UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Janko Bračič

ALGEBRE Z LOČLJIVIM SPEKTROM IN BANACHOVI MODULI NAD NJIMI

Disertacija

Ljubljana, 2001

Zahvaljujem se mentorju
profesorju Milanu Hladniku
za vsestransko pomoč
pri nastajanju te disertacije.

Meliti, Ajdi in Veroniki

Kazalo

Povzetek 5
Abstract 7

Poglavje 1. Priprave 1
1.1. Uvod 1
1.2. Pregled vsebine in vprašanj 8
1.3. Lokalna spektralna teorija 10
1.4. Definicija modulov in osnovne lastnosti 13
1.5. Banachovi moduli 17

Poglavje 2. Krepko harmonične algebre 22
2.1. Beurling-Arvesonov spekter 22
2.2. Algebre z ločljivim spektrom 26
2.3. Spektralni in kospektralni podmoduli 31
2.4. Karakterizacija algeber z ločljivim spektrom 36
2.5. Največja podalgebra z ločljivim spektrom 40

Poglavje 3. Krepko harmonični operatorji 44
3.1. Definicija krepko harmoničnih operatorjev 44
3.2. Lastnosti krepko harmoničnih operatorjev 47
3.3. Krepko harmonični elementarni operatorji 51

Poglavje 4. Upodobitve modulov 56
4.1. Prapodmoduli 56
4.2. Kociklični in maksimalni podmoduli 59
4.3. Upodobitve modulov 62
4.4. Nerazcepne upodobitve modulov 68
4.5. Hull-kernel topologija 71
4.6. Naravna preslikava 74

Poglavje 5. Enostavni multiplikatorji 77
5.1. Točkasti multiplikatorji 77
5.2. Enostavni multiplikatorji na Banachovih modulih 85
5.3. Spektralne lastnosti enostavnih multiplikatorjev 90

Poglavje 6. Banachovi moduli z ločljivim spektrom 94
6.1. Algebre z delno ločljivim spektrom 94
6.2. Arvesonov spekter upodobitve modula 96
6.3. Banachovi moduli z ločljivim spektrom 100

Literatura 104

Seznam oznak in stvarno kazalo 107
Seznam oznak 107
Stvarno kazalo 111

Povzetek

Komutativna Banachova algebra z enoto $\mathfrak{A}$ je algebra z ločljivim spektrom, če za poljubna različna karakterja φ in ψ na njej obstajata takšna elementa a in b v $\mathfrak{A}$, da velja $ab = 0$ in $\varphi(a) \neq 0 \neq \psi(b)$. Algebre z ločljivim spektrom so regularne v smislu Šilova, vendar niso nujno polenostavne.

Če je $\mathfrak{A}$ takšna komutativna Banachova algebra z enoto, da za neko podmnožico elementov $\mathfrak{A}_0$ v $\mathfrak{A}$ velja

(i) Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{A}_0$ ločijo točke v spektru algebre $\mathfrak{A}$ in

(ii) vsak element iz $\mathfrak{A}_0$ inducira na $\mathfrak{A}$ operator množenja z dekompozicijsko lastnostjo (δ),

potem je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Obratno: če je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, potem vsak element iz $\mathfrak{A}$ na vsakem levem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu inducira super-dekomponibilen operator množenja.

Algebre z ločljivim spektrom imajo lepe lastnosti v smislu lokalne spektralne teorije in to se odraža tudi na krepko harmoničnih operatorjih, tj. operatorjih, ki so vsebovani v kakšni algebri operatorjev z ločljivim spektrom. Vsak omejen linearen operator z dovolj bogatim funkcijskim računom je krepko harmoničen in vsak krepko harmoničen operator je dekomponibilen.

n-terica komutirajočih omejenih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru je krepko harmonična, če so vsi operatorji iz n-terice vsebovani v isti algebri z ločljivim spektrom. Vsaka krepko harmonična n-terica je dekomponibilna. Če je E elementaren operator, katerega koeficienti sestavljajo dve krepko harmonični n-terici, potem je E krepko harmoničen operator in njegovi lokalni spektri se na naraven način izražajo z lokalnimi spektri obeh n-teric koeficientov.

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Kakšen mora biti levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul $\mathfrak{X}$, da vsak element iz $\mathfrak{A}$ inducira na $\mathfrak{X}$ dekomponibilen operator? Da lahko odgovorimo na to vprašanje, izdelamo za module teorijo upodobitev, ki razširja teorijo upodobitev algeber. Vpeljano je veliko pojmov, ki na naraven način razširjajo pojme iz teorije algeber na module. Tako, na primer, definiramo tudi module z ločljivim spektrom in odgovor na prej postavljeno vprašanje se glasi: če je $\mathfrak{X}$ takšen levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, da ima njegov dualni modul $\mathfrak{X}^*$ ločljiv spekter, potem vsak element iz $\mathfrak{A}$ inducira na $\mathfrak{X}$ dekomponibilen operator množenja.

Teorija upodobitev modulov nam omogoča, da vpeljemo razred enostavnih multiplikatorjev na danem Banachovem modulu. Na primer, vsak multiplikator na polenostavni Banachovi algebri je enostaven. Za omenjeni

razred multiplikatorjev pokažemo, da imajo podobne lastnosti kot multiplikatorji na algebrah. Če modul na katerem delamo, zadošča nekaterim dodatnim pogojem, potem je množica vseh enostavnih multiplikatorjev na njem polenostavna komutativna Banachova algebra z enoto. S pomočjo tega lahko izpeljemo trditve, ki so analogne znanim rezultatom o multiplikatorjih na polenostavnih Banachovih algebrah.

2000 Mathematics Subject Classification. 46H15, 46H25, 47B40, 47B47, 47B48.

Ključne besede. Algebra z ločljivim spektrom, Arvesonov spekter, dekomponibilen operator množenja, komutativna Banachova algebra, krepko harmoničen operator, modul z ločljivim spektrom, multiplikator, točkasti multiplikator, upodobitev modula.

Abstract

A unital commutative Banach algebra $\mathfrak{A}$ is spectrally separable if for every pair of distinct characters φ and ψ on it there exist a and b in $\mathfrak{A}$ such that $ab = 0$ and $\varphi(a) \neq 0 \neq \psi(b)$. Every spectrally separable algebra is regular in the sense of Shilov, however they are not necessarily semisimple.

If a unital commutative Banach algebra $\mathfrak{A}$ contains a subset $\mathfrak{A}_0$ such that

(i) the Gelfand transforms of elements in $\mathfrak{A}_0$ separate points of the spectrum of $\mathfrak{A}$ and

(ii) each element in $\mathfrak{A}_0$ induces a multiplication operator on $\mathfrak{A}$ with the decomposition property (δ),

then $\mathfrak{A}$ is spectrally separable. On the other hand, if $\mathfrak{A}$ is spectrally separable, then any element in $\mathfrak{A}$ induces a super-decomposable multiplication operator on every left Banach $\mathfrak{A}$-module.

Spectrally separable algebras have nice properties in the sense of the local spectral theory and this reflects also on strongly harmonic operators, i.e. operators which are included in some spectrally separable algebra of operators. Every bounded linear operator whose functional calculus is rich enough is strongly harmonic and, on the other hand, every strongly harmonic operator is decomposable.

An n-tuple of commuting bounded linear operators on a Banach space is strongly harmonic if there exists a spectrally separable algebra of operators which contains this n-tuple. Every strongly harmonic n-tuple is decomposable. Let E be an elementary operator whose coefficients form two strongly harmonic n-tuples. Then E is a strongly harmonic operator and its local spectra can be computed from the local spectra of the n-tuples of the coefficients in a natural way.

Let $\mathfrak{A}$ be a unital commutative Banach algebra. Under what conditions on a left Banach $\mathfrak{A}$-module $\mathfrak{X}$ is it true that each element in $\mathfrak{A}$ induces a decomposable multiplication operator on $\mathfrak{X}$? In order to give an answer to this question we introduce representation theory for modules and this theory is a natural extension of the representation theory of algebras. There are many notions from the theory of algebras which are extended in a natural way to modules. For instance, we introduce a notion of spectrally separable module and answer the above question in the following way. If $\mathfrak{X}$ is a left Banach $\mathfrak{A}$-module such that its dual module $\mathfrak{X}^*$ is spectrally separable, then each element in $\mathfrak{A}$ induces a decomposable multiplication operator on $\mathfrak{X}$.

By the help of the theory of module representations we define simple multipliers on a given Banach module. For example, all multipliers on a semisimple commutative Banach algebra are simple. We show that simple multipliers have similar properties as multipliers on algebras. Under some additional conditions on a module we can prove that simple multipliers on this module form a semisimple unital commutative Banach algebra. Then the assertions which are similar to the known results about multipliers on algebras can be proven.

2000 Mathematics Subject Classification. 46H15, 46H25, 47B40, 47B47, 47B48.

Key words and phrases. Arveson spectrum, commutative Banach algebra, decomposable multiplication operator, multiplier, point multiplier, representation of module, spectrally separable algebra, spectrally separable module, strongly harmonic operator.

Priprave

V prvem razdelku tega poglavja se bomo seznanili z znanimi rezultati, ki pomenijo nekakšno os, okoli katere se bodo vrtela vsa naša nadaljna razmišljanja. V tem razdelku bomo tudi vpeljali najnujnejše pojme in oznake — večino terminologije in notacije bomo uvedli v zadnjih razdelkih poglavja.

Drugi razdelek je namenjen pregledu vsebine in postavitvi problemov.

1.1. Uvod

Kot je dobro znano, se teorija avtomatične zveznosti ukvarja z vprašanji, kdaj iz algebraičnih pogojev sledi zveznost dane linearne preslikave, ki je definirana med dvema linearnima algebrskima strukturama, opremljenima s topologijo. V tem delu se bomo ukvarjali s podobnim fenomenom, le da nas bodo pri linearnih preslikavah namesto zveznosti zanimale tiste lastnosti, ki spadajo v lokalno spektralno teorijo.

Naslednji izrek nam bo služil kot ilustracija, hkrati pa bomo ob njem vpeljali pojme, ki jih bomo potrebovali kasneje.

Izrek 1.1.1 ([**60**], izrek 1.2). *Naj bo $\mathfrak{A}$ polenostavna komutativna kompleksna Banachova algebra (z ali brez enote). Za vsak $a \in \mathfrak{A}$ so ekvivalentne naslednje trditve:*

(a) Gelfandova transformiranka $\widehat{a}$ je hull-kernel zvezna na $\Sigma(\mathfrak{A})$.

(b) Operator množenja $T_a : x \mapsto ax$, $x \in \mathfrak{A}$, je super-dekomponibilen.

(c) T_a je dekomponibilen.

(d) T_a ima šibko 2-SDP.

S $\Sigma(\mathfrak{A})$ smo označili množico *karakterjev* na $\mathfrak{A}$, tj. množico neničelnih multiplikativnih linearnih funkcionalov. V primeru Banachovih algeber so multiplikativni linearni funkcionali vedno zvezni. Velja celo, da njihova norma ne presega 1. Torej je $\Sigma(\mathfrak{A})$ podmnožica zaprte enotske krogle v $\mathfrak{A}^*$, topološkem dualu algebre $\mathfrak{A}$. Če ima $\mathfrak{A}$ enoto, je $\|\varphi\| = 1$ za vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$.

Komutativna Banachova algebra je *polenostavna*, če obstaja dovolj karakterjev na njej v smislu, da je

$$\bigcap_{\varphi\in\Sigma(\mathfrak{A})} ker\,\varphi = \{0\}.$$

Kot podmnožica zaprte enotske krogle v $\mathfrak{A}^*$ je $\Sigma(\mathfrak{A})$ na naraven način opremljena z relativno šibko $*$ topologijo. Tej topologiji bomo v nadaljevanju rekli *Gelfandova topologija*, množici $\Sigma(\mathfrak{A})$ pa *nosilni prostor* algebre $\mathfrak{A}$, ko bo opremljena s to topologijo.

Gelfandova transformiranka elementa $a \in \mathfrak{A}$ je funkcija $\widehat{a}: \ \Sigma(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$, ki je definirana z $\widehat{a}(\varphi) := \varphi(a)$ pri vseh $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. Predpis $\Gamma: \ a \mapsto \widehat{a}$ je *Gelfandova transformacija* na $\mathfrak{A}$. Ta preslikava je injektivna natanko tedaj, ko je algebra $\mathfrak{A}$ polenostavna. Gelfandova topologija na $\Sigma(\mathfrak{A})$ je najšibkejša topologija, v kateri so Gelfandove transformiranke vseh elementov iz $\mathfrak{A}$ zvezne. Označimo s $\mathcal{C}_0(\Sigma(\mathfrak{A}))$ algebro vseh zveznih kompleksnih funkcij na nosilnem prostoru algebre $\mathfrak{A}$, ki imajo ničlo v neskončnosti. Potem je torej $\widehat{\mathfrak{A}} := \Gamma(\mathfrak{A})$ podalgebra (ne nujno zaprta) v $\mathcal{C}_0(\Sigma(\mathfrak{A}))$. Če ima algebra $\mathfrak{A}$ enoto, je nosilni prostor kompakten topološki prostor in tedaj je $\widehat{\mathfrak{A}}$ podalgebra v $\mathcal{C}(\Sigma(\mathfrak{A}))$.

Ovoj podmnožice $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{A}$ je množica

$$h_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U}) := \{\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A});\ \mathcal{U} \subseteq ker\,\varphi\}.$$

Jedro neprazne podmnožice $E \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ je zaprt ideal

$$k_{\mathfrak{A}}(E) := \bigcap_{\varphi\in E} ker\,\varphi,$$

jedro prazne množice pa je cela algebra $\mathfrak{A}$. Predpis, ki poljubni množici $E \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ priredi množico $h_{\mathfrak{A}}k_{\mathfrak{A}}(E) := h_{\mathfrak{A}}(k_{\mathfrak{A}}(E))$, je operator zaprtja. Se pravi, da lahko na $\Sigma(\mathfrak{A})$ vpeljemo topologijo, v kateri so zaprte natanko tiste množice, ki so ovoji. Tej topologiji pravimo *hull-kernel topologija* in $\Sigma(\mathfrak{A})$, opremljena s to topologijo, je *strukturni prostor* algebre $\mathfrak{A}$.

V splošnem je hull-kernel topologija šibkejša od Gelfandove topologije, če sta topologiji enaki, pravimo, da je $\mathfrak{A}$ *regularna algebra* (to je ena od ekvivalentnih definicij regularnosti, glejte izrek 7.1.2 v [**50**]).

Več o Banachovih algebrah bo bralec našel v [**14**], [**50**], [**61**] in [**63**]. Poglejmo zdaj še pojme iz lokalne spektralne teorije.

Naj bo $\mathcal{X}$ kompleksen Banachov prostor in $B(\mathcal{X})$ algebra omejenih linearnih operatorjev na $\mathcal{X}$. Operator $T \in B(\mathcal{X})$ je *dekomponibilen* natanko tedaj, ko za poljubno odprto pokritje $\{U, V\}$ kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ obstajata takšna podprostora $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Z}$ v $Lat\,(T)$, tj. v mreži zaprtih T-invariantnih podprostorov, da velja $\mathcal{X} = \mathcal{Y} + \mathcal{Z}$ in $\sigma(T|\mathcal{Y}) \subseteq U$ ter $\sigma(T|\mathcal{Z}) \subseteq V$. Originalna

Foiaşeva definicija ni tako enostavna (glejte, recimo, definicijo II.1.1 v [**21**]), a je ekvivalentna naši, kot je pokazal Albrecht [**2**].

Dekomponibilni operatorji igrajo osrednjo vlogo v lokalni spektralni teoriji, zato ni čudno, da so se sčasoma pojavile različne njihove variante. Poglejmo dve od njih.

Operator $T \in B(\mathfrak{X})$ je *super-dekomponibilen*, če za vsako odprto pokritje $\{U, V\}$ kompleksne ravnine obstaja takšen $R \in B(\mathfrak{X})$, ki komutira s T, da velja

$$\sigma(T|\overline{im\,R}) \subseteq U \quad \text{ter} \quad \sigma(T|\overline{im\,(I-R)}) \subseteq V.$$

Začetek sistematičnega študija teh operatorjev je [**54**]. Jasno, vsak super-dekomponibilen operator je dekomponibilen. Znano je tudi, da obstajajo dekomponibilni operatorji, ki niso super-dekomponibilni.

Operatorji s *šibko 2-SDP* (weak 2-spectral decomposition property) so posplošitev dekomponibilnih operatorjev: $T \in B(\mathfrak{X})$ ima šibko 2-SDP, če za vsako odprto pokritje $\{U, V\}$ kompleksne ravnine obstajata takšna $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Z}$ v $Lat\,(T)$, da velja $\sigma(T|\mathcal{Y}) \subseteq U$, $\sigma(T|\mathcal{Z}) \subseteq V$, vsota $\mathcal{Y} + \mathcal{Z}$ pa je gosta množica v $\mathfrak{X}$. Zahteva $\overline{\mathcal{Y} + \mathcal{Z}} = \mathfrak{X}$ je precej šibkejša od zahteve $\mathcal{Y} + \mathcal{Z} = \mathfrak{X}$, tako da obstajajo operatorji s šibko 2-SDP, ki niso dekomponibilni.

Kasneje bomo vpeljali še nekatere druge pojme iz lokalne spektralne teorije, naši standardni referenci za to področje sta [**21**] in, novejša, [**53**].

Dokaz izreka 1.1.1. Zaradi enostavnosti se bomo v dokazu omejili le na primer, ko ima $\mathfrak{A}$ enoto. V tem primeru je nosilni prostor (in torej tudi strukturni prostor) algebre $\mathfrak{A}$ kompakten.

(a)$\Rightarrow$(b) Fiksirajmo $a \in \mathfrak{A}$, katerega Gelfandova transformiranka je hull-kernel zvezna. Naj bo $\{U, V\}$ poljubno odprto pokritje kompleksne ravnine. Izberimo takšni odprti množici W_1 in W_2 v $\mathbb{C}$, za kateri velja

$$\mathbb{C} \setminus U \subseteq W_1 \subseteq \overline{W}_1 \subseteq W_2 \subseteq \overline{W}_2 \subseteq V.$$

Množici $\overline{W}_1$ in $\mathbb{C} \setminus W_2$ sta torej zaprti in disjunktni. Se pravi, da sta $\widehat{a}^{-1}(\overline{W}_1)$ in $\widehat{a}^{-1}(\mathbb{C} \setminus W_2)$ disjunktni hull-kernel zaprti podmnožici v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Še več, obe množici sta kompaktni tako v hull-kernel kot v Gelfandovi topologiji.

Po korolarju 3.6.10 iz [**63**] obstaja v $\mathfrak{A}$ takšen r, da velja

$$\widehat{r} \equiv 0 \quad \text{na} \quad \widehat{a}^{-1}(\overline{W}_1) \quad \text{in} \quad \widehat{r} \equiv 1 \quad \text{na} \quad \widehat{a}^{-1}(\mathbb{C} \setminus W_2).$$

Naj bo operator $R \in B(\mathfrak{A})$ definiran z $Rx := rx$, $x \in \mathfrak{A}$. Pokazali bomo, da ta operator zadošča pogojem za super-dekomponibilnost operatorja $T_a \in B(\mathfrak{A})$ glede na pokritje $\{U, V\}$.

Jasno je, da R in T_a komutirata. Da bi dokazali inkluzijo $\sigma(T_a|\overline{im\,R}) \subseteq U$, vzemimo poljubno število $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$. Zaradi $\lambda \in W_1$ in odprtosti množice W_1, je razdalja $\delta := \operatorname{dist}(\lambda, \mathbb{C} \setminus W_1)$ pozitivno število. Še več, za vsak

$\varphi \in \widehat{a}^{-1}(\mathbb{C} \setminus W_1)$ velja

$$|(a-\lambda)\widehat{\ }(\varphi)| = |\widehat{a}(\varphi) - \lambda| \geq \delta > 0.$$

Torej je $|(a-\lambda)\widehat{\ }| \geq \delta > 0$ na kompaktni množici $\widehat{a}^{-1}(\mathbb{C} \setminus W_1)$. Uporabimo lahko izrek 3.6.15 iz [**63**], ki pravi, da obstaja v $\mathfrak{A}$ takšen a_λ, da je

$$((a-\lambda)a_\lambda)\widehat{\ } \equiv 1 \quad \text{na} \quad \widehat{a}^{-1}(\mathbb{C} \setminus W_1).$$

Jasno, potem je

$$((a-\lambda)a_\lambda r)\widehat{\ } \equiv \widehat{r} \quad \text{na} \quad \widehat{a}^{-1}(\mathbb{C} \setminus W_1).$$

Ker pa je $\widehat{r} \equiv 0$ na $\widehat{a}^{-1}(\overline{W}_1)$, velja

$$((a-\lambda)a_\lambda r)\widehat{\ } \equiv \widehat{r} \quad \text{na celem prostoru} \quad \Sigma(\mathfrak{A}).$$

Polenostavnost algebre $\mathfrak{A}$ nam zagotavlja, da je $(a-\lambda)a_\lambda r = r$. Sklepamo torej lahko, da je

$$(a-\lambda)a_\lambda rx = rx \quad \text{za vse} \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Zaradi zveznosti operatorjev množenja od tod sledi

$$(a-\lambda)a_\lambda y = y \quad \text{za vse} \quad y \in \overline{im\, R}. \tag{1.1.1}$$

Označimo s T_{a_λ} operator množenja z a_λ na $\mathfrak{A}$. Očitno je podprostor $\overline{im\, R}$ invarianten za T_{a_λ}. Iz (1.1.1) torej sledi

$$\big[(T_a|\overline{im\, R} - \lambda)T_{a_\lambda}|\overline{im\, R}\big]y = y \quad \text{za vse} \quad y \in \overline{im\, R}.$$

To pomeni, da je operator $T_a|\overline{im\, R} - \lambda$ obrnljiv, oziroma $\lambda \notin \sigma(T_a|\overline{im\, R})$. Ker je bilo število λ poljubno iz $\mathbb{C} \setminus U$, smo dokazali inkluzijo $\sigma(T_a|\overline{im\, R}) \subseteq U$.

Da bi preverili še inkluzijo $\sigma(T_a|\overline{im\,(I-R)}) \subseteq V$, izberimo $\mu \in \mathbb{C} \setminus V$. Spet je razdalja $\epsilon := \mathrm{dist}(\mu, \overline{W}_2)$ pozitivno število. Podobno kot prej ugotovimo, da je

$$|(a-\mu)\widehat{\ }| \geq \epsilon > 0 \quad \text{na} \quad \widehat{a}^{-1}(\overline{W}_2).$$

Množica $\widehat{a}^{-1}(\overline{W}_2)$ je hull-kernel zaprta, zato nam izrek 3.6.15 iz [**63**] zagotavlja obstoj takšnega elementa $b_\mu \in \mathfrak{A}$, da je

$$((a-\mu)b_\mu)\widehat{\ } \equiv 1 \quad \text{na} \quad \widehat{a}^{-1}(\overline{W}_2).$$

Od tod, podobno kot prej, sledi, da je

$$((a-\mu)b_\mu(1-r))\widehat{\ } \equiv (1-r)\widehat{\ }, \quad \text{na celem prostoru} \quad \Sigma(\mathfrak{A}).$$

Potem pa zaradi polenostavnosti algebre $\mathfrak{A}$ spet dobimo $(a-\mu)b_\mu(1-r) = 1-r$. Najprej lahko sklepamo, da je

$$(a-\mu)b_\mu y = y \quad \text{za vse} \quad y \in \overline{im\,(I-R)},$$

od koder nato sledi obrnljivost operatorja $T_a - \mu$ na $\overline{im\,(I-R)}$.

Implikaciji (b)$\Rightarrow$(c) in (c)$\Rightarrow$(d) sta trivialni. Dokažimo, da velja (d)$\Rightarrow$(a). To bomo storili s protislovjem. Predpostavimo, da ima operator T_a šibko 2-SDP, Gelfandova transformiranka $\widehat{a}$ pa ni hull-kernel zvezna. Obstaja torej neka zaprta množica $F \subseteq \mathbb{C}$, za katero velja, da $E := \widehat{a}^{-1}(F)$ ni hull-kernel zaprta v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Vzemimo $\psi \in h_{\mathfrak{A}}k_{\mathfrak{A}}(E) \setminus E$ in postavimo $\lambda := \psi(a) \in \mathbb{C} \setminus F$.

Ker ima T_a šibko 2-SDP, $\{\mathbb{C}\setminus\{\lambda\}, \mathbb{C}\setminus F\}$ pa je odprto pokritje kompleksne ravnine, obstajata v $Lat\,(T_a)$ takšna $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Z}$, da je

$$\sigma(T_a|\mathcal{Y}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}, \quad \sigma(T_a|\mathcal{Z}) \subseteq \mathbb{C} \setminus F \quad \text{in} \quad \overline{\mathcal{Y} + \mathcal{Z}} = \mathfrak{A}.$$

Prva inkluzija nam zagotavlja, da za vsak $y \in \mathcal{Y}$ obstaja v $\mathcal{Y}$ takšen $\tilde{y}$, da je $y = (a - \lambda)\tilde{y}$. Od tod sledi $\psi(y) = (\psi(a) - \lambda)\psi(\tilde{y}) = 0$, kar nam da $\psi \equiv 0$ na $\mathcal{Y}$.

Naj bo zdaj φ poljuben karakter iz E. Potem je $\mu := \varphi(a)$ število v F. Ker je $\sigma(T_a|\mathcal{Z}) \subseteq \mathbb{C} \setminus F$, obstaja za vsak $z \in \mathcal{Z}$ takšen $\tilde{z} \in \mathcal{Z}$, da je $z = (a - \mu)\tilde{z}$. Od tod sledi $\varphi(z) = (\varphi(a) - \mu)\varphi(\tilde{z}) = 0$. To pomeni, da je $\varphi \equiv 0$ na $\mathcal{Z}$. Ker je bil φ poljuben iz E, velja $\mathcal{Z} \subseteq k_{\mathfrak{A}}(E)$. Potem pa je $\psi \in h_{\mathfrak{A}}k_{\mathfrak{A}}(E) \subseteq h_{\mathfrak{A}}(\mathcal{Z})$, oziroma $\psi \equiv 0$ na $\mathcal{Z}$. Upoštevajmo, da je $\overline{\mathcal{Y} + \mathcal{Z}} = \mathfrak{A}$, pa imamo $\psi \equiv 0$, kar je nemogoče. $\square$

Opomba 1.1.2. Iz predhodnega dokaza sledi, da za super-dekomponibilen operator množenja T_a na polenostavni komutativni Banachovi algebri $\mathfrak{A}$ lahko za operator R, ki nastopa v definiciji super-dekomponibilnosti, vedno izberemo operator množenja z nekim elementom r iz $\mathfrak{A}$ (oziroma iz $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$, če $\mathfrak{A}$ nima enote).

Naj bo $\mathfrak{A}$ poljubna komutativna Banachova algebra. Označimo

$$Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}) := \{a \in \mathfrak{A};\ T_a :\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \text{ je dekomponibilen}\}.$$

Izrek 1.1.3 ([**60**], izrek 1.5). *Naj bo $\mathfrak{A}$ polenostavna komutativna Banachova algebra. Potem je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$. Za vsak $a \in Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ velja:*

(i) Če je $\mathcal{I}$ zaprt ideal v $\mathfrak{A}$, potem je zožitev operatorja T_a na $\mathcal{I}$ super-dekomponibilen operator.

(ii) Če je $\mathfrak{B}$ poljubna Banachova algebra (ne nujno polenostavna ali komutativna), ki vsebuje $\mathfrak{A}$ kot podalgebro, potem je razširitev $\tilde{T}_a :\ \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ operatorja T_a, ki je dana z $\tilde{T}_a x = ax$, $x \in \mathfrak{B}$, super-dekomponibilen operator.

Dokaz. Po izreku 1.1.1 so v $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ natanko tisti elementi iz $\mathfrak{A}$, katerih Gelfandove transformiranke so hull-kernel zvezne. Od tod očitno sledi, da je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ podalgebra v $\mathfrak{A}$. Pokažimo, da je zaprta. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno Cauchyjevo zaporedje v $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$, ki konvergira k $a \in \mathfrak{A}$. Pokazati moramo, da je Gelfandova transformiranka $\widehat{a}$ hull-kernel zvezna. Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica. Predpostavimo, da je $\widehat{a}^{-1}(U)$ neprazna. Vzemimo poljuben $\varphi \in \widehat{a}^{-1}(U)$ in označimo $\lambda := \varphi(a) \in U$. Jasno, razdalja $\operatorname{dist}(\lambda, \mathbb{C} \setminus U)$ je pozitivno število. Naj bo $\epsilon > 0$ poljubno pozitivno število manjše od polovice te razdalje. Z $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$ označimo odprti disk v $\mathbb{C}$, katerega središče je v λ, njegov polmer pa je ϵ. Pri vsakem indeksu n je $\widehat{a_n}^{-1}(\mathbb{D}(\lambda, \epsilon))$ hull-kernel odprta podmnožica v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Naj bo n_0 takšen indeks, da iz $n \geq n_0$ sledi $\|a - a_n\| < \epsilon$. Pokažimo, da tedaj pri vsakem $n \geq n_0$ velja $\widehat{a_n}^{-1}(\mathbb{D}(\lambda, \epsilon)) \subseteq \widehat{a}^{-1}(U)$. Res! Če je $\psi \in \widehat{a_n}^{-1}(\mathbb{D}(\lambda, \epsilon))$, potem je

$$|\widehat{a}(\psi) - \lambda| \leq |\widehat{a}(\psi) - \widehat{a}_n(\psi)| + |\widehat{a}_n(\psi) - \lambda| < \|a - a_n\| + \epsilon < 2\epsilon,$$

od koder sledi $\widehat{a}(\psi) \in U$ in nato $\psi \in \widehat{a}^{-1}(U)$. Iz

$$|\lambda - \widehat{a}_n(\varphi)| = |\widehat{a}(\varphi) - \widehat{a}_n(\varphi)| \leq \|a - a_n\| < \epsilon$$

pa izhaja, da je $\varphi \in \widehat{a_n}^{-1}(\mathbb{D}(\lambda, \epsilon))$. Se pravi, da je $\widehat{a_n}^{-1}(\mathbb{D}(\lambda, \epsilon))$ hull-kernel odprta okolica točke φ, ki je vsebovana v $\widehat{a}^{-1}(U)$. To najprej dokazuje, da je $\widehat{a}^{-1}(U)$ hull-kernel odprta množica, potem pa, da je $a \in Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$.

