKU	DOKAZANA TROITEV V MATE- MATIKI	GLASBENI SLOG Z JAMAJKE	FRANCOSKI DRAMATIK (ARMAND) PRISTOJ- BINA								NAŠA NAJVEČJA ZVER	VISOK MO- ŠKI GLAS	UTRJEVANJE PLEZALNE SMERI				
NEKDANJI PISARNIŠKI USLUŽ- BENEČ, ADJUNKT							4		SLOVAŠKO- MADŽARSKA REKA, PRITOK DONAVE	TEMNO- LASKA			NEKDANJI DAEWOOJEV MODEL						
STROJ ZA OBDELAVO KOVINE ALI LESA, FREZALNIK												ŠAHISTKA KRIVEC					PRISLOV KRAJA		
												NEKD. BOS. NOGOMETŠA SUŠIČ					IZUMITELJ NOBEL		
SKUPINA POVEZANIH NOTRANJNH ORGANOV														5					
OSREDNJI JUNAK JANCARJEVEGA ROMANA GALJOT (JOHAN)									MESTO V KALIFORNIJI S TEHNO- L. INŠTITUTOM DECIGRAM									ALBERT EINSTEIN	OSKAR (LJUBKOV.) NEMŠKI DIRIGENT (MICHAEL)
DROG VOZA, OB KATEREGA SE VPREGA ZIVAL		7			PARTNER PRI DELU, KOLEGA														
DELOVANJE MOTORJA					LJUBITELJ ANGLEŠKE KULTURE											POMEMBEN FRANCOSKI MATEMATIK SORODNIK ČEBULE			
																AMERIŠKA IGRALKA (MICHELLE) EGIPČAN. MIT. PTIC			
																			OZEMLJE DRŽAVE ZNOTRAJ DRUGE DRŽAVE
																			AKTIVEN HAVAJSKI VULKAN (MAUNA) RADLJ
									ITALIJAN. IME REKE TIBERE										
									ČAS ENEGA VRTLJAJA PLANETA OKOLI OSI										
									REKA V JZ. ETIOPIJI, KI SE IZLIVA V TURKANSKO JEZERO							VADBENO OBLAČILO			
									PISAN NOČNI, METULJ KI LETA PODNEVI										FIZIK MOLJK
									LİČENJE ALI NALI- ČENOST OBRAZA										PASCAL
									TEKSAŠKO MESTO NA OBMOČJU PRIDOBIVA- NJA NAFTE	13									



log_ab



FRANCOSKI FIZIK, RAZISKOVALEC VALOVANJA SVETLOBE (AUGUSTIN JEAN)		OBRNLJIVOST FIZIKALNIH SPREMEMB	PROVINCA V SEVEROVZHODNI ETIOPIJI	NIKALNICA	NARITI KUPČKI PRSTI NA TRAVNIKU	PRODUKT SILE IN POTI V FIZIKI	RAFAEL NADAL	SUPERGA S TREMI ČRTAMI	ČLANICA KULTURNO-UMETNIŠKEGA DRUŠTVA	NEKDANJI BRAZILSKI VOZNIK FORMULE 1 FITTIPALDI
AMERIŠKI ASTROFIZIK, ISKALEC NEZEMELJ. CIVILIZACIJ			11							
NAJŠIRŠE LJUDSKO ODLOČANJE O POLITIČNI ZADEVI				TALIJ DELAVEC V PROIZVODNJI GUME			13. ALI 15. DAN V MESECU RIMSKEGA KOLEDARJA			
KAJNOVA IN ABELOVA MATI							NEM. IGRALKA (KARIN) NEKD. NORV. SMUČAR (LASSE)			10
ITALIJAN. PEDESEDNIK MATTARELLA										
NORINA RADOVAN			UNITED NATIONS DVOČLENA MATEMAT. RELACIJA			UDAREC S KLIJUNOM SAVANA V JUŽNOAM. OKOLJU				
NIABIJ										
					RIMSKI PESNIK IZDELOVALEC KRZNIH OBLAČIL					
MATERIJA	VEČJI ČOLN	1							GRŠKI SKLADATELJ THEODORAKIS	STAR LJUDSKI IZRAZ ZA VIOLINO
	ZAVRAČANJE SPLOŠNIH NORM									
				RADON			NASTAVEK POGANJKA	MOJCA ŠIROK ČISTA TEŽA ALI VREDNOST		
				ZOBATO KOLO ZA PRENOS VRTENJA KISIČ						
						TEKOČA VODA ENAKA SAMOGLASNIKA	3			
14				GL. MESTO TEKSASA ZAMBIJSKI DRŽAVNIK (KENNETH)						
LOJZE SPACAL			NEUSMIJENOST							
NATRIJ			ENERGIJA DELCA							
		SOSEDNJI ČRKI								
		GRŠKA ČRKA								
LAHEK NASIČEN OBLJIKOVODIK										
TANTAL			6							
	VRTNA HIŠICA									

ter ga oddajte do **1. februarja 2022**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Lov na nezemljane in Drakova enačba

↓↓↓
VID KAVČIČ

→ V začetku septembra nas je zapustil veliki astronom Frank Drake, zato smo se odločili članek v tokratni številki revije Presek posvetiti ameriškemu astrobiologu, ki je svojo kariero začel kot radijski astronom, najbolj pa se je uveljavil s svojimi raziskavami na področju nezemeljske inteligence SETI (angl. *search for extraterrestrial intelligence*). V okviru slednje je razvil tudi Drakovo enačbo, s katero je poskusil kvantificirati število inteligentnih oblik življenja v Galaksiji, ki bi jih potencialno lahko odkrili.

Preden pa se posvetimo takšnim in drugačnim oblikam nezemljanov in inteligentnih civilizacij, ob katerih se spomnimo na razne znanstvenofantastične televizijske serije, se dotaknimo nekaj osnov astrobiologije in načnimo nekaj temeljnih vprašanj o živem.

Življenje

Živo?

Zdi se, da je koncept življenja nekoliko izmuzljiva reč. Poznamo namreč le en primer življenja – tega, ki se je razvilo na Zemlji –, zato je življenje na splošnem težko opredeliti. Smiselno pa je domnevati, da bi lahko nekatere značilnosti življenja, kot ga poznamo, posplošili tudi na druge oblike življenja.

Za življenje v obliki, kot ga poznamo, zares pomembnih kemijskih elementov v resnici ni tako zelo

veliko – mednje spadajo ogljik (C), vodik (H), dušik (N), kisik (O), fosfor (P) in žveplo (S), kar si lahko prikladno zapomnimo kot CHNOPS – slednji pa je vsekakor ključnega pomena za življenje. Med organskimi molekulami, ki jih sestavljajo ti elementi, so najpomembnejši lipidi, nukleotidi in aminokisline. Kisik in vodik sestavljata **vodo**, spojino, brez katere si življenje zares težko predstavljamo. Življenje na Zemlji je nastalo v vodi, in sicer pred več kot 3 milijardami let, vendar pa tudi današnji kopenski organizmi za svoje delovanje vodo še vedno nujno potrebujejo.

element	delež (ppm)
vodik	739.000
helij	240.000
kisik	10.400
ogljik	4.600
neon	1.340
železo	1.090
dušik	960
silicij	650
magnezij	580
žveplo	440

TABELA 1. Najpogostejši elementi v Galaksiji. Fosfor se v vesolju pojavlja v sledih – njegov delež je le okoli 50 ppm. Če v Galaksiji iščemo življenje, podobno našemu, moramo zato posebej oprezati ravno za fosforjem.

