PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 2
Strani 98–100

Mirko Dobovišek:

EULERJEVA FORMULA ZA RAVNINSKE GRAFE

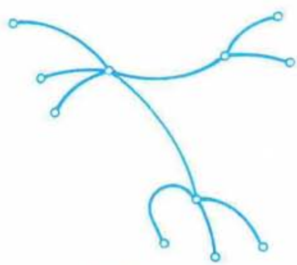
Ključne besede: matematika, grafi.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1083-Dobovisek.pdf

EULERJEVA FORMULA ZA RAVNINSKE GRAFE

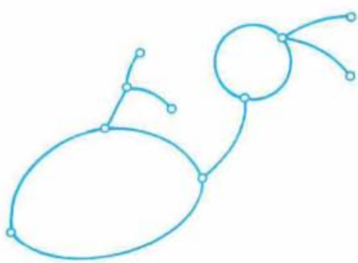
V sestavku si bomo ogledali eno od lastnosti ravninskih grafov. Kaj je ravninski graf? Odgovorimo čisto na kratko: *Ravninski graf* je množica točk v ravnini in povezav med njimi, ki se ne sekajo. Graf je *povezan*, če so vse točke grafa med seboj povezane, kar pomeni, da se lahko po povezavah sprehodimo od katerekoli točke grafa do poljubne točke grafa.

Za graf definirajmo še pojem *območja*: Območja so med seboj tuji si deli ravnine, ki so ograjeni s povezavami grafa. Povezanemu grafu, katerega povezave ne razdelijo ravnine na več območij, rečemo *drevo*. Povejmo to še drugače: Poljubni točki, ki ne ležita na grafu, lahko povežemo z neko potjo (krivuljo), ki ne seka nobene povezave.



Slika 1

Na sliki 1 je primer drevesa. Če je graf, drevo imamo (po definiciji drevesa) eno samo območje. To območje je neomejeno. Na sliki 2 je primer povezanega grafa, ki razdeli ravnino na tri območja.



Slika 2

Število območij bomo označili z $\mathcal{O}$, število povezav s $\mathcal{P}$ in število točk grafa s $\mathcal{T}$.

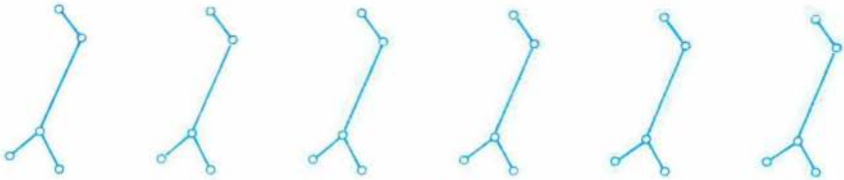
Trditev *(Eulerjeva formula).* Za povezan ravninski graf velja enakost

$$\mathcal{O} = 2 + P - T$$

Dokaz: Najprej dokažimo, da velja formula za drevesa. Vsako drevo ima eno območje. Kako bi prešteli povezave? Prešteli jih bomo tako, da bomo naše drevo pobarvali. Najprej pobarvajmo eno točko. Nato pobarvajmo povezavo od naše začetne točke do katerekoli sosednje točke in nato točko, ki leži na koncu te povezave. Tako nadaljujemo. Vedno začnemo v neki že pobarvani točki, nato pobarvamo povezavo in točko na njenem koncu. Ta postopek se ustavi le, ko iz vsake že pobarvane točke izhajajo same pobarvane povezave.

Trdimo, da je tedaj pobarvan ves graf. Za dokaz privzemimo nasprotno; potem obstaja na grafu neka še nepobarvana točka T. Izberimo poljubno že pobarvano točko P na grafu. Ker je graf povezan, obstaja zaporedje točk grafa $P = P_0, P_1, \ldots, P_n = T$ in povezav med njimi. Naj bo k največji tak indeks, da je točka P_k že pobarvana, P_{k+1} pa ni pobarvana. Potem povezava med P_k in P_{k+1} še ni pobarvana (ker smo hkrati z vsako povezavo pobarvali tudi njeno končno točko), toda to nasprotuje dejstvu, da gredo iz vsake že pobarvane točke same pobarvane povezave.

Oglejmo si primer takega barvanja drevesa na sliki 3.



Slika 3

Ali se lahko pri tem postopku zgodi, da je točka na koncu povezave, ki jo barvamo, že pobarvana? To se ne more zgoditi, kajti v tem primeru bi do te točke prišli po dveh različnih poteh. Enkrat smo tja že prišli, saj je točka že pobarvana. Sedaj smo zopet tam in to po drugi poti. Ti dve poti pa bi ograjali del ravnine, imeli bi vsaj dve območji in graf ne bi bil drevo. Na ta način do konca pobarvamo $\mathcal{T} - 1$ povezav in $\mathcal{T} - 1$ točk. Imamo torej eno območje, $\mathcal{T} - 1$ povezav in $\mathcal{T}$ točk (še tisto prvo). Eulerjeva formula velja, saj je $1 = 2 + (\mathcal{T} - 1) - \mathcal{T}$.

Naj sedaj graf ni drevo. Potem obstajta vsaj dve območji. Eno od teh je gotovo omejeno. Naj ga omejujejo povezave med točkami T_0, T_1, $T_2, \ldots, T_k = T_0$. Če odstranimo povezavo med T_0 in T_1, se število območij in število povezav zmanjša za eno. Točki T_0 in T_1 pa sta še vedno povezani s potjo $T_1, T_2, \ldots, T_k = T_0$. Zato je preostali graf še vedno povezan. V tem novem grafu je $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} - 1$ območij, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} - 1$ povezav in $\mathcal{T}$ točk. Če graf še ni drevo, enak korak kot prej naredimo še enkrat. Spet sta se števili območij in povezav zmanjšali za ena. Delajmo to tako dolgo, dokler graf ne postane drevo. Recimo, da je bilo potrebo odstaniti k povezav. Povezav je sedaj $\mathcal{P}_k = \mathcal{P} - k$, območij pa $\mathcal{O}_k = \mathcal{O} - k$. Ker je graf sedaj drevo, velja

$$\mathcal{O}_k = 2 + \mathcal{P}_k - \mathcal{T}.$$

Če vstavimo $\mathcal{P}_k$ in $\mathcal{O}_k$, dobimo

$$\mathcal{O} - k = 2 + \mathcal{P} - k - \mathcal{T} ,$$

kar je isto kot

$$\mathcal{O} = 2 + \mathcal{P} - \mathcal{T} .$$

Eulerjeva formula je tako dokazana.

Pripomba: Eulerjevo formulo in posamezne korake v dokazu lahko dokažemo na veliko načinov. Teorija grafov, to je spoznavanje lastnosti grafov in njihova uporaba, je zelo razvita matematična smer. Tudi bralci Preseka so se z grafi že srečali. Tiste, ki jih zanima več in bi radi o grafih kaj več izvedeli, napotimo v Presekovo knjižnico h knjižici: D. Bajc, T. Pisanski, *Najnujnejše o grafih*, ki je izšla kot 6. številka Preseka leta 1985.

Mirko Dobovišek