V preostanku dokaza predpostavimo, da ima $\mathfrak{A}$ enoto. Da bi dokazali (i), vzemimo poljuben $a \in Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$. Naj bo $\{U, V\}$ odprto pokritje kompleksne ravnine. V dokazu izreka 1.1.1 smo videli, da obstaja v $\mathfrak{A}$ takšen element r, za katerega velja: pri vsakem številu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$ obstaja takšen $a_\lambda \in \mathfrak{A}$, da je $(a - \lambda)a_\lambda r = r$, in pri vsakem številu $\mu \in \mathbb{C} \setminus V$ obstaja takšen $b_\mu \in \mathfrak{A}$, da je $(a - \mu)b_\mu(1 - r) = 1 - r$. Tako kot v dokazu izreka 1.1.1, se da tudi tu videti, da za operator $R \in B(\mathcal{I})$, ki je definiran z $Rx := rx$, $x \in \mathcal{I}$, velja $\sigma(T_a|\overline{im\, R}) \subseteq U$ in $\sigma(T_a|\overline{im\, (I - R)}) \subseteq V$. To dokazuje (i), (ii) dokažemo podobno. $\square$

Algebro $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ imenujemo *Apostolova algebra* algebre $\mathfrak{A}$ (glejte [**53**], str. 355). Polenostavnost ni nujna za to, da je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$. Velja naslednja trditev (glejte [**53**], trdtev 4.4.9): če je $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z omejeno približno enoto, potem je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$.

Frunză je v [**34**] pokazal, da je polenostavna komutativna Banachova algebra $\mathfrak{A}$ z enoto regularna natanko tedaj, ko so vsi operatorji množenja na njej dekomponibilni. (Da so operatorji množenja na komutativni polenostavni Banachovi algebri dekomponibilni, sta dokazala že Colojoară in Foiaş v [**21**].) S pomočjo izreka 1.1.1 lahko dokažemo naslednjo posplošitev tega rezultata.

Izrek 1.1.4 ([**60**], izrek 2.1). *Za polenostavno komutativno Banachovo algebro $\mathfrak{A}$ (z ali brez enote) so ekvivalentne naslednje trditve:*

(a) $\mathfrak{A}$ je regularna.

(b) Za vsak $a \in \mathfrak{A}$ je Gelfandova transformiranka $\widehat{a}$ hull-kernel zvezna.

(c) Za vsak $a \in \mathfrak{A}$ je operator množenja $T_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ super-dekomponibilen.

(d) Za vsak $a \in \mathfrak{A}$ je $T_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ dekomponibilen.

(e) Obstaja tak sistem generatorjev $\mathfrak{A}_0$ algebre $\mathfrak{A}$, da ima vsak $T_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{A}_0$, šibko 2-SDP.

Dokaz. Ker v primeru regularnih algeber hull-kernel topologija in Gelfandova topologija na $\Sigma(\mathfrak{A})$ sovpadata, je jasno, da iz (a) sledi (b). Implikacija (b)$\Rightarrow$(c) sledi iz izreka 1.1.1, implikaciji (c)$\Rightarrow$(d) in (d)$\Rightarrow$(e) pa sta trivialni. Predpostavimo torej, da velja (e). Po izreku 1.1.1 je za vsak $a \in \mathfrak{A}_0$ Gelfandova transformiranka $\widehat{a}$ hull-kernel zvezna. Potem pa je hull-kernel zvezna tudi Gelfandova transformiranka $\widehat{b}$ poljubnega elementa b iz algebre, ki jo v $\mathfrak{A}$ generira $\mathfrak{A}_0$. To pomeni, da $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ vsebuje množico, ki je gosta v $\mathfrak{A}$. Zaradi zaprtosti $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ od koder, spet po izreku 1.1.1, sledi, da so vse Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{A}$ hull-kernel zvezne. To pa je mogoče le, če hull-kernel topologija in Gelfandova topologija sovpadata na $\Sigma(\mathfrak{A})$, kar je isto kot zahteva, da je $\mathfrak{A}$ regularna. □

Če v izreku, ki ga je dokazal Frunză, polenostavnost izpustimo, dobimo karakterizacijo *algeber z ločljivim spektrom.* To je poseben razred regularnih algeber, ki jih je študiral Baskakov (glejte [**13**]).

Izrek 1.1.5 (Baskakov). *Unitalna komutativna Banachova algebra $\mathfrak{A}$ je algebra z ločljivim spektrom natanko tedaj, ko obstaja takšna podmnožica $\mathfrak{A}_0$ v $\mathfrak{A}$, da velja:*

(i) Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{A}_0$ ločijo točke v spektru algebre $\mathfrak{A}$ in

(ii) za vsak $a \in \mathfrak{A}_0$ je operator množenja $T_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ dekomponibilen.

Dokaz izpustimo, saj bomo v naslednjem poglavju, ko se bomo podrobneje seznanili z algebrami z ločljivim spektrom, dokazali njegovo razširjeno verzijo.

Albrecht [**5**] je pokazal, da v vsaki polenostavni komutativni Banachovi algebri z enoto $\mathfrak{A}$ obstaja največja regularna podalgebra, ki jo bomo v nadaljevanju označili z $Reg\,(\mathfrak{A})$.

Izrek 1.1.6 ([**60**], izrek 2.5). *Naj bo $\mathfrak{A}$ polenostavna komutativna Banachova algebra (z ali brez enote). Potem obstaja v $\mathfrak{A}$ največja regularna zaprta podalgebra $Reg\,(\mathfrak{A})$, za katero velja $Reg\,(\mathfrak{A}) \subseteq Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$.*

Dokaz. Označimo z $\mathfrak{A}_0$ unijo vseh regularnih zaprtih podalgeber $\mathfrak{M}$ v $\mathfrak{A}$. Če ima $\mathfrak{A}$ enoto 1, potem je $1 \in \mathfrak{A}_0$. Ko pa $\mathfrak{A}$ nima enote, se lahko zgodi, da je $\mathfrak{A}_0 = \{0\}$ in torej tudi $Reg\,(\mathfrak{A}) = \{0\}$. V nadaljevanju bomo predpostavili, da $\mathfrak{A}_0$ ni prazna. Pokazali bomo, da je zaprta podalgebra $\mathfrak{B}$, ki jo v $\mathfrak{A}$ generira $\mathfrak{A}_0$, regularna. Po izreku 1.1.4 je dovolj videti, da je za vsak $a \in \mathfrak{A}_0$ operator množenja T_a dekomponibilen na $\mathfrak{B}$. Za vsak $a \in \mathfrak{A}_0$ obstaja takšna zaprta regularna podalgebra $\mathfrak{M}$ v $\mathfrak{A}$, da je $a \in \mathfrak{M}$. Po izreku 1.1.4 je T_a dekomponibilen na $\mathfrak{M}$, toda potem je dekomponibilen tudi na $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$, po trditvi (ii) izreka 1.1.3. To dokazuje, da je $\mathfrak{B}$ regularna in da je $\mathfrak{A}_0 \subseteq Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$. Ker pa je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$, velja $\mathfrak{B} \subseteq Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$. Glede na konstrukcijo je jasno, da je $\mathfrak{B}$ največja regularna zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$. □

Izrek 1.1.6 velja tudi, če ne predpostavimo polenostavnosti (glejte izrek 2.8 v [**60**]). Pripomnimo še, da je v primeru polenostavnih algeber še vedno odprt problem, ali je inkluzija $Reg\,(\mathfrak{A}) \subseteq Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ kdaj prava (glejte [**53**] in tam navedeno literaturo).

1.2. Pregled vsebine in vprašanj

V tem razdelku bomo na hitro pregledali vsebino in formulirali vprašanja, s katerimi se bomo ukvarjali. Izhodišče so rezultati v prvem razdelku tega poglavja.

Začnimo z drugim poglavjem. V njem bomo izdelali teorijo algeber z ločljivim spektrom, motivacija za to pa so naslednja vprašanja, ki izhajajo iz izrekov 1.1.3, 1.1.4 in 1.1.5.

Naj bo $\mathfrak{X}$ levi Banachov modul nad komutativno Banachovo algebro $\mathfrak{A}$. Z $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ označimo množico vseh tistih elementov iz $\mathfrak{A}$, ki inducirajo na $\mathfrak{X}$ dekomponibilen operator množenja.

Vprašanje 1.2.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Kaj mora veljati za $\mathfrak{A}$, da bo pri vsakem levem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathfrak{X}$ veljalo $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{A}$?*

Odgovor na zastavljeno vprašanje dajeta izreka 2.4.1 in 2.4.3: enakost $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{A}$ bo veljala za vse leve Banachove $\mathfrak{A}$-module natanko tedaj, ko je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Še več, če je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, inducirajo vsi elementi iz $\mathfrak{A}$ na vsakem levem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu super-dekomponibilne operatorje (izrek 2.4.2).

Vprašanje 1.2.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Kaj lahko povemo o preseku*

$$\cap_{\mathfrak{X}} Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}),$$

ki je vzet po vseh levih Banachovih $\mathfrak{A}$-modulih?

V razdelku 2.5 bomo pokazali, da v vsaki komutativni Banachovi algebri $\mathfrak{A}$ z enoto obstaja največja podalgebra z ločljivim spektrom, $Sep\,(\mathfrak{A})$. Zaradi izreka 2.4.1 velja

$$Sep\,(\mathfrak{A}) \subseteq \cap_{\mathcal{X}} Dec_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}).$$

Podalgebra $Sep\,(\mathfrak{A})$ se obnaša podobno kot $Reg\,(\mathfrak{A})$, vendar vprašanje, ali ti dve podalgebri sovpadata, ostaja odprto.

Iz karakterizacije algeber z ločljivim spektrom sledi njihova tesna povezanost z lokalno spektralno teorijo operatorjev. V tretjem poglavju bomo študirali *krepko harmonične operatorje*. Operator T na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ je krepko harmoničen, če obstaja takšna algebra z ločljivim spektrom $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$, ki vsebuje T in identični operator I.

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ Banachova prostora in $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{Y})$ ter $\mathfrak{B} \subset B(\mathcal{X})$ algebri z ločljivima spektroma. Potem je $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — prostor vseh omejenih lineranih preslikav iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{Y}$ — Banachov $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul. Naj bo E elementaren operator na $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, s koeficienti iz $\mathfrak{A}$, oziroma iz $\mathfrak{B}$.

Vprašanje 1.2.3. *Ali je E krepko harmoničen operator?*

Izrek 3.3.1 nam zagotavlja, da je za posebne vrste elementarnih operatorjev odgovor pritrdilen. V splošnem pa dobimo pritrdilen odgovor pri dodatnih predpostavkah, glejte izrek 3.3.3.

Vprašanje 1.2.4. *Kako so lokalni spektri elementarnega operatorja E odvisni od lokalnih spektrov njegovih koeficientov?*

Odgovor na vprašanje daje izrek 3.3.11.

Če je $\mathfrak{A}$ polenostavna komutativna Banachova algebra, potem je element $a \in \mathfrak{A}$ v $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ natanko tedaj, ko je Gelfandova transformiranka $\widehat{a}$ hull-kernel zvezna (izrek 1.1.1). Laursen in Neumann ([**56**], [**53**]) sta ta rezultat razširila. Pokazala sta, da velja za nekatere multiplikatorje. Multiplikator iz (levega) Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ v (levi) Banachov $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{Y}$ je omejena linearna preslikava $T:\ \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, za katero velja $T(a \cdot x) = a \cdot Tx$ $(a \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X})$. V posebnem je multiplikator na $\mathfrak{A}$ omejen linearen operator $T:\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, za katerega velja $T(ab) = a(Tb)$ $(a, b \in \mathfrak{A})$.

Vprašanje 1.2.5. *Ali je mogoče omenjeni rezultat dokazati za kakšen razred multiplikatorjev na Banachovih modulih?*

Da bi vprašanje 1.2.5 bilo smiselno, je potrebno izdelati za module podobna orodja, kot so na voljo pri algebrah.

Vprašanje 1.2.6. *Kako vpeljati v teorijo Banachovih modulov pojme, ki bodo analogije naslednjih pojmov iz teorije algeber: upodobitev algebre, karakter, Arvesonov spekter, praideal, primitiven ideal, radikal, ...?*

S tem vprašanjem se ukvarjamo v četrtem poglavju. V petem poglavju pa obravnavamo vprašanje 1.2.5. Za *enostavne multiplikatorje* na modulih pokažemo, da imajo podobne lastnosti, kot jih imajo multiplikatorji na komutativnih algebrah (slednji so poseben primer enostavnih multiplikatorjev).

V zadnjem, šestem, poglavju obravnavamo naslednje vprašanje.

Vprašanje 1.2.7. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Kakšen mora biti levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$, da velja $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = \mathfrak{A}$?*

Za razliko od vprašanja 1.2.1 iščemo zdaj pogoje za modul, ne za algebro. Da bi lahko odgovorili na zastavljeno vprašanje, razširimo pojem Arvesonovega spektra do upodobitev modulov. Nato vpeljemo module z ločljivim spektrom in pokažemo, da velja $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = \mathfrak{A}$ za vsak levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$, katerega dualni modul $\mathcal{X}^*$ ima ločljiv spekter (glejte posledico 6.3.7).

1.3. Lokalna spektralna teorija

Ta razdelek je namenjen izključno vpeljavi pojmov iz lokalne spektralne teorije. Naši standardni referenci sta [**21**] in [**53**], na nekaterih mestih pa se bomo sklicali kar na originalne članke.

Osrednji pojem lokalne spektralne teorije — dekomponibilnost — smo že srečali. Dogovorimo se za naslednje oznake. Če je $\mathcal{X}$ kompleksen Banachov prostor, naj bo $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ mreža vseh zaprtih podprostorov v $\mathcal{X}$. S $cl\,(\Omega)$ pa označimo družino vseh zaprtih podmnožic v topološkem prostoru Ω.

Definicija 1.3.1. *Naj bo $\mathcal{X}$ kompleksen Banachov prostor in Ω topološki prostor. Preslikava*

$$\mathsf{E}:\ cl\,(\Omega) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$$

je spektralna kapaciteta tipa $(\Omega, \mathcal{X})$, *če zanjo velja:*

(i) $\mathsf{E}(\emptyset) = \{0\}$ *in* $\mathsf{E}(\Omega) = \mathcal{X}$.

(ii) Za poljubno družino $\{F_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ zaprtih podmnožic v Ω je

$$\mathsf{E}(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} F_i) = \bigcap_{i\in I} \mathsf{E}(F_i).$$

(iii) Če je $\{G_1, \ldots, G_m\}$ odprto pokritje topološkega prostora Ω, potem je

$$\mathcal{X} = \mathsf{E}(\overline{G}_1) + \ldots + \mathsf{E}(\overline{G}_m).$$

Pojem spektralne kapacitete je vpeljal Apostol leta 1968, naša definicija pa je posplošena verzija, ki jo je dal Frunză v [**35**] (definicija 3.1). Apostol je vpeljal pojem spektralne kapacitete kot pomoč pri študiju dekomponibilnosti operatorjev.

Definicija 1.3.2. *Naj bo* $\mathcal{X}$ *kompleksen Banachov prostor in* $T \in B(\mathcal{X})$. *Za* T *pravimo, da ima spektralno kapaciteto, če obstaja takšna spektralna kapaciteta* E *tipa* $(\mathbb{C}, \mathcal{X})$, *za katero velja*

(a) E *slika iz* $cl\,(\mathbb{C})$ *v* $Lat\,(T)$ *in*

(b) $\sigma(T|\mathsf{E}(F)) \subseteq F$ *za vsak* $F \in cl\,(\mathbb{C})$.

Da sta pojem spektralne kapacitete in dekomponibilnosti tesno povezana, kaže naslednji izrek.

Izrek 1.3.3. *Omejen linearen operator* T *na kompleksnem Banachovem prostoru* $\mathcal{X}$ *je dekomponibilen natanko tedaj, ko ima spektralno kapaciteto. Še več, spektralna kapaciteta dekomponibilnega operatorja je enolično določena.*

Za dokaz glejte, recimo, [**53**], izrek 1.2.23. Da bi lahko povedali, kako je določena spektralna kapaciteta iz izreka, potrebujemo naslednje pojme.

Naj bo T poljuben omejen linearen operator na kompleksnem Banachovem prostoru $\mathcal{X}$. Točka $z \in \mathbb{C}$ je v *lokalni resolventni množici* $\rho_T(x)$ operatorja T pri vektorju $x \in \mathcal{X}$, če obstajata takšna odprta okolica U točke z in takšna analitična funkcija $f: U \to \mathcal{X}$, da velja

$$(T - \lambda)f(\lambda) = x \quad \text{za vse} \quad \lambda \in U.$$

Lokalni spekter $\sigma_T(x)$ operatorja T pri $x \in \mathcal{X}$ je potem definiran z

$$\sigma_T(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_T(x).$$

Zdaj lahko definiramo *lokalne spektralne podprostore* operatorja $T \in B(\mathcal{X})$. Za poljubno množico $S \subseteq \mathbb{C}$ je pripadajoči lokalen spektralni podprostor dan z

$$X_T(S) := \{x \in \mathcal{X};\ \sigma_T(x) \subseteq S\}.$$

Lokalni spektralni podprostori so invariantni za delovanje operatorja T, vendar v splošnem niso zaprti — niti za zaprto množico S ne. Za $X_T(\emptyset)$ velja, recimo, da je zaprt natanko tedaj, ko je enak trivialnemu prostoru, slednje pa je ekvivalentno dejstvu, da ima operator T SVEP.

Definicija 1.3.4. *Operator* $T \in B(\mathcal{X})$ *ima* SVEP *(single-valued extension property), če za vsako odprto množico* $U \subseteq \mathbb{C}$ *velja, da je edina analitična rešitev* $f: U \to \mathbb{C}$ *enačbe* $(T - \lambda)f(\lambda) = 0$ $(\lambda \in U)$ *funkcija, ki je povsod enaka 0.*

Če je $T \in B(\mathcal{X})$ dekomponibilen operator, je pri vsaki množici $F \in cl\,(\mathbb{C})$ lokalen spektralni podprostor $X_T(F)$ zaprt. Izkaže se, da je spektralna kapaciteta operatorja T dana z lokalnimi spektralnimi podprostori:

$$\mathsf{E}(F) = X_T(F) \qquad (F \in cl\,(\mathbb{C})).$$

Motiviran z izrekom 1.3.3 je Frunză vpeljal pojem dekomponibilne n-terice operatorjev ([**35**], definicija 3.2).

Definicija 1.3.5. *Komutirajoča n-terica omejenih linearnih operatorjev $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ je* dekomponibilna*, če obstaja takšna spektralna kapaciteta E tipa $(\mathbb{C}^n, \mathcal{X})$, da velja:*

(a) $T_k\mathsf{E}(F) \subseteq \mathsf{E}(F)$ za vse $F \in cl\,(\mathbb{C}^n)$ in $1 \le k \le n$.

(b) Pri vsaki zaprti podmnožici $F \subseteq \mathbb{C}^n$ je Taylorjev spekter n-terice $\underline{T}$ na $\mathsf{E}(F)$ vsebovan v F, tj.

$$\sigma(\underline{T}, \mathsf{E}(F)) \subseteq F \qquad (F \in cl\,(\mathbb{C}^n)).$$

Definicije Taylorjevega spektra tu ne bomo navajali, bralec jo bo našel v [**65**].

Definicija 1.3.6. *Naj bo $\mathcal{X}$ kompleksen Banachov prostor in $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ komutirajoča n-terica omejenih linearnih operatorjev na $\mathcal{X}$.*

Analitična resolventna množica *n-terice $\underline{T}$ pri $x \in \mathcal{X}$ je množica $\rho(\underline{T}, x)$ vseh $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$, za katere velja, da obstaja takšna odprta okolica V točke $\underline{z}$ in n analitičnih funkcij $f_1, \dots, f_n$ na V, ki slikajo v $\mathcal{X}$, da velja*

$$x = (\zeta_1 - T_1)f_1(\underline{\zeta}) + \ldots + (\zeta_n - T_n)f_n(\underline{\zeta}) \qquad (\underline{\zeta} \in V).$$

Analitičen lokalni spekter *n-terice $\underline{T}$ pri $x \in \mathcal{X}$ je definiran z*

$$\sigma(\underline{T}, x) := \mathbb{C}^n \setminus \rho(\underline{T}, x).$$

Izrek 1.3.7. *Dekomponibilna n-terica $\underline{T}$ komutirajočih omejenih linearnih operatorjev na kompleksnem Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ ima enolično določeno spektralno kapaciteto, ki je dana z*

$$\mathsf{E}(F) = \{x \in \mathcal{X};\ \sigma(\underline{T}, x) \subseteq F\} \qquad (F \in cl\,(\mathbb{C}^n)).$$

Dokaz izreka 1.3.7 je v [**1**], izrek 2.6. Kar se tiče n-teric operatorjev, smo končali, pripomnimo le, da je spektralni dekompoziciji n-teric operatorjev delno posvečena tudi monografija [**31**].

Na koncu tega razdelka vpeljimo še dva pojma, ki sta že dolgo prisotna v lokalni spektralni teoriji operatorjev, katerih pomen pa se je pokazal šele pred kratkim, [**6**].

Definicija 1.3.8. *Operator $T \in B(\mathcal{X})$ ima* Bishopovo lastnost (β)*, ko velja: če je U odprta podmnožica v $\mathbb{C}$ in $f_n : U \to \mathcal{X}$ zaporedje analitičnih funkcij, za katero velja, da $(T - \lambda)f_n(\lambda)$ konvergira enakomerno k 0 na vsaki kompaktni podmnožici množice U, potem konvergira zaporedje $f_n(\lambda)$ enakomerno k 0 na vsaki kompaktni podmnožici v U.*

Operator T ima dekompozicijsko lastnost (δ), *če ima pri poljubnem odprtem pokritju $\{U_1, U_2\}$ kompleksne ravnine vsak $x \in \mathcal{X}$ razcep $x = u_1 + u_2$, pri čemer za vektorja u_k, $k = 1, 2$, velja*

$$u_k = (T - \lambda) f_k(\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}_k)$$

in sta f_k, $k = 1, 2$, analitični funkciji iz $\mathbb{C} \setminus \overline{U}_k$ v $\mathcal{X}$.

Operator $T \in B(\mathcal{X})$ je dekomponibilen natanko tedaj, ko ima obe lastnosti, (β) in (δ) (glejte [**6**] in [**53**]). V [**6**] sta Albrecht in Eschmeier pokazala, da sta lastnosti dualna ena drugi: operator T ima Bishopovo lastnost (β) natanko tedaj, ko ima adjungirani operator T^* dekompozicijsko lastnost (δ). Ekvivalenca velja tudi, če T in T^* med sabo zamenjamo. Za podrobnosti glejte tudi [**53**]. Izkaže se tudi, da je (β) natanko tista lastnost, ki določa operatorje, ki so zožitve dekomponibilnih operatorjev na zaprte invariantne podprostore. Lastnost (δ) pa določa natanko vse operatorje, ki jih dekomponibilni operatorji inducirajo na kvocientnih prostorih (glejte [**53**]).

1.4. Definicija modulov in osnovne lastnosti

Namen tega razdelka je vpeljava nekaterih pojmov, s katerimi bomo delali v nadaljevanju — predvsem imamo v mislih pojem modula in z njim povezane pojme. Navedli bomo nekatere osnovne odnose med definiranimi objekti in nekatere trditve bomo tudi dokazali. Ker pa bo v veliki meri šlo za preproste ugotovitve, bomo marsikateri dokaz izpustili. Večina obravnavane snovi je povzeta iz standardnih referenc, recimo [**14**] in [**61**]. Čeprav bi lahko pojem modula zastavili zelo na široko, se bomo omejili na situacijo, ko je modul kompleksen vektorski prostor, na njem pa delujejo preko modulskega množenja elementi kompleksne algebre. V tem razdelku ni predpostavljeno, da bi katera od algeber ali kateri od vektorskih prostorov bil opremljen s topologijo.

Definicija 1.4.1. *Vektorski prostor $\mathcal{X}$ je* levi $\mathfrak{A}$-modul, *če obstaja takšna preslikava*

$$\mathfrak{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad (a, x) \mapsto a \cdot x, \tag{1.4.1}$$

da zanjo velja

- (LM1): *pri vsakem $a \in \mathfrak{A}$ je $L_a :\ x \mapsto a \cdot x$ linearna preslikava na $\mathcal{X}$;*
- (LM2): *pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ je $\mathrm{P}(x) :\ a \mapsto a \cdot x$ linearna preslikava iz $\mathfrak{A}$ v $\mathcal{X}$;*
- (LM3): *za vse $a_1,\ a_2 \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ je $a_1 \cdot (a_2 \cdot x) = (a_1 a_2) \cdot x$.*

Če je $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul, je preslikava (1.4.1) levo modulsko množenje*.*

Podobno definiramo *desni* $\mathfrak{A}$*-modul* $\mathcal{X}$. Tu mora obstajati preslikava

$$\mathfrak{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \ (a, x) \mapsto x \cdot a, \tag{1.4.2}$$

za katero velja

(RM1): pri vsakem $a \in \mathfrak{A}$ je $R_a : \ x \mapsto x \cdot a$ linearna preslikava na $\mathcal{X}$;
(RM2): pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ je $\Lambda(x) : \ a \mapsto x \cdot a$ linearna preslikava iz $\mathfrak{A}$ v $\mathcal{X}$;
(RM3): za vse $a_1, \ a_2 \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ je $(x \cdot a_1) \cdot a_2 = x \cdot (a_1 a_2)$.

Preslikava (1.4.2) z lasnostmi (RM1), (RM2) in (RM3) je *desno modulsko množenje.*

Prostor $\mathcal{X}$ je $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-*bimodul*, če je levi $\mathfrak{A}$-modul ter desni $\mathfrak{B}$-modul in sta modulski množenji usklajeni z enakostjo

(BM): $\quad a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b, \quad (a \in \mathfrak{A}, \ b \in \mathfrak{B}, \ x \in \mathcal{X})$.

Zaradi (BM) lahko pišemo kar $a \cdot x \cdot b$ namesto $(a \cdot x) \cdot b$, oziroma $a \cdot (x \cdot b)$.

Pripomnimo, da je vsak levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathfrak{A}$-$\mathbb{C}$-bimodul, vsak desni $\mathfrak{B}$-modul pa je $\mathbb{C}$-$\mathfrak{B}$-bimodul. Če je $\mathcal{X}$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul in je $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, bomo rekli, da je $\mathcal{X}$ $\mathfrak{A}$-bimodul.

Zgled 1.4.2. Algebra $\mathfrak{A}$ je $\mathfrak{A}$-bimodul, če sta levo in desno modulsko množenje definirana z množenjem v algebri. Bolj splošno: glede na običajno množenje v $\mathfrak{A}$ je vsak levi ideal v $\mathfrak{A}$ levi $\mathfrak{A}$-modul, vsak desni ideal je desni $\mathfrak{A}$-modul in dvostranski ideal je $\mathfrak{A}$-bimodul.

Zgled 1.4.3. Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ vektorska prostora. Z $L(\mathcal{X})$ in $L(\mathcal{Y})$ označimo algebri vseh linearnih preslikav na $\mathcal{X}$, oz. na $\mathcal{Y}$, z $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ pa prostor vseh linearnih preslikav iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{Y}$. Ker je komponiranje preslikav asociativno, se ni težko prepričati, da je $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ $L(\mathcal{Y})$-$L(\mathcal{X})$-bimodul.

Definicija 1.4.4. *Naj bo* $\mathcal{X}$ *levi* $\mathfrak{A}$*-modul. Podprostor* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ *je podmodul, če je invarianten za modulsko množenje, tj. če iz* $y \in \mathcal{Y}$ *sledi* $a \cdot y \in \mathcal{Y}$ *za vse* $a \in \mathfrak{A}$.

Podobno definiramo podmodule v desnih modulih in bimodulih.

Trivialen podprostor $0 := \{0\}$ in cel modul sta vedno podmodula.

Očitno je presek podmodulov spet podmodul. Velja torej naslednja trditev.

Trditev 1.4.5. *Vsaka podmnožica* $\mathcal{M}$ *v levem* $\mathfrak{A}$*-modulu* $\mathcal{X}$ *je vsebovana v nekem najmanjšem podmodulu, ki ga bomo označili z* $(\mathcal{M})$.

Zlahka preverimo, da je

$$(\mathcal{M}) = \{a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n; \ a_k \in \mathfrak{A}, \ x_k \in \mathcal{X}, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra. Označimo z $\mathfrak{A}_{op}$ algebro, ki jo dobimo iz algebre $\mathfrak{A}$ tako, da množimo v obratnem vrstnem redu. Produkt elementov a in b je torej v $\mathfrak{A}_{op}$ definiran z $a \circ b = ba$, pri čemer je na desni strani produkt iz $\mathfrak{A}$.

Trditev 1.4.6. *Če je $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul, potem je $\mathcal{X}$ za preslikavo $(a, x) \mapsto x \star a := a \cdot x$ desni $\mathfrak{A}_{op}$-modul.*

Podobno je $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}_{op}$-modul če je desni $\mathfrak{A}$-modul. Vsak $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul $\mathcal{X}$ je $\mathfrak{B}_{op}$-$\mathfrak{A}_{op}$-bimodul.

Trditev 1.4.7. *Naj bosta $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ algebri in naj bo $\mathcal{X}$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul, potem je $\mathcal{X}$ tudi levi $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}_{op}$-modul.*

Iz trditev 1.4.6 in 1.4.7 sledi, da ne izgubimo veliko, če se pri obravnavi modulov omejimo na leve module. To bomo v nadaljevanju tudi storili.

Dual vektorskega prostora $\mathcal{X}$, tj. prostor vseh linearnih funkcionalov na $\mathcal{X}$, bomo označili z $\mathcal{X}'$. Če je $\mathcal{X}$ levi (desni) modul nad algebro $\mathfrak{A}$, potem lahko na $\mathcal{X}'$ na naraven način vpeljemo strukturo desnega (levega) $\mathfrak{A}$-modula. Tako je, na primer, produkt $\xi \cdot a$ elementa a iz $\mathfrak{A}$ in funkcionala ξ iz duala levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ definiran z $\langle \xi \cdot a, x\rangle = \langle \xi, a \cdot x\rangle$, $x \in \mathcal{X}$. Zlahka preverimo, da je definicija dobra in da je preslikava $(a, \xi) \mapsto \xi \cdot a$ desno modulsko množenje na $\mathcal{X}'$. Podobno definiramo levo modulsko množenje na $\mathcal{X}'$, ko je $\mathcal{X}$ desni $\mathfrak{A}$-modul. Če je $\mathcal{X}$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul, je $\mathcal{X}'$ $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{A}$-bimodul. Prostor $\mathcal{X}'$ bomo v nadaljevanju imenovali *dualni modul*, če bo modulsko množenje na njem definirano tako, kot smo pravkar opisali.

Če je kateri od vektorskih prostorov $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ modul nad algebro $\mathfrak{A}$, potem lahko prostor $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ na naraven način opremimo s strukturo $\mathfrak{A}$-modula. Velja naslednja trditev.