Pogoji za življenje

Takoj po velikem poku sta bila v vesolju edina elementa vodik in helij. Težji elementi so nastali z jedrskimi reakcijami v zvezdah in pri eksplozijah supernov. Deležu elementov v zvezdi, ki so težji od vodika in helija, pravimo **kovinskost**.

Zvezde v *eliptičnih galaksijah* in *kroglastih zvezdnih kopicah* so zelo stare in imajo nizko kovinskost, zato se v njih življenje najverjetneje ne bo razvilo. Veliko primernejši so *diski spiralnih galaksij*, ki vsebujejo mlade zvezde z visoko kovinskostjo. Daleč od središča galaksije sta hitrost rojstev zvezd in s tem kovinskost majhni, blizu središča pa je kovinskost sicer velika, vendar ta predel zaradi visoke gostote zvezd in s tem povezanega intenzivnega sevanja ni primeren za življenje. Po grobi oceni zato v **habitabilnem območju Galaksije** leži le okoli petina zvezd.

Vendar to nikakor ni dovolj – za življenje primeren planet mora ležati tudi v **habitabilnem območju matične zvezde**. To je območje, kjer se temperatura planeta vselej giblje med lediščem in vreliščem vode. Slednja je poleg oddaljenosti od matične zvezde in njenega izseva odvisna tudi od *albeda* površja planeta in kemične sestave atmosfere. Planet večino prejete energije izseva v *infrardeči svetlobi*, ki pa jo toplogredni plini učinkovito absorbirajo. Če je zvezda hladna, je habitabilno območje ozko. Vroče zvezde imajo sicer širše habitabilno območje, vendar je čas življenja na glavni veji zanje veliko krajši, zato časa za razvoj življenja na njenih planetih ni veliko. Zato so najprimernejše kandidatke za habitabilne planete ravno Soncu podobne zvezde glavne veje.

Življenje v vesolju

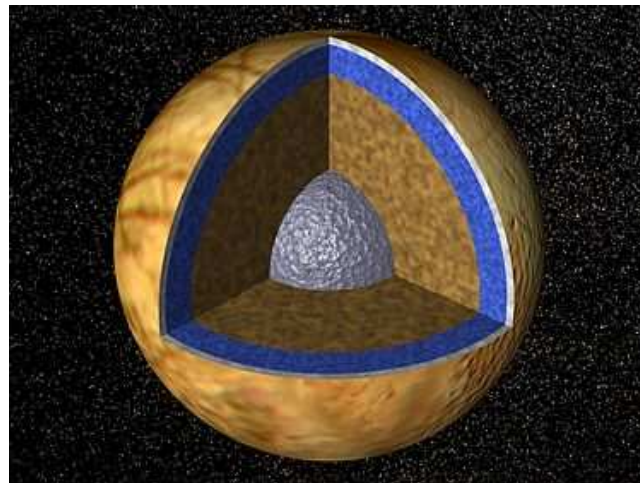
Naše Osončje

Če smo se že lotili iskanja življenja v tem širnem vesolju, stran od matere Zemlje, bi bilo morda smiselno pogledati pred lastnim pragom – kako je z življenjem na planetih, lunah in drugih telesih v Osončju?

Soncu najbližja planeta Merkur in Venera za življenje nista primerna. Prvi nima atmosfere, nasprotno pa je atmosfera Venere pregosta in prevroča. Plinski velikani Jupiter, Saturn, Uran in Neptun nimajo trdnega površja. Na Marsu je življenje nekoč

morda obstajalo; čeprav sonde na njem niso zaznale znakov življenja, ni nemogoče, da je na njem še vedno prisotnih nekaj mikroskopskih oblik življenja.

Obstajajo sumi in upi za življenje na Jupitrovi luni **Evropa**. Njeno površje je namreč prekrito s poledenim slanim oceanom. Osvetlitev pod ledenim pokrovom je sicer preslaba za fotosintezo, vendar na Evropi obstaja tudi drugi vir energije, in sicer *plimsko segrevanje*, ki bi lahko omogočalo življenje enostavnim mikrobom.



SLIKA 1.

Pod ledenim površjem Galilejeve lune Evropa se nahaja plast vode, v kateri bi lahko obstajalo enostavno življenje. (Vir slike: [4])

Saturnova luna **Titan** je edini naravni satelit v Osončju z gosto atmosfero. Ozračje je bogato tudi z organskimi spojinami, med drugim z *metanom*. Ker metan hitro razpada, mora na Titanu obstajati neki vir metana, ki bi ga sproti nadomeščal. To bi lahko bili živi organizmi, vendar Titan zaradi svoje hladnosti ni videti kot obetaven kraj za življenje. Razen tega pa so na Cassinijevih radarskih slikah Titanovega površja razvidna temna *metanska jezera*, kar zavrže mistični izvor metana v Titanovi atmosferi.

Zanimivo je tudi proučevanje življenja na kometih, sploh če se sprašujemo o izvoru življenja na Zemlji, saj so ravno kometi iz Oortovega oblaka eni izmed potencialnih kandidatov, ki so življenje prinesli na Zemljo. Omeniti je treba *projekt Rosseta* in *sondo Giotto*, ki je v drugi polovici osemdesetih let pristala





na 15-kilometrskem **Halleyjevem kometu** in pokazala, da je sestavljen iz prahu in ledu, znakov življenja pa ni zasledila.

Odkrivanje življenja

Recimo, da smo našli potencialni planet, primeren za življenje. Kako bi lahko ugotovili, ali se je življenje na njem tudi dejansko razvilo?

Decembra 1990 je vesoljska **sonda Galileo** (slika 2) svoje merilne naprave usmerila proti Zemlji in domov poslala rezultate meritev. Analize so pokazale, da kar štirje izmerjeni pojavi kažejo na to, da na opazovanem planetu obstaja življenje. V infrardeči svetlobi na življenje namigujejo predvsem na prisotnost metana, vode, kisika oziroma ozona ter klorofila.

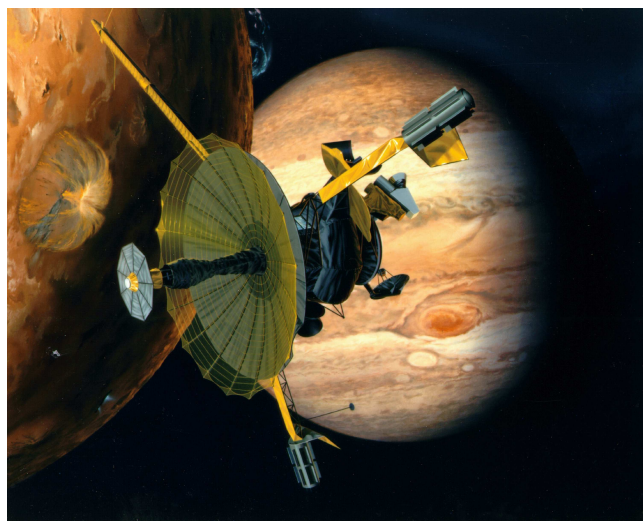
Metan proizvajajo tudi živa bitja, hkrati pa hitro oksidira – vendar kot smo videli na primeru Titana, sam po sebi ni znak za življenje. *Klorofil* je ključen za fotosintezo. Absorbira vidno svetlobo, še posebej modro in rdečo, daljše valovne dolžine se zelo učinkovito odbijajo, da se prepreči prekomerno segrevanje. *Voda* je vsekakor vsestranskega pomena, *kisik* je potreben za celično dihanje, *ozon* pa nas ščiti pred škodljivimi vplivi sevanja UV.

