PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **10** (1982/1983)
Številka 1
Strani 7–11

Peter Legiša:

VERIŽNI ULOMKI

Ključne besede: matematika, algebra, aritmetika, verižni ulomki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/10/580-Legisa.pdf

VERIŽNI ULOMKI

Navadni verižni ulomek je izraz oblike

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

kjer so $a_0, \ldots, a_n$ cela števila in velja: $a_0 \geqslant 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\ldots$, $a_n > 0$. Števila $a_1, \ldots, a_n$ so torej naravna števila, a_0 pa je lahko tudi 0. Vsak tak ulomek lahko simbolično zapišemo takole:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

Izračunajmo nekaj verižnih ulomkov:

$$[1,1,1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$[0,1,2,2] = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}$$

Poglejmo si narobe, kako lahko zapišemo ulomek 33/17 v obliki verižnega ulomka:

$$33/17 = 1 + 16/17 = 1 + \cfrac{1}{\frac{17}{16}} = 1 + \cfrac{}{1 + \frac{1}{16}}$$

Tu je torej $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ in $a_2 = 16$. Tako je

$33/17 = [1,1,16]$

Ulomek 33/17 lahko zapišemo tudi malenkost drugače:

$$33/17 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = [1,1,15,1]$$

Vidimo, da velja splošno pravilo: če je v verižnem ulomku $[a_0, a_1, \ldots, a_n$ število $a_n > 1$, je

$$[a_0, \ldots, a_n] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

Če pa je zadnji člen v verižnem ulomku 1, je

$$[a_0,\ldots,a_{n-1},1] = [a_0,\ldots,a_{n-2},\ a_{n-1}+1]$$

Vsak verižni ulomek ima torej isto vrednost kot verižni ulomek z enim členom več ali manj. Primer:

$$[3,1,1,1] = [3,1,2]$$

Pokažimo zdaj, da lahko vsak ulomek p/q zapišemo v obliki verižnega ulomka. Če je $p \geqslant q$, delimo p s q :

$p = a_0 q + r_1$ $(0 \leqslant r_1 < q)$ oziroma $p/q = a_0 + r_1/q = a_0 + \frac{1}{q/r_1}$

Če je $p < q$, postavimo seveda $a_0 = 0$.

Delimo zdaj q z r_1:

$q = a_1 r_1 + r_2$ $(0 \leqslant r_2 < r_1)$ oziroma

$q/r_1 = a_1 + r_2/r_1 = a_1 + \frac{1}{r_1/r_2}$

Delimo r_1 z r_2 in tako dalje. Ker se ostanki $r_1, r_2 \ldots$ nenehno manjšajo, se ta proces prej ali slej konča. Če dobro pogledamo, vidimo, da je to pravzaprav Evklidov algoritem za števili p in q. Denimo torej, da je r_n zadnji od nič različen ostanek:

$$r_{n-2}/r_{n-1} = a_{n-1} + r_n/r_{n-1} = a_n + \frac{1}{r_{n-1}/r_n}$$

$$r_{n-1}/r_n = a_n$$

Vidimo, da je

$$p/q = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

Ta zapis je očitno enoličen, razen morda na repu ulomka, kjer imamo, kot vemo, dve možnosti.

Oglejmo si zdaj naslednjo resnično zgodbico, ki jo vem iz prve roke. Ameriški matematik je od svojega sina zvedel, da je pri baseballu imel relativni delež zadetkov 0.846. Očetu je bilo jasno, da to ne pomeni, da je sin zadel 846 žog od 1000, pač pa, da je to decimalni približek za neki ulomek p/q, kjer sta

p in q dve ne preveliki celi števili. Razvil je 0.846 v verižni ulomek:

$$0.846 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{38}}}}$$

Ker je število 38 veliko, je

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11}} = \frac{11}{13}$$

zelo dober približek za 0.846. Rečemo lahko tudi narobe: 0.846 je zelo dober približek za 11/13. Dejansko je 11/13 = 0.8462.. . Matematik je tvegal in vprašal sina, ali to pomeni, da je zadel enajst žog od trinajstih. Odgovor je bil pritrdilen.