Trditev 1.4.8. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra in $\mathcal{X}$ ter $\mathcal{Y}$ vektorska prostora.*

(i) Če je $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul, potem je $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ desni $\mathfrak{A}$-modul: modulsko množenje je definirano z

$$(T \cdot a)x = T(a \cdot x) \quad (T \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),\ a \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X}).$$

(ii) Če je $\mathcal{X}$ desni $\mathfrak{A}$-modul, potem je $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ levi $\mathfrak{A}$-modul: modulsko množenje je definirano z

$$(a \cdot T)x = T(x \cdot a) \quad (T \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),\ a \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X}).$$

(iii) Če je $\mathcal{Y}$ levi $\mathfrak{A}$-modul, potem je $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ levi $\mathfrak{A}$-modul: modulsko množenje je definirano z

$$(a \cdot T)x = a \cdot Tx \quad (T \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),\ a \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X}).$$

(iv) Če je $\mathfrak{Y}$ desni $\mathfrak{A}$-modul, potem je $L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ desni $\mathfrak{A}$-modul: modulsko množenje je definirano z

$$(T\cdot a)x = Tx\cdot a \quad (T\in L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}),\ a\in\mathfrak{A},\ x\in\mathfrak{X}).$$

Če je vektorski prostor $\mathfrak{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul, vektorski prostor $\mathfrak{Y}$ pa je levi $\mathfrak{B}$-modul, potem iz

$$\begin{aligned}[b\cdot(T\cdot a)]x &= b\cdot[(T\cdot a)x] = b\cdot T(a\cdot x)\\ &= (b\cdot T)(a\cdot x) = [(b\cdot T)\cdot a]x,\\ &\quad (T\in L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}),\ a\in\mathfrak{A},\ b\in\mathfrak{B}, x\in\mathfrak{X})\end{aligned}$$

sledi, da je $L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{A}$-bimodul. Na podoben način vidimo, da je $L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul, če je $\mathfrak{X}$ desni $\mathfrak{A}$-modul, $\mathfrak{Y}$ pa desni $\mathfrak{B}$-modul.

Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra in $\mathfrak{X}$ ter $\mathfrak{Y}$ leva $\mathfrak{A}$-modula. Preslikava $T\in L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ je *homomorfizem modulov*, če velja

$$T(a\cdot x) = a\cdot Tx \qquad (a\in\mathfrak{A},\ x\in\mathfrak{X}).$$

Ni težko videti, da je množica vseh modulskih homomorfizmov iz $\mathfrak{X}$ v $\mathfrak{Y}$ linearen podprostor v $L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, oziroma podalgebra v $L(\mathfrak{X})$, če je $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$. Označimo ta podprostor, oziroma podalgebro, z $L_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, oziroma z $L_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$. Homomorfizme desnih modulov in bimodulov definiramo podobno. Podobne so tudi oznake: $L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})_{\mathfrak{B}}$ za prostor vseh modulskih homomorfizmov iz desnega $\mathfrak{B}$-modula $\mathfrak{X}$ v desni $\mathfrak{B}$-modul $\mathfrak{Y}$, $L(\mathfrak{X})_{\mathfrak{B}}$ za algebro vseh modulskih homomorfizmov iz desnega $\mathfrak{B}$-modula vase, $L_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})_{\mathfrak{B}}$, oziroma $L_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})_{\mathfrak{B}}$, pa sta prostor, oziroma algebra, modulskih homomorfizmov, ko sta $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodula. V nadaljevanju bomo na kratko vsakemu modulskemu homomorfizmu rekli *multiplikator*.

Zgled 1.4.9. Naj bo $\mathfrak{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Potem je

$$\mathrm{P}(x)\in L_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A},\mathfrak{X}) \qquad (x\in\mathfrak{X}).$$

Definicija 1.4.10. *Naj bo $\mathfrak{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul.* Anihilator *množice $\mathcal{M}\subseteq\mathfrak{X}$ je*

$$ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M}) = \{a\in\mathfrak{A};\ a\cdot x = 0 \text{ za vse } x\in\mathcal{M}\}.$$

Očitno je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M}) = \cap_{x\in\mathcal{M}} ker\,\mathrm{P}(x)$.

Trditev 1.4.11. *Naj bo $\mathfrak{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul in $\mathcal{M}\subseteq\mathfrak{X}$ poljubna podmnožica. Potem je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$ levi ideal v $\mathfrak{A}$. Če je $\mathcal{M}$ levi podmodul, potem je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$ dvostranski ideal v $\mathfrak{A}$.*

Definicija 1.4.12. *Levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathfrak{X}$ je* zvest*, če je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ trivialen ideal v $\mathfrak{A}$.*

Zgled 1.4.13. Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul in $\mathfrak{I}$ dvostranski ideal v $\mathfrak{A}$. Potem je tudi $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ algebra. Če je $\mathfrak{I} \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, potem lahko za vsak $x \in \mathcal{X}$ in vsak $[a] = a+\mathfrak{I} \in \mathfrak{B}$ definiramo $[a]\cdot x = a\cdot x$. Brez težav se lahko prepričamo, da je s tem množenjem $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{B}$-modul. Ko je $\mathfrak{I} = ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, je $\mathcal{X}$ zvest levi $\mathfrak{B}$-modul.

Zgled 1.4.14. Naj bo zdaj $\mathcal{Y}$ podmodul v levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$. Za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ in $[x] = x + \mathcal{Y} \in \mathcal{X}/\mathcal{Y}$ lahko definiramo $a \cdot [x] = [a \cdot x] = a \cdot x + \mathcal{Y}$. Izkaže se, da je za to množenje $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ levi $\mathfrak{A}$-modul.

Naj bo $\mathcal{X}$ levi modul nad algebro $\mathfrak{A}$, ki ima enoto 1. V nadaljevanju bomo vedno privzeli, da velja $1\cdot x = x,\ x \in \mathcal{X}$, torej da je $\mathcal{X}$ *unitalen* modul.

Če je $\mathfrak{A}$ algebra brez enote, naj bo $\mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A} \times \mathbb{C}\,(= \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C})$ njena *standardna unitizacija*. Se pravi, da sta linearni operaciji v $\mathfrak{A}_1$ definirani po komponentah, množenje pa je dano z

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta), \quad (a,\alpha),\ (b,\beta) \in \mathfrak{A}_1.$$

Element $(0,1)$ je enota v $\mathfrak{A}_1$. Glede na množenje

$$(a,\alpha)\cdot x = a\cdot x + \alpha x, \quad (a,\alpha) \in \mathfrak{A}_1,\ x \in \mathcal{X},$$

je vsak levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ tudi levi $\mathfrak{A}_1$-modul.

Naj bo $\mathfrak{U}$ neprazna podmnožica v algebri $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{M}$ neprazna podmnožica v levem $\mathfrak{A}$-podmodulu $\mathcal{X}$. V nadaljevanju bomo z $\mathfrak{U}\cdot\mathcal{M}$ označili množico

$$\{\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k; \quad a_k \in \mathfrak{U},\ x_k \in \mathcal{M}\}.$$

Če je $\mathfrak{U}$ singleton $\{a\}$ bomo uporabili oznako $a\cdot\mathcal{M}$. Podobno bomo v primeru, ko je $\mathcal{M}$ singleton $\{x\}$ pisali $\mathfrak{U}\cdot x$. Ko je $\mathfrak{A}$ algebra z enoto, je $\mathfrak{A}\cdot\mathcal{M} = (\mathcal{M})$, najmanši podmodul v $\mathcal{X}$, ki vsebuje množico $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$.

Če je $\mathfrak{I}$ levi ideal v algebri $\mathfrak{A}$, potem je $\mathfrak{I}\cdot\mathcal{X}$ podmodul v levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$. Rekli bomo, da je $\mathfrak{I}\cdot\mathcal{X}$ *koideal*, ki pripada $\mathfrak{I}$. Lahko se zgodi, da isti koideal pripada več idealom.

1.5. Banachovi moduli

V tem razdelku bomo obravnavali module, ki imajo tudi topološko strukturo, natančneje: zanimali nas bodo Banachovi moduli. Tako kot v prejšnjem bomo tudi v tem razdelku izpustili večino dokazov, saj jih je mogoče najti v [**14**] in [**61**].

Definicija 1.5.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ normirana kompleksna algebra in naj bo $\mathcal{X}$ normiran vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Potem je $\mathcal{X}$* normiran levi $\mathfrak{A}$-modul*, če je levi $\mathfrak{A}$-modul, ki zadošča še pogoju*

(NLM): *obstaja takšna pozitivna konstanta* K, *da za vse* $a \in \mathfrak{A}$ *in vse* $x \in \mathcal{X}$ *velja*

$$\|a \cdot x\| \leq K\|a\| \, \|x\|. \tag{1.5.1}$$

Če je normiran levi $\mathfrak{A}$*-modul* $\mathcal{X}$ *Banachov prostor, potem govorimo o* Banachovem levem $\mathfrak{A}$-modulu*.*

Podobno definiramo normirane in Banachove desne $\mathfrak{A}$-module ter normirane in Banachove bimodule.

Iz (1.5.1) sledi, da so preslikave L_a in $\mathrm{P}(x)$ iz 1.4.1 (oziroma R_a in $\Lambda(x)$, če imamo desne module) zvezne.

Če je $\mathcal{X}$ normiran levi modul nad normirano algebro $\mathfrak{A}$, potem je modulsko strukturo mogoče razširiti na napolnitev prostora $\mathcal{X}$. Prav tako je vsak Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul tudi modul nad napolnitvijo algebre $\mathfrak{A}$. To je razlog, da se bomo v nadaljevanju omejili na Banachove module nad Banachovimi algebrami. Ko bomo v nadaljevanju govorili o Banachovem modulu bo vedno privzeto, da je algebra, nad katero je zgrajen, Banachova.

Zgledi Banachovih modulov so zaprti ideali v Banachovi algebri $\mathfrak{A}$: levi (desni) zaprt ideal $\mathfrak{I}$ je levi (desni) $\mathfrak{A}$-modul, dvostranski ideal je $\mathfrak{A}$-bimodul.

Če je $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, linearna množica $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ pa je invariantna za delovanje algebre $\mathfrak{A}$, potem je $\overline{\mathcal{M}}$ zaprt podmodul v $\mathcal{X}$. Namreč, pri vsakem $a \in \mathfrak{A}$ je zožitev operatorja množenja L_a na $\mathcal{M}$ omejen operator, ki ga torej lahko zvezno razširimo na $\overline{\mathcal{M}}$.

Trditev 1.5.2. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *Banachova algebra in* $\mathcal{X}$ *Banachov levi* $\mathfrak{A}$*-modul Če je* $\mathcal{Y}$ *zaprt podmodul v* $\mathcal{X}$*, potem je tudi kvocientni prostor* $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ *Banachov levi* $\mathfrak{A}$*-modul.*

Definicija 1.5.3. *Banachov levi* $\mathfrak{A}$*-modul* $\mathcal{X}$ *je* izometričen*, če velja*

$$\|a \cdot x\| \leq \|a\|\|x\|$$

za vse $a \in \mathfrak{A}$ *in vse* $x \in \mathcal{X}$*.*

Trditev 1.5.4. *Če je* $\mathcal{X}$ *Banachov levi* $\mathfrak{A}$*-modul, potem obstaja na* $\mathcal{X}$ *takšna norma* $\|\cdot\|'$*, ki je ekvivalentna prvotni normi, da je* $\mathcal{X}$ *glede na to normo izometričen Banachov* $\mathfrak{A}$*-modul.*

Dokaz. Naj bo $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$. Ker je $\mathfrak{A}$ Banachova algebra, je tudi $\mathfrak{A}_1$ Banachova algebra: norma je definirana z $\|a \oplus \alpha\| = \|a\| + |\alpha|$. V zgledu 1.4.14 smo videli, da je $\mathcal{X}$ modul nad $\mathfrak{A}_1$ in da je $1 \cdot x = x$ za vse $x \in \mathcal{X}$, pri čemer je $1\,(= 0 \oplus 1)$ enota iz $\mathfrak{A}_1$. Ker je

$$\begin{aligned}\|(a \oplus \alpha) \cdot x\| &= \|a \cdot x + \alpha x\| \leq \|a \cdot x\| + |\alpha|\|x\| \\ &\leq (K\|a\| + |\alpha|)\|x\| \leq K(\|a\| + |\alpha|)\|x\| \\ &= K\|a \oplus \alpha\|\|x\|,\end{aligned}$$

je $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}_1$-modul.

Pri danem $x \in \mathcal{X}$ naj bo $\|x\|' := \sup\{\|a \cdot x\|;\ a \in \mathfrak{A}_1,\ \|a\| \leq 1\}$. Ni težko videti, da je $\|\cdot\|'$ norma na $\mathcal{X}$. Zaradi $\|1\| = 1$ je $\|x\| \leq \sup\{\|a \cdot x\|;\ a \in \mathfrak{A}_1,\ \|a\| \leq 1\} = \|x\|'$. Prav tako je

$$\begin{aligned}\|x\|' &= \sup\{\|a \cdot x\|;\ a \in \mathfrak{A}_1,\ \|a\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{K\|a\|\|x\|;\ a \in \mathfrak{A}_1,\ \|a\| \leq 1\} \\ &= K\|x\|.\end{aligned}$$

Torej je norma $\|\cdot\|'$ res ekvivalentna prvotni normi.

Pokažimo še, da je glede na novo normo $\mathcal{X}$ izometričen $\mathfrak{A}$-modul. Naj bosta $a \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}$ in $x \in \mathcal{X}$ poljubna. Potem je

$$\begin{aligned}\|a \cdot x\|' &= \sup\{\|b \cdot (a \cdot x)\|;\ b \in \mathfrak{A}_1,\ \|b\| \leq 1\} \\ &= \|a\| \sup\{\|b \cdot \frac{a}{\|a\|} \cdot x\|;\ b \in \mathfrak{A}_1,\ \|b\| \leq 1\} \\ &\leq \|a\| \sup\{\|c \cdot x\|;\ c \in \mathfrak{A}_1,\ \|c\| \leq 1\} \\ &= \|a\|\|x\|'.\end{aligned}$$

$\square$

Če ne bo drugače rečeno, bomo v nadaljevanju za Banachov modul vedno privzeli, da je izometričen.

Presek zaprtih podmodulov v levem Banachovem modulu je spet zaprt podmodul, zato je vsaka podmnožica $\mathcal{M}$ vsebovana v najmanjšem zaprtem podmodulu, ki ga bomo označili z $[\mathcal{M}]$. Očitno je $[\mathcal{M}] = \overline{(\mathcal{M})}$.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj zgledov Banachovih modulov.

Zgled 1.5.5. Naj bo $\mathfrak{A}$ poljubna Banachova algebra. Označimo s $\Sigma(\mathfrak{A})$ množico vseh kaeakterjev (tj. neničelnih multiplikativnih linearnih funkcionalov) na $\mathfrak{A}$ in naj bo $\Sigma_0(\mathfrak{A}) = \Sigma(\mathfrak{A}) \cup \{0\}$. Spomnimo se, da je $\Sigma(\mathfrak{A})$ podmnožica zaprte enotske krogle v $\mathfrak{A}^*$. Naj bo $\phi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$ poljuben. Iz enodimenzionalnega prostora $\mathbb{C}$ lahko napravimo Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul tako, da modulsko množenje definiramo z

$$a \cdot z = \phi(a)z, \quad (a \in \mathfrak{A},\ z \in \mathbb{C}).$$

Pogoju (LM1) je očitno zadoščeno. Zaradi linearnosti ϕ velja tudi (LM2), iz multiplikativnosti ϕ pa sledi (LM3). Upoštevajmo, da je $\|\phi\| \leq 1$, pa imamo še (NLM):

$$|a \cdot z| = |\phi(a)z| \leq \|a\||z|.$$

Ta modul bomo v nadaljevanju označili s $\mathbb{C}_\phi$.

Zgled 1.5.6. Naj bo $\mathfrak{A}$ poljubna Banachova algebra in $\mathcal{X}$ poljuben Banachov prostor. Pri poljubnem $\phi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$ lahko iz $\mathcal{X}$ napravimo Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, če postavimo

$$a \cdot x = \phi(a)x,\ a \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X}.$$

Zgled 1.5.7. Naj bo $\mathcal{X}$ poljuben Banachov prostor in $\mathfrak{A} \subseteq B(\mathcal{X})$ poljubna zaprta podalgebra. Prostor $\mathcal{X}$ je Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, če je modulsko množenje definirano z

$$(T, x) \mapsto Tx,\ T \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X},$$

pri čemer je Tx vektor, v katerega T preslika vektor x.

Zgled 1.5.8. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in dx leva Haarova mera na G. Pri vsakem številu $1 \leq p < \infty$ je $L^p(G)$ Banachov prostor vseh tistih merljivih funkcij $f:\ G \to \mathbb{C}$ (bolje rečeno prostor ekvivalenčnih razredov takih funkcij), za katere velja

$$\|f\|_p = \Big(\int_G |f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} < \infty.$$

Če je $p = \infty$, je $L^\infty(G)$ Banachov prostor tistih merljivih funkcij $f:\ G \to \mathbb{C}$, za katere velja

$$\|f\|_\infty = \text{ess-sup } f = \inf\{c \in \mathbb{R};\ |\{x \in G;\ |f(x)| > c\}| = 0\} < \infty.$$

$L^1(G)$ je Banachova algebra glede na produkt, ki je definiran s konvolucijo

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})\, dy = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy,\ f, g \in L^1(G).$$

Če je $f \in L^1(G)$ in $g \in L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, potem je $f * g \in L^p(G)$ in velja $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.

Ker je konvolucija distributivna glede na vsoto in asociativna, je vsak od prostorov $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, Banachov levi $L^1(G)$-modul.

Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra. Če je $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, je na dualnem prostoru $\mathcal{X}^*$ na naraven način definirana struktura desnega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula. Namreč, če sta $a \in \mathfrak{A}$ in $\xi \in \mathcal{X}^*$ poljubna, je z $x \mapsto \langle \xi, a \cdot x\rangle$ definiran zvezen linearen funkcional na $\mathcal{X}$. V nadaljevanju bomo ta funkcional označili s $\xi \cdot a$. Ni se težko prepričati, da je s preslikavo

$$\mathfrak{A} \times \mathcal{X}^* \to \mathcal{X}^*, \quad (a, \xi) \mapsto \xi \cdot a,$$

definirana struktura desnega $\mathfrak{A}$-modula na $\mathcal{X}^*$. Ker velja

$$|\langle \xi \cdot a, x \rangle| = |\langle \xi, a \cdot x \rangle| \leq \|\xi\| \|a\| \|x\|$$

pri vseh $x \in \mathcal{X}$, je $\mathcal{X}^*$ Banachov desni $\mathfrak{A}$-modul in velja ocena $\|\xi \cdot a\| \leq \|\xi\| \|a\|$, kar pomeni, da je $\mathcal{X}^*$ izometričen. Modulu $\mathcal{X}^*$ bomo v nadaljevanju rekli *dualni modul.* Če je $\mathcal{X}$ desni $\mathfrak{A}$-modul, ima $\mathcal{X}^*$ strukturo levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula.

Na koncu razdelka se dogovorimo še za naslednje oznake. Če je $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in sta $\mathcal{X}$ ter $\mathcal{Y}$ leva Banachova $\mathfrak{A}$-modula, potem naj bo $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ množica omejenih multiplikatorjev iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{Y}$. To je zaprt podprostorv v $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, oziroma zaprta podalgebra $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ v $B(\mathcal{X})$, če je $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. V primeru desnih Banachovih $\mathfrak{B}$-modulov, je prostor omejenih multiplikatorjev označen z $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\mathfrak{B}}$, oziroma z $B(\mathcal{X})_{\mathfrak{B}}$. Ko imamo Banachove $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodule, pa so multiplikatorji v $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\mathfrak{B}}$, oziroma v $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})_{\mathfrak{B}}$.

Krepko harmonične algebre

V izreku 1.1.4 smo za polenostavno komutativno Banachovo algebro $\mathfrak{A}$ med drugim pokazali, da je regularna natanko tedaj, ko je vsak od operatorjev množenja $T_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ ($a \in \mathfrak{A}$) dekomponibilen. Takoj se postavi vprašanje, ali je polenostavnost potrebna. V tem poglavju se bomo ukvarjali s tem in sorodnimi problemi. Pokazali bomo, da obstaja razred komutativnih Banachovih algeber z enoto, ki jih lahko karakteriziramo na podoben način, kot so karakterizirane polenostavne regularne komutativne Banachove algebre v izreku 1.1.4. Omenjene algebre, v nadaljevanju jih bomo imenovali *algebre z ločljivim spektrom*, so regularne (trditev 2.2.5), a ne nujno polenostavne. Odprto je vprašanje, ali je vsaka regularna komutativna Banachova algebra z enoto tudi algebra z ločljivim spektrom. Čeprav se v okviru polenostavnih komutativnih Banachovih algeber z enoto razreda regularnih algeber in algeber z ločljivim spektrom ujemata, je odgovor na zastavljeno vprašanje verjetno nikalen. Namreč, vsaka algebra $\mathfrak{A}$ z ločljivim spektrom ima lastnost, da vsak element a iz $\mathfrak{A}$ na vsakem levem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu inducira super-dekomponibilen operator množenja (izrek 2.4.2), kar je zelo močna zahteva.

Podobno kot v vsaki komutativni Banachovi algebri obstaja največja regularna podalgebra (izrek 1.1.6), obstaja v vsaki komutativni Banachovi algebri z enoto največja podalgebra z ločljivim spektrom (izrek 2.5.1).

2.1. Beurling-Arvesonov spekter

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra in $\theta : \mathfrak{A} \to B(\mathcal{X})$ zvezna upodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$. Obstaja več načinov, kako definirati spekter upodobitve θ (glejte [**24**] in tam navedeno literaturo). Mi se bomo odločili za definicijo, ki ovoju jedra $ker\,\theta$ (v $\Sigma(\mathfrak{A})$) pravi spekter upodobitve θ. Ta definicija sloni na Arvesonovi definiciji spektra upodobitve grupne algebre (glejte [**11**]), zato bomo tako definiran spekter upodobitve θ

imenovali *Arvesonov spekter* in ga označili $Sp\,(\theta)$. Velja torej

$$\begin{aligned}Sp\,(\theta) :=& h_{\mathfrak{A}}(ker\,\theta)\\ =&\{\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A});\ \varphi(a) = 0 \text{ za vse } a \in \mathfrak{A},\ \text{za katere je } \theta(a) = 0\}.\end{aligned}$$

Definirajmo še *lokalni Arvesonov spekter upodobitve* θ *pri vektorju* $x \in \mathcal{X}$:

$$Sp_{\,\theta}(x) := \{\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A});\ \varphi(a) = 0 \text{ za vse } a \in \mathfrak{A},\ \text{za katere je } \theta(a)x = 0\}.$$

Ti dve definiciji bo bralec našel v razdelku 4.12 v [**53**]. Tam so izpeljane in dokazane tudi nekatere lastnosti Arvesonovega spektra v primeru regularne polenostavne komutativne Banachove algebre.

Kot je dobro znano, so moduli tesno povezani z upodobitvami. Če na $\mathcal{X}$ vpeljemo modulsko strukturo s predpisom $a \cdot x := \theta(a)x$, $a \in \mathfrak{A}$, $x \in \mathcal{X}$, in po potrebi obstoječo normo zamenjamo z ekvivalentno (trditev 1.5.4), lahko nanj gledamo kot na izometričen Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Jedro upodobitve θ je seveda isto kot anihilator modula $\mathcal{X}$. Če je $\mathcal{Y}$ takšen zaprt podprostor v $\mathcal{X}$, da je invarianten za vse $\theta(a)$, $a \in \mathfrak{A}$, potem je v modulski interpretaciji podmodul v $\mathcal{X}$ in njegov anihilator je enak jedru upodobitve $\theta|_{\mathcal{Y}}$. Slednja je definirana z $\theta|_{\mathcal{Y}}(a) := \theta(a)|_{\mathcal{Y}}$, $a \in \mathfrak{A}$, in je torej upodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Y}$.

Definicija 2.1.1. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *komutativna Banachova algebra in* $\mathcal{X}$ *levi Banachov* $\mathfrak{A}$*-modul.* Beurlingov spekter *podmnožice* $\mathcal{U}$ *v* $\mathcal{X}$ *je*

$$Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U}) := h_{\mathfrak{A}}(ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})) \subseteq \Sigma(\mathfrak{A}).$$

Če je $\mathcal{U}$ singleton $\{x\}$, bomo pisali $Sp_{\mathfrak{A}}(x)$ namesto $Sp_{\mathfrak{A}}(\{x\})$. Ker lahko na vsako Banachovo algebro gledamo kot na levi modul nad samo sabo, je v primeru komutativnih Banachovih algeber smiselno govoriti o Beurlingovem spektru podmnožice elementov iz algebre. Tako je Beurlingov spekter cele algebre $\mathfrak{A}$ (z enoto ali brez) enak $\Sigma(\mathfrak{A})$. Namreč, če je element $a \in \mathfrak{A}$ v anihilatorju $ann_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$, potem mora med drugim veljati tudi $a^2 = 0$, od koder sledi, da je $\varphi(a) = 0$ za vse $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$.

Očitno v primeru, ko je $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra in je $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul preko upodobitve θ, velja

$$Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = Sp\,(\theta).$$

Prav tako v primeru, ko ima $\mathfrak{A}$ enoto, pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ velja

$$Sp_{\mathfrak{A}}(x) = Sp_{\mathfrak{A}}([x]) = Sp\,(\theta|_{[x]}) = Sp_{\,\theta}(x),$$

kjer je $[x] := \overline{\mathfrak{A} \cdot x}$, tj. najmanši zaprt podmodul v $\mathcal{X}$, ki vsebuje x.

Da bi si lahko bolje predstavljali, kaj je Beurlingov spekter, dokažimo naslednjo trditev (primerjajte jo z zgledom 4.12.2 v [**53**]). Uporabili bomo naslednjo oznako

$$\omega(a) := \{\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A});\ \varphi(a) \neq 0\}, \quad a \in \mathfrak{A}.$$

Trditev 2.1.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ polenostavna komutativna Banachova algebra z enoto. Za poljuben $a \in \mathfrak{A}$ je $ann_{\mathfrak{A}}(a) = k_{\mathfrak{A}}(\omega(a))$, kar nam da $Sp_{\mathfrak{A}}(a) = h_{\mathfrak{A}}(k_{\mathfrak{A}}(\omega(a)))$. Če je $\mathfrak{A}$ še regularna, potem je $Sp_{\mathfrak{A}}(a)$ enak nosilcu $supp\,(\widehat{a})$ Gelfandove transformiranke elementa a.*

Dokaz. Če je $b \in \mathfrak{A}$ takšen, da je $ba \neq 0$, potem zaradi polenostavnosti algebre $\mathfrak{A}$ obstaja takšen $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, da je $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \neq 0$. To pomeni, da je $\varphi \in \omega(a)$ in da $b \notin ker\,\varphi \supseteq k_{\mathfrak{A}}(\omega(a))$. S tem je dokazana inkluzija $k_{\mathfrak{A}}(\omega(a)) \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(a)$. Vzemimo zdaj, da $b \in \mathfrak{A}$ ni v $k_{\mathfrak{A}}(\omega(a))$. Potem obstaja v $\omega(a)$ obstaja takšen φ, da je $\varphi(b) \neq 0$. Ker je tudi $\varphi(a) \neq 0$, mora veljati $ab \neq 0$, kar nam da $b \notin ann_{\mathfrak{A}}(a)$. Zdaj, ko je enakost $ann_{\mathfrak{A}}(a) = k_{\mathfrak{A}}(\omega(a))$ dokazana, je jasno, da je Beurlingov spekter elementa a enak hull-kernel zaprtju množice $\omega(a)$. V primeru regularne algebre hull-kernel topologija in Gelfandova topologija sovpadata, zato je tedaj Beurlingov spekter elementa a enak nosilcu njegove Gelfandove transformiranke. $\square$

Zgled 2.1.3. Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Njen dual $\mathfrak{A}^*$ je seveda dualni Banachov $\mathfrak{A}$-modul, tj. produkt med poljubnima $a \in \mathfrak{A}$ in $\xi \in \mathfrak{A}^*$ je definiran z $\langle a \cdot \xi, x\rangle = \langle \xi, ax\rangle$, $x \in \mathfrak{A}$. Vsak multiplikativen linearen funkcional na $\mathfrak{A}$ je v $\mathfrak{A}^*$. Trdimo, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(\varphi) = \{\varphi\}$ za vse $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. Najprej pokažimo, da je $ann_{\mathfrak{A}}(\varphi) = ker\,\varphi$. Res! Če je $a \in ann_{\mathfrak{A}}(\varphi)$, potem pri vsakem $x \in \mathfrak{A}$ velja $0 = (a \cdot \varphi)(x) = \varphi(ax)$. Naj bo $x = 1$, pa dobimo $a \in ker\,\varphi$. Obrat: če je $\varphi(a) = 0$, potem pri poljubnem $x \in \mathfrak{A}$ velja $0 = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(ax) = (a \cdot \varphi)(x)$, kar nam da $a \in ann_{\mathfrak{A}}(\varphi)$. Ker je $ker\,\varphi = k_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ in je vsak singleton hull-kernel zaprta množica, velja

$$Sp_{\mathfrak{A}}(\varphi) = h_{\mathfrak{A}}(ann_{\mathfrak{A}}(\varphi)) = h_{\mathfrak{A}}(k_{\mathfrak{A}}(\varphi)) = \{\varphi\}.$$

V naslednji trditvi so naštete osnovne lastnosti Beurlingovega spektra.

Trditev 2.1.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra in naj bo $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul.*

(i) Za vsako podmnožico $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ je Beurlingov spekter $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ hull-kernel zaprta podmnožica v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Če ima $\mathfrak{A}$ enoto, je torej $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ kompaktna množica.

(ii) Če ima $\mathfrak{A}$ enoto, potem je Beurlingov spekter $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ neprazne množice $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ prazen natanko tedaj, ko je $\mathcal{U} = \{0\}$.

(iii) Za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ veljajo inkluzije

$$h_{\mathfrak{A}}(k_{\mathfrak{A}}(\omega(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(x))) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(a \cdot x) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(x).$$

(iv) $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*)$.

(v) Za poljuben končen nabor $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ *je*

$$Sp_{\mathfrak{A}}(x_1 + \ldots + x_n) \subseteq \cup_{k=1}^n Sp_{\mathfrak{A}}(x_k).$$

Dokaz. Točka (i) sledi iz definicije Beurlingovega spektra. Tudi (ii) je več ali manj očitna: spekter $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ je prazen natanko tedaj, ko anihilator $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ ni vsebovan v nobenem maksimalnem idealu. Slednje pa se v komutativni algebri z enoto lahko zgodi natanko tedaj, ko je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U}) = \mathfrak{A}$, kar je ekvivalentno enakosti $\mathcal{U} = \{0\}$.