Inteligentno življenje in SETI

Inteligentno življenje

Od nekdaj se je med Zemljani in še posebej med astronomi pojavljalo zanimivo vprašanje, ali smo v vesolju sami oziroma ali v njem morda obstajajo druge inteligentne oblike življenja, s katerimi bi se lahko sporazumevali. Eden izmed projektov iskanja nezemeljskega inteligentnega življenja je SETI (angl. *search for extraterrestrial intelligence*), čigar začetki segajo v začetke druge polovice 20. stoletja.

Lahko bi mislili, da so druge galaksije in zvezdne kopice vredne spremljanja, saj je v ozkem snopu teleskopa veliko zvezd in bi bila zato verjetnost, da bi zaznali kakšne signale z oddaljenega planeta zelenih možičkov, še kar obetavna. Na žalost ni čisto tako. Druge galaksije so namreč predaleč, zato bi bili signali prešibki, da bi jih lahko zaznali, poleg tega pa kroglaste kopice, kot smo ugotovili v prejšnjih razdelkih, niso obetavni predeli za iskanje življenja. *Razsute zvezdne kopice* so po drugi strani



SLIKA 2.

Vesoljska sonda **Galileo** je bila prva sonda brez človeške posadke, ki so jo leta 1989 izstrelili v vesolje, da bi proučevala Jupiter in njegove lune. Malo po izstrelitvi je svoje merilne naprave najprej usmerila proti Zemlji in domov poslala meritve, ki kažejo očitne znake življenja na Zemlji. Sonda je do Jupitra prispela decembra 1995. Plovilo je prvo obkrožilo Jupiter in prvo poslalo del sonde v Jupitrovo atmosfero. Po zaslugi misije Galileo danes upravičeno sklepamo, da se pod ledeno skorjo Jupitrove lune Evropa skriva slan ocean. (Vir slike: [8])

razmeroma mlade in verjetnejše kandidatke za razvoj življenja, vendar so po drugi strani tudi zelo mlade, zato se življenje še ni razvilo do te mere, da bi bilo zmožno sporazumevanja.

Radijska astronomija in 21-cm vodikova črta

Svetloba je *elektromagnetno valovanje*, to je periodično nihanje električnega in magnetnega polja. Velikost hitrosti svetlobe v vakuumu je $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s. Hitrost svetlobe c , valovno dolžino λ in frekvenco valovanja ν povezuje enačba

$$c = \lambda \nu.$$

Elektromagnetno valovanje glede na valovno dolžino delimo na več območij. Naše oči lahko zaznajo le svetlobe valovnih dolžin med 400 in 750 nanometrov, čemur pravimo *vidna svetloba*. *Ultravijolična svetloba*, *rentgenski žarki* in *žarki gama* imajo še krajše valovne dolžine in višje frekvence, medtem

ko ima *infrardeča svetloba* valovne dolžine med 1 do 100 mikrometrov, *radijski valovi* pa daljše od milimetra.

Najpomembnejše okno valovnih dolžin za raziskave SETI je med 3 cm in 30 cm, kar so tako imenovani *decimetrični valovi*. Pri daljših valovnih dolžinah namreč postane nebo veliko svetlejšje zaradi *naravnih oddajnikov svetlobe metrskih in daljših valovnih dolžin*, kot so plinaste meglice, radijske galaksije, kvazarji, pulzarji, supernove in ostanki supernov, kar bi nas pri komunikaciji motilo, zato bi se temu učinku vsekakor radi izognili. Pri valovnih dolžinah, krajših od 1 cm, nas zmoti učinek, ki je povezan z *dvojno naravo svetlobe* – valovanje in delci. Vsakemu valovanju lahko pripišemo delec, v primeru svetlobe *foton*, ki opiše razporeditev in gibanje svetlobe v prostoru. Največja verjetnost, da najdemo foton, je tam, kjer je valovanje najmočnejše. Zato je energija vsakega fotona sorazmerna frekvenci valovanja in velja

$$\blacksquare \quad W_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

kjer je $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js *Planckova konstanta*. Za dano skupno energijo valovanja višja frekvenca torej pomeni nižje število pripisanih fotonov, kar pa ni najbolj optimalno, saj želimo civilizacijam pošiljati kar največjo možno količino informacij. Pri tem ne gre pozabiti na **prasevanje**, ki ga enakomerno zaznamo v vseh smereh v vesolju, in ustreza sevanju črnega telesa s temperaturo 2,7 K. Sevanje je po Wienovem zakonu najmočnejše pri valovni dolžini 1 mm, ki pa smo jo zaradi prej navedenega učinka že izključili iz optimalnih.

Zaradi vseh treh zgornjih učinkov je optimalno **okno valovnih dolžin** oziroma **frekvenc za raziskave SETI** med 2 cm in 30 cm oziroma med 1 in 30 GHz. Če upoštevamo še učinek vodne pare v naši atmosferi, ki preprečuje opazovanja s površja Zemlje nad okoli 20 GHz, so najboljše frekvence za opazovanja z Zemlje **med 1 in 10 GHz**. Vendar pa z Zemljino atmosfero nismo povsem omejeni; v zadnjih letih smo v vesolje poslali veliko teleskopov, ki lahko opazujejo brez motenj ozračja. Primer takega je zloglasni teleskop *James Webb* v Lagrangevi točki L2, ki sicer opazuje v infrardeči svetlobi.

V oknu frekvenc SETI se pojavi *sevanje nevtralnega atomarnega vodika*, najpogostejšega atoma v vesolju, ki ustreza valovni dolžini 21,1 cm. Slavna

21-cm črta izhaja iz interakcij spina enega elektrona in atomskega jedra (protona). Interakcija je podobna kot pri dveh majhnih vzporednih paličastih magnetih – če sta magneta nasprotno orientirana, se privlačita, sicer pa se odbijata. Energija stanja, ko sta spina elektrona in protona enako oziroma nasprotno orientirana, je seveda različna. Navadno so vodikovi atomi v najbolj stabilnem energijskem stanju, ki ustreza nižjemu energijskemu nivoju. Če jih kaj zmoti, lahko skočijo v višje vzbujeno stanje in tam ostanejo tudi do deset milijonov let. Pri prehodu nazaj v nižje energijsko stanje atom odda foton z valovno dolžino 21 cm, kar ustreza razliki energij teh dveh stanj.