Obstajajo problemi praktične narave, pri katerih so verižni ulomki prav uporabni. Denimo, da je treba izdelati zobniški mehanizem iz dveh zobatih koles, tako da bo prenos čim bliže razmerju p/q, kjer sta p in q dve veliki števili. Število zob na zobnikih je omejeno. Pomagamo si tako, da razvijemo p/q v verižni ulomek in poiščemo primeren približek. Za razmerje 988/517 bi naredili takole:

$$988/517 = 1.91... = 1 + 1/1.10.. = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10.24}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{4.18}}} = [1,1,10,4,5,2]$$

Ena možnost za približek je tale: [1,1,10] = 21/11. Tako bi vzeli zobnik z 10 in zobnik z 21 zobmi. Poglejmo si natančnost približka:

988/517 = 1.911..

21/11 = 1.909...

Druga možnost je seveda vzeti približek |1,1,10,4| = 86/45.

Primerjajmo:

988/517 = 1.9110..

86/45 = 1.9111..

Ta približek je seveda boljši od prejšnjega.

O taki uporabi verižnih ulomkov je obširneje pisal že znani znanstvenik *Christian Huygens*, ki je pri konstrukciji planetarija moral upoštevati razmerja med obhodnimi dobami različnih planetov. Knjiga *Descriptio automati planetarii* (v prevodu: *Opis mehanizma planetarija*), v kateri je pokazal, da nam verižni ulomki dajejo najboljše take približke, je izšla leta 1703 na Nizozemskem.

Nekoliko težji problem je iskanje približkov za število π. Vemo, da je π = 3.141592654... Poskusimo ga razviti v verižni ulomek:

π = 3 + 0.14159... = 3 + 1/7.062...
Vidimo, da je 3 1/7 = 3.1428.. kar dober približek za π.
Gotovo je π < 3 1/7. Ker je π = 3 + 10/70.6.., je π > 3 + 10/71.
Torej je

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Do te ocene je prišel že grški matematik Arhimed, ko je poskušal čim natančneje izračunati π. V njegovih časih decimalni zapis še ni bil v rabi, uporabljali so le ulomke. Zato je lahko zapisal le oceno take oblike, kot je zgoraj.
Nadaljujmo z računanjem:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15.99..}}$$

Iz tega zapisa je očitno, da je $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$ = 355/113 zelo dober približek za π. Dejansko se
355/113 = 3.141592920.. $\doteq$ 3.141593
ujema s π na 7 mest.

Pri naši natančnosti začetnega približka (10 mest) in računanju na 10 mest verižnega ulomka skoraj ne moremo nadaljevati, saj so izračunani členi zmeraj manj zanesljivi. Zapišimo še

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1.003..}}}$$

Ker π ni racionalno število, ga pravzaprav ne moremo zapisati kot končen navaden verižni ulomek. Pomagamo si lahko takole:

Na 12 decimalk je

$3.14159265358 < \pi < 3.14159265359$

$3.14159265358 = [3,7,15,1,292,1,1,1,1,...]$

$3.14159265359 = [3,7,15,1,292,1,1,1,2...]$

Zato smo bolj ali manj upravičeni zapisati, da je

$\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,...]$

(Izkaže se namreč: če se verižna ulomka števil a in b ujemata v prvih n členih, se verižni ulomek vsakega števila c med a in b ujema z omenjenima verižnima ulomkoma na prvih n mestih). Če bi vzeli še več decimalk, bi seveda dobili še daljši razvoj za π. Angleški matematik *John Wallis* je v knjigi *Tractatus de algebra,* ki je izšla leta 1685, vzel število π na 35 decimalnih mest in izračunal

$$\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,3,4,2,6,6,1..]$$

Leta 1770 je nemški matematik *Lambert* objavil ponovljen izračun, ki pa je od 26. člena naprej imel drugačne vrednosti. Vsekakor v dobljenem verižnem ulomku ni mogoče opaziti kake pravilnosti. Svojevrstna kontrola Wallisovega izračuna so odlični približki za π, ki so jih konec osemnajstega stoletja našli japonski matematiki:

$$\frac{5419351}{1725033}, \quad \frac{428224593349304}{136308121570117}$$

saj jih lahko dobimo iz Wallisovega razvoja. Verjetno so Japonci do njih prišli s pomočjo nečesa takega kot verižni ulomki. Danes bi s pomočjo računalnika in primernega programa lahko napravili še mnogo daljši razvoj. Vloženi trud bi bil seveda neprimerno manjši od truda nekdanjih matematikov.

Peter Legiša