(iii) Naj bo $\varphi \in \omega(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(x)$. Če je $b \in ann_{\mathfrak{A}}(a \cdot x)$, potem je $ab \in ann_{\mathfrak{A}}(x)$. Ker je $\varphi \in Sp_{\mathfrak{A}}(x)$ in je $\varphi(a) \neq 0$, mora veljati $\varphi(b) = 0$. Upoštevajmo še, da je Beurlingov spekter hull-kernel zaprt, pa je prva inkluzija dokazana. Da bi dokazali drugo inkluzijo, vzemimo takšen $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, ki ni v preseku $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(x)$. To pomeni, da $\varphi \notin Sp_{\mathfrak{A}}(a)$ ali $\varphi \notin Sp_{\mathfrak{A}}(x)$. Če velja prvo, potem v $ann_{\mathfrak{A}}(a)$ obstaja takšen b, za katerega je $\varphi(b) \neq 0$. Ker je b tudi v $ann_{\mathfrak{A}}(a \cdot x)$, funkcional φ ni v $Sp_{\mathfrak{A}}(a \cdot x)$. Na enak način bi sklepali v primeru, ko $\varphi \notin Sp_{\mathfrak{A}}(x)$. Tu bi še morali upoštevati komutativnost algebre $\mathfrak{A}$.

(iv) sledi iz enakosti $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*)$, ki jo zlahka preverimo.

(v) Dovolj je obravnavati primer $n = 2$. Očitno je $ann_{\mathfrak{A}}(x_1) \cap ann_{\mathfrak{A}}(x_2) \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(x_1 + x_2)$. Zdaj uporabimo enakost (6) iz trditve 7.1.2 v [**61**]. $\square$

Opomba 2.1.5. V primeru, ko ima $\mathfrak{A}$ enoto, iz točk (ii) in (iii) izhaja, da iz $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(x) = \emptyset$, sledi $a \cdot x = 0$ in, podobno, iz $Sp_{\mathfrak{A}}(a-1) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(x) = \emptyset$, sledi $a \cdot x = x$.

Še naprej naj bo $\mathcal{X}$ Banachov levi modul nad komutativno Banachovo algebro z enoto $\mathfrak{A}$. Če je $\mathcal{U}$ neprazna podmnožica v $\mathcal{X}$, potem je

$$ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U}) = ann_{\mathfrak{A}}((\mathcal{U})) = ann_{\mathfrak{A}}([\mathcal{U}]),$$

od koder sledi

$$Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U}) = Sp_{\mathfrak{A}}((\mathcal{U})) = Sp_{\mathfrak{A}}([\mathcal{U}]).$$

Definirajmo pri vsaki množici $F \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ množico

$$\mathcal{X}(F) := \{x \in \mathcal{X};\ Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subseteq F\}.$$

Iz točk (iii) in (v) trditve 2.1.4 sledi, da je $\mathcal{X}(F)$ podmodul v $\mathcal{X}$. Podobno lahko ugotovimo, da je tudi

$$\mathcal{X}_{(F)} := \{x \in \mathcal{X};\ Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap F = \emptyset\}$$

podmodul v $\mathcal{X}$. Označimo z $\mathcal{X}_F$ zaprtje podmodula $\mathcal{X}_{(F)}$ v $\mathcal{X}$.

Definicija 2.1.6. *Naj bo $\mathfrak{X}$ Banachov levi modul nad komutativno Banachovo algebro $\mathfrak{A}$, ki ima enoto, in naj bo $F \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$. Podmodul $\mathfrak{X}(F)$ je* spektralni podmodul množice *F in $\mathfrak{X}_F$ je* kospektralni podmodul množice *F.*

V primeru, ko bomo na algebro $\mathfrak{A}$ gledali kot na levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul preko leve regularne upodobitve, bomo govorili o spektralnih in kospektralnih idealih.

Na splošno je o spektralnih in kospektralnih podmodulih težko povedati kaj več kot to, da so podmoduli. V naslednjem razdelku bomo vpeljali posebno družino komutativnih Banachovih algeber z enoto, v okviru katerih pa se bodo ti podmoduli izkazali za zelo uporabne.

2.2. Algebre z ločljivim spektrom

Naslanjajoč se na Telemanove ideje [**66, 67**] je Koh [**48**] vpeljal krepko harmonične algebre.

Definicija 2.2.1. *Algebra $\mathfrak{A}$ je* krepko harmonična*, če za poljuben par različnih maksimalnih modularnih idealov $\mathcal{M}_1$ in $\mathcal{M}_2$ v $\mathfrak{A}$, obstajata takšna ideala $\mathcal{I}_1$ in $\mathcal{I}_2$ v $\mathfrak{A}$, da $\mathcal{I}_1 \not\subset \mathcal{M}_1$, $\mathcal{I}_2 \not\subset \mathcal{M}_2$ in je $\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = \{0\}$.*

V [**12, 13**] se je Baskakov ukvarjal s kompleksnimi komutativnimi krepko harmoničnimi Banachovimi algebrami in jih imenoval *algebre z ločljivim spektrom*. Torej: $\mathfrak{A}$ je algebra z ločljivim spektrom (včasih bomo rekli, da $\mathfrak{A}$ ima ločljiv spekter), če je krepko harmonična kompleksna komutativna Banachova algebra.

Nas bodo v nadaljevanju zanimale le krepko harmonične algebre z enoto.

Ker v primeru komutativne kompleksne Banachove algebre z enoto obstaja bijektivna korespondenca med maksimalnimi ideali in karakterji, je jasno, da lahko algebre z ločljivim spektrom definiramo na naslednji način.

Definicija 2.2.2. *Komutativna Banachova algebra z enoto je* algebra z ločljivim spektrom*, če za poljubna karakterja φ in ψ iz $\Sigma(\mathfrak{A})$ obstajata takšna elementa a in b v $\mathfrak{A}$, da je $ab = 0$ in $\varphi(a) \neq 0 \neq \psi(b)$.*

Zgled 2.2.3. Naj bo $\mathfrak{A}$ polenostavna in regularna komutativna Banachova algebra z enoto, potem je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Namreč, najprej iz dejstva, da je $\Sigma(\mathfrak{A})$ Hausdorffov prostor, sledi, da za poljubna različna karakterja φ in ψ iz $\Sigma(\mathfrak{A})$ obstajata disjunktni odprti okolici U in V, prva točke φ in druga točke ψ. Zaradi regularnosti $\mathfrak{A}$ pa lahko po [**50**], izrek 7.3.2, najdemo takšna elementa a in b v $\mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\varphi) = 1$, $supp\,\widehat{a} \subset U$, $\widehat{b}(\psi) = 1$ in $supp\,\widehat{b} \subset V$. Velja torej $\widehat{a}(\varphi)\widehat{b}(\psi) = 1$ in $\widehat{a}\widehat{b} = 0$. Ker pa je $\mathfrak{A}$ polenostavna, je $ab = 0$.

Topološki prostor X je *0-dimenzionalen*, če je družina vseh podmnožic, ki so odprte in zaprte, baza topologije. Če je recimo X lokalno kompakten, Hausdorffov in popolnoma nepovezan, potem je X 0-dimenzionalen (izrek 3.5 v [**41**]). Se pravi, če je spekter $\Sigma(\mathfrak{A})$ komutativne Banachove algebre $\mathfrak{A}$ popolnoma nepovezan, potem je 0-dimenzionalen.

Zgled 2.2.4. Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna regularna Banachova algebra z enoto, katere spekter $\Sigma(\mathfrak{A})$ je 0-dimenzionalen. Pokazali bomo, da je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom.

Naj bosta φ in ψ različna karakterja v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Ker je $\Sigma(\mathfrak{A})$ Hausdorffov topološki prostor, obstajata disjunktni odprti okolici U_1 in V_1 točk φ in ψ. Algebra $\mathfrak{A}$ ima enoto, zato sta množici $\overline{U}_1$ in $\overline{V}_1$ kompaktni. Ker je $\Sigma(\mathfrak{A})$ 0-dimenzionalen, obstajata odprti okolici U in V točk φ in ψ, ki sta vsebovani v U_1, oziroma v V_1, in sta hkrati tudi zaprti, torej tudi kompaktni. Unija $U \cup V$ je odprta in zaprta množica, zato je takšen tudi njen komplement $F = \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus (U \cup V)$. Naj bo $\mathcal{I} = k_{\mathfrak{A}}(F)$. Potem je $\Sigma(\mathcal{I}) = \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus h_{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}) = U \cup V$ ([**50**], izrek 7.3.1). Se pravi, da lahko spekter $\Sigma(\mathcal{I})$ zapišemo kot disjunktno unijo dveh nepraznih kompaktnih množic. Po izreku Šilova o idempotentih (glejte, recimo, korolar 3.5.13 v [**61**] ali izrek 3.6.3 v [**63**]) obstaja v $\mathcal{I}$ takšen idempotent e, da je $\widehat{e}(\tau) = 1$ za $\tau \in U$ in $\widehat{e}(\tau) = 0$ za $\tau \in V$. Podobno obstaja v $\mathcal{I}$ takšen idempotent f, da je $\widehat{f}(\tau) = 0$ za $\tau \in U$ in $\widehat{f}(\tau) = 1$ za $\tau \in V$. Očitno za $a := e$ in $b := f - ef$ velja $ab = 0$ ter $\widehat{a}(\varphi) = \widehat{e}(\varphi) = 1$ in $\widehat{b}(\psi) = \widehat{f}(\psi) - \widehat{e}(\psi)\widehat{f}(\psi) = 1$.

V obeh navedenih zgledih smo zahtevali, da je algebra regularna. Predpostavka je bila potrebna, saj neregularnih algeber z ločljivim spektrom sploh ni — še več, vsaka krepko harmonična algebra je regularna (glejte trditev 7.4.2 v [**61**]). Dokaz te trditve za algebre z ločljivim spektrom je zelo enostaven.

Trditev 2.2.5. *Vsaka algebra z ločljivim spektrom je regularna.*

DOKAZ. Po definiciji je komutativna Banachova algebra $\mathfrak{A}$ regularna, če je hull-kernel topologija na $\Sigma(\mathfrak{A})$ Hausdorffova.

Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in φ ter ψ različna funkcionala iz $\Sigma(\mathfrak{A})$. Potem obstajata takšna a in b v $\mathfrak{A}$, da je $ab = 0$ in $\varphi(a) \neq 0 \neq \psi(b)$. Od tod sledi, da sta $\omega(a)$ in $\omega(b)$ disjunktni množici, prva vsebuje φ in druga ψ. Ker sta ti dve množici komplementa ovojev $h_{\mathfrak{A}}(a)$, oziroma $h_{\mathfrak{A}}(b)$, sta hull-kernel odprti. $\square$

Naslednja trditev je povzeta po [**12**].

Trditev 2.2.6. *(i) Če je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in je $\mathcal{I}$ zaprt ideal v $\mathfrak{A}$, potem je tudi $\mathfrak{A}/\mathcal{I}$ algebra z ločljivim spektrom.*

(ii) Naj bosta $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ algebri z ločljivima spektroma. Potem sta tudi $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{B}$ algebri z ločljivima spektroma.

(iii) Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in naj bo $\mathfrak{B}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Če je $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tak homomorfizem algeber, ki enoto preslika v enoto, da je slika $\Phi(\mathfrak{A})$ gosta v $\mathfrak{B}$, potem je tudi $\mathfrak{B}$ algebra z ločljivim spektrom.

Dokaz. Če izenačimo $\Sigma(\mathfrak{A}/\mathcal{I})$ s podmnožico $h_{\mathfrak{A}}(\mathcal{I})$ v $\Sigma(\mathfrak{A})$ ([**50**], izrek 7.3.1), spektra $\Sigma(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})$ in $\Sigma(\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{B})$ pa izenačimo z množicama $\{(\varphi,0);\ \varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})\} \cup \{(0,\psi);\ \psi \in \Sigma(\mathfrak{B})\}$, oziroma $\Sigma(\mathfrak{A}) \times \Sigma(\mathfrak{B})$ (prvo zlahka preverimo, drugo pa je [**14**], §43 trditev 19), potem (i) in (ii) sledita iz same definicije algeber z ločljivim spektom.

(iii) Adjungirana preslikava $\Phi' :\ \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}'$ preslika vsak karakter na $\mathfrak{B}$ v karakter na $\mathfrak{A}$, o tem se ni težko prepričati. Ker je slika homomorfizma Φ gosta v $\mathfrak{B}$, sta $\Phi'\varphi$ in $\Phi'\psi$ različna karakterja na $\mathfrak{A}$, če sta φ in ψ različna karakterja na $\mathfrak{B}$. Ker je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, obstajata takšna a in b v $\mathfrak{A}$, da velja $ab = 0$ in $\widehat{a}(\Phi'\varphi) \neq 0$ in $\widehat{b}(\Phi'\psi) \neq 0$. Zdaj zlahka preverimo, da za $\Phi(a)$ in $\Phi(b)$ iz $\mathfrak{B}$ velja $\Phi(a)\Phi(b) = 0$ in $(\Phi(a))\widehat{\ }(\varphi) \neq 0$ ter $(\Phi(b))\widehat{\ }(\psi) \neq 0$. □

Posledica 2.2.7. *Naj bosta $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ poljubni algebri z ločljivima spektroma. Če je $\|\cdot\|_\alpha$ takšna križna norma na algebraičnem tenzorskem produktu $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, da je napolnitev $\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B}$ tega produkta glede na normo $\|\cdot\|_\alpha$ Banachova algebra, potem je $\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B}$ algebra z ločljivim spektrom.*

Dokaz. Preslikava Φ, ki tenzorju $\sum_{i\in\mathbb{I}} a_i \otimes b_i \in \mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{B}$ priredi ta tenzor v $\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B}$, je homomorfizem algeber, njegova slika je gosta in enoto preslika v enoto. Uporabimo točki (ii) in (iii) trditve 2.2.6. □

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Če za vsako podmnožico $F \subset \Sigma(\mathfrak{A})$, ki je zaprta v Gelfandovi topologiji, in vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus F$ obstaja takšen element $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap F = \emptyset$, potem je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Namreč, naj bosta φ in ψ poljubna različna karakterja iz $\Sigma(\mathfrak{A})$. Ker je množica $\Sigma(\mathfrak{A})$, opremljena z Gelfandovo topologijo, kompakten Hausdorffov topološki prostor, obstajata takšni odprti okolici U in V, prva točke φ in druga točke ψ, da sta $\overline{U}$ in $\overline{V}$ disjunktni. Po predpostavki obstajata takšna a in b v $\mathfrak{A}$, da velja $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$, $\widehat{b}(\psi) \neq 0$, $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap U^c = \emptyset$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(b) \cap V^c = \emptyset$. Se pravi, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(b) = \emptyset$, od koder, po trditvi 2.1.4, sledi $ab = 0$. Naslednja lema trdi, da velja tudi obrat.

Lema 2.2.8. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Potem za poljubno zaprto podmnožico $F \subset \Sigma(\mathfrak{A})$ in vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus F$ obstaja takšen element $a \in \mathfrak{A}$, da velja $\widehat{a}(\varphi) = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap F = \emptyset$.*

Dokaz. Ker je $\mathfrak{A}$ regularna, Gelfandova topologija in hull-kernel topologija sovpadata. Naj bo $F \subset \Sigma(\mathfrak{A})$ zaprta in naj bo $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus F$. Pri vsakem $\psi \in F$ obstajata takšna a_ψ and b_ψ v $\mathfrak{A}$, da je $a_\psi b_\psi = 0$ in $\widehat{a}_\psi(\varphi)\widehat{b}_\psi(\psi) \neq 0$, saj ima $\mathfrak{A}$ ločljiv spekter. Po trditvi 2.1.4 od tod sledi, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(a_\psi) \cap \omega(b_\psi) = \emptyset$. Družina $\{\omega(b_\psi);\ \psi \in F\}$ je odprto pokritje F. Zaradi kompaktnosti F obstajajo takšni $\psi_1, \dots, \psi_n$ v F, da je $F \subset \omega(b_{\psi_1}) \cup \dots \cup \omega(b_{\psi_n}) =: U$. Označimo $a' := a_{\psi_1} \dots a_{\psi_n}$. Beurlingov spekter $Sp_{\mathfrak{A}}(a')$ je vsebovan v $Sp_{\mathfrak{A}}(a_{\psi_1}) \cap \dots \cap Sp_{\mathfrak{A}}(a_{\psi_n})$, kar pomeni, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(a') \cap U = \emptyset$. Število $\widehat{a'}(\varphi) = \widehat{a}_{\psi_1}(\varphi) \dots \widehat{a}_{\psi_n}(\varphi)$ je od nič različno, torej za $a = \widehat{a'}(\varphi)^{-1} a'$ velja $\widehat{a}(\varphi) = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap U = \emptyset$. □

Pravkar dokazana lema nam omogoča, da poiščemo ovoje spektralnih in kospektralnih idealov v algebri z ločljivim spektrom.

Trditev 2.2.9. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in naj bo $F \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ neprazna množica. Potem je*

$$h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(F)) = \overline{F^c} \quad \text{in} \quad h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_F) = \overline{F}.$$

Če je F zaprta množica, je $\mathfrak{A}(F)$ zaprt ideal v $\mathfrak{A}$.

Dokaz. Poglejmo ideal $\mathfrak{A}(F)$. Če je φ v F^c, potem očitno za vsak $a \in \mathfrak{A}(F)$ velja $\widehat{a}(\varphi) = 0$. Torej je $F^c \subset h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(F))$ in zaradi zaprtosti ovoja je tudi $\overline{F^c} \subset h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(F))$. Če je $\overline{F^c} = \Sigma(\mathfrak{A})$, je dokaz končan. Vzemimo torej, da to ni res: obstaja $\varphi \notin \overline{F^c}$. Po lemi 2.2.8 obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap \overline{F^c} = \emptyset$. Od tod sledi $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subseteq \overline{F^c}^c \subseteq F$, kar pomeni, da je $a \in \mathfrak{A}(F)$. Zaradi $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$ mora veljati $\varphi \notin h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(F))$.

Enakost $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_F) = \overline{F}$ se dokaže podobno.

Naj bo F zaprta množica in $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ poljubno zaporedje iz $\mathfrak{A}(F)$, ki konvergira k $c \in \mathfrak{A}$. Če je $\varphi \in F^c$, potem po lemi 2.2.8 obstaja takšen $d \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{d}(\varphi) = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(d) \subseteq F^c$. Velja torej $Sp_{\mathfrak{A}}(d) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(c_n) = \emptyset$ za vse $n \in \mathbb{N}$, kar nam da $dc_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zaradi zveznosti množenja od tod sledi $dc = 0$. Uporabimo trditev 2.1.4, pa imamo $\omega(d) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(c) = \emptyset$, oziroma $\varphi \notin Sp_{\mathfrak{A}}(c)$, kar smo hoteli videti. □

Zdaj lahko dokažemo izboljšano verzijo leme 2.2.8.

Trditev 2.2.10. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto.*

Če za vsako podmnožico $F \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$, ki je zaprta v Gelfandovi topologiji, in vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus F$ obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap F = \emptyset$, potem je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom.

Obrat: če je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, potem za poljubni disjunktni zaprti množici $E \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ in $F \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\tau) = 1$ za vse $\tau \in E$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap F = \emptyset$.

Dokaz. Prvi del trditve smo dokazali v komentarju pred lemo 2.2.8. Poglejmo obrat. Najprej pripomnimo, da je vsaka zaprta podmnožica v $\Sigma(\mathfrak{A})$ kompaktna, saj ima $\mathfrak{A}$ enoto. Naj bosta U in V disjunktni odprti množici, prva okolica množice E in druga okolica množice F. Potem je $F \subset V \subset U^c$ in $E \cap U^c = \emptyset$. Algebra $\mathcal{A}$ je regularna in po trditvi 2.2.9 (iii) velja $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_{U^c}) = U^c$. Uporabimo lahko izrek 7.3.2 iz [**50**], ki pravi, da obstaja v $\mathfrak{A}_{U^c}$ takšen a, da je $\widehat{a}(\tau) = 1$ za vse $\tau \in E$. Jasno je, da velja $\widehat{a}(\tau) = 0$ za vse $\tau \in U^c$. Pokažimo, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap F = \emptyset$. Naj bo b poljuben iz $\mathfrak{A}_{(U^c)}$. Potem je $Sp_{\mathfrak{A}}(b) \cap U^c = \emptyset$, oziroma $Sp_{\mathfrak{A}}(b) \subseteq U \subseteq V^c$. Se pravi, da je $\mathfrak{A}_{(U^c)} \subseteq \mathfrak{A}(V^c)$. Ker pa je $\mathfrak{A}(V^c)$ zaprt ideal, vsebuje tudi $\mathfrak{A}_{U^c}$. Beurlingov spekter elementa a, ki je v $\mathfrak{A}_{U^c}$, je torej podmnožica v V^c. Od tod sledi $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap F = \emptyset$. □

Naslednji izrek je eno najpomembnejših orodij v celotni teoriji algeber z ločljivim spektrom. Povzet je po [**12**], kjer pa ni dokaza.

Izrek 2.2.11 (Razčlenitev enote). *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ spektra $\Sigma(\mathfrak{A})$ obstajajo takšni elementi $a_1, \dots, a_n$ v $\mathfrak{A}$, za katere velja $a_1 + \ldots + a_n = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a_k) \subseteq U_k$ pri vseh $k = 1, \dots, n$.*

Dokaz. Vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ je v neki množici U_i iz pokritja $\mathcal{U}$. Ker je $\Sigma(\mathfrak{A})$ Hausdorffov topološki prostor, lahko pri danem φ najdemo takšno odprto okolico W_φ točke φ, da je $W_\varphi \subseteq \overline{W}_\varphi \subseteq U_i$. Tudi družina $\{W_\varphi;\ \varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})\}$ je odprto pokritje $\Sigma(\mathcal{A})$. Ker je prostor $\Sigma(\mathfrak{A})$ kompakten, lahko najdemo takšne $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ v $\Sigma(\mathfrak{A})$, da je $\Sigma(\mathfrak{A}) = W_{\varphi_1} \cup \ldots \cup W_{\varphi_m}$. Naj bo E_i unija tistih množic $\overline{W}_{\varphi_j}$, ki so vsebovane v U_i. Pri vsakem indeksu i je torej E_i kompaktna podmnožica v U_i in očitno velja $E_1 \cup \ldots \cup E_n = \Sigma(\mathfrak{A})$. Po trditvi 2.2.10 obstajajo takšni $c_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \dots, n$, da je $\widehat{c_i}(\tau) = 1$ za vse $\tau \in E_i$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(c_i) \cap U_i^c = \emptyset$. Označimo $b_1 = c_1$, $b_2 = (1 - c_1)c_2$, ..., $b_n = (1 - c_1)(1 - c_2) \ldots (1 - c_{n-1})c_n$. Potem je $Sp_{\mathfrak{A}}(b_i) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(c_i) \subseteq U_i$. Z indukcijo zlahka dokažemo, da je $b_1 + \ldots + b_k = 1 - (1 - c_1) \ldots (1 - c_k)$. Se pravi, da velja $b_1 + \ldots + b_n = 1 - (1 - c_1) \ldots (1 - c_n)$. Ker je vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ v nekem E_i, velja $\varphi((1 - c_1) \ldots (1 - c_n)) = 0$ za vse $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. To pomeni, da je $c := (1 - c_1) \ldots (1 - c_n)$ v (Gelfandovem) radikalu algebre $\mathfrak{A}$. Potem pa $1 - c$ ni v nobenem maksimalnem idealu in je torej obrnljiv v $\mathfrak{A}$ (glejte, recimo, korolar 1.1.2 v [**50**]). Postavimo $a_i = b_i(1 - c)^{-1}$ pri vseh $i = 1, \dots, n$, pa imamo $a_1 + \ldots + a_n = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a_i) \subseteq U_i$. □

Posledica 2.2.12. *Komutativna Banachova algebra z enoto je algebra z ločljivim spektrom natanko tedaj, ko v njej velja razčlenitev enote v smislu izreka 2.2.11.*

Dokaz. Da ima vsaka algebra z ločljivim spektrom razčlenitev enote, trdi sam izrek 2.2.11. Da velja obrat, vidimo tako, da za poljubni različni točki φ in ψ iz $\Sigma(\mathfrak{A})$ poiščemo disjunktni odprti okolici U in V, potem pa za odprto pokritje $\{U, V, \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus \{\varphi, \psi\}\}$ uporabimo izrek razčlenitev enote. Obstajajo torej elementi a, b in c v $\mathfrak{A}$, za katere velja

$$a + b + c = 1 \quad \text{in} \quad Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subseteq U,\ Sp_{\mathfrak{A}}(b) \subseteq V,\ Sp_{\mathfrak{A}}(c) \subseteq \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus \{\varphi, \psi\}.$$

Se pravi, da velja $widehata(\varphi) = 1$ in $\widehat{b}(\psi) = 1$ ter, zaradi disjunktnosti množic U in V, $ab = 0$. $\square$

2.3. Spektralni in kospektralni podmoduli

V tem razdelku bomo nekoliko podrobneje pogledali na spektralne in kospektralne podmodule v Banachovem modulu nad algebro, ki ima ločljiv spekter. V večini dokazov je ključnega pomena izrek o razčlenitvi enote.

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Za kospektralni podmodul $\mathcal{X}_F$, kjer je F poljubna podmnožica v $\Sigma(\mathfrak{A})$, vemo, da je zaprt podmodul, saj je to del definicije. Prav tako je v primeru algeber z ločljivim spektrom vsak spektralni ideal $\mathfrak{A}(F)$ zaprt, če je F zaprta podmnožica v $\Sigma(\mathfrak{A})$ (trditev 2.2.9). Podobna trditev velja za spektralne podmodule.

Trditev 2.3.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $F \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ zaprta, potem je $\mathcal{X}(F)$ zaprt podmodul v $\mathcal{X}$, podmodul $\mathcal{X}^*(F)$ pa je šibko-$*$ zaprt v dualnem Banachovem modulu $\mathcal{X}^*$.*

Dokaz je podoben dokazu trditve 2.2.9, zato ga bomo izpustili.

Posledica 2.3.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul in $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ poljubna množica. Če je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ takšno zaporedje, ki konvergira k $x \in \mathcal{X}$ in pri vsakem indeksu n velja $Sp_{\mathfrak{A}}(x_n) \subseteq S$, potem je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subseteq \overline{S}$. Podobno velja za posplošeno zaporedje $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{X}^*$, ki konvergira h $\xi \in \mathcal{X}^*$ v šibki-$*$ topologiji, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(\xi) \subseteq \overline{S}$, če je $Sp_{\mathfrak{A}}(\xi_i) \subseteq S$ pri vsakem indeksu $i \in \mathbb{I}$.*

Zdaj bomo pogledali, kako so povezani spektralni in kospektralni podmoduli v danem modulu in v dualnem modulu.

Če je $\mathcal{X}$ kompleksen Banachov prostor in $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ linearna mnogoterost, naj bo

$$\mathcal{Y}^{\perp} := \{\xi \in \mathcal{X}^*;\ \langle \eta, y \rangle = 0 \text{ za vse } y \in \mathcal{Y}\}.$$

Množica $\mathcal{Y}^{\perp}$ je šibko-$*$ zaprt linearen podprostor v $\mathcal{X}^*$ in če je $\mathcal{X}$ modul nad algebro $\mathfrak{A}$, množica $\mathcal{Y}$ pa invariantna za delovanje $\mathfrak{A}$, je $\mathcal{Y}^{\perp}$ podmodul v dualnem Banachovem modulu $\mathcal{X}^*$. Naj bo zdaj $\mathcal{W}$ linearna mnogoterost v dualu $\mathcal{X}^*$ Banachovega prostora $\mathcal{X}$. Potem je množica

$$\mathcal{W}_\perp := \{x \in \mathcal{X};\ \langle \xi, x\rangle = 0 \text{ za vse } \xi \in \mathcal{W}\}$$

zaprt podprostor. Če je $\mathcal{X}$ Banachov $\mathfrak{A}$-modul, množica $\mathcal{W}$ pa podmodul v dualnem modulu, je $\mathcal{W}_\perp$ podmodul v $\mathcal{X}$. Za linearno mnogoterost $\mathcal{Y}$ je $(\mathcal{Y}^\perp)_\perp$ njeno zaprtje v $\mathcal{X}$, medtem ko je $(\mathcal{W}_\perp)^\perp$ šibko-$*$ zaprtje $\mathcal{W}$ v $\mathcal{X}^*$.

Lema 2.3.3. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če za $x \in \mathcal{X}$ in $\xi \in \mathcal{X}^*$ velja $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\xi) = \emptyset$, potem je $\xi \in \mathcal{X}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))^\perp$.*

Dokaz. Naj bo $y \in \mathcal{X}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))$ poljuben vektor. Potem tudi zanj velja $Sp_{\mathfrak{A}}(y) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\xi) = \emptyset$. Označimo $U = Sp_{\mathfrak{A}}(\xi)^c$ in $V = Sp_{\mathfrak{A}}(y)^c$. Očitno sta U in V odprti množici, ki pokrijeta $\Sigma(\mathfrak{A})$. Po izreku o razčlenitvi enote obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subset U$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(1-a) \subset V$. Potem pa je $a \cdot y = y$ in $a \cdot \xi = 0$. Se pravi, da je

$$\langle \xi, y\rangle = \langle \xi, a \cdot y\rangle = \langle a \cdot \xi, y\rangle = 0.$$

□

Obrat leme 2.3.3 ne velja. Vzemimo namreč, da je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, ki ni polenostavna, in $r \neq 0$ element iz radikala. Potem je po trditvi 2.1.4 $Sp_{\mathfrak{A}}(r)$ neprazna množica. Vzemimo, da je $\varphi \in Sp_{\mathfrak{A}}(r)$. Ker je $Sp_{\mathfrak{A}}(\varphi) = \{\varphi\}$ (glejte zgled 2.1.3), je $Sp_{\mathfrak{A}}(r) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\varphi) = \{\varphi\}$. Velja pa $\varphi(r) = 0$, saj je r v radikalu.

Obrat leme ne velja niti v primeru, če je algebra polenostavna. Poglejmo primer algebre zveznih funkcij na enotskem disku $\mathbb{D}$. Če je $f \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$ takšna funkcija, da $\omega(f) \neq \mathbb{D}$, potem obstaja v *supp* (f) (nosilec je enak Beurlingovemu spektru) vsaj ena takšna točka $\tau \in \mathbb{D}$, da je $\langle \tau, f\rangle = f(\tau) = 0$.

Izrek 2.3.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Za poljubno zaprto množico $F \subset \Sigma(\mathfrak{A})$ velja*

(i) $\mathcal{X}_F^\perp = \mathcal{X}^*(F)$ in $\mathcal{X}_F = \mathcal{X}^*(F)_\perp$ ter

(ii) $\mathcal{X}_F^* \subseteq \mathcal{X}(F)^\perp$ in $\mathcal{X}(F) \subseteq (\mathcal{X}_F^*)_\perp$.

Če je podmodul $\mathcal{X}_F^*$ šibko-$*$ zaprt, potem je $\mathcal{X}_F^* = \mathcal{X}(F)^\perp$ in $\mathcal{X}(F) = (\mathcal{X}_F^*)_\perp$.