Atomi nevtralnega vodika so prisotni vsepovsod po medzvezdnem prostoru, zato je 21-cm črta najbolj razširjen naravni pojav v vesolju. Valovna dolžina 21 cm je tako zelo pomembno število vesolja, zato ne preseneča ideja, da bi med vsemi valovnimi dolžinami v oknu SETI za komunikacijski standard z drugimi civilizacijami izbrali prav to. Do te ugotovitve sta leta 1959 prišla *Guiseppe Cocconi* in *Phil Morrison* v svojem zgodovinskem članku v reviji *Nature*, v katerem sta pokazala, da bi se lahko s takratnimi novimi tehnikami na področju radijske astronomije sporazumevali z oddaljenimi nezemeljskimi civilizacijami. Razen tega pa lahko valovanje s to valovno dolžino prebije ogromne oblake medzvezdnega prahu, ki so za vidno svetlobo neprosojni.

Hipoteze SETI

Kot vsaka resna znanstvena raziskava tudi SETI vključuje delovne hipoteze in ugotovitve, ki jih skuša z opazovanji potrditi ali ovreči.

1. hipoteza: *Življenje na Zemlji je posledica naravne evolucije zaradi fizikalnih procesov, ki potekajo povsod v vesolju.*

Hipoteza je smiselna, saj je fizika temeljna naravoslovna veda, na kateri slonijo mnoge druge znanosti, kot sta na primer kemija in biologija, ki sta bistveni za razvoj življenja.

2. hipoteza: *Kot se je življenje razvilo na Zemlji, bi se lahko razvilo tudi kjer koli drugje v vesolju.*

V vsaki galaksiji je v povprečju nekaj milijard zvezd, v vidnem vesolju pa okoli 100 milijard galaksij. Med skupaj torej okoli 10^{21} zvezdami vidnega vesolja je 10 % zvezd podobnih Soncu. Zemlja obstaja okoli 4,5 milijarde let, medtem ko je vesolje





staro 13,8 milijarde let, pri čemer je večina galaksij starih okoli 12 milijard let, kar je skoraj trikrat toliko kot starost Zemlje. Skrb, da nikjer v vesolju ni primerljivih pogojev kot na Zemlji in njeni okolici, je tako popolnoma odveč.

3. hipoteza: *Človekova inteligenca ni največja, ki bi lahko obstajala v vesolju.*

Na Zemlji je minilo 4,5 milijarde let, da je življenje doseglo stopnjo inteligence, kot jo poznamo danes. Izpostaviti pa gre, da so druge Soncu podobne zvezde obstajale še mnogo več časa. Smiselna ocena je torej, da so starejše zvezde in Soncu podobne zvezde obstajale pred 10 milijardami let, ko so bile stare približno 4 milijarde let. Proces evolucije med *avstralopitkom* in nami je trajal le 3,7 milijona let – in kaj je to v primerjavi s štirimi milijardami let? Zaradi tega nikakor ne moremo zavreči ideje, da se v milijardah let, v milijardah galaksij, med katerimi vsaka vsebuje milijarde zvezd, evlucijski proces ne bi mogel razviti naprednejših rezultatov, kot smo jim priča v prvi polovici enaindvajsetega stoletja.

Zato je smiselno domnevati, da v vesolju morda obstajajo naprednejše oblike življenja, kot je naše. Morda so to Kardaševe supercivilizacije, ki smo se jih dotaknili v prejšnjem članku, morda majhni zeleni škratki janšlji, mogoče horde pesniških dečkov gnamunov ali morebiti kolonije sapramišk. Morda bi jih imenovali bitja, rase, družbe, tehnologije, civilizacije, kolonije, osebe, posamezniki ali kako drugače – toda v resnici o njih ne vemo ničesar. Vse, kar vemo, je le to, da ne živijo na Zemlji, zato je morda še najbolj prikladno, da jih imenujemo kar **nezemljani**.

SETI je trenutno edina resnejša raziskava, ki poskuša potrditi, da nezemljani obstajajo. Poskušajo zaznati njihove signale v obliki elektromagnetnih valov. Če bi tovrstne signale zaznali in bi lahko dokazali, da so umetnega izvora, bi lahko potrdili veliko hipotez in možnih posledic, predvsem pa, da v vesolju nismo osamljeni.

O SETI

Prvo resnejšo raziskavo SETI je leta 1960 izvedel **Frank Drake** (slika 3). Pri valovni dolžini 21 cm je opazoval zvezdi τ Kita in ϵ Eridana. Leta 1974 je Drake z radijskim teleskopom Arecibo poslal sporočilo v kroglasto kopico M 13 v Herkulu, ki pa ni verjetno območje za življenje. Sporočilo je vsebovalo 1679 pulzov. Število 1679 je produkt samo dveh pra-

številskih faktorjev 23 in 73, zato bi prejemnik, ki bi razumel vsaj nekaj matematike, lahko ugibal, da vsebuje sporočilo dvodimenzionalno sliko. Če bi kadar koli dobili podobno sporočilo, bi bili z veliko verjetnostjo lahko trdili, da je umetnega izvora, četudi ga morda ne bi znali interpretirati.



SLIKA 3.

Frank Drake (1930–2022) je pionir sodobnih raziskav nezemljanske inteligence, ki jo je začel s projektom Ozma leta 1960, nato pa je ustanovil inštitut SETI. Astrobiolog, ki je sicer deloval tudi na Univerzi v Kaliforniji, je razen po Drakovi enačbi poznan tudi Voyagerjevih zlatih ploščah, ki so ju leta 1977 izstrelili v vesolje z vesoljskima sondama Voyager. Plošči nosita informacije o življenju in kulturi na Zemlji ter sta namenjeni kateri koli inteligentni zunajzemeljski obliki življenja. (Vir: [6])

Obstajata dve osnovni strategiji iskanja nezemljanske inteligence. Pri **ciljni raziskavi** spremljajo le nekaj potencialnih kandidatov za razvoj življenja, pri **vsenebni raziskavi** pa prečešajo velike kose neba. Večina raziskav pripada drugi kategoriji – opazovalni čas z velikimi teleskopi je namreč zelo drag in prioriteta projektov je, da dajo pozitiven rezultat. Zaznava potencialnega umetnega signala v gromozanski količini podatkov zahteva veliko računalniške moči. Projekt **seti@home** je povezal milijone računalnikov v velikansko virtualno napravo za obdelavo podatkov. Če je uporabnik povezan z internetom, si

lahko naloži program, ki avtomatsko obdeluje določeno količino podatkov in rezultate pošilja nazaj na strežnik.

Za zdaj še nismo zaznali nobenega sporočila drugih civilizacij, bilo pa je kar nekaj zanimivih **lažnih alarmov**. Prvi od teh je že ε Eridana, pri opazovanju katerega je Drake zaznal 8 signalov na sekundo, vendar pri nadaljnjih opazovanjih zvezde signalov niso več zaznali. Osem let pozneje je bil lažni alarm pri angleških raziskovalcih, ki sicer niso bili povezani s SETI. Izkazalo se je, da zaznani signali v resnici izhajajo iz **pulzarja**, hitro vrteče se nevtronske zvezde, skrivnostnega objekta, ki ga do takrat še niso poznali. Izvor so poimenovali *Mali zeleni mož* (Little Green Man 1). Leta 1963 so na Sternbergovem inštitutu v Moskvi izdali osnovni dokument v *Astronomičeskii Zhurnal* o "komunikaciji informacij s civilizacijami drugih svetov". Iz katalogov radijskih izvorov je *Nikolaj Kardašev* izbral dva obetavna kandidata in ju poimenoval CTA 21 in CTA 102. Opazovanja v naslednjih letih so potrjevala Kardaševe domneve, saj so bili dobljeni spektri nadvse zanimivi. Aprila 1965 so imeli v Moskvi celo posebno konferenco o CTA 102, medtem pa so ameriški astronomi ugotovili, da je CTA 102 v resnici **kvazar**, to je aktivno jedro oddaljene galaksije.

Drakova enačba

Frank Drake je razvil enačbo za izračun števila civilizacij v Galaksiji, ki bi lahko komunicirale z nami. Enačba je bila prvič predstavljena na znamenitem srečanju SETI v Green Banku leta 1961. Skupno število civilizacij N izračunamo kot:

$$N = R \cdot f_s \cdot f_p \cdot E \cdot f_h \cdot f_l \cdot f_i \cdot f_c \cdot V.$$

Enačba sestoji iz astronomskih, bioloških in tehnoloških faktorjev. **Astronomski faktorji** opisujejo potrebne pogoje za obstoj zvezd in za življenje primernih planetov: R je letna hitrost nastajanja zvezd, f_s je delež Soncu podobnih zvezd, f_p je delež teh zvezd, ki imajo planet, E je število planetov v habitabilnem območju zvezde in f_h delež naseljivih planetov. **Biološka faktorja** sta f_l – delež naseljivih planetov, na katerih obstaja nekakšna oblika življenja, in f_i – delež planetov, ki imajo inteligentno obliko življenja. **Tehnološka faktorja** pa sta f_c – delež inteligentnih civilizacij, ki so razvile sredstva za med-

zvezdno komunikacijo, in V – čas komuniciranja civilizacije. Vsi faktorji f so verjetnostni in zato zavzemajo vrednosti na intervalu $[0, 1]$.

Enačba pravzaprav problem prikladno razdeli na manjše podprobleme, da lahko o njih posebej razpravljamo. Sicer je enačba za izračun števila civilizacij ne ravno najbolj pomenljiva, saj večine faktorjev, ki v njej nastopajo, zares ne poznamo. Jasno lahko namreč kvantificiramo le astronomska faktorja R in f_s . Najnovejše raziskave *gravitacijskega mikrolečena* kažejo, da morajo biti vrednosti f_p blizu 1 – prisotnost planetov okoli zvezd je torej prej pravilo kot izjemna. Na podlagi raziskav vesoljske misije Kepler ocenjujejo, da je število Zemlji podobnih planetov v habitabilnih območjih zvezd v Galaksiji okoli 40 milijard, 11 milijard slednjih pa kroži okoli Soncu podobnih zvezd. Ker je v galaksiji okoli 100 milijard zvezd, je vrednost faktorja $E \cdot f_h$ okoli 0,4. Najbližji planet v habitabilnem območju je Proksima Kentavra b, ki je oddaljena okoli 4,2 svetlobnega leta.

Ker se je življenje na Zemlji razvilo dokaj hitro, lahko ocenimo, da je vrednost f_l blizu 1, veliko več težav imamo z določanjem vrednosti f_i , sploh ob misli, da so bile za razvoj inteligence na Zemlji potrebne skoraj 4 milijarde let, kar pa v primerjavi s starostjo vesolja ni zanemarljivo. Pojavljajo se različni argumenti, ki podpirajo tako nizke kot tudi visoke vrednosti f_i . Po eni strani je izmed milijard vrst na Zemlji samo ena postala inteligentna, po drugi strani pa se kompleksnost življenja povečuje, zato je pojav inteligence skoraj neizogibno. Pascal Lee z inštituta SETI je na primer podal številko 0,0002, ki jo je ocenil kot razmerje med časom, ki je bil potreben, da se je na Zemlji razvilo inteligentno življenje (1 milijon let), in časom nastanka zemlje (4,6 milijarde let).

Prav tako lahko ocenimo, da je faktor f_c blizu 1, veliko večje težave pa imamo z oceno V . Obdobje sodobne komunikacije obstaja zadnjih okoli 60 let, hkrati pa se pojavlja resno vprašanje, koliko časa bomo komunikacije sploh še zmožni. Če seveda v prihodnjih stotih letih ne izginemo zaradi podnebnih sprememb ali kakšne druge naravne katastrofe, bi lahko naša tehnologija obstala več milijonov let.

Ker so faktorji v Drakovi enačbi zelo netočno določeni, se število civilizacij v naši Galaksiji N giblje med deset milijardami in eno – torej le našo civilizacijo. V najbolj optimističnem primeru lahko iz-





faktor	prvotna ocena (1961)	trenutna ocena
R [leto ⁻¹]	1	1,5 – 3
f_s	0,1	0,1
f_p	0,2 – 0,5	1
$E \cdot f_h$	0,4	0,2
f_l	1	1
f_i	1	0,0002
f_c	0,1 – 0,2	0,1 – 0,2
V [leto]	$10^3 - 10^8$	$340 - 10^9$
N	$20 - 5 \cdot 10^7$	$9,1 \cdot 10^{-13} - 15,6 \cdot 10^6$

TABELA 2.
Primerjava prvotnih in današnjih ocen faktorjev.

računamo, da je razdalja med sosednjima civilizacijama le nekaj parsekov, če pa upoštevamo manjše (a najbrž bolj realistične) vrednosti danih faktorjev, bi lahko kaj hitro zaključili, da smo v naši Galaksiji kratko malo osamljeni. Tudi če bi bile razmere ugodne in bi bila razvoj komunikacije civilizacij relativno običajna, se izkaže, da nas omejuje predvsem zadnji faktor V . Če je življenjska doba civilizacije kratka v primerjavi s starostjo vesolja 13,8 milijarde let, so možnosti, da bi z neke druge zvezde zaznali sporočilo, relativno majhne.

Zaključek

Drakova enačba je bila deležna tudi kar nekaj kritik. Večina njih temelji predvsem na tem, da ocena več členov lenov v veliki meri ali kar v celoti temelji na domnevah. Negotovosti faktorjev se vrtijo okoli današnjega razumevanja evolucije življenja, inteligence in civilizacije, ne pa astrofizike in možnosti drugačnih oblik življenja. Za nekatere parametre statistične ocene niso možne, zato poznamo le vrednosti za posamezne primere. Zaradi velikih negotovosti faktorjev enačbe ni mogoče uporabiti za izdelavo kakršnih koli trdnih sklepov, kar po mnenju nekaterih presega tisto, kar naj bi bilo sploh smiselno in sprejemljivo.

Formula nam tako pove predvsem to, kako malo pravzaprav vemo. In ravno to dejstvo je spodbudilo znanstvenike k novim oblikam opazovanja in delu z naprednejšimi tehnikami za odkrivanje planetov okoli drugih zvezd, razen tega pa tudi SETI, da bi

zaznala dejanske signale nezemljanov. Pred tem je veliko astronomov mislilo, da nezemeljske civilizacije niso tako redke, medtem ko so biologi razmišljali, da je evolucija življenja naletela na veliko ovir in da najbrž ni smiselno pričakovati, da bomo v naši okolici našli druge civilizacije. Zdaj bolje razumemo tako biokemijo zgodnjega življenja kot tudi veliko drugih težav, ki zadevajo za bivanje primerne planete. Čeprav se možnosti v veliki meri spreminjajo, lahko ugibamo, da so zelo preproste, mikrobom podobne oblike življenja dokaj pogoste, inteligentne civilizacije, zmožne komunikacije, pa izjemno redke.