Dokaz. (i) Naj bo vektor $x \in \mathcal{X}$ takšen, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap F = \emptyset$, tj. $x \in \mathcal{X}_{(F)}$. Če je $\xi \in \mathcal{X}^*(F)$, je torej $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\xi) = \emptyset$. Od tod po lemi 2.3.3 sledi $\langle \xi, x\rangle = 0$. Se pravi, da vsak $\xi \in \mathcal{X}^*(F)$ uniči $\mathcal{X}_{(F)}$ in torej tudi zaprtje tega prostora, tj. $\mathcal{X}_F$. Dokazali smo inkluzijo $\mathcal{X}^*(F) \subseteq \mathcal{X}_F^\perp$.

Obratno inkluzijo bomo dokazali s protislovjem. Vzemimo, da obstaja tak $\xi \notin \mathcal{X}^*(F)$, ki je v $\mathcal{X}_F^\perp$. Iz $\xi \notin \mathcal{X}^*(F)$ lahko sklepamo, da v $Sp_{\mathfrak{A}}(\xi)$ obstaja takšen φ, ki ni v F. Označimo $U = F^c$ in $V = \{\varphi\}^c$. Odprti množici U in V sta odprto pokritje spektra $\Sigma(\mathfrak{A})$, zato po izreku o razčlenitvi enote obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da velja $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subset U$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(1-a) \subset V$. Od tod sledi $\widehat{a}(\varphi) = 1$, oziroma $\varphi \in \omega(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\xi)$. To pomeni, da spekter $Sp_{\mathfrak{A}}(a \cdot \xi)$ ni prazna množica, oziroma z drugimi besedami, $\eta = a \cdot \xi$ je netrivialen funkcional. Iz $Sp_{\mathfrak{A}}(\eta) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\xi)$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap F = \emptyset$ sledi $Sp_{\mathfrak{A}}(\eta) \cap F = \emptyset$. Ker je funkcional ξ v podmodulu $\mathcal{X}_F^{\perp}$, je v njem tudi funkcional η.

Naj bo $x \in \mathcal{X}$ poljuben vektor. Zaradi $Sp_{\mathfrak{A}}(\eta) \cap F = \emptyset$ obstaja takšen $b \in \mathfrak{A}$, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(b) \subseteq F^c$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(1-b) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\eta)^c$. Zdaj imamo

$$\langle \eta, x \rangle = \langle \eta, b \cdot x + (1-b) \cdot x \rangle = \langle \eta, b \cdot x \rangle,$$

saj po lemi 2.3.3 iz $Sp_{\mathfrak{A}}(1-b) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\eta) = \emptyset$ sledi $\langle \eta, (1-b) \cdot x \rangle = 0$. Iz $Sp_{\mathfrak{A}}(b \cdot x) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(b)$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(b) \cap F = \emptyset$ izhaja $b \cdot x \in \mathcal{X}_F$, zato je $\langle \eta, b \cdot x \rangle = 0$. Ugotovili smo, da je $\langle \eta, x \rangle = 0$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$. Protislovje, saj je $\eta \neq 0$.

Enakost $\mathcal{X}_F = \mathcal{X}^*(F)_{\perp}$ sledi iz pravkar dokazane enakosti $\mathcal{X}_F^{\perp} = \mathcal{X}^*(F)$.

(ii) Naj bo $\xi \in \mathcal{X}_F^*$ takšen funkcional, za katerega velja $Sp_{\mathfrak{A}}(\xi) \cap F = \emptyset$. Če je $x \in \mathcal{X}(F)$, je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subset F$, kar pomeni, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\xi) = \emptyset$. Po lemi 2.3.3 od tod sledi $\langle \xi, x \rangle = 0$. Ugotovili smo torej, da velja $\{\xi \in \mathcal{X}^*;\ Sp_{\mathfrak{A}}(\xi) \cap F = \emptyset\} \subseteq \mathcal{X}(F)^{\perp}$, kar nam da inkluzijo $\mathcal{X}_F^* \subseteq \mathcal{X}(F)^{\perp}$.

Predpostavimo, da je podmodul $\mathcal{X}_F^*$ šibko-$*$ zaprt v $\mathcal{X}^*$. Potem je $\mathcal{X}_F^* = ((\mathcal{X}_F^*)_{\perp})^{\perp}$. Dovolj je torej pokazati, da velja inkluzija $(\mathcal{X}_F^*)_{\perp} \subseteq (\mathcal{X}(F)^{\perp})_{\perp} = \mathcal{X}(F)$, saj iz nje sledi željena inkluzija $\mathcal{X}(F)^{\perp} \subseteq ((\mathcal{X}_F^*)_{\perp})^{\perp} = \mathcal{X}_F^*$.

Vzemimo, da vektor $x \in \mathcal{X}$ ni v $\mathcal{X}(F)$. To pomeni, da v $Sp_{\mathfrak{A}}(x)$ obstaja takšen φ, ki ni v F. Naj bo $a \in \mathfrak{A}$ takšen element, za katerega velja $\widehat{a}(\varphi) = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subset F^c$. Potem je $y = a \cdot x$ od nič različen vektor, ki ima φ v spektru in torej ni v $\mathcal{X}(F)$. Po Hahn-Banachovem izreku obstaja takšen funkcional $\eta \in \mathcal{X}^*$, da je $\langle \eta, y \rangle = 1$. Naj bo $\xi = a \cdot \eta$. Zaradi disjunktnosti množic $Sp_{\mathfrak{A}}(a)$ in F, je z F disjunkten tudi spekter $Sp_{\mathfrak{A}}(\xi)$. To pomeni, da je $\xi \in \mathcal{X}_F^*$. Velja pa $\langle \xi, x \rangle = \langle a \cdot \eta, x \rangle = \langle \eta, y \rangle = 1$, zato $x \notin (\mathcal{X}_F^*)_{\perp}$.

Inkluzija $\mathcal{X}(F) \subseteq (\mathcal{X}_F^*)_{\perp}$ in enakost $\mathcal{X}(F) = (\mathcal{X}_F^*)_{\perp}$ sta trivialni posledici. $\square$

Pri iskanju Beurlingovega spektra nam je v veliko pomoč naslednja trditev — primerjajte jo s trditvijo 4.12.5 v [**53**].

Trditev 2.3.5. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Za poljubno neprazno podmnožico $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ velja*

$$Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M}) = \overline{\cup_{x \in \mathcal{M}} Sp_{\mathfrak{A}}(x)}.$$

Dokaz. Če sta $\mathcal{N}_1$ in $\mathcal{N}_2$ takšni podmnožici v $\mathcal{X}$, da je $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$, potem je $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{N}_1) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{N}_2)$. Od tod sledi, da je $\cup_{x \in \mathcal{M}} Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$. Ker pa je spekter zaprta množica, velja tudi $\overline{\cup_{x \in \mathcal{M}} Sp_{\mathfrak{A}}(x)} \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$.

Da bi videli veljavnost obratne inkluzije, vzemimo, da $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ ni v $\overline{\cup_{x\in\mathcal{M}} Sp_{\mathfrak{A}}(x)}$. Po lemi 2.2.8 obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\varphi) = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap \overline{\cup_{x\in\mathcal{M}} Sp_{\mathfrak{A}}(x)} = \emptyset$. Od tod sledi $a \cdot x = 0$ za vse $x \in \mathcal{M}$, oziroma $a \in ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$. Zaradi $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$, funkcional φ ni v $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{M})$. □

Posledica 2.3.6. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul in $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ podmodul. Če je $\varphi \in Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{Y})$ in je U poljubna odprta okolica te točke, potem obstaja takšen neničelni vektor $x \in \mathcal{Y}$, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subset U$.*

Dokaz. Ker je $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{Y}) = \overline{\cup_{x\in\mathcal{Y}} Sp_{\mathfrak{A}}(x)}$, obstaja v $\mathcal{Y}$ takšen y, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(y) \cap U \neq \emptyset$. Naj bo $\psi \in Sp_{\mathfrak{A}}(y) \cap U$. Po lemi 2.2.8 lahko najdemo takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\psi) = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subset U$. Zaradi $\psi \in \omega(a) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(y)$ je $x = a \cdot y$ od 0 različen vektor iz podmodula $\mathcal{Y}$, za katerega velja $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subset Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subset U$. □

Ker inkluzija v drugi točki izreka 2.3.4 ni vedno enakost, je težko povedati, kaj je Beurlingov spekter spektralnega podmodula. Beurlingov spekter kospektralnega podmodula pa znamo določiti.

Izrek 2.3.7. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Za poljubno zaprto množico $F \subset \Sigma(\mathfrak{A})$ je*

(i) $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F) = \overline{Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F}$

in

(ii) $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \cap \overline{F^o} \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}(F)) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \cap F$. Če je množica F enaka zaprtju svoje notranjosti, potem velja

$$Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}(F)) = Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \cap F.$$

Dokaz. (i) Naj bo $\varphi \in Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F$ poljubna točka in U njena odprta okolica. (Če je $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F$ prazna množica, potem inkluzija $\overline{Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F} \subset Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$ očitno velja.) Naj bo $V = U \setminus F$. Tudi to je odprta okolica φ. Se pravi, da obstaja neničelni vektor $x \in \mathcal{X}$, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subset V \subset U$ (posledica 2.3.6). Od tod sledi, da je $x \in \mathcal{X}_F$. Ugotovili smo, da so v vsaki odprti okolici U točke φ točke iz $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$ (saj je $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F) = \overline{\cup_{x\in\mathcal{X}_F} Sp_{\mathfrak{A}}(x)}$). Spekter $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$ je zaprta množica, zato je $\varphi \in Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$. S tem smo pokazali, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F \subset Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$, oz. $\overline{Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F} \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$.

Če točka φ ni v $\overline{Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F}$, potem lahko najdemo takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\varphi) = 1$ in je $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap \overline{Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus F} = \emptyset$, od koder sledi $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \subset F \cup Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})^c$. Naj bo $x \in \mathcal{X}$ takšen vektor, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap F = \emptyset$. Potem je

$$Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap [F \cup Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})^c] = [Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap F] \cup [Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})^c] = \emptyset,$$

kar nam da $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(a) = \emptyset$. Torej je $a \cdot x = 0$. Tako smo pokazali, da je $a \in ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_{(F)})$. Toda potem je a tudi v $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$. Ker je $\varphi(a) \neq 0$, karakter φ ni v $Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}_F)$.

(ii) Ker je $\mathcal{X}(F) = \mathcal{X}(Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \cap F)$, nič ne izgubimo, če predpostavimo, da je $F \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Uporabimo trditev 2.3.5, pa je jasno, da velja inkluzija

$$Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}(F)) \subseteq F = Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \cap F.$$

Zaradi predpostavke $F \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, je tudi $\overline{F^o} \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Naj bo $\varphi \in F^o$ in U poljubna odprta okolica φ. Potem je tudi $V := U \cap F^o$ odprta okolica φ. Po posledici 2.3.6 obstaja takšen neničelni vektor x, da je $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subseteq V$. Vektor x je torej v $\mathcal{X}(F^o)$. Ker je x od nič različen je v njegovem spektru vsaj ena točka. To pomeni, da je v vsaki odprti okolici točke φ vsaj ena točka iz unije $\cup_{x \in \mathcal{X}(F^o)} Sp_{\mathfrak{A}}(x)$. Od tod sledi, da je φ v zaprtju te unije, tj. $\varphi \in \overline{\cup_{x \in \mathcal{X}(F^o)} Sp_{\mathfrak{A}}(x)}$. Ker je bil φ poljuben karakter iz F^o in ker je $\overline{\cup_{x \in \mathcal{X}(F^o)} Sp_{\mathfrak{A}}(x)}$ zaprta množica, imamo

$$\overline{F^o} \subseteq \overline{\cup_{x \in \mathcal{X}(F^o)} Sp_{\mathfrak{A}}(x)}.$$

Upoštevajmo, da je

$$\overline{\cup_{x \in \mathcal{X}(F^o)} Sp_{\mathfrak{A}}(x)} \subseteq \overline{\cup_{x \in \mathcal{X}(F)} Sp_{\mathfrak{A}}(x)} = Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}(F)),$$

pa smo dokazali tudi inkluzijo

$$\overline{F^o} \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}(F)).$$

Zdaj, ko vemo, da velja

$$\overline{F^o} \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}(F)) \subseteq F,$$

je jasno, da imamo povsod enačaje, če je $\overline{F^o} = F$. □

Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, Ω topološki prostor in $f: \Sigma(\mathfrak{A}) \to \Omega$ poljubna zvezna preslikava. Definirajmo preslikavo E_f, ki slika iz družine zaprtih podmnožic v Ω v družino zaprtih podprostorov v $\mathcal{X}$, tj. iz $cl\,(\Omega)$ v $\mathcal{S}(\mathcal{X})$, s predpisom

$$\mathsf{E}_f(F) := \mathcal{X}(f^{-1}(F)) \quad (F \in cl\,(\Omega)).$$

Trditev 2.3.8. *Preslikava* E_f *je spektralna kapaciteta tipa* $(\Omega, \mathcal{X})$.

Dokaz. Očitno velja $\mathsf{E}_f(\emptyset) = 0$ in $\mathsf{E}_f(\Sigma(\mathfrak{A})) = \mathcal{X}$. Naj bo $\{F_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ poljubna družina množic v $cl\,(\Omega)$. Potem je $\{f^{-1}(F_i)\}_{i \in \mathbb{I}}$ družina zaprtih podmnožic v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Brez težav lahko preverimo, da je

$$\mathcal{X}(f^{-1}(\cap_{i \in \mathbb{I}} F_i)) = \mathcal{X}(\cap_{i \in \mathbb{I}} f^{-1}(F_i)) = \cap_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{X}(f^{-1}(F_i)),$$

zato velja $\mathsf{E}_f(\cap_{i \in \mathbb{I}} F_i) = \cap_{i \in \mathbb{I}} \mathsf{E}_f(F_i)$.

Vzemimo poljubno odprto pokritje $\{G_1, \ldots, G_n\}$ prostora Ω. Potem je $\{U_k : f^{-1}(G_k);\ k = 1, \ldots, n\}$ odprto pokritje prostora $\Sigma(\mathfrak{A})$. Po izreku o razčlenitvi enote obstajajo v $\mathfrak{A}$ takšni $a_1, \ldots, a_n$, za katere velja $a_1 + \ldots + a_n = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(a_k) \subseteq U_k$ pri vseh $k = 1, \ldots, n$. Poljuben $x \in \mathcal{X}$ lahko zapišemo kot $x = a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x$, od koder sledi, da je $x \in \mathfrak{X}(U_1) + \ldots + \mathfrak{X}(U_n)$, saj velja $Sp_{\mathfrak{A}}(a_k \cdot x) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(a_k) \subseteq U_k$ pri vseh $k = 1, \ldots, n$. Ker je

$$\mathfrak{X}(U_k) \subseteq \mathfrak{X}(\overline{U}_k) \subseteq \mathfrak{X}(f^{-1}(\overline{G}_k)) = \mathsf{E}_f(\overline{G}_k),$$

smo dokazali, da je $\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{E}_f(\overline{G}_1) + \ldots + \mathsf{E}_f(\overline{G}_n)$. Obratna inkluzija je seveda trivialna. □

2.4. Karakterizacija algeber z ločljivim spektrom

V tem razdelku bomo karakterizirali algebre z ločljivim spektrom s pomočjo lokalne spektralne teorije. Baskakov (glejte izrek 2 v [**12**] oz. [**13**]) je pokazal, da je komutativna Banachova algebra z enoto $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom natanko tedaj, ko obstaja v $\mathfrak{A}$ takšna podmnožica $\mathfrak{A}_0$, da velja:

(i) Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{A}_0$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{A})$ in

(ii) za vsak $a \in \mathfrak{A}_0$ je operator množenja $L_a : \ b \mapsto ab$, ki slika iz $\mathfrak{A}$ vase, dekomponibilen.

Mi bomo ta izrek dokazali po svoje. Še več, naši rezultati bodo močnejši, saj bomo pri šibkejših pogojih dokazali več. Začnimo z naslednjim izrekom, ki posplošuje rezultat Baskakova v eno smer.

Izrek 2.4.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in naj bo $\mathfrak{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Potem je za vsak $a \in \mathfrak{A}$ operator množenja $T_a : \ \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $x \mapsto a \cdot x$, dekomponibilen in njegova spektralna kapaciteta je dana z*

$$\mathsf{E}_a(F) := \mathfrak{X}(\widehat{a}^{-1}(F)), \quad F \in cl\,(\mathbb{C}).$$

Dokaz. Naj bo $a \in \mathfrak{A}$. Ker je Gelfandova transformiranka $\widehat{a}$ zvezna funkcija iz $\Sigma(\mathfrak{A})$ v $\mathbb{C}$, je praslika $\widehat{a}^{-1}(F)$ zaprte množice $F \subseteq \mathbb{C}$ zaprta. Po trditvi 2.3.1 je $\mathfrak{X}(\widehat{a}^{-1}(F))$ zaprt podmodul v $\mathfrak{X}$. Se pravi, da je E_a preslikava, ki slika iz $cl\,(\mathbb{C})$ v $Lat\,(T_a)$.

Trditev 2.3.8 nam zagotavlja, da je E_a spektralna kapaciteta tipa $(\mathbb{C}, \mathfrak{X})$. Pokazati moramo, da je spektralna kapaciteta za T_a. Ker E_a slika v $Lat\,(T_a)$, je pogoju (a) iz definicije 1.3.2 zadoščeno. Edino, kar še moramo videti je, da velja $\sigma(T_a|\mathsf{E}_a(F)) \subseteq F$ za vsako zaprto podmnožico F v $\mathbb{C}$.

Naj bo F zaprta podmnožica v $\mathbb{C}$. Označimo $\mathcal{F} = \widehat{a}^{-1}(F)$. Za poljubno točko λ v F^c obstaja takšna odprta okolica U množice F, da $\lambda \notin \overline{U}$. Naj bo $\mathcal{U} := \widehat{a}^{-1}(U)$. Potem seveda velja $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \widehat{a}^{-1}(\overline{U})$. Označimo še $H := U^c$ in $\mathcal{H} = \widehat{a}^{-1}(H)$. To sta zaprti množici in očitno velja $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Ker je $\mathcal{H}^c = \widehat{a}^{-1}(H^c)$ in $H^c = U$, imamo $\overline{\mathcal{H}^c} \subseteq \widehat{a}^{-1}(\overline{U})$. Za spekter kvocientne algebre $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ po izreku 7.3.1 v [**50**] velja, da je homeomorfen ovoju $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(\mathcal{H}))$. Po trditvi 2.2.9 pa je $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(\mathcal{H})) = \overline{\mathcal{H}^c}$. Se pravi, da je $\Sigma(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}(\mathcal{H})) \subseteq \widehat{a}^{-1}(\overline{U})$. Poglejmo element $a - \lambda + \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ iz $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}(\mathcal{H})$. Za vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}(\mathcal{H}))$ je $\varphi(a - \lambda + \mathfrak{A}(\mathcal{H})) = \widehat{a}(\varphi) - \lambda$. Ker λ ni v $\overline{U}$, je $\widehat{a}(\varphi) \neq \lambda$. Torej število 0 ni v spektru $\sigma(a - \lambda + \mathfrak{A}(\mathcal{H}))$, kar pomeni, da ima $a - \lambda + \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ inverz v $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}(\mathcal{H})$.

Obstaja torej takšen $b \in \mathfrak{A}$, da velja $(b + \mathfrak{A}(\mathcal{H}))(a - \lambda + \mathfrak{A}(\mathcal{H})) = 1 + \mathfrak{A}(\mathcal{H})$. Vzemimo tak d iz $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, da je $b(a-\lambda) = 1 + d$. Pri vsakem $x \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ potem velja

$$T_b|_{\mathfrak{X}(\mathcal{F})}(T_a|_{\mathfrak{X}(\mathcal{F})} - \lambda)x = b(a-\lambda)\cdot x = x + d \cdot x.$$

Iz $Sp_{\mathfrak{A}}(d\cdot x) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(d) \cap Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subseteq \mathcal{H} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ sledi, da je $d \cdot x = 0$. Se pravi, da je

$$T_b|_{\mathfrak{X}(\mathcal{F})}(T_a|_{\mathfrak{X}(\mathcal{F})} - \lambda)x = x \qquad \text{za vse } x \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}).$$

Torej je $T_a|_{\mathfrak{X}(\mathcal{F})} - \lambda$ obrnljiv. S tem je inkluzija $\sigma(T_a|_{\mathfrak{X}(\mathcal{F})}) \subseteq F$ dokazana. □

Zdaj ni težko videti, da je pri pogojih prejšnjega izreka vsak operator T_a, $a \in \mathfrak{A}$, super-dekomponibilen. V nadaljevanju bomo uporabili naslednjo ekvivalentno definicijo super-dekomponibilnosti (glejte izrek 1.4 v [**54**]).

Operator $T \in B(\mathfrak{X})$ je super-dekomponibilen natanko tedaj, ko za vsako odprto pokritje $\{U_1, U_2\}$ kompleksne ravnine obstajata takšna podprostora $\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2$ v $Lat\,(T)$, kakor tudi operatorja $S_1,\ S_2 \in B(\mathcal{X})$, ki komutirata s T, da velja:

$S_1 + S_2 = I$,
$S_1(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}_1$ in $S_2(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}_2$ ter
$\sigma(T|_{\mathfrak{X}_1}) \subset U_1$ in $\sigma(T|_{\mathfrak{X}_2}) \subset U_2$.

Izrek 2.4.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in naj bo $\mathfrak{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Potem je vsak operator množenja $T_a \in B(\mathfrak{X})$, $a \in \mathfrak{A}$, super-dekomponibilen.*

Dokaz. Naj bo $a \in \mathfrak{A}$. Če je $\{W_1, W_2\}$ odprto pokritje $\mathbb{C}$ naj bo $\{U_1, U_2\}$ takšno odprto pokritje $\mathbb{C}$, za katero velja $U_k \subset \overline{U}_k \subset W_k,\ k = 1, 2$. Par $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$, pri čemer je $\mathcal{U}_k = \widehat{a}^{-1}(U_k),\ k = 1, 2$, je odprto pokritje $\Sigma(\mathfrak{A})$. Po izreku o razčlenitvi enote (izrek 2.2.11) obstajata takšna b_1 in b_2 v $\mathfrak{A}$, da je $b_1 + b_2 = 1$ in $Sp_{\mathfrak{A}}(b_k) \subset \mathcal{U}_k,\ k = 1, 2$. Naj bo S_1 operator množenja z b_1 in S_2 operator množenja z b_2 na $\mathfrak{X}$. Jasno, S_1 in S_2 komutirata s T_a in zanju velja $S_1 + S_2 = I$. Podprostora $\mathfrak{X}_k := \mathfrak{X}(\widehat{a}^{-1}(\overline{U}_k))$, $k = 1, 2$, sta zagotovo v $Lat\,(T_a)$ in, kot smo videli v dokazu izreka 2.4.1, je spekter $\sigma(T_a|_{\mathfrak{X}_k})$ vsebovan v množici $\overline{U}_k$, ki je podmnožica v W_k, $k = 1, 2$. Ker za vsak $x \in \mathfrak{X}$ velja

$$Sp_{\mathfrak{A}}(S_k x) = Sp_{\mathfrak{A}}(b_k \cdot x) \subseteq Sp_{\mathfrak{A}}(b_k) \subset \overline{\mathcal{U}}_k \subseteq \widehat{a}^{-1}(\overline{U}_k),$$

je $\overline{im\, S_k} \subseteq \mathfrak{X}_k$, $k = 1, 2$. □

Naslednji izrek posplošuje rezultat Baskakova v nasprotni smeri.

Izrek 2.4.3. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Če obstaja takšna podmnožica $\mathfrak{A}_0$ v $\mathfrak{A}$, da Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{A}_0$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{A})$ in ima vsak od operatorjev množenja $L_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{A}_0$, lastnost (δ), potem je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom.*

DOKAZ. Naj bosta φ in ψ različna funkcionala iz $\Sigma(\mathfrak{A})$. V $\mathfrak{A}_0$ obstaja takšen a, da je $\lambda_0 := \widehat{a}(\varphi) \neq \widehat{a}(\psi) =: \mu_0$. Označimo $\epsilon = |\lambda_0 - \mu_0|$ in naj bo $U = \{z \in \mathbb{C};\ |\lambda_0 - z| < \frac{1}{3}\epsilon\}$, $V = \{z \in \mathbb{C};\ |\mu_0 - z| < \frac{1}{3}\epsilon\}$, $W = \{z \in \mathbb{C};\ |\lambda_0 - z| > \frac{1}{4}\epsilon \quad \text{in} \quad |\mu_0 - z| > \frac{1}{4}\epsilon\}$ ter $U_1 = V \cup W$ in $V_1 = U \cup W$. Ker ima L_a lastnost (δ), par $\{U, U_1\}$ pa je odprto pokritje $\mathbb{C}$, lahko poljuben $x \in \mathfrak{A}$ zapišemo kot $x = u + u_1$, kjer je $u = (L_a - \lambda)f(\lambda)$ za vse $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}$, pri čemer je $f:\ \mathbb{C} \setminus \overline{U} \to \mathfrak{A}$ analitična funkcija. Podobno je $u_1 = (L_a - \lambda)f_1(\lambda)$ za vse $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}_1$ in neko analitično funkcijo $f_1:\ \mathbb{C} \setminus \overline{U}_1 \to \mathfrak{A}$. Seveda, $x \in \mathfrak{A}$ lahko zapišemo tudi kot $x = v + v_1$, kjer sta pa v in v_1 elementa s podobnimi lastnostmi, le množici U in U_1 zamenjamo z množicama V in V_1.

Vzemimo za x enoto iz $\mathfrak{A}$. Potem imamo $1 = u + (L_a - \lambda)f_1(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}_1$. Ker je λ_0 v $\mathbb{C} \setminus \overline{U}_1$, sledi iz $1 = u + (a - \lambda_0)f_1(\lambda_0)$, da je $\widehat{u}(\varphi) = 1$. Na podoben način vidimo, da je $\widehat{v}(\psi) = 1$. Pokažimo še, da je $uv = 0$.

Izberimo poljuben $\xi \in \mathfrak{A}^*$. Na $\mathfrak{A}^*$ poglejmo kot na dualni Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Ker je f analitična funkcija z vrednostmi v $\mathfrak{A}$, je $F(\lambda) := f(\lambda) \cdot \xi$ analitična funkcija na $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$, katere vrednosti so v $\mathfrak{A}^*$. Če enakost

$$u = (L_a - \lambda)f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U},$$

z desne pomnožimo s ξ, dobimo

(2.4.1)
$$u \cdot \xi = (L_a - \lambda)f(\lambda) \cdot \xi = (a - \lambda)f(\lambda) \cdot \xi = (L_a^* - \lambda)F(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}.$$

Torej je $\sigma_{L_a^*}(u \cdot \xi) \subseteq \overline{U}$. Podobno vidimo, da je $\sigma_{L_a^*}(v \cdot \xi) \subseteq \overline{V}$. Označimo s H funkcijo, ki slika iz $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ v $\mathfrak{A}^*$ tako, da številu λ priredi funcional $v \cdot F(\lambda)$. Pomnožimo (2.4.1) z leve z v, pa dobimo

$$vu \cdot \xi = (L_a^* - \lambda)v \cdot F(\lambda) = (L_a^* - \lambda)H(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}.$$

Ker je H analitična, je $\sigma_{L_a^*}(vu \cdot \xi) \subseteq \overline{U}$. Podobno dobimo $\sigma_{L_a^*}(vu \cdot \xi) \subseteq \overline{V}$. Torej je $\sigma_{L_a^*}(vu \cdot \xi) \subseteq \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Po predpostavki ima operator L_a lastnost (δ), zato ima adjungirani operator L_a^* Bishopovo lastnost (β) (glejte [**53**], izrek 2.5.18) in torej SVEP ([**53**], trditev 1.2.19), kar pa je ekvivalentno enakosti $\mathfrak{A}^*_{L_a^*}(\emptyset) = \{0\}$ ([**53**], trditev 1.2.16). Se pravi, da velja $vu \cdot \xi = 0$, od koder sledi $0 = \langle vu \cdot \xi, 1\rangle = \langle \xi, uv\rangle$. Funkcional $\xi \in \mathfrak{A}^*$ je bil poljuben, zato je $uv = 0$. $\square$

Izrek 2.4.3 lahko nekoliko izboljšamo.

Izrek 2.4.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Predpostavimo, da $\mathfrak{A}$ deluje na $\mathcal{X}$ ciklično in da je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = \{0\}$. Če obstaja v $\mathfrak{A}$ takšna podmnožica $\mathfrak{A}_0$, da Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{A}_0$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{A})$ in ima pri vsakem $a \in \mathfrak{A}_0$ operator množenja $T_a:\ \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ lastnost (δ), potem je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom.*

DOKAZ. Naj bo $x \in \mathcal{X}$ cikličen vektor za $\mathfrak{A}$. Velja torej $\{a{\cdot}x;\ a \in \mathfrak{A}\} = \mathcal{X}$. Vemo, da je $\mathrm{P}(x):\ a \mapsto a{\cdot}x$ omejena preslikava iz $\mathfrak{A}$ v $\mathcal{X}$. Ker pa je x cikličen, je $\mathrm{P}(x)$ surjekcija. Če je $a{\cdot}x = 0$ za nek $a \in \mathfrak{A}$, potem je $a{\cdot}b{\cdot}x = b{\cdot}a{\cdot}x = 0$ za vse $b \in \mathfrak{A}$, od koder zaradi cikličnosti sledi $a \in ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = \{0\}$. Se pravi, da je $\mathrm{P}(x)$ injektivna preslikava. Sklepamo lahko, da je inverz $\mathrm{P}(x)^{-1}:\ \mathcal{X} \to \mathfrak{A}$ zvezen. Naj bo $a \in \mathfrak{A}_0$ ter T_a in L_a pripadajoča operatorja množenja na $\mathcal{X}$, oziroma na $\mathfrak{A}$. Potem je $\mathrm{P}(x)^{-1}T_a = L_a\mathrm{P}(x)^{-1}$. Zdaj uporabimo lemo 2 iz [**6**]. Ta lema — med drugim — trdi naslednje: če sta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ Banachova prostora, $T \in B(\mathcal{X})$ in $S \in B(\mathcal{Y})$ pa takšna operatorja, da obstaja surjekcija $A \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ki ju spleta, tj. $AT = SA$, potem ima S lastnost (δ), če jo ima T. Ker T_a ima lastnost (δ), jo ima torej tudi L_a. Uporabimo še izrek 2.4.3 pa je dokaz končan. $\square$

Pogoj $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = \{0\}$ v prejšnjem izreku je potreben.