Naloge

- 1. Izračunaj frekvenco, ki ustreza 21-cm vodikovi črti. [1,42 GHz]
- 2. Izračunaj razliko med energijskima stanjema vodikovega atoma, ko sta spina elektrona in protona enako oziroma nasprotno orientirana. [5,87 μ eV]
- 3. Določi habitabilno območje za hitro vrteči se planet z albedom 0, ki kroži okoli Sonca. Sončev izsev znaša $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}$ W. [med 0,56 a. e. in 1,04 a. e.]
- 4. Izračunaj habitabilno območje za hitro vrteči se planet z albedom 0,3 za zvezdo glavne veje z 0,9 Sončeve mase. Upoštevaj relacijo za zvezde na glavni veji: $L \propto M^{3,5}$. [med 0,39 a.e. in 0,73 a.e.]

5. Predpostavi, da je v kubičnem parseku n zvezd in da ima delež p od njih komunikacije zmožno civilizacijo. Kolikšna je povprečna razdalja med dvema sosednjima civilizacijama? Rezultat uporabi na primeru Sončeve okolice. Podatki kažejo, da je v prostornini 520 kubičnih parsekov 47 zvezd. Kolikšna je povprečna razdalja med najbližjimi civilizacijami, če je verjetnost za zvezdo, da ima planet s civilizacijo, enaka a) 0,01 in b) 0,00001? [10 pc, 100 pc]

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

	4				2		8
2	1						
3				1		8	
				6			
1			2		5	3	4
		3		2	4		6
		5			8		

→
→
→
REŠITEV BARVNI SUDOKU

1	7	8	3	6	5	2	4
6	5	4	2	1	3	8	7
4	3	5	8	2	9	7	1
7	2	1	6	8	4	3	5
2	6	3	4	7	1	5	8
5	8	7	1	4	2	6	3
3	4	6	7	5	8	1	2
8	1	2	5	3	7	4	6

Literatura

- [1] *Abundance of the chemical elements*, Wikipedia, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Abundance_of_the_chemical_elements, ogled 19. 11. 2022.
- [2] Stušek, P., & Vilhar, B. (2013). *Biologija celice in genetika*: [učbenik za biologijo v programih gimnazijskega izobraževanja in programih srednješolskega izobraževanja z najmanj 140-urnim obsegom pouka biologije] (1. izd.).
- [3] *Drake equation*, Wikipedia, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Drake_equation, ogled: 12. 10. 2022.
- [4] *Evropa*, Wikipedija, dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Evropa_%28luna%29, ogled 19. 11. 2022.
- [5] Heidmann, J. (1995) *Extraterrestrial Intelligence*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] *Frank Drake*, Wikipedia, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Frank_Drake, ogled: 12. 10. 2022.
- [7] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2007). *Fundamental astronomy, fifth edition*. Helsinki: Springer.
- [8] *Galileo*, Wikipedia, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_%28spacecraft%29, ogled 23. 11. 2022.
- [9] Gilmour, Sephton: *An Introduction to Astrobiology*, The Open University, Cambridge University Press 2004.
- [10] Gargaud, Barbier, Martin, Reisse (Eds.): *Lectures in Astrobiology, Springer Vol I* (2006), Vol II (2007).

× × ×

× × ×

Izbrane slike in fotografije v petdesetih letih Preseka



NADA RAZPET, MARKO RAZPET IN ANDREJ LIKAR

→ V šolskem letu 2022/23 Presek izhaja že petdeseto leto. To je pomemben jubilej za našo revijo, posebno pa smo na ta dosežek ponosni starejši sodelavci Preseka, ki smo ga spremljali ves ta čas in, posebno na začetku izhajanja, tudi nekoliko dvomili v njegovo žilavost in željo po preživetju. Redno izhajanje Preseka ni bilo nikoli samoumevno, še posebno ne po slovenski osamosvojitvi, ko je število naročnikov strmo upadlo. Na srečo se število sodelavcev, avtorjev in podpornikov ni zmanjšalo, kar je ohranilo Presek pri življenju.

V letih izhajanja je bilo v Preseku objavljenih mnogo zelo kakovostnih prispevkov. Vseh ne gre naštevati, tudi njihov izbor bi bil odvisen od okusa izbiratelja. Nekaj fotografij in risb pa je tako izjemnih, da si jih je vredno ponovno ogledati predvsem zato, ker so v pretežni meri originalne in niso preprosto ponatisnjene iz kakšne druge publikacije. Seveda je njihov izbor iz velikega števila posameznih števil Preseka terjati kar nekaj časa in presojanja. A avtorjem tega prispevka se je izbor zdel vreden truda in pred vami bo v naslednjih številkah jubilejnega izhajanja Preseka podan ta izbor. Presojali smo le raznovrstnost grafične opreme pri člankih, ne pa kvalitete samih člankov. Avtorji naj nam zato oprostijo, če v pregledu ne bodo našli svojih prispevkov. Nekatere sicer zelo zanimive fotografije in skice smo morali zaradi slabše kvalitete tiska žal izpustiti. Terjati originalno slikovno gradivo od avtorjev pač zaradi odmaknjenega časa ni vedno mogoče.

Pri izbranih slikah navajamo naslov članka, odkoder je slika vzeta, in podatke njegove objave v Preseku ter kratek opis, kaj slika predstavlja.

Komur bi bil naš opis preskop, si lahko ogleda same članke, ki so na voljo na spletnem naslovu <http://www.dlib.si/> v rubriki *Periodika*. Nekateri starejši članki pa so tudi na spletnem naslovu <http://www.presek.si/> v rubriki *Arhiv revij*.

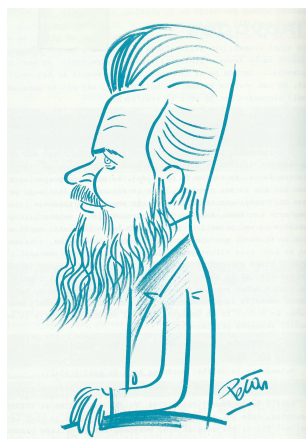
Začetni, neoštevilčeni Presek, tako imenovani Prapresek, je izšel v marcu leta 1972 v nakladi 3000 izvodov. V njem so pojasnjeni razlogi za njegov nastanek, komu je namenjen in kaj se bo v njem objavljalo. Učenci osnovnih šol, dijaki srednjih šol in člani DMFA Slovenije so ga prejeli brezplačno.



SLIKA 1.

Leva stran slike 1 je naslovnica Prapreseka. Z nje preberemo, komu je namenjen, in naslova dveh najpomembnejših člankov. Osrednja figura vsebuje napisi PRESEK, ki ga vidimo s štirih strani, če na sliko

pogledamo pod dovolj velikim vpadnim kotom. Desna stran slike 1 je naslovnica prve redne številke Preseka. Na fotografiji je zimsko jutro pred sončnim vzhodom. Oblaki so rdečkasti zaradi sipanja svetlobe. Razlaga pojava je v članku *Sipanje svetlobe* avtorja Rudija Kladnika.



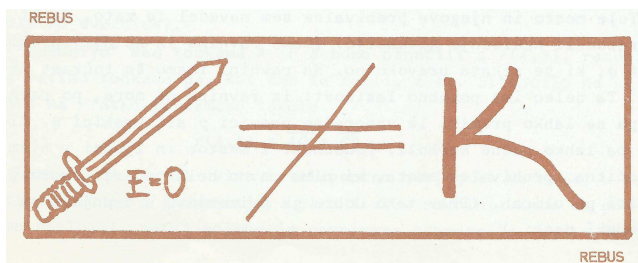
SLIKA 2.

V 2. številki 1. letnika Preseka je objavljen *Razgovor s prof. Križaničem*. Pripravil ga je Tomaž Pisan-ski, ilustracijo na levi sliki slike 2 je pripravil Božo Pečar. Na desni sliki slike 2 pa je ponazoritev seštevavanja celih števil iz Križaničeve knjige *Kratkočasna matematika*, ki je ponovno izšla pod naslovom *Ukročena matematika* v 5. številki 8. letnika Preseka. Avtor ilustracij je Miloš Požar.

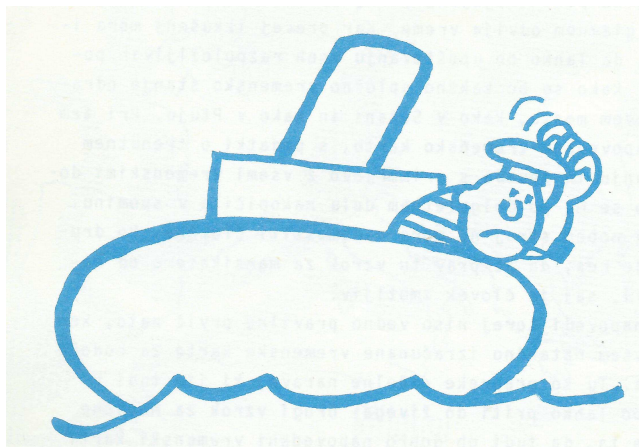
Presek že od vsega začetka skrbi za razvedrilo. Objavlja križanke, naloge z vžigalicami in kockami in drugo, na začetku pa tudi rebuse. Slednjih žal ni zadnje čase niti v ugankarskih revijah. Rebus na sliki 3 je iz 4. številke 2. letnika Preseka in ni težak.

V 2. številki 4. letnika Preseka je Dušan Repovš objavil članek *Fizikalno razmišljanje*. Likovno ga je opremil fizik Božo Kos (slika 4). Avtor razloži tri preproste fizikalne pojave.

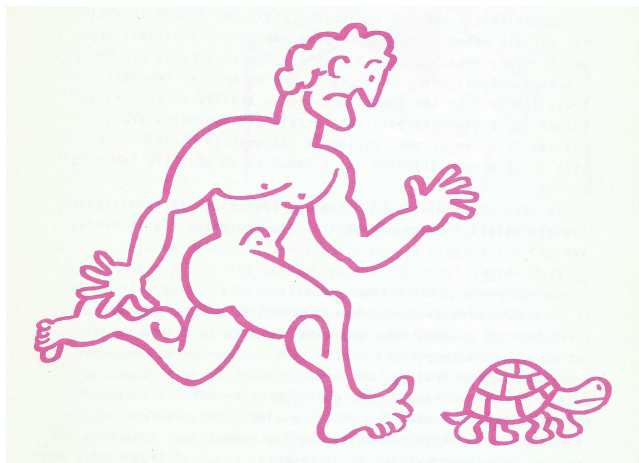
V 3. številki 4. letnika Preseka je članek *O paradoksih*. Med njimi je znani antični paradoks o Ahilu in



SLIKA 3.

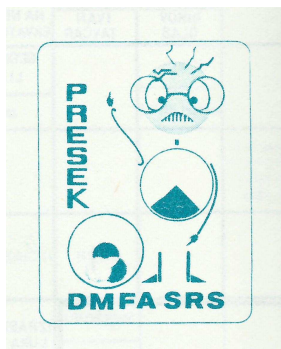


SLIKA 4.



SLIKA 5.





SLIKA 6.

želvi. Avtor članka je Savo A. Kretič, v slovenščino ga je prevedel Dušan Repovš, ilustriral pa Božo Kos (slika 5).

Franci Oblak je v prvi številki 5. letnika Preseka predstavil Presekovo značko, Ciril Velkovrh pa Plemljevo spominsko sobo na Bledu (slika 6).

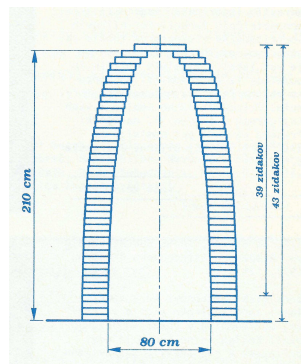
Franc Jerman je v 2. številki Preseka, letnik 6, priobčil članek *Problem slavoloka*, ki razlaga, kako iz danega števila idealnih enakih opek brez malte sestavimo slavolok (leva stran slike 7).

Ciril Velkovrh pa je prispeval članek *Filatelija*, s katerim bralce vzpodbuja k zbiranju poštних znamk s fizikalno, matematično in astronomsko vsebino. Opiše več znamk, ki so predstavljene na platnicah revije (desna stran slike 7).

Ob stoletnici rojstva Alberta Einsteina je izšlo delo *Kaj je teorija relativnosti* L. D. Landaua in J. B. Rumerja, ki obsega skoraj celo 5. številko 7. letnika Preseka. Prevod iz ruščine je opravil Dušan Vogler, ilustracije je prispeval Božo Kos, spremno besedo pa je napisala Norma Mankoč Borštnik. Na sliki 8 je znameniti Einsteinov vlak.

V prvih letih izhajanja Preseka so se v znanosti že dobro uveljavili laserji. Njihov začetek sega v leto 1960. Z laserji se je veliko eksperimentiralo tudi pri nas. V 4. številki 8. letnika Preseka je Martin Čopič objavil članek *Svetloba laserja*, ki ga je Marjan Hribar nekoliko priredil za bralce naše revije.

Na sliki 9, ki jo je posnel Marjan Smerke, vidimo, kakšen vzorec, laserogram, na zaslonu dela curek laserske svetlobe, ki se lomi na nepravilno brušenem steklu.

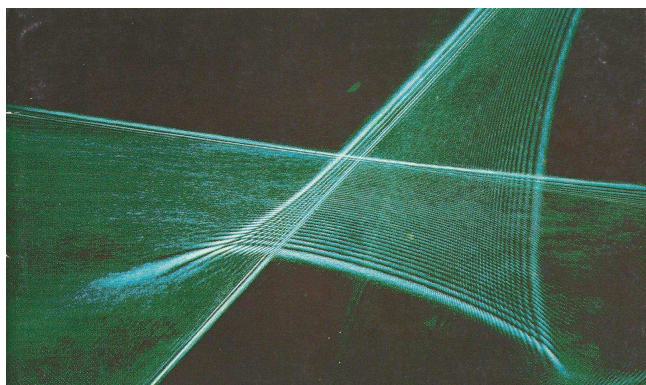


SLIKA 7.



SLIKA 8.

V 1. številki 8. letnika Preseka smo se spomnili tudi na predsednika Josipa Broza Tita, ki je umrl 4. maja 1980 v Ljubljani. Avtor slike 10 je Božidar Jakac, pod njo so Titove besede:



SLIKA 9.