Zgled 2.4.5. Poglejmo *disk algebro* $A(\mathbb{D})$. To je algebra vseh zveznih kompleksnih funkcij na zaprtem enotskem disku $\overline{\mathbb{D}}$, ki so analitične v njegovi notranjosti $\mathbb{D}$. Ker $A(\mathbb{D})$ ni regularna, ni algebra z ločljivim spektrom. Enodimenzionalen prostor $\mathbb{C}$ je levi Banachov $A(\mathbb{D})$-modul, če množenje definiramo z $f \cdot z := f(0)z$ pri vseh $f \in A(\mathbb{D})$ in vseh $z \in \mathbb{C}$. Očitno $A(\mathbb{D})$ deluje ciklično na $\mathbb{C}$. Operator množenja, ki ga inducira $f \in A(\mathbb{D})$ je oblike $f(0)I$, pri čemer je I identični operator na $\mathbb{C}$. Se pravi, da so izpolnjeni vsi pogoji izreka 2.4.4, razen tistega o anihilatorju, saj $ann_{A(\mathbb{D})}(\mathbb{C}) \neq \{0\}$.

Vprašanje je, ali lahko pogoj o cikličnosti nadomestimo s šibkejšim pogojem. Da ga ne moremo kar izpustiti, kaže naslednji zgled.

Zgled 2.4.6. Spet naj bo $A(\mathbb{D})$ disk algebra. Za levi Banachov $A(\mathbb{D})$-modul pa vzemimo $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, tj. Banachovo algebro vseh zveznih kompleksnih funkcij na $\overline{\mathbb{D}}$. Vsak operator množenja na $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ s funkcijo iz $A(\mathbb{D})$ je superdekompobilen, ker je $A(\mathbb{D}) \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ in je $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ algebra z ločljivim spektrom. Očitno velja tudi $ann_{A(\mathbb{D})}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) = \{0\}$. Toda $A(\mathbb{D})$ ne deluje ciklično na $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$.

Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. V izreku 2.4.1 smo videli, da je spektralna kapaciteta operatorja množenja $T_a \in B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, $a \in \mathfrak{A}$, dana z $\mathsf{E}_a(F) = \mathcal{X}(\widehat{a}^{-1}(F))$, $F \in cl\,(\mathbb{C})$. Ker je spektralna kapaciteta dekomponibilnega operatorja enolično določena in dana z njegovimi analitičnimi spektralnimi podprostori, imamo

$$X_{T_a}(F) = \mathcal{X}(\widehat{a}^{-1}(F)) \quad \text{pri vseh } F \in cl\,(\mathbb{C}).$$

Od tod sledi naslednja trditev.

Trditev 2.4.7. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *algebra z ločljivim spektrom in* $\mathcal{X}$ *levi Banachov* $\mathfrak{A}$*-modul. Potem je*

$$\sigma_{T_a}(x) = \widehat{a}(Sp_{\mathfrak{A}}(x)), \quad x \in \mathcal{X},$$

za vsak operator množenja T_a*,* $a \in \mathfrak{A}$*, na* $\mathcal{X}$*.*

Dokaz. Pri danem $x \in \mathcal{X}$ naj bo $F = \sigma_{T_a}(x)$. Potem je $x \in X_{T_a}(F) = \mathcal{X}(\widehat{a}^{-1}(F))$, kar nam da $Sp_{\mathfrak{A}}(x) \subseteq \widehat{a}^{-1}(\sigma_{T_a}(x))$. Po drugi strani, če postavimo $F = \widehat{a}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))$, je $x \in \mathcal{X}(\widehat{a}^{-1}(F)) = X_{T_a}(F)$ in torej $\sigma_{T_a}(x) \subseteq \widehat{a}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))$. □

Na koncu razdelka se vprašajmo, ali bi lahko v izreku 2.4.1 operatorje množenja nadomestili s širšim razredom multiplikatorjev. Naslednji zgled kaže, da se v splošnem to ni mogoče.

Zgled 2.4.8. Naj bo G nediskretna lokalno kompaktna Abelova grupa. Z $\mathfrak{A}$ označimo standardno unitizacijo grupne algebre $L^1(G)$ in naj bo $\mathcal{X} := L^1(G)$. Ker je $\mathfrak{A}$ polenostavna regularna komutativna Banachova algebra z enoto, je algebra z ločljivim spektrom. Na $\mathcal{X}$ deluje $\mathfrak{A}$ na običajen način (modulsko množenje je konvolucija). Iz elementarne teorije multiplikatorjev je znano ([**49**], §0.1), da lahko multiplikatorje na $\mathcal{X}$ izenačimo z algebro $M(G)$ regularnih Borelovih mer na G. Prav tako pa je znano, da vsi multiplikatorji na $L^1(G)$ niso dekomponibilni (glejte §4.11 v [**53**]).

2.5. Največja podalgebra z ločljivim spektrom

Spomnimo se, da je komutativna Banachova algebra $\mathfrak{A}$ regularna, če je množica $\Sigma(\mathfrak{A})$, opremljena s hull-kernel topologijo, Hausdorffov topološki prostor (glejte, recimo, definicijo 7.1.4 v [**50**]). Vsaka komutativna Banachova algebra $\mathfrak{A}$ vsebuje največjo zaprto regularno podalgebro $Reg\,(\mathfrak{A})$. Za polenostavne algebre z enoto je to dokazal Albrecht [**5**], splošni primer pa so neodvisno dokazali Neumann [**60**] in Inoue in Takahashi [**43**] (glejte [**53**], §4.3).

V tem razdelku bomo pokazali, da vsaka komutativna Banachova algebra $\mathfrak{A}$ z enoto vsebuje največjo podalgebro z ločljivim spektrom. V nadaljevanju bomo to podalgebro označevali s $Sep\,(\mathfrak{A})$. Ker je algebra z ločljivim spektrom regularna, velja inkluzija $Sep\,(\mathfrak{A}) \subseteq Reg\,(\mathfrak{A})$. V primeru, ko je $\mathfrak{A}$ še polenostavna, velja zaradi trditve 2.2.5 celo enakost $Sep\,(\mathfrak{A}) = Reg\,(\mathfrak{A})$. Obstaja velika podobnost med $Sep\,(\mathfrak{A})$ in $Reg\,(\mathfrak{A})$, toda ker ne vemo, ali ima vsaka regularna algebra ločljiv spekter, je odprto tudi vprašanje o enakosti algeber $Sep\,(\mathfrak{A})$ in $Reg\,(\mathfrak{A})$.

Izrek 2.5.1. *V vsaki komutativni Banachovi algebri z enoto* $\mathfrak{A}$ *obstaja največja podalgebra, ki je zaprta, vsebuje enoto iz* $\mathfrak{A}$ *in ima ločljiv spekter.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{F}$ družina vseh zaprtih podalgeber $\mathfrak{C}$ v $\mathfrak{A}$, ki vsebujejo enoto iz $\mathfrak{A}$ in imajo ločljiv spekter. Družina $\mathcal{F}$ ni prazna, saj vsebuje $\mathbb{C}1$. Označimo s $\mathfrak{S}$ zaprto podalgebro v $\mathfrak{A}$, ki jo generira unija $\mathcal{D} = \cup_{\mathfrak{C}\in\mathcal{F}}\mathfrak{C}$. Naj bosta φ in ψ različna karakterja iz $\Sigma(\mathfrak{S})$. Če bi veljala enakost $\varphi(a) = \psi(a)$ za vse $a \in \mathcal{D}$, potem bi se φ in ψ ujemala tudi na $\mathfrak{S}$, kar pa ni res. To pomeni, da Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathcal{D}$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{S})$.

Pri danem $a \in \mathcal{D}$ poglejmo operator množenja $L_a : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$. Ker je a v $\mathcal{D}$, obstaja takšna algebra $\mathfrak{C}_a$ v družini $\mathcal{F}$, da je $a \in \mathfrak{C}_a$. Algebra $\mathfrak{S}$ je levi Banachov $\mathfrak{C}_a$-modul, saj je $\mathfrak{C}_a \subseteq \mathfrak{S}$. Po izreku 2.4.1 je operator L_a dekomponibilen. Uporabimo zdaj izrek 2.4.3, pa vidimo, da je $\mathfrak{S}$ algebra z ločljivim spektrom. Iz konstrukcije sledi, da je $\mathfrak{S}$ največja podalgebra v družini $\mathcal{F}$. □

Naj bo $\mathfrak{A}$ poljubna komutativna Banachova algebra. *Spektralni polmer* poljubnega elementa $a \in \mathfrak{A}$ je definiran z

$$r(a) := \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Iz elementarne Gelfandove teorije sledi, da je spektralni polmer submultiplikativna polnorma na $\mathfrak{A}$ in da velja $r(a) \le \|a\|$ ter

$$r(a) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(a)\} = \max\{|\varphi(a)|;\ \varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})\}$$

za vse $a \in \mathfrak{A}$ (za podrobnosti glejte [**61**], §2.2, ter [**50**]). Se pravi, da je spektralni polmer norma na $\mathfrak{A}$ natanko tedaj, ko je algebra polenostavna. Če je $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{A}$ poljubna podmnožica v komutativni Banachovi algebri $\mathfrak{A}$, bomo najmanjšo množico, ki vsebuje $\mathfrak{U}$ in ki je zaprta v topologiji, ki jo določa polnorma r, imenovali *spektralno zaprtje* $\mathfrak{U}$ v $\mathfrak{A}$.

Za podalgebro $\mathfrak{B}$ v algebri z enoto $\mathfrak{A}$ bomo rekli, da je *za inverze zaprta*, če velja naslednje: kakor hitro je $a \in \mathfrak{B}$ takšen, da je v $\mathfrak{A}$ obrnljiv, je tudi njegov inverz a^{-1} v $\mathfrak{B}$.

Trditev 2.5.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto.*

(i) Podalgebra $Sep(\mathfrak{A})$ je za inverze zaprta.

(ii) Če je $\mathfrak{B}$ poljubna zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$, ki vsebuje enoto iz $\mathfrak{A}$ in ima ločljiv spekter, potem je tudi njeno spektralno zaprtje v $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Od tod sledi, da je $Sep(\mathfrak{A})$ spektralno zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$.

Dokaz. (i) Pa vzemimo, da podalgebra $Sep(\mathfrak{A})$ ni za inverze zaprta. To pomeni, da v $Sep(\mathfrak{A})$ obstaja takšen a, ki je v $\mathfrak{A}$ obrnljiv, njegov inverz a^{-1} pa ni v $Sep(\mathfrak{A})$. Naj bo $\mathfrak{S}$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$, ki jo generira množica $Sep(\mathfrak{A}) \cup \{a^{-1}\}$. Jasno, Gelfandove transformiranke elementov iz $Sep(\mathfrak{A}) \cup \{a^{-1}\}$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{S})$. Ker je $\mathfrak{S}$ modul nad $Sep(\mathfrak{A})$, so vsi operatorji množenja $L_b : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, $b \in Sep(\mathfrak{A})$, dekomponibilni (izrek 2.4.1). V posebnem je dekomponibilen tudi operator $L_a : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$. Operator L_a

je obrnljiv, njegov inverz je operator $L_{a^{-1}}$. Ker je inverz obrnljivega dekomponibilnega operatorja dekomponibilen (glejte [**21**], trditev 2.1.12), je $L_{a^{-1}}$ dekomponibilen. Zdaj lahko uporabimo izrek 2.4.3, ki nam pove, da je $\mathfrak{S}$ algebra z ločljivim spektrom. Toda to je v nasprotju z dejstvom, da je $Sep\,(\mathfrak{A})$ največja podalgebra z ločljivim spektrom.

(ii) Naj bo $\mathfrak{B}$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$, ki vsebuje enoto 1 iz $\mathfrak{A}$ in ki ima ločljiv spekter. Spektralno zaprtje $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{A}$ označimo s $\mathfrak{C}$. Jasno je, da je $\mathfrak{C}$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$ in da je $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. V nadaljevanju bomo sledili idejam iz dokaza trditve 4.3.7 iz [**53**].

Naj bo $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{C})$ poljuben. Potem zožitev $\varphi|_{\mathfrak{B}}$ ni trivialen multiplikativen linearen funkcional na $\mathfrak{B}$, saj velja $\varphi|_{\mathfrak{B}}(1) = \varphi(1) = 1$. Se pravi, da preslikava R, ki karakterju $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{C})$ priredi njegovo zožitev na $\mathfrak{B}$, slika v $\Sigma(\mathfrak{B})$. Pokažimo, da za poljubno podmnožico $F \subseteq \Sigma(\mathfrak{C})$, ki je zaprta v Gelfandovi topologiji, in poljuben $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{C}) \setminus F$ velja, da $R(\varphi)$ ne pripada Gelfandovemu zaprtju množice $R(F)$ v $\Sigma(\mathfrak{B})$. Namreč, če bi, bi lahko dobili posplošeno zaporedje $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq F$, za katerega bi veljalo $R(\varphi_i) \to R(\varphi)$ v Gelfandovi topologiji prostora $\Sigma(\mathfrak{B})$, kar pa je ekvivalentno $\varphi_i(b) \to \varphi(b)$ za vse $b \in \mathfrak{B}$. Naj bosta $c \in \mathfrak{C}$ ter $\varepsilon > 0$ poljubna. Ker je $\mathfrak{C}$ spektralno zaprtje $\mathfrak{B}$, lahko najdemo takšen $b \in \mathfrak{B}$, da je $r(b - c) < \varepsilon$. Poleg tega pa obstaja takšen indeks $j \in \mathbb{I}$, da velja $|\varphi_i(b) - \varphi(b)| < \varepsilon$ za vse $i \in \mathbb{I}$, za katere velja $i \geq j$. Potem pa lahko ocenimo

$$\begin{aligned} |\varphi_i(c) - \varphi(c)| &\leq |\varphi_i(c) - \varphi_i(b)| + |\varphi_i(b) - \varphi(b)| + |\varphi(b) - \varphi(c)| \\ &\leq r(b - c) + |\varphi_i(b) - \varphi(b)| + r(b - c) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

To pomeni, da $\varphi_i(c) \to \varphi(c)$ za vsak $c \in \mathfrak{C}$, oziroma $\varphi \in F$. Protislovje. Če sta torej φ in ψ različna karakterja iz $\Sigma(\mathfrak{C})$, sta njuni zožitvi $\varphi|_{\mathfrak{B}}$ in $\psi|_{\mathfrak{B}}$ različna karakterja iz $\Sigma(\mathfrak{B})$. Ker je $\mathfrak{B}$ algebra z ločljivim spektrom, obstajata takšna $a,\ b \in \mathfrak{B}$, da je $ab = 0$ in $\varphi(a)\psi(b) = \varphi|_{\mathfrak{B}}(a)\psi|_{\mathfrak{B}}(b) \neq 0$. To pomeni, da je $\mathfrak{C}$ algebra z ločljivim spektrom. □

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathfrak{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Označimo z $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ množico vseh tistih elementov a iz $\mathfrak{A}$, za katere velja, da je pripadajoči operator množenja $T_a : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ dekomponibilen. Ker je vsak levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul tudi levi Banachov $Sep\,(\mathfrak{A})$-modul, je zaradi izreka 2.4.1 jasno, da je $Sep\,(\mathfrak{A}) \subseteq Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$. V splošnem ni znano, ali je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ algebra, toda za posebni primer, ko je $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$, je že Apostol pokazal, da je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ zaprta podalgebra v $\mathfrak{A}$ (glejte [**10**] in trditev 4.4.9 v [**53**] za splošnejši primer, ko $\mathfrak{A}$ nima enote, ampak ima le omejeno približno enoto). Algebro $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ bomo imenovali *Apostolova algebra.*

Trditev 2.5.3. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Obravnavajmo naslednje transfinitno zaporedje zaprtih podalgeber v $\mathfrak{A}$. Postavimo*

$\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{A}_{\alpha+1} := Dec_{\mathfrak{A}_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha)$, *če je* α *ordinalno število. Za poljubno limitno ordinalno število* α *pa naj bo* $\mathfrak{A}_\alpha := \cap\{\mathfrak{A}_\beta;\ \beta < \alpha\}$. *Zaporedje* $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_\alpha$ *je od nekod naprej konstantno in ta konstantna vrednost je* $Sep\,(\mathfrak{A})$.

DOKAZ. Jasno je, da je zaporedje algeber padajoče. Ker obstajajo ordinalna števila, ki presegajo število elementov v $\mathfrak{A}$, je jasno, da mora biti zaporedje od nekod naprej konstantno. Označimo to konstantno vrednost s $\mathfrak{S}$. Glede na lastnost algebre $Sep\,(\mathfrak{A})$ je očitno, da je ta algebra v vsaki algebri iz zaporedja, torej tudi v $\mathfrak{S}$. Po drugi strani pa zaradi $\mathfrak{S} = Dec_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})$ velja, da je $\mathfrak{S}$ algebra z ločljivim spektrom. Ker je $Sep\,(\mathfrak{A})$ največja podalgebra z ločljivim spektrom v $\mathfrak{A}$, je torej $\mathfrak{S} \subseteq Sep\,(\mathfrak{A})$. □

Zadnja trditev je analog trditve 4.4.16 iz [**53**] in naš dokaz je le rahlo spremenjen dokaz omenjene trditve. Trditev 4.4.16 iz [**53**] govori o $Reg\,(\mathfrak{A})$ in tam ni zahtevano, da ima algebra enoto, vendar pa mora biti polenostavna. Kot smo že omenili, v primeru polenostavnih algeber z enoto $Reg\,(\mathfrak{A})$ in $Sep\,(\mathfrak{A})$ sovpadata. Zgornja trditev torej še dodatno kaže na veliko podobnost med $Reg\,(\mathfrak{A})$ in $Sep\,(\mathfrak{A})$.

Krepko harmonični operatorji

Kot smo videli v poglavju o krepko harmoničnih algebrah, se lastnosti algeber z ločljivim spektrom odražajo na operatorjih množenja z elementi iz teh algeber. V tem poglavju bomo skušali to še bolj neposredno izkoristiti in bomo algebre z ločljivim spektrom uporabili kot orodje v teoriji operatorjev na Banachovih prostorih. V prvem razdelku bomo vpeljali razred *krepko harmoničnih operatorjev* v nadaljevanju pa študirali njihove lastnosti s stališča lokalne spektralne teorije. V drugem delu poglavja nas bodo zanimali predvsem krepko harmonični elementarni operatorji.

3.1. Definicija krepko harmoničnih operatorjev

V tem razdelku bomo definirali krepko harmonične operatorje in pokazali, da je razred le-teh dokaj velik.

Definicija 3.1.1. *Omejen linearen operator T na kompleksnem Banachovem prostoru $\mathfrak{X}$ je* krepko harmoničen, *če je vsebovan v neki zaprti podalgebri $\mathfrak{A} \subset B(\mathfrak{X})$, ki je algebra z ločljivim spektrom, pri čemer je identični operator I njena enota.*

Krepko harmonični operatorji obstajajo.

Zgled 3.1.2. Naj bo $\mathfrak{A}$ poljubna algebra z ločljivim spektrom in $\mathfrak{X}$ poljuben Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $\Phi : \mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$ homomorfizem, ki elementu $a \in \mathfrak{A}$ priredi operator množenja T_a na $\mathfrak{X}$, potem je po trditvi 2.2.6 (iii) podalgebra $\overline{\Phi(\mathfrak{A})} \subset B(\mathfrak{X})$ z ločljivim spektrom. Njena enota je identični operator, saj je $\Phi(1) = I$. Vsi operatorji množenja T_a, $a \in \mathfrak{A}$, so torej krepko harmonični operatorji.

V zgledu smo videli, da so operatorji množenja z elementi iz algebre z ločljivim spektrom krepko harmonični operatorji na poljubnem Banachovem levem modulu. Za te operatorje pa vemo (glejte izrek 2.4.2), da so super-dekomponibilni. Izkaže se, da to velja za vsak krepko harmoničen operator.

Trditev 3.1.3. *Vsak krepko harmoničen operator je super-dekomponibilen.*

DOKAZ. Naj bo $T \in B(\mathfrak{X})$ krepko harmoničen operator in naj bo $\mathfrak{A} \subset B(\mathfrak{X})$ takšna algebra z ločljivim spektrom, ki vsebuje T in I. Glede na množenje $S \cdot x := Sx$, $S \in \mathfrak{A}$, $x \in \mathfrak{X}$, je $\mathfrak{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Po izreku 2.4.2 je operator množenja s T na $\mathfrak{X}$, tj. operator $x \mapsto T \cdot x$, super-dekomponibilen. Toda očitno je ta operator enak operatorju T. $\square$

Naslednja dva zgleda kažeta, da je razred krepko harmoničnih operatorjev dokaj velik.

Zgled 3.1.4. Topološki prostor je *popolnoma nepovezan*, če nobena njegova povezana podmnožica ne vsebuje več kot ene točke. Po trditvi 1.4.5 iz [**53**], je vsak operator $T \in B(\mathfrak{X})$, ki ima popolnoma nepovezan spekter, super-dekomponibilen. Pokazali bomo, da so operatorji te vrste krepko harmonični. Namreč, naj bo $T \in B(\mathfrak{X})$ operator s popolnoma nepovezanim spektrom in naj bo $\mathfrak{A} \subset B(\mathfrak{X})$ zaprta podalgebra, ki jo generirata operator T in identični operator I. Očitno je $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in, kot je dobro znano, sta prostora $\Sigma(\mathfrak{A})$, opremljen z Gelfandovo topologijo, in $\sigma(T)$ homeomorfna. Se pravi, da je $\Sigma(\mathfrak{A})$ popolnoma nepovezan prostor. Zgled 1.4.11 iz [**53**] pa kaže, da je tedaj vsak operator množenja $L_S : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $S \in \mathfrak{A}$, super-dekomponibilen. Ker Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{A}$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{A})$, je po izreku 2.4.3 $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom.

Zgled 3.1.5. Naj bo Ω zaprta podmnožica v $\mathbb{C}$. Podalgebra $\mathfrak{A}$ v algebri vseh zveznih kompleksnih funkcij na Ω, $C(\Omega)$, je *za inverze zaprta dopustna algebra* (glejte [**53**], strani 44-46), če velja
(a) funkciji $1 : z \mapsto 1$, $z \in \Omega$, in $id : z \mapsto z$, $z \in \Omega$, sta v $\mathfrak{A}$;
(b) za vsako odprto pokritje $\{U_1, \dots U_n\}$ množice Ω obstajajo takšne funkcije $f_1, \dots, f_n$ v $\mathfrak{A}$ da velja $f_k(\Omega) \subseteq [0,1]$, $supp\,(f_k) \subseteq U_k$, $1 \le k \le n$, in $\sum_{k=1}^n f_k(z) = 1$ za vse $z \in \Omega$, pri čemer je $supp\,(f) := \overline{\{z \in \mathbb{C};\ f(z) \neq 0\}}$ nosilec funkcije $f \in \mathfrak{A}$;
(c) za vsako funkcijo $f \in \mathfrak{A}$ in vsako točko $\zeta \notin supp\,(f)$ je funkcija

$$f_\zeta := \begin{cases} \frac{f(z)}{\zeta - z} & ;\ z \in \Omega \setminus \{\zeta\} \\ 0 & ;\ z = \zeta \end{cases}$$

v $\mathfrak{A}$; in
(d) če je $f \in \mathfrak{A}$ takšna, da obstaja $\frac{1}{f}$ in je to funkcija v $C(\Omega)$, potem je $\frac{1}{f}$ tudi v $\mathfrak{A}$.

Naj bo $\mathfrak{X}$ Banachov prostor. Preslikava $\mathsf{U} : \mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$, kjer je $\mathfrak{A}$ za inverze zaprta dopustna algebra, je $\mathfrak{A}$-spektralna funkcija, če je algebraičen homomorfizem in je $\mathsf{U}(1)$ identični operator na $\mathfrak{X}$. Albrecht je v [**1**], (trditev 3.6) pokazal, da je funkcija $\zeta \mapsto \mathsf{U}(f_\zeta)$, katere vrednosti ležijo v $B(\mathfrak{X})$, analitična na komplementu nosilca $supp\,(f)$. Se pravi, da je U $\mathfrak{A}$-spektralna funkcija v smislu definicije 3.1.3 iz [**21**]. Operator $T \in B(\mathfrak{X})$ je $\mathfrak{A}$-*skalaren*, če obstaja takšna $\mathfrak{A}$-spektralna funkcija U, za katero velja $\mathsf{U}(id) = T$ (definicija 3.1.18 v [**21**]). Če ima $\mathfrak{A}$-skalaren operator $T \in B(\mathcal{X})$ takšno $\mathfrak{A}$-spektralno funkcijo, ki komutira z vsakim operatorjem, ki komutira s T, potem je T regularen $\mathfrak{A}$-skalaren.

Naj bo $T \in B(\mathcal{X})$ $\mathfrak{A}$-skalaren operator, pri čemer je $\mathfrak{A}$ za inverze zaprta dopustna algebra, in naj bo U neka $\mathfrak{A}$-spektralna funkcija za T. Označimo z $\mathfrak{B}$ zaprtje množice $\{\mathsf{U}(f);\ f \in \mathfrak{A}\} \subseteq B(\mathcal{X})$. Potem je $\mathfrak{B}$ komutativna Banachova algebra z enoto I in, po izreku 3.2.1 v [**21**], je spekter algebre $\mathfrak{B}$ homeomorfen $\sigma(T)$. Gelfandova transformiranka elementa $\mathsf{U}(f)$, $f \in \mathfrak{A}$, je kar zožitev $f|_{\sigma(T)}$. Očitno funkcije $f|_{\sigma(T)}$, $f \in \mathfrak{A}$, ločijo točke v $\sigma(T) = \Sigma(\mathfrak{B})$.

Trditev 3.1.6. *Naj bo $\mathfrak{A}$ za inverze zaprta dopustna algebra in naj bo T $\mathfrak{A}$-skalaren operator na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$. Potem je T krepko harmoničen.*

Preden se lotimo dokaza, vpeljimo dva nova pojma. Zaprt podprostor $\mathcal{Y}$ v Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ je *spektralno maksimalen podprostor* operatorja $S \in B(\mathcal{X})$, če je invarianten za S in če za vsak drug zaprt podprostor $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$, ki je invarianten za S in za katerega velja $\sigma(S|\mathcal{Z}) \subseteq \sigma(S|\mathcal{Y})$, velja $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ (glejte [**21**], definicija 1.3.1). Zaprta podalgebra $\mathfrak{C} \subseteq B(\mathcal{X})$ je *normalna glede na $S \in \mathfrak{C}$*, če za poljubna dva spektralna maksimalna podprostora $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Z}$ operatorja S, za katera velja $\sigma(S|\mathcal{Y}) \cap \sigma(S|\mathcal{Z}) = \emptyset$, obstaja takšen operator Q v $\mathfrak{C}$, da Q in S komutirata in je $Q|\mathcal{Z} = 0$ ter $(I - Q)|\mathcal{Y} = 0$ (glejte [**10**], definicija 2.7).

Dokaz. Po izreku 2.4.3 je dovolj videti, da ima za vsako funkcijo $f \in \mathfrak{A}$ pripadajoči operator množenja $L_{\mathsf{U}(f)} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ lastnost (δ). Pokazali bomo več: vsak tak operator je super-dekomponibilen.

Izberimo $f \in \mathfrak{A}$ in označimo $S := \mathsf{U}(f)$. Ker je S dekomponibilen (izrek 3.2.4 v [**21**]), je dovolj videti, zaradi izreka 3.2 v [**54**], da je $\mathfrak{B}$ normalna glede na S. Naj bosta $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Z}$ poljubna spektralna maksimalna podprostora za S in naj velja $\sigma(S|\mathcal{Y}) \cap \sigma(S|\mathcal{Z}) = \emptyset$. Potem lahko $\sigma(S|\mathcal{Y})$ in $\sigma(S|\mathcal{Z})$ ločimo z disjunktnima odprtima množicama in, ker ima $\mathfrak{A}$ razčlenitev enote, ki jo sestavljajo nenegativne funkcije, obstaja takšna funkcija $g \in \mathfrak{A}$, da je $g(z) = 1$ za vse $z \in \sigma(S|\mathcal{Y})$ ter $supp\,(g) \cap \sigma(S|\mathcal{Z}) = \emptyset$. Iz $\sigma_S(x) \subseteq \sigma_{S|\mathcal{Z}}(x) \subseteq \sigma(S|\mathcal{Z})$ sledi, da je $\sigma_S(x) \cap supp\,(g) = \emptyset$ za vse $x \in \mathcal{Z}$. Po trditvi 3.1.12 iz [**21**], je $\mathsf{U}(g)x = 0, x \in \mathcal{Z}$, kar pomeni, da je $\mathsf{U}(g)|\mathcal{Z} = 0$. Na podoben način dobimo $(I - \mathsf{U}(g))|\mathcal{Y} = 0$. Torej je $\mathfrak{B}$ res normalna glede na S. □

Ni znano, ali so vsi krepko harmonični operatorji $\mathfrak{A}$-skalarni. V naslednjem zgledu bomo videli, da obstajajo krepko harmonični operatorji, ki niso regularni $\mathfrak{A}$-skalarni za nobeno za inverze zaprto dopustno algebro.

Zgled 3.1.7. Naj bo G nekompaktna lokalno kompaktna Abelova grupa. Če je G diskretna, naj bo $\mathfrak{C}$ enaka grupni algebri $L^1(G)$, sicer pa naj bo $\mathfrak{C}$ standardna unitizacija $L^1(G) \oplus \mathbb{C}$ grupne algebre. Potem je $\mathfrak{C}$ komutativna polenostavna Banachova algebra z enoto in je torej algebra z ločljivim spektrom. Naj bo $\mathcal{X} := L^1(G)$. To je levi Banachov $\mathfrak{C}$-modul — množenje je definirano s konvolucijo. Zaprtje algebre $\mathfrak{B} := \{L_f;\ f \in \mathfrak{C}\} \subset B(\mathcal{X})$ je po trditvi 2.2.6 (iii) tudi algebra z ločljivim spektrom. Se pravi, da je vsak operator v $\mathfrak{B}$ krepko harmoničen. Toda, po izreku 6.2.12 iz [**21**], obstajajo operatorji v $\mathfrak{B}$, ki niso regularni $\mathfrak{A}$-skalarni za nobeno za inverze zaprto dopustno algebro $\mathfrak{A}$.

3.2. Lastnosti krepko harmoničnih operatorjev

V tem razdelku bomo dokazali nekatere osnovne lastnosti krepko harmoničnih operatorjev. Najpomembnejši je verjetno naslednji izrek.

Izrek 3.2.1. *Naj bo T krepko harmoničen operator na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ in naj bo $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$ takšna algebra z ločljivim spektrom, ki vsebuje T. Če je $\mathcal{Y}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, potem je operator množenja, ki ga T inducira na $\mathcal{Y}$, krepko harmoničen.*

Dokaz. Če je $\mathcal{Y}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul in je L_S operator množenja, ki ga na $\mathcal{Y}$ inducira $S \in \mathfrak{A}$, je s $\Phi :\ S \mapsto L_S$ definiran zvezen homomorfizem iz $\mathfrak{A}$ v $B(\mathcal{Y})$ in $\Phi(I)$ je identični operator na $\mathcal{Y}$. Zaprtje podalgebre $\Phi(\mathfrak{A})$ v $B(\mathcal{Y})$ je algebra z ločljivim spektrom (trditev 2.2.6 (iii)), zato je $\Phi(T) = L_T$ krepko harmoničen operator. □

Posledica 3.2.2. *Naj bo T krepko harmoničen operator na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ in naj bo $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$ algebra z ločljivim spektrom, ki vsebuje T.*

(i) Zožitev operatorja T na hiperinvarianten podprostor je krepko harmoničen operator.