SLIKA 10.

Kot vse napredne sile na svetu se tudi mi zavzemamo samo za tako uporabo znanosti - tudi atomske, ki bo služila le humanim ciljem, družbenemu napredku in blagostanju.

(Se nadaljuje.)

× × ×

Barvni sudoku

↓ ↓ ↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

			6	2			
1		8					3
4				5		7	
		1			8		2
	7			6			
8							
3	6					4	
5			4				6

→
→
→
REŠITEV BARVNI SUDOKU

6	2	3	8	4	7	1	5
5	4	7	1	8	2	6	3
7	5	2	3	1	6	4	8
4	8	1	6	3	5	7	2
2	3	8	4	7	1	5	6
1	7	6	5	2	3	8	4
3	6	4	7	5	8	2	1
8	1	5	2	6	4	3	7

× × ×

Nekaj iz naše ponudbe

V DMFA – založništvo izdajamo različne vrste literature. Predstavljamo vam dve ponudbi:

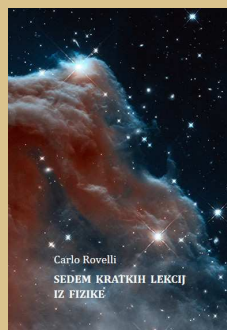


Janez Strnad:

MALA ZGODOVINA DOPPLERJEVEGA POJAVA

120 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

15,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ
IZ FIZIKE

76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta, razen za najnovejše knjige! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



**REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 50/2**

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz druge
številke Preseka letnika
50 je **Distanciranje**.
Med pravilnimi reši-
tvami smo izžrebali
naslednje reševalce:
Stanko Gajšek iz Lju-
bljane, Neda Tompa iz
Ljubljane in Aljaž Šimc
iz Novega mesta, ki
bodo nagrade prejeli po
pošti.

× × ×

Obisk v šoštanjski elektrarni

ŠTEVILKA 1, LETNIK 10, 1982/83



→ Izjemni slovenski fizik in poljudnoznanstveni avtor **prof. dr. Janez Strnad** (1934–2015) je pustil močan pečat tudi v naši reviji, za katero je napisal več kot 170 kvalitetnih prispevkov o raznovrstnih fizikalnih temah. V letniku 1982/83 je objavil več člankov na temo preskrbe z energijo, ki je bila tako kot danes očitno zelo aktualna tudi pred 40 leti: Obisk v šoštanjski termoelektrarni, Obisk v ljubljanski toplotni, Hladilni stroji in toplotne črpalke, Preskrba z energijo. Članki se kar ponujajo v primerjavo z današnjim časom – bloke šoštanjske elektrarne so nadomestili novi, klimatske naprave in toplotne črpalke so postale vsakdanjost, ponovno pa nas skrbita visoka cena elektrike in ogrevanja. Bralec, ki bi želel članke prebrati bolj natančno, jih najde v Digitalni knjižnici Slovenije na spletnem naslovu <http://dlib.si>.



OBISK V ŠOŠTANJSKI ELEKTRARNI

Ob cesti med Šoštanjem in Titovim Velenjem stoji na desni pod gričkom skupina stavb z visokimi dimniki in z značilnimi širokimi stolpi, iz katerih se vali noč in dan megla. To je Termoelektrarna Šoštanj (TEŠ). Ta je lani oddala v električno omrežje dobrih 3750 gigawattur električnega dela. Največja slovenska elektrarna je tako sama pokrila skoraj 47 % potreb po električnem delu v naši republiki. Preostanek so prispevale druge toplotne elektrarne skupaj z jedrsko elektrarno Krško (10 %) in vodne elektrarne (36 %), nekaj pa smo dobili iz drugih republik in iz tujine (7 %).

V času splošne energijske lakote je šoštanjska elektrarna vredna vse pozornosti. Ima štiri enote, ki so jih gradili drugo za drugo in vsaka poznejša je zmogljivejša in boljša (sl.1).

Enota	moč	lastna raba	leto dograditve
1. TEŠ I	60 MW (2.30 MW)	6 MW	1956
2. TEŠ II	75	7	1960
3. TEŠ III	275	22	1972
4. TEŠ IV	335	30	1977

Moč merimo v *wattih*. Večje enote so kilowatt, megawatt, gigawatt:

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W} \quad 1 \text{ MW} = 1000 \text{ kW} \quad 1 \text{ GW} = 1000 \text{ MW}.$$

Delo, toploto in energijo merimo v *joulih*. Enoto za delo dobimo, ko pomnožimo enoto za moč z enoto za čas. Joule je *wattsekunda*. Večje enote so kilowattura, megawattura, gigawattura.

$$1 \text{ Ws} = 1 \text{ joule}$$

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ GWh} = 10^9 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

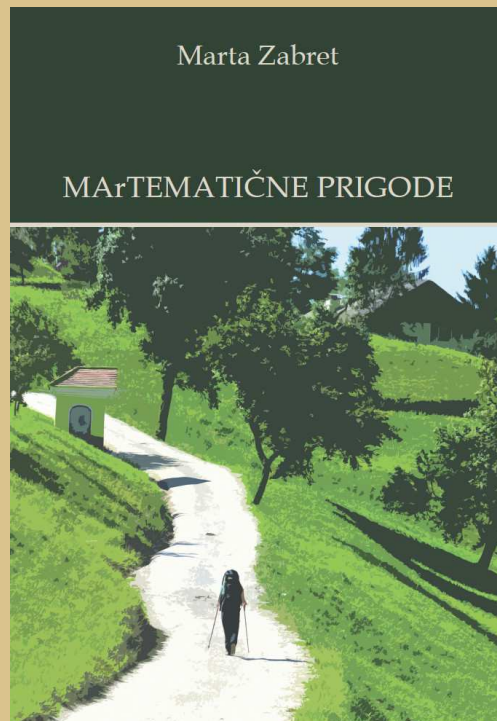
Naprava z močjo 1 MW odda (prejme) v enem letu delo

$$1 \text{ MW} \cdot 1 \text{ leto} = 1 \text{ MW} \cdot 360 \cdot 24 \text{ h} = 8,64 \text{ GWh}.$$



MaRtematične prigode

To je knjiga, ki jo je na police treba odložiti poleg Svetega pisma, Iliade in Integralov Srečka Kosovela. Radi jo bodo imeli vsi, ki nikoli niso marali matematike, in so sklep, da zanjo niso nadarjeni, prenesli na svoje otroke. Z matematiko se v življenju srečamo dvakrat. Prvič, ko dokončno propademo pri integralnem računu in takoj za tem za vedno pobegnemo pred enačbami. Drugič, ko svojim otrokom poskušamo razložiti, kako preprosta stvar je matematični izračun, in se nam začne kolcati pri poštevanke. Kdor z matematiko nikoli ni imel težav, se bo ob branju lahko zabaval. Vsi drugi ga doživimo kot odrešitev. V tem svetu nismo sami. In na drugi strani je nekdo, ki ve za našo stisko in je o njej napisal knjigo. Govori o srečanju z neskončnostjo in večnostjo in njunimi povezavami z vsakdanjo šolsko politiko našega časa.



12,50 EUR

Poleg omenjene ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA – založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!