(ii) Adjungirani operator T^* na $\mathcal{X}^*$ je krepko harmoničen.

(iii) Če je $\mathfrak{B} \subseteq B(\mathcal{X})$ takšna zaprta podalgebra, da je $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, recimo, če je $\mathfrak{B}$ enaka $B(\mathcal{X})$ ali komutantu $\{T\}^c$ operatorja T, potem je operator množenja, ki ga na $\mathfrak{B}$ inducira T, krepko harmoničen.

Dokaz. (i) Naj bo $\mathcal{Y}$ hiperinvarianten podprostor za T. Potem je $\mathcal{Y}$ invarianten za vsak operator $S \in \mathfrak{A}$. Za množenje $S \cdot y := S|_{\mathcal{Y}} y\ S \in \mathfrak{A},\ y \in \mathcal{Y})$ je $\mathcal{Y}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Zdaj uporabimo izrek 3.2.1.

(ii) Ker je algebra $\mathfrak{A}$ komutativna, je dual $\mathcal{X}^*$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul za množenje $S \cdot \xi := S^* \xi$ $(S \in \mathfrak{A},\ \xi \in \mathcal{X}^*)$. Trditev sledi po izreku 3.2.1.

(iii) Očitno je $\mathfrak{B}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, zato lahko uporabimo izrek 3.2.1. □

Če je $T \in B(\mathcal{X})$ krepko harmoničen operator, potem algebra z ločljivim spektrom $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$, ki vsebuje T (in identični operator), ni nujno enolično določena. Na primer, naj bosta S in T komutirajoča operatorja, ki imata oba popolnoma nepovezana spektra. Potem imata algebri, ki ju generirata T in identični operator ter S in identični operator, ločljiva spektra, kot smo videli v zgledu 3.1.4. Toda tudi algebra, ki jo generirajo S, T in identični operator, je algebra z ločljivim spektrom. Ni težko najti primera, ko sta algebri, ki ju generirata S in I, oziroma T in I, pravi podalgebri v algebri, ki jo generirajo S, T in I.

Naslednji izrek nam zagotavlja, da je vsak krepko harmoničen operator vsebovan v neki algebri z ločljivim spektrom, ki je za inverze zaprta.

Izrek 3.2.3. *Naj bo $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$ algebra z ločljivim spektrom in naj bo $I \in \mathfrak{A}$. Potem obstaja takšna algebra z ločljivim spektrom $\mathfrak{B} \in B(\mathcal{X})$, da je $\mathfrak{B}$ za inverze zaprta v $B(\mathcal{X})$ in $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.*

Dokaz. Najprej bomo pri vsakem naravnem številu n poiskali takšno algebro $\mathfrak{B}_n \subset B(\mathcal{X})$ z ločljivim spektrom, da bo veljalo $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{B}_{n+1}$. Pri $n = 1$ naj bo $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{A}$. Predpostavimo zdaj, da že imamo končno zaporedje algeber $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{B}_n$ z ločljivimi spektri. Če je $\{T_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} \subset \mathfrak{B}_n$ množica vseh tistih operatorjev, ki so obrnljivi v $B(\mathcal{X})$, vendar ne v $\mathfrak{B}_n$, naj bo $\mathfrak{B}_{n+1}$ zaprta podalgebra v $B(\mathcal{X})$, ki jo generirata algebra $\mathfrak{B}_n$ in družina $\{T_\lambda^{-1} :\ \lambda \in \Lambda\}$ (če je indeksna množica Λ prazna, naj bo $\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n$). Očitno je $\mathfrak{B}_{n+1}$ komutativna podalgebra v $B(\mathcal{X})$, saj je $\mathfrak{B}_n \cup \{T_\lambda^{-1} :\ \lambda \in \Lambda\}$ komutativna množica generatorjev.

Naj bo φ v $\Sigma(\mathfrak{B}_{n+1})$. Potem $\varphi|\mathfrak{B}_n$, zožitev φ na $\mathfrak{B}_n$, ne more biti trivialen funkcional, saj $\mathfrak{B}_n$ vsebuje identični operator. Se pravi, da je $\varphi|\mathfrak{B}_n \in \Sigma(\mathfrak{B}_n)$. Če sta φ in ψ različna funkcionala iz $\Sigma(\mathfrak{B}_{n+1})$, potem sta tudi zožitvi $\varphi|\mathfrak{B}_n$ in $\psi|\mathfrak{B}_n$ različni. Namreč, če bi $\varphi|\mathfrak{B}_n$ in $\psi|\mathfrak{B}_n$ bila enaka, potem bi se φ in ψ ujemala na množici generatorjev $\mathfrak{B}_n \cup \{T_\lambda^{-1};\ \lambda \in \Lambda\}$ algebre $\mathfrak{B}_{n+1}$ in torej na celi algebri. S tem smo dokazali, da preslikava $\varphi \mapsto \varphi|\mathfrak{B}_n$ deluje injektivno iz $\Sigma(\mathfrak{B}_{n+1})$ v $\Sigma(\mathfrak{B}_n)$. Na $\Sigma(\mathfrak{B}_{n+1})$ lahko torej gledamo kot na podmnožico v $\Sigma(\mathfrak{B}_n)$. Pri vsakem $S \in \mathfrak{B}_n$ je Gelfandova transformiranka $\widehat{S} :\ \Sigma(\mathfrak{B}_{n+1}) \to \mathbb{C}$ le zožitev Gelfandove transformiranke $\widehat{S} :\ \Sigma(\mathfrak{B}_n) \to \mathbb{C}$ na podmnožico $\Sigma(\mathfrak{B}_{n+1})$. Ker Gelfandove transformiranke elementov iz $\mathfrak{B}_n$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{B}_n)$, jih ločijo tudi v podmnožici $\Sigma(\mathfrak{B}_{n+1})$. Algebra $\mathfrak{B}_{n+1}$ je levi Banachov $\mathfrak{B}_n$-modul. Torej je po izreku 2.4.2 vsak operator množenja $L_S :\ \mathfrak{B}_{n+1} \to \mathfrak{B}_{n+1}$, $S \in \mathfrak{B}_n$, super-dekomponibilen (saj je $\mathfrak{B}_n$ algebra z ločljivim spektrom). Uporabimo izrek 2.4.3, pa vidimo, da je $\mathfrak{B}_{n+1}$ algebra z ločljivim spektrom.

Unija $\cup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_n$ je podalgebra v $B(\mathcal{X})$. Naj bo $\mathfrak{B}$ njeno zaprtje. Potem je $\mathfrak{B}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Gelfandove transformiranke elementov iz $\cup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_n$ ločijo točke v $\Sigma(\mathfrak{B})$. Če je S v $\cup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_n$, obstaja takšen indeks n_0, da je $S \in \mathfrak{B}_{n_0}$. Ker je $\mathfrak{B}$ levi Banachov $\mathfrak{B}_{n_0}$-modul, je operator množenja $L_S : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ super-dekomponibilen. Torej je tudi $\mathfrak{B}$ algebra z ločljivim spektrom.

Zdaj bomo pokazali, da je $\mathfrak{B}$ polna podalgebra v $B(\mathcal{X})$. Naj bo $S \in \mathfrak{B}$ obrnljiv v $B(\mathcal{X})$. Potem obstaja takšno Cauchyjevo zaporedje $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \cup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_n$, da $\lim_{k\to\infty}\|S - S_k\| = 0$. Ker je S obrnljiv v $B(\mathcal{X})$ in je grupa G vseh obrnljivih elementov v $B(\mathcal{X})$ odprta, obstaja takšen indeks k_0, da so vsi operatorji S_k, $k \geq k_0$, obrnljivi v $B(\mathcal{X})$. Glede na konstrukcijo so vsi operatorji S_k^{-1}, $k \geq k_0$, v $\cup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_n$. Upoštevajmo, da je preslikava $C \mapsto C^{-1}$ homeomorfizem iz grupe G vase, pa lahko sklepamo, da je operator S^{-1} v $\mathfrak{B}$, saj zaporedje $\{S_k^{-1}\}_{k=k_0}^{\infty} \subset \cup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_n$ konvergira k njemu. □

Posledica 3.2.4. *(i) Če je $T \in B(\mathcal{X})$ obrnljiv krepko harmoničen operator, potem je tudi njegov inverz T^{-1} krepko harmoničen.*

(ii) Če je $T \in B(\mathcal{X})$ krepko harmoničen, f pa je analitična funkcija na neki odprti okolici $\sigma(T)$, potem je tudi $f(T)$ krepko harmoničen.

Dokaz. Trditev (i) je neposredna posledica izreka 3.2.3.

Naj bo T krepko harmoničen in naj bo $\mathfrak{A}$ za inverze zaprta podalgebra v $B(\mathcal{X})$, za katero pa še velja, da ima ločljiv spekter in da je T v njej. Če je U odprta okolica $\sigma(T)$ in je $f : U \to \mathbb{C}$ analitična funkcija, potem je $f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-T)^{-1}dz$, pri čemer je $\Gamma \subset U \setminus \sigma(T)$ ustrezna krivulja, ki obkroža $\sigma(T)$. Iz definicije operatorja $f(T)$ sledi (glejte [**61**], §3.3), da je $f(T)$ limita takšnega zaporedja operatorjev $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B(\mathcal{X})$, kjer je vsak operator T_k končna vsota oblike $\sum_j \alpha_j(z_j - T)^{-1}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ in $z_j \in \Gamma$. Ker je vsak operator $(z_j - T)^{-1}$ v $\mathfrak{A}$, lahko sklepamo, da je tudi zaporedje $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathfrak{A}$ in da torej velja $f(T) \in \mathfrak{A}$. □

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ kompleksna Banachova prostora in naj bosta T_1 ter T_2 omejena linearna operatorja, prvi na $\mathcal{X}$ in drugi na $\mathcal{Y}$. Zlahka preverimo, da je z $S_1(x,y) := (T_1x, T_2y)$ definiran omejen linearne operator na $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Prav tako ni težko preveriti, da je z $S_2(\sum_k x_k \otimes y_k) := \sum_k T_1x_k \otimes T_2y_k$ dan omejen linearne operator na $\mathcal{X}\widehat{\otimes}\mathcal{Y}$.

Trditev 3.2.5. *Če sta $T_1 \in B(\mathcal{X})$ in $T_2 \in B(\mathcal{Y})$ krepko harmonična, sta tudi $S_1 \in B(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ in $S_2 \in B(\mathcal{X}\widehat{\otimes}\mathcal{Y})$ krepko harmonična.*

Dokaz. Ker sta T_1 in T_2 krepko harmonična, obstajata takšni algebri $\mathfrak{A}_1 \subset B(\mathcal{X})$ in $\mathfrak{A}_2 \subset B(\mathcal{Y})$, ki imata ločljiva spektra in velja $T_1 \in \mathfrak{A}_1$ ter $T_2 \in \mathfrak{A}_2$. Po trditvi 2.2.6 (ii) je tudi $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \subset B(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ algebra z ločljivim spektrom. Očitno je operator $S_1 = (T_1, T_2)$ v $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, kar pomeni, da je krepko harmoničen.

Po 16. trditvi razdelka §42 v [**14**] obstaja takšna injektivna linearna preslikava $\Phi : \mathfrak{A}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{A}_2 \to B(\mathcal{X} \widehat{\otimes} \mathcal{Y})$, da je $S_2 = \Phi(T_1 \otimes T_2)$. Zdaj uporabimo trditev 2.2.6 (iii), ki pravi, da je zaprtje algebre $\Phi(\mathfrak{A}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{A}_2)$ v $B(\mathcal{X} \widehat{\otimes} \mathcal{Y})$ algebra z ločljivim spektrom. □

Že nekaj časa je odprt problem, ali sta vsota in produkt dveh komutirajočih dekomponibilnih operatorjev na kompleksnem Banachovem prostoru dekomponibilna operatorja (glejte [**53**], 6.1.4). V naslednji trditvi bomo videli, da ima podobno vprašanje za krepko harmonične operatorje pozitiven odgovor, če operatorja zadoščata še nekemu dodatnemu pogoju.

Trditev 3.2.6. *Naj bosta T_1 in T_2 komutirajoča krepko harmonična operatorja na kompleksnem Banachovem prostoru $\mathcal{X}$. Če obstajata takšni algebri $\mathfrak{A}_1 \subset B(\mathcal{X})$ in $\mathfrak{A}_2 \subset B(\mathcal{X})$, ki imata ločljiva spektra in je $T_1 \in \mathfrak{A}_1$, $T_2 \in \mathfrak{A}_2$ ter je $\mathfrak{A}_1$ vsebovana v komutantu algbere $\mathfrak{A}_2$, potem sta T_1+T_2 in T_1T_2 krepko harmonična operatorja.*

Dokaz. Naj bo $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$ zaprta podalgebra, ki jo generirara unija $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$. Ker je $\mathfrak{A}$ Banachov levi modul tako nad $\mathfrak{A}_1$ kot nad $\mathfrak{A}_2$ in sta to algebri z ločljivima spektroma, nam izrek 2.4.3 zagotavlja, da je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom. Ker sta operatorja $T_1 + T_2$ in T_1T_2 v $\mathfrak{A}$, sta krepko harmonična. □

Zadnji rezultat v tem razdelku je povezan s problemom invariantnih podprostorov.

Trditev 3.2.7. *Naj bo $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$ algebra z ločljivim spektrom. Če sta v spektru $\Sigma(\mathfrak{A})$ vsaj dve različni točki, potem obstaja v $\mathcal{X}$ pravi netrivialen zaprt podprostor $\mathcal{Y}$, ki je invarianten za vse operatorje iz komutanta algebre $\mathfrak{A}$.*

Dokaz. Naj bosta φ in ψ različni točki v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Potem obstajata takšna operatorja S in T v $\mathfrak{A}$, da je $ST = 0$ in $\varphi(S)\psi(T) \neq 0$. Od tod sledi, da S in T nista trivialna. Zlahka vidimo, da velja

$$\{0\} \neq \overline{im\, S} \subseteq ker\, T \neq \mathcal{X} \quad \text{in} \quad \{0\} \neq \overline{im\, T} \subseteq ker\, S \neq \mathcal{X}.$$

Jasno je, da so podprostori $ker\, S$, $ker\, T$, $\overline{im\, S}$, in $\overline{im\, T}$ invariantni za vse operatorje v komutantu algebre $\mathfrak{A}$. □

Pogoj, da morata biti v spektru algebre vsaj dve različni točki, je v prejšnji trditvi potreben. Namreč, znano je (glejte [**62**]), da obstaja Banachov prostor $\mathcal{X}$ in kvazinilpotenten operator $Q \in B(\mathcal{X})$, ki nima netrivialnih pravih invariantnih podprostorov. Jasno, takšen operator Q skupaj z identičnim operatorjem generira algebro z ločljivim spektrom (zgled 3.1.4).

Posledica 3.2.8. *Naj ima operator $T \in B(\mathcal{X})$ v svojem spektru vsaj dve točki. Če je T krepko harmoničen, potem ima netrivialen pravi invarianten podprostor. Še več, če T skupaj z identičnim operatorjem generira algebro z ločljivim spektrom, na primer, če je spekter $\sigma(T)$ popolnoma nepovezana množica, potem ima T netrivialen pravi hiperinvarianten podprostor.*

3.3. Krepko harmonični elementarni operatorji

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ kompleksna Banachova prostora. *Elementaren operator* $E_{S,T}$ na $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, ki ga določata n-terici operatrojev $\underline{S} = (S_1,\dots,S_n) \subset B(\mathcal{Y})$ in $\underline{T} = (T_1,\dots,T_n) \subset B(\mathcal{X})$, je preslikava, ki jo določa naslednji predpis:

$$E_{S,T}A := S_1AT_1 + \ldots + S_nAT_n, \quad A \in B(\mathcal{X},\mathcal{Y}).$$

Rekli bomo, da so $S_1,\dots,S_n$, $T_1,\dots,T_n$ koeficienti elementarnega operatorja $E_{S,T}$. Označimo z L_S operator levega množenja z $S \in B(\mathcal{Y})$ na $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ in, podobno, naj bo R_T operator desnega množenja s $T \in B(\mathcal{X})$ na $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Seveda, L_S in R_T sta elementarna operatorja. Očitno lahko prej definiran elementaren operator $E_{S,T}$ zapišemo kot $E_{S,T} = L_{S_1}R_{T_1} + \ldots + L_{S_n}R_{T_n}$.

V [**53**] je naslednje vprašanje formulirano kot odprt problem (glejte [**53**], 6.1.7). Kakšni so splošni pogoji, ki jim morata zadoščati n-terici komutirajočih dekomponibilnih operatorjev $\underline{S} \subset B(\mathcal{Y})$ in $\underline{T} \subset B(\mathcal{X})$, da je elementaren operator $E_{S,T}$ dekomponibilen na $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$? Nekaj delnih odgovorov na to vprašanje obstaja, še posebej v primeru ko je obravnavani elementaren operator levo množenje, desno množenje ali posplošeno odvajanje (operator oblike $\delta_{S,T} = L_S - R_T$, kjer sta $S \in B(\mathcal{Y})$ in $T \in B(\mathcal{X})$ dana operatorja), glejte §3.6 v [**53**] in tam navedeno literaturo. Če v zgornjem vprašanju dekomponibilnost zamenjamo s spektralnostjo v smislu Dunforda, se da povedati precej več. Na primer, M. Hladnik [**42**] je popolnoma karakteriziral spektralnost operatorja $E_{S,T}$ v primeru, ko sta $\underline{S}$ in $\underline{T}$ dve n-terici komutirajočih normalnih operatorjev na Hilbertovem prostoru.

V tem razdelku se bomo lotili prej omenjenega vprašanja s stališča krepko harmoničnih operatorjev.

Po posledici 3.2.2 je operator L_S krepko harmoničen, če je $S \in B(\mathcal{Y})$ krepko harmoničen. Naslednji izrek nam zagotavlja, da podobne trditve veljajo tudi za operator desnega množenja R_T, operator dvostranskega množenja $M_{S,T} := L_SR_T$ in posplošeno odvajanje $\delta_{S,T} := L_S - R_T$.

Izrek 3.3.1. *Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ kompleksna Banachova prostora in $S \in B(\mathcal{Y})$ ter $T \in B(\mathcal{X})$ krepko harmonična operatorja. Potem so L_S, R_T, $M_{S,T}$ in $\delta_{S,T}$ krepko harmonični operatorji na $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

Dokaz. Naj bosta $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{Y})$ in $\mathfrak{B} \subset B(\mathcal{X})$ takšni algebri z ločljivima spektroma, da velja $S \in \mathfrak{A}$ in $T \in \mathfrak{B}$. Ker je $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul glede na običajno množenje in je tudi levi Banachov $\mathfrak{B}$-modul, če je množenje definirano s $P \cdot X = XP$, $P \in \mathfrak{B}$, $X \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, (algbera $\mathfrak{B}$ je komutativna, zato je to množenje dobro definirano), sledi po izreku 3.2.1, da sta L_S in R_T krepko harmonična.

Označimo s Φ homomorfizem $Q \mapsto L_Q$, ki slika iz $\mathfrak{A}$ v $B(B(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$. Podobno naj bo Ψ homomorfizem $P \mapsto R_P$, ki slika iz $\mathfrak{B}$ v $B(B(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$. Potem sta $\widetilde{\mathfrak{A}} := \overline{\Phi(\mathfrak{A})}$ in $\widetilde{\mathfrak{B}} := \overline{\Psi(B)}$ algebri z ločljivima spektroma (trditev 2.2.6). Ker je $\Phi(Q)\Psi(P) = L_Q R_P = R_P L_Q = \Psi(P)\Phi(Q)$ pri vseh $Q \in \mathfrak{A}$ in $P \in \mathfrak{B}$, vsebuje komutant algebre $\widetilde{\mathfrak{A}}$ algebro $\widetilde{\mathfrak{B}}$. Torej lahko uporabimo trditev 3.2.6, od koder sledi, da sta $M_{S,T}$ in $\delta_{S,T}$ krepko harmonična. $\square$

Da bi dobili podoben rezultat za splošnejši elementaren operator $E_{S,T}$, kjer sta $\underline{S} = (S_1, \ldots, S_n) \subset B(\mathcal{Y})$ in $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_n) \subset B(\mathcal{X})$ n-terici komutirajočih operatorjev, potrebujemo dodatne pogoje.

Definicija 3.3.2. *n-terica $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_n) \subset B(\mathcal{X})$ komutirajočih operatorjev je* krepko harmonična*, če obstaja takšna algebra z ločljivim spektrom $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$, da je $\underline{T} \subset \mathfrak{A}$.*

Če je $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_n) \subset B(\mathcal{X})$ takšna n-terica komutirajočih operatorjev, da pri vsakem $i = 1, \ldots, n$ obstaja algebra z ločljivim spektrom $\mathfrak{A}_i \subset B(\mathcal{X})$, za katero velja, da je $T_i \in \mathfrak{A}_i$ in za poljubni par indeksov $1 \leq i, j \leq n$ velja, da komutant algebre $\mathfrak{A}_j$ vsebuje algebro $\mathfrak{A}_i$, potem je n-terica $\underline{T}$ krepko harmonična. Obrat očitno velja.

Izrek 3.3.3. *Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ kompleksna Banachova prostora. Če sta $\underline{S} = (S_1, \ldots, S_n) \subset B(\mathcal{Y})$ in $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_n) \subset B(\mathcal{X})$ krepko harmonični n-terici, potem je tudi elementaren operator $E_{S,T}$ krepko harmoničen.*

Dokaz. Ker sta $\underline{S}$ in $\underline{T}$ krepko harmonični n-terici, obstajata takšni algebri z ločljivima spektroma $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{Y})$ in $\mathfrak{B} \in B(\mathcal{X})$, da velja $\underline{S} \subset \mathfrak{A}$ in $\underline{T} \subset \mathfrak{B}$. Podobno kot v dokazu izreka 3.3.1 lahko pokažemo, da obstajata takšni algebri z ločljivima spektroma $\widetilde{\mathfrak{A}}$ in $\widetilde{\mathfrak{B}}$ v $B(B(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$, da je $\underline{L}_S := (L_{S_1}, \ldots, L_{S_n}) \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$, $\underline{R}_T := (R_{T_1}, \ldots, R_{T_n}) \subset \widetilde{\mathfrak{B}}$ in je $\widetilde{\mathfrak{B}}$ vsebovana v komutantu algebre $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Zaprta podalgebra $\mathfrak{C} \subset B(B(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$, ki jo generira unija $\widetilde{\mathfrak{A}} \cup \widetilde{\mathfrak{B}}$ je algebra z ločljivim spektrom in vsebuje elementaren operator $E_{S,T}$. $\square$

Opomba 3.3.4. Algebra $\mathfrak{C}$ iz prejšnjega dokaza vsebuje operatorje L_{S_1}, $\ldots$, L_{S_n}, R_{T_1}, $\ldots$, R_{T_n}, kar pomeni, da je $(L_{S_1}, \ldots, L_{S_n}, R_{T_1}, \ldots, R_{T_n})$ krepko harmonična $2n$-terica operatorjev na $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Vsak krepko harmoničen operator je super-dekomponibilen (trditev 3.1.3) in torej tudi dekomponibilen. V nadaljevanju bomo videli, da je vsaka krepko harmonična n-terica operatorjev dekomponibilna v smislu definicije, ki jo je dal Frunză v [**35**]. Preden navedemo definicijo dekomponibilnosti n-terice $\underline{T}$ komutirajočih omejenih operatorjev na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$, povejmo, da v njej igra ključno vlogo Taylorjev spekter $\sigma(\underline{T}, \mathcal{X})$. Definicijo tega spektra bo bralec našel v originalnem Taylorjevem članku [**65**].

Definicija 3.3.5. *n-terica $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ komutirajočih omejenih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ je* dekomponibilna*, če obstaja takšna spektralna kapaciteta E tipa $(\mathbb{C}^n, \mathcal{X})$, da velja:*

(a) $T_k\mathsf{E}(F) \subseteq \mathsf{E}(F)$ za vse $F \in cl\,(\mathbb{C}^n)$ in $1 \leq k \leq n$;

(b) za vsako množico $F \in cl\,(\mathbb{C}^n)$ je Taylorjev spekter $\underline{T}$, ko deluje na $\mathsf{E}(F)$, vsebovan v F, tj. $\sigma(\underline{T}, \mathsf{E}(F)) \subseteq F$.

Potrebovali bomo še lokalno verzijo Taylorjevega spektra.

Definicija 3.3.6. Analitična resolventna množica *$\rho(\underline{T}, x)$ vektorja $x \in \mathcal{X}$ glede na n-terico $\underline{T}$ omejenih operatorjev na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ je množica vseh tistih $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$, za katere obstajajo takšna odprta okolica V in n takšnih analitičnih funkcij $f_1, \dots, f_n$ na V, ki imajo vrednosti v $\mathcal{X}$, da velja*

$$x = (\zeta_1 - T_1)f_1(\underline{\zeta}) + \ldots + (\zeta_n - T_n)f_n(\underline{\zeta}), \quad \underline{\zeta} \in V.$$

Analitičen lokalni spekter *$\sigma(\underline{T}, x)$ n-terice $\underline{T}$ pri x je komplement množice $\rho(\underline{T}, x)$ v $\mathbb{C}^n$.*

Naslednja opomba nam bo kasneje prišla zelo prav.

Opomba 3.3.7. Po izreku 2.6 v [**1**] ima dekomponibilna n-terica $\underline{T}$ komutirajočih omejenih linearnih operatorjev enolično določeno spektralno kapaciteto E, ki je dana z

$$\mathsf{E}(F) = \{x \in \mathcal{X};\ \sigma(\underline{T}, x) \subseteq F\}, \quad F \in cl\,(\mathbb{C}^n).$$

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Če je $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ n-terica elementov iz $\mathfrak{A}$, naj bo $\widehat{\underline{a}} : \Sigma(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}^n$ preslikava, ki jo določa n-terica Gelfandovih transformirank $(\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n)$. Če je $\underline{L}_a = (L_{a_1}, \dots, L_{a_n})$ n-terica operatorjev množenja na $\mathcal{X}$, ki pripada $\underline{a}$, bomo njen Taylorjev spekter označili kar s $\sigma(\underline{a}, \mathcal{X})$ namesto s $\sigma(\underline{L}_a, \mathcal{X})$. Definirajmo $\Delta_{\underline{a}}(\mathfrak{A}, \mathcal{X}) := \widehat{\underline{a}}^{-1}(\sigma(\underline{a}, \mathcal{X}))$ in naj bo $\Delta(\mathfrak{A}, \mathcal{X}) = \cap_{\underline{a}} \Delta_{\underline{a}}(\mathfrak{A}, \mathcal{X})$, pri čemer je presek vzet po vseh večtericah elementov iz $\mathfrak{A}$. Taylor je dokazal, lema 3.2 v [**65**], da velja

$$\sigma(\underline{a}, \mathcal{X}) = \widehat{\underline{a}}(\Delta(\mathfrak{A}, \mathcal{X})). \tag{3.3.1}$$

Lema 3.3.8. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Za poljubno n-terico $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ elementov v $\mathfrak{A}$ in poljubno zaprto množico $F \subseteq \mathbb{C}^n$ je*

$$\sigma(\underline{a}, \mathcal{X}(\widehat{\underline{a}}^{-1}(F))) \subseteq F.$$

Dokaz. Naj bosta $\underline{a}$ poljubna n-terica elementov iz $\mathfrak{A}$ in F poljubna zaprta podmnožica v $\mathbb{C}^n$. Označimo $\mathcal{F} = \widehat{\underline{a}}^{-1}(F)$. Očitno je $\mathcal{F}$ zaprta podmnožica v $\Sigma(\mathfrak{A})$, kar pomeni, da je spektralni podmodul $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ zaprt (trditev 2.3.1). Vzemimo poljuben element b iz $\mathfrak{A}$ in naj bo $\sigma(L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F}))$ spekter operatorja množenja $L_b \in B(\mathcal{X})$ zoženega na spekralni podmodul $\mathcal{X}(\mathcal{F})$. Znano je, da Taylorjev spekter $\sigma((b), \mathcal{X}(\mathcal{F}))$ in spekter $\sigma(L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F}))$, sovpadata (bralec lahko s pomočjo [**65**] to tudi sam preveri). Ker lahko na $L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F})$ gledamo kot na operator množenja, ki ga b inducira na $\mathcal{X}(\mathcal{F})$, sovpada lokalni spekter operatorja $L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F})$ pri $x \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ z $\widehat{b}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))$ (trditev 2.4.7). Beurlingov spekter vsakega vektorja $x \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ je vsebovan v $\mathcal{F}$. Se pravi, da velja

$$\bigcup_{x \in \mathcal{X}(\mathcal{F})} \sigma_{L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F})}(x) \subseteq \bigcup_{x \in \mathcal{X}(\mathcal{F})} \widehat{b}(Sp_{\mathfrak{A}}(x)) \subseteq \widehat{b}(\mathcal{F}).$$

Po izreku 2.4.1 je operator $L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F})$ dekomponibilen. Potem pa velja

$$\sigma(L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F})) = \bigcup_{x \in \mathcal{X}(\mathcal{F})} \sigma_{L_b|\mathcal{X}(\mathcal{F})}(x)$$

(glejte, recimo, trditev 3.2 v [**35**]). Dokazali smo, da je $\sigma((b), \mathcal{X}(\mathcal{F})) \subseteq \widehat{b}(\mathcal{F})$, od koder sledi

$$\Delta(\mathfrak{A}, \mathcal{X}(\mathcal{F})) \subseteq \Delta_{(b)}(\mathfrak{A}, \mathcal{X}(\mathcal{F})) = \widehat{b}^{-1}(\sigma((b), \mathcal{X}(\mathcal{F}))) \subseteq \widehat{b}^{-1}(\widehat{b}(\mathcal{F})). \tag{3.3.2}$$

Ker je algebra $\mathfrak{A}$ regularna, obstaja za vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus \mathcal{F}$, takšen $b_\varphi \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{b}_\varphi = 0$ na $\mathcal{F}$ in $\widehat{b}_\varphi(\varphi) = 1$. Zaradi tega in (3.3.2) velja $\Delta(\mathfrak{A}, \mathcal{X}(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F}$. Zdaj uporabimo še (3.3.1) in dokaz je končan. □

Izrek 3.3.9. *Krepko harmonična n-terica $\underline{T}$ linearnih operatorjev na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$ je dekomponibilna; njena spektralna kapaciteta je*

$$\mathsf{E}(F) = \mathcal{X}(\widehat{\underline{T}}^{-1}(F)), \quad F \in cl\,(\mathbb{C}^n).$$

Dokaz. Da je E spektralna kapaciteta, ni težko preveriti. Prav tako ni težav s pogojem (a) iz definicije 3.3.5. Da je zadoščeno pogoju (b) iz iste definicije, pa je dokazano v prejšnji lemi. □

Posledica 3.3.10. *Naj bo $\underline{T}$ krepko harmonična n-terica operatorjev na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$. Podalgebra $\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{X})$ naj bo algebra z ločljivim spektrom in naj vsebuje $\underline{T}$. Potem je*

$$\sigma(\underline{T}, x) = \widehat{\underline{T}}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))$$

pri vseh $x \in \mathcal{X}$.

Dokaz. Po izreku 3.3.9 in opombi 3.3.7, je

$$\mathcal{X}(\widehat{\underline{T}}^{-1}(F)) = \{x \in \mathcal{X};\ \sigma(\underline{T}, x) \subseteq F\}, \quad F \in cl\,(\mathbb{C}^n). \tag{3.3.3}$$

Naprej poteka dokaz podobno kot dokaz trditve 2.4.7. Če postavimo $F = \sigma(\underline{T}, x)$ v (3.3.3), dobimo $\widehat{\underline{T}}(Sp_{\mathfrak{A}}(x)) \subseteq \sigma(\underline{T}, x)$. Po drugi strani pa zamenjava množice F v (3.3.3) s $\widehat{\underline{T}}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))$ da obratno inkluzijo. □

Zadnji izrek v tem razdelku nam bo povedal, kako so lokalni spektri elementarnega operatorja, ki ga določata dve krepko harmonični n-terici, povezani z analitičnimi lokalnimi spektri $2n$-terice koeficientov.

Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ Banachova prostora ter $\underline{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ in $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ krepko harmonični n-terici operatorjev — prva na $\mathcal{Y}$ in druga na $\mathcal{X}$. V opombi 3.3.4 smo ugotovili, da je $2n$-terica $\underline{M} = (L_{S_1}, \ldots, L_{S_n}, R_{T_1}, \ldots, R_{T_n})$ krepko harmonična. Naj bo $\mathfrak{C} \subset B(B(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ takšna algebra z ločljivim spektrom, ki vsebuje $\underline{M}$. Naj bo $E_{S,T} = L_{S_1}R_{T_1} + \ldots + L_{S_n}R_{T_n}$. Če je $f : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ funkcija, ki je definirana z $\underline{z} \mapsto z_1z_{n+1} + \ldots + z_nz_{2n}$, $\underline{z} \in \mathbb{C}^{2n}$, potem je $E_{S,T} := f(\underline{M})$. Torej je Gelfandova transformiranka $\widehat{E}_{S,T}$ oblike $\widehat{E}_{S,T} = f \circ \widehat{\underline{M}}$.

Vzemimo poljuben $A \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Potem je po posledici 3.3.10

$$\sigma(\underline{M}, A) = \widehat{\underline{M}}(Sp_{\mathfrak{C}}(A)).$$

Od tod sledi

$$f(\sigma(\underline{M}, A)) = f(\widehat{\underline{M}}(Sp_{\mathfrak{C}}(A))) = \widehat{E}_{S,T}(Sp_{\mathfrak{C}}(A)) = \sigma_{E_{S,T}}(A),$$

pri čemer zadnja enakost velja zaradi trditve 2.4.7. Dokazali smo naslednji izrek.

Izrek 3.3.11. *Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ Banachova prostora in naj bosta $\underline{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ in $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ krepko harmonični n-terici operatrojev — prva na $\mathcal{Y}$ in druga na $\mathcal{X}$. Označimo z $\underline{M}$ $2n$-terico $(L_{S_1}, \ldots, L_{S_n}, R_{T_1}, \ldots, R_{T_n})$ in naj bo $f(\underline{z}) = z_1z_{n+1} + \ldots + z_nz_{2n}$. Potem je lokalni spekter elementarnega operatorja $E_{S,T} = L_{S_1}R_{T_1} + \ldots + L_{S_n}R_{T_n}$ pri $A \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dan z*

$$\sigma_{E_{S,T}}(A) = f(\sigma(\underline{M}, A)).$$

Upodobitve modulov

Za vsako matematično teorijo je zelo pomembno, da primerja splošne abstraktne strukture, ki se pojavijo znotraj nje, z ustreznimi konkretnimi primeri, ki jih v splošnem boljše razumemo. Teorija upodobitev je sistematičen pristop k temu problemu. Zelo dober zgled je Gelfandova teorija za komutativne Banachove algebre, ki pravi, da je vsaka komutativna Banachova algebra *podeljena* z Gelfandovim radikalom izomorfna neki podalgebri v algebri zveznih funkcij z ničlo v neskončnosti na nekem Hausdorffovem prostoru. Samo polenostavne komutativne Banachove algebre lahko zvesto predstavimo kot algebre funkcij. Pri tistih, ki niso polenostavne, moramo izločiti *patološki del*, da to lahko storimo. Situacija je podobna tudi v drugih primerih, recimo v teoriji upodobitev Banachovih algeber z involucijo.

V tem poglavju bomo do neke mere vpeljali in raziskali teorijo upodobitev (levih) modulov nad kompleksno algebro. Sledili bomo idejam iz splošne teorije upodobitev algeber. Vpeljali bomo pojme kot so *prapodmodul, maksimalen podmodul, primitiven podmodul* in ustrezne *radikale* modula. Jasno, ker je modul tesno povezan z algebro, ki deluje na njem, so tudi upodobitve modula tesno povezane z upodobitvami algebre. Teorija, ki jo bomo razvili, razširja teorijo upodobitev algeber v smislu, da obe teoriji sovpadata, ko na samo algebro gledamo kot na levi modul preko leve regularne upodobitve.

4.1. Prapodmoduli

Spomnimo se, da je pravi dvostranski ideal $\mathfrak{I}$ v algebri $\mathfrak{A}$ *praideal*, če iz $\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}$ sledi $\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}$ ali $\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathfrak{I}$ za poljubna dvostranska ideala $\mathfrak{I}_1$ in $\mathfrak{I}_2$ v $\mathfrak{A}$ ([**14**], [**61**], [**63**]). Množico vseh praidealov v algebri $\mathfrak{A}$ bomo označili z $\mathrm{P}(\mathfrak{A})$.

V tem razdelku bomo vpeljali pojem *prapodmodula* (glejte tudi [**57, 58**] in tam navedeno literaturo) in pokazali, da lahko razvijemo teorijo, ki je podobna tisti iz algeber. Preden začnemo, povejmo, da algebre in moduli v tem razdelku niso nujno Banachovi — če so, bomo to posebej povedali.

Definicija 4.1.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul.* Kvocient podmodula $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ v $\mathfrak{A}$ *je množica*

$$(\mathcal{Y} : \mathcal{X}) := \{a \in \mathfrak{A};\ a \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}\}.$$

Očitno je kvocient $(\mathcal{Y} : \mathcal{X})$ podmodula $\mathcal{Y}$ enak anihilatorju kvocientnega levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$. Se pravi, da velja prva točka naslednje trditve.

Trditev 4.1.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul.*

(i) Za vsak podmodul $\mathcal{Y}$ v $\mathcal{X}$ je kvocient $(\mathcal{Y} : \mathcal{X})$ dvostranski ideal v $\mathfrak{A}$, ki vsebuje $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$.

(ii) $(0 : \mathcal{X}) = ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, $(\mathcal{X} : \mathcal{X}) = \mathfrak{A}$ in za poljubno družino $\{\mathcal{Y}_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ podmodulov v $\mathcal{X}$ je $(\cap_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{Y}_i : \mathcal{X}) = \cap_{i\in\mathbb{I}}(\mathcal{Y}_i : \mathcal{X})$.

(iii) Vsak levi ideal $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{A}$ je vsebovan v kvocientu svojega koideala.

(iv) Za vsak podmodul $\mathcal{Y}$ v $\mathcal{X}$ je $(\mathcal{Y} : \mathcal{X})$ največji levi ideal v $\mathfrak{A}$, katerega pripadajoči koideal je vsebovan v $\mathcal{Y}$.

(v) Če je $\mathfrak{I}$ levi ideal v $\mathfrak{A}$, je pripadajoči koideal $\mathfrak{I}\cdot\mathcal{X}$ najmanjši podmodul v $\mathcal{X}$, katerega kvocient vsebuje $\mathfrak{I}$.

(vi) Za poljubna podmodula $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Z}$ iz $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ sledi $(\mathcal{Y} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{Z} : \mathcal{X})$.

Če je $\mathcal{X}$ Banachov modul (in je torej $\mathfrak{A}$ Banachova algebra), potem veljajo še naslednje trditve.

(vii) Kvocient zaprtega podmodula je zaprt ideal.

(viii) Pri poljubnem podmodulu $\mathcal{Y}$ v $\mathcal{X}$ velja $\overline{(\mathcal{Y} : \mathcal{X})} \subseteq (\overline{\mathcal{Y}} : \mathcal{X})$.

Dokaz. Točki (ii) in (iii) očitno veljata. Če je $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{A}$ takšen levi ideal, da je $\mathfrak{I} \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, je $\mathfrak{I} \subseteq (\mathcal{Y} : \mathcal{X})$, zato velja (iv). Naj bo $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ poljuben podmodul, katerega kvocient vsebuje $\mathfrak{I}$. Potem je $\mathfrak{I} \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Ker je po (iii) $\mathfrak{I} \subseteq (\mathfrak{I} \cdot \mathcal{X} : \mathcal{X})$, velja točka (v). Veljavnost (vi) zlahka preverimo. Da bi dokazali (vii), predpostavimo, da je $\mathcal{Y}$ zaprt podmodul in da je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje v $(\mathcal{Y} : \mathcal{X})$, ki konvergira k $a \in \mathfrak{A}$. Potem za vsak $x \in \mathcal{X}$ velja, da je $\{a_n \cdot x\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje v $\mathcal{Y}$, ki konvergira k $a \cdot x$. Ker je $\mathcal{Y}$ zaprt, je $a \cdot x$ v $\mathcal{Y}$. Torej je $a \in (\mathcal{Y} : \mathcal{X})$. Veljavnost točke (viii) sledi iz (vi) in (vii). $\square$

Iz točk (iii) in (iv) v zgornji trditvi sledi, da lahko koideal $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ zapišemo kot $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y} : \mathcal{X}) \cdot \mathcal{X}$.

Inkluzija v točki (viii) trditve 4.1.2 je včasih prava.

Zgled 4.1.3. Naj bo $\mathcal{X}$ poljuben neskončnodimenzionalen kompleksen Banachov prostor. Potem je $\mathcal{X}$ seveda levi Banachov $\mathbb{C}$-modul. Če je $\mathcal{Y}$ gosta hiperravnina v $\mathcal{X}$, tj. gosta linearna podmnožica s kodimenzijo 1, potem je očitno $\overline{(\mathcal{Y} : \mathcal{X})} = (\mathcal{Y} : \mathcal{X}) = \{0\} \subset \mathbb{C}$ in $(\overline{\mathcal{Y}} : \mathcal{X}) = (\mathcal{X} : \mathcal{X}) = \mathbb{C}$.

Definicija 4.1.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Pravi podmodul $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ je* prapodmodul*, če za poljuben dvostranski ideal $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{A}$ in poljuben podmodul $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ iz $\mathfrak{I} \cdot \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$ sledi $\mathfrak{I} \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$ ali $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$.*

Trditev 4.1.5. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Potem je kvocient vsakega prapodmodula v $\mathcal{X}$ praideal v $\mathfrak{A}$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{P}$ prapodmodul v $\mathcal{X}$. Kvocient $(\mathcal{P}:\mathcal{X})$ je pravi ideal v $\mathfrak{A}$, saj enota ni v tem idealu, ker je $\mathcal{P}$ pravi podmodul.

Uporabili bomo izrek 4.1.10 iz [**61**], ki pravi, da je pravi dvostranski ideal $\mathfrak{J}$ v $\mathfrak{A}$ praideal natanko tedaj, ko za poljubna $u, v \in \mathfrak{A}$ iz inkluzije $u\mathfrak{A}v \subseteq \mathfrak{J}$ sledi $u \in \mathfrak{J}$ ali $v \in \mathfrak{J}$.

Naj bosta a in b takšna iz $\mathfrak{A}$, da je $a\mathfrak{A}b \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$. Če je $b \cdot x \in \mathcal{P}$ za vse $x \in \mathcal{X}$, potem je $b \in (\mathcal{P}:\mathcal{X})$. Privzemimo torej, da obstaja takšen x v $\mathcal{X}$, da $y := b \cdot x$ ni v $\mathcal{P}$. Potem x seveda ni v $\mathcal{P}$ in b ni v $(\mathcal{P}:\mathcal{X})$. Iz $a\mathfrak{A}b \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ sledi, da je $(a\mathfrak{A}) \cdot y = (a\mathfrak{A}b) \cdot x \subseteq \mathcal{P}$. Upoštevajmo, da je $\mathcal{P}$ podmodul, pa od tod sledi $(\mathfrak{A}a\mathfrak{A}) \cdot y \subseteq \mathcal{P}$ in potem še $(\mathfrak{A}a\mathfrak{A}) \cdot (\mathfrak{A} \cdot y) \subseteq \mathcal{P}$. Za dvostranski ideal $\mathfrak{I} := \mathfrak{A}a\mathfrak{A}$ in podmodul $\mathcal{Y} := \mathfrak{A} \cdot y$ torej velja $\mathfrak{I} \cdot \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$. Ker je $\mathcal{P}$ prapodmodul, je $\mathfrak{I} \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ ali $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$. Druga možnost odpade, ker y ni v $\mathcal{P}$. Se pravi, da je $a \in \mathfrak{A}a\mathfrak{A} \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$. □

Naslednji izrek je modulska varianta v zgornjem dokazu uporabljenega izreka 4.1.10 iz [**61**].

Izrek 4.1.6. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Za pravi podmodul $\mathcal{P}$ v $\mathcal{X}$ so ekvivalentne naslednje trditve.*

(a) $\mathcal{P}$ je prapodmodul.

(b) Za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ iz $(a\mathfrak{A}) \cdot x \subseteq \mathcal{P}$ sledi $a \in (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ ali $x \in \mathcal{P}$.

(c) Za vsak levi (desni) ideal $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{A}$ in vsak podmodul $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ iz $\mathfrak{I} \cdot \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$ sledi $\mathfrak{I} \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ ali $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$.

Dokaz. (a)$\rightarrow$ (b). Naj bosta $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ poljubna takšna elementa, za katera velja $a \cdot \mathfrak{A} \cdot x \subseteq \mathcal{P}$. Ker je $\mathcal{P}$ podmodul, je tudi $(\mathfrak{A}a\mathfrak{A}) \cdot (\mathfrak{A} \cdot x) \subseteq \mathcal{P}$. Se pravi, da za dvostranski ideal $\mathfrak{I} := \mathfrak{A}a\mathfrak{A}$ in podmodul $\mathcal{Y} := \mathfrak{A} \cdot x$ velja $\mathfrak{I} \cdot \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$, od koder sledi $\mathfrak{I} \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ ali $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$. Če velja prva inkluzija, je $a \in (\mathcal{P}:\mathcal{X})$, če velja druga, je $x \in \mathcal{P}$.

(b)$\rightarrow$ (c). Naj za levi (desni) ideal $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{A}$ in podmodul $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ velja $\mathfrak{I} \cdot \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$. Predpostavimo, da $\mathcal{Y} \not\subseteq \mathcal{P}$. Izberimo $y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{P}$. Za vsak $a \in \mathfrak{I}$ je $a \cdot \mathfrak{A} \cdot y \subseteq \mathfrak{I} \cdot \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$. Ker $y \notin \mathcal{P}$, velja pa (b), je $a \in (\mathcal{P}:\mathcal{X})$.

(c)$\rightarrow$ (a) Očitno, saj je vsak dvostranski ideal tudi levi ideal. □

Posledica 4.1.7. *Če je $\mathfrak{A}$ komutativna algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul, potem je pravi podmodul $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ prapodmodul natanko tedaj, ko za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ iz $a \cdot x \in \mathcal{P}$ sledi $a \in (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ ali $x \in \mathcal{P}$.*

Dokaz. Če sta $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ takšna, da je $a \cdot x \in \mathcal{P}$, potem je $a\mathfrak{A} \cdot x \subseteq \mathcal{P}$, saj je $\mathcal{P}$ podmodul, $\mathfrak{A}$ pa je komutativna algebra. Ker je $\mathcal{P}$ prapodmodul, je po prejšnjem izreku $a \in (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ ali $x \in \mathcal{P}$.

Obrat. Naj bosta $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ takšna, da je $a\mathfrak{A} \cdot x \subseteq \mathcal{P}$. Ker ima $\mathfrak{A}$ enoto in je $\mathcal{X}$ unitalen, je $a \cdot x \in \mathcal{P}$. Po predpostavki je $a \in (\mathcal{P} : \mathcal{X})$ ali $x \in \mathcal{P}$. Spet uporabimo prejšnji izrek. □

Naj bo $\mathcal{X}$ levi modul nad algebro $\mathfrak{A}$. Množico vseh prapodmodulov v $\mathcal{X}$ bomo označili z $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. V primeru Banachovih modulov nas bodo zanimali zaprti prapodmoduli, množico teh bomo označili z $\overline{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$.

4.2. Kociklični in maksimalni podmoduli

Algebra $\mathfrak{A}$ deluje *ciklično* na netrivialnem levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$, če obstaja takšen vektor $e \in \mathcal{X}$, imenovan *cikličen vektor*, da je podmodul $(e) := \mathfrak{A} \cdot e$ enak celemu modulu $\mathcal{X}$. V tem primeru bomo rekli, da je $\mathcal{X}$ *cikličen modul.* Zgled cikličnega levega modula je vsaka algebra z enoto: vsak obrnljiv element je cikličen vektor. Levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ je *topološko cikličen*, če ima *topološko cikličen vektor*, tj. takšen vektor $e \in \mathcal{X}$, da je podmodul (e) gost v $\mathcal{X}$.

V nadaljevanju naj bo $\mathcal{X}$ levi cikličen $\mathfrak{A}$-modul in e cikličen vektor v njem. Če je $\mathcal{X}$ Banachov $\mathfrak{A}$-modul (in je torej $\mathfrak{A}$ Banachova algebra), naj bo $\|e\| = 1$. Spomnimo se, da smo z $\mathrm{P}(e)$ označili preslikavo $a \mapsto a \cdot e$, ki slika iz $\mathfrak{A}$ v $\mathcal{X}$. Ker je e cikličen, je $\mathrm{P}(e)$ linearna surjekcija. Če je $\mathcal{X}$ Banachov $\mathfrak{A}$-modul, je $\|\mathrm{P}(e)\| \leq 1$, ker je $\|e\| = 1$. Označimo z $\mathcal{I}$ jedro $ker\,\mathrm{P}(e)$. To je levi ideal v $\mathfrak{A}$, zaprt, ko je $\mathcal{X}$ Banachov modul.

Z $\rho(e) :\ a+\mathcal{I} \mapsto a \cdot e$ je dobro definirana linearna preslikava iz kvocientnega prostora $\mathfrak{A}/\mathcal{I}$ v $\mathcal{X}$. Naj bo q kvocientna preslikava iz $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{A}/\mathcal{I}$. Potem je $\rho(e) \circ q = \mathrm{P}(e)$, od koder sledi, da je $\rho(e)$ bijekcija. Ker je v primeru, ko je $\mathcal{X}$ Banachov modul

$$\|\rho(e)(a+\mathcal{I})\| = \|a \cdot e\| = \|(a-m) \cdot e\| \leq \|a-m\|$$

za vse $m \in \mathcal{I}$, je $\|\rho(e)\| \leq 1$. Torej je tudi $\rho(e)^{-1}$ omejena linearna preslikava.

Označimo z $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ podmnožico vseh tistih vektorjev $x \in \mathcal{X}$, za katere obstaja tak $a \in \mathfrak{A}$, da je $a \cdot x = e$. Definicija množice $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ je neodvisna od izbire cikličnega vektorja. Namreč, vzemimo, da je tudi $f \in \mathcal{X}$ cikličen vektor. Ker je e cikličen, obstaja tak $b \in \mathfrak{A}$, da je $b \cdot e = f$. Se pravi, da je $ba \cdot x = b \cdot e = f$. Pripomnimo še, da množica $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ ni prazna, saj je cikličen vektor e je v njej. Glede na prej povedano so v $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ vsi ciklični vektorji. Velja tudi obrat, če je $x \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, potem je x cikličen. Namreč, naj bo $a \in \mathfrak{A}$ takšen, da je $a \cdot x = e$. Poljuben $y \in \mathcal{X}$ lahko zapišemo kot $y = b \cdot e$, kjer je b nek element iz $\mathfrak{A}$. Se pravi, da je $y = ba \cdot x$, kar pomeni, da je x cikličen. V $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ so torej natanko vsi ciklični vektorji. Razširimo definicijo množice $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ in jo imejmo za prazno, če $\mathcal{X}$ nima cikličnega vektorja.

Naslednja trditev je ena od tistih, ki kažejo na podobnost med cikličnostjo v modulih in obrnljivostjo v algebrah.

Trditev 4.2.1. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *Banachova algebra z enoto in* $\mathcal{X}$ *netrivialen cikličen Banachov levi* $\mathfrak{A}$*-modul. Če je* $e \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$ *in za* $x \in \mathcal{X}$ *velja* $\|e-x\| < \|\rho(e)^{-1}\|^{-1}$, *potem je tudi* $x \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$. *Se pravi, da je* $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ *odprta podmnožica v* $\mathcal{X}$.

Dokaz. Naj veljajo pogoji trditve. Potem je

$$\|\rho(e)^{-1}(e-x)\| \leq \|\rho(e)^{-1}\|\|e-x\| < 1.$$

Če je $a \in \mathfrak{A}$ takšen, da je $\rho(e)^{-1}(x) = a + \mathcal{I}$, je $\rho(e)^{-1}(e-x) = 1 - a + \mathcal{I}$. Torej je $\|1 - a + \mathcal{I}\| < 1$, kar pomeni, da obstaja takšno število $\varepsilon > 0$, da velja $\|1 - a + \mathcal{I}\| + \varepsilon < 1$. Potem pa obstaja takšen $m \in \mathcal{I}$, pri katerem je $\|1 - a + m\| \leq \|1 - a + \mathcal{I}\| + \varepsilon < 1$. Po izreku 1.4.1 iz [**50**] je $a - m$ obrnljiv v $\mathfrak{A}$. Iz $(a-m)\cdot e = a \cdot e = x$ sledi $(a-m)^{-1} \cdot x = e$, kar pomeni, da je $x \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$. □

Posledica 4.2.2. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *Banachova algebra z enoto in* $\mathcal{X}$ *netrivialen cikličen Banachov levi* $\mathfrak{A}$*-modul. Če je* $\mathcal{Y}$ *pravi podmodul v* $\mathcal{X}$, *potem je tudi njegovo zaprtje* $\overline{\mathcal{Y}}$ *pravi podmodul v* $\mathcal{X}$.

Dokaz. Ker je $\mathcal{Y}$ pravi podmodul v $\mathcal{X}$, sta množici $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ disjunktni. Se pravi, da je $\mathcal{Y}$ podmnožica zaprte množice $\mathcal{X} \setminus \mathcal{G}(\mathcal{X})$. Potem pa je tudi $\overline{\mathcal{Y}}$ podmnožica v $\mathcal{X} \setminus \mathcal{G}(\mathcal{X}) \neq \mathcal{X}$. □

Očitno vektor 0 ni nikoli cikličen, če je modul netrivialen. Če za netrivialen levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ velja $\mathcal{G}(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \setminus \{0\}$, bomo rekli, da je *enostaven*. Jasno, to se zgodi natanko tedaj, ko $\mathcal{X}$ ne premore nobenega pravega netrivialnega podmodula.

Definicija 4.2.3. *(i) Podmodul* $\mathcal{Y}$ *v levem* $\mathfrak{A}$*-modulu* $\mathcal{X}$ *je* kocikličen, *če algebra* $\mathfrak{A}$ *deluje ciklično na kvocientnem* $\mathfrak{A}$*-modulu* $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$. *Vektor* $e \in \mathcal{X}$ *je* kocikličen za $\mathcal{Y}$, *če je* $e + \mathcal{Y}$ *cikličen za* $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$.

(ii) Pravi podmodul $\mathcal{M}$ *v levem* $\mathfrak{A}$*-modulu* $\mathcal{X}$ *je* maksimalen, *če ni vsebovan v nobenem večjem pravem podmodulu.*

Namen naslednje trditve je pokazati podobnost med kocikličnimi podmoduli in modularnimi ideali — glejte izrek 2.4.6 v [**61**] — vendar je potrebno opozoriti tudi na bistveno razliko: po točki (iii) naslednje trditve je vsak maksimalen podmodul kocikličen, toda, kot je dobro znano, obstajajo algebre in maksimalni ideali v njih, ki niso modularni.

Trditev 4.2.4. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *algebra z enoto in* $\mathcal{X}$ *levi* $\mathfrak{A}$*-modul.*

(i) Če je $\mathcal{Y}$ *pravi netrivialen kocikličen podmodul v* $\mathcal{X}$, *potem ne vsebuje nobenega kocikličnega vektorja.*

(ii) Če podmodul $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ *vsebuje kocikličen podmodul* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$*, potem je tudi* $\mathcal{Z}$ *kocikličen.*

(iii) Če je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ *maksimalen podmodul, je* $\mathcal{X}/\mathcal{M}$ *enostaven* $\mathfrak{A}$*-modul, od koder sledi, da je* $\mathcal{M}$ *kocikličen.*

(iv) Če vektor $x \in \mathcal{X}$ *ni v maksimalnem podmodulu* $\mathcal{M}$*, potem je* $\mathfrak{A} \cdot x + \mathcal{M} = \mathcal{X}$.

(v) Vsak pravi kocikličen podmodul je vsebovan v maksimalnem podmodulu.

(vi) Če je $\mathfrak{A}$ *Banachova algebra, ki deluje na Banachovem levem* $\mathfrak{A}$*-modulu* $\mathcal{X}$ *ciklično, potem je vsak maksimalen podmodul v* $\mathcal{X}$ *zaprt.*

Dokaz. Točka (i) očitno velja.

(ii) Predpostavimo lahko, da je $\mathcal{Z}$ pravi podmodul v $\mathcal{X}$. Naj bo e kocikličen za $\mathcal{Y}$. Pokažimo, da je $e + \mathcal{Z}$ cikličen vektor za $\mathcal{X}/\mathcal{Z}$. Za poljuben $x \in \mathcal{X}$ obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $a \cdot (e+\mathcal{Y}) = x+\mathcal{Y}$. Torej je $a \cdot e - x \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$. Od tod sledi $a \cdot (e + \mathcal{Z}) = x + \mathcal{Z}$.

(iii) Naj bo $\mathcal{M}$ maksimalen podmodul v $\mathcal{X}$ in naj bo $\mathcal{Z}$ netrivialen podmodul v $\mathcal{X}/\mathcal{M}$. Množica $\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{X};\ x + \mathcal{M} \in \mathcal{Z}\}$ je podmodul v $\mathcal{X}$ in očitno je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Ker je $\mathcal{Z}$ netrivialen, obstaja v $\mathcal{N}$ takšen x_0, da je $x_0 + \mathcal{M}$ neničelni vektor v $\mathcal{Z}$. To pomeni, da $x_0 \notin \mathcal{M}$. Zaradi maksimalnosti $\mathcal{M}$ od tod sledi $\mathcal{N} = \mathcal{X}$, oziroma $\mathcal{Z} = \mathcal{X}/\mathcal{M}$. Zdaj je očitno, da so vsi neničelni vektorji v $\mathcal{X}/\mathcal{M}$ ciklični, kar pomeni, da je $\mathcal{M}$ kocikličen.

(iv) Množica $\mathfrak{A} \cdot x + \mathcal{M}$ je podmodul v $\mathcal{X}$, ki vsebuje $\mathcal{M}$. Ker je $\mathcal{M}$ maksimalen podmodul in $x \notin \mathcal{M}$, mora biti $\mathfrak{A} \cdot x + \mathcal{M} = \mathcal{X}$.

(v) Naj bo $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ pravi kocikličen podmodul in $e \in \mathcal{X}$ kocikličen vektor za $\mathcal{Y}$. Z $\mathcal{F}$ označimo družino vseh tistih podmodulov v $\mathcal{X}$, ki vsebujejo $\mathcal{Y}$ in ne vsebujejo e. Glede na inkluzijo je $\mathcal{F}$ delno urejena. Unija poljubne linearno urejene poddružine v $\mathcal{F}$ je zgornja meja te poddružine. Potem pa po Zornovi lemi v $\mathcal{F}$ obstaja maksimalen element.

(vi) To je neposredna posledica maksimalnosti in posledice 4.2.2. □

Očitno je levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ cikličen natanko tedaj, ko je trivialen podmodul 0 kocikličen. Slednje pa velja, po točki (ii) predhodne trditve, natanko tedaj, ko so vsi podmoduli v $\mathcal{X}$ kociklični.

Trditev 4.2.5. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *algebra z enoto in* $\mathcal{X}$ *levi* $\mathfrak{A}$*-modul. Vsak maksimalen podmodul v* $\mathcal{X}$ *je prapodmodul.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{M}$ maksimalen podmodul v $\mathcal{X}$. Po definiciji je maksimalen podmodul pravi podmodul. Naj bosta $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ poljubna elementa, za katera velja $a\mathfrak{A} \cdot x \in \mathcal{M}$. Predpostavimo, da $a \notin (\mathcal{M} : \mathcal{X})$ in $x \notin \mathcal{M}$. Zaradi prve predpostavke obstaja v $\mathcal{X}$ takšen y, da $a \cdot y$ ni v $\mathcal{M}$. Iz druge pa sledi, da je $x+\mathcal{M}$ neničelni vektor v $\mathcal{X}/\mathcal{M}$. Po točki (iii) trditve 4.2.4

je $x+\mathcal{M}$ cikličen v $\mathcal{X}/\mathcal{M}$. Se pravi, da za nek $b \in \mathfrak{A}$ velja $b\cdot(x+\mathcal{M}) = y+\mathcal{M}$, od koder sledi

$$a \cdot y + \mathcal{M} = ab \cdot (x + \mathcal{M}) \subseteq a\mathfrak{A} \cdot (x + \mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

Toda to je v protislovju z dejstvom, da $a \cdot y$ ni v $\mathcal{M}$. □

Iz prejšnje trditve in trditve 4.1.5 izhaja, da je kvocient maksimalnega podmodula praideal. Naslednji zgled pa kaže, da kvocient maksimalnega podmodula ni nujno maksimalen ideal.

Zgled 4.2.6. Naj bo $\mathcal{H}$ neskončnodimenzionalen separabilen Hilbertov prostor. Prostor $\mathcal{X} := \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ napravimo za levi $B(\mathcal{H})$ modul z množenjem $A \cdot (x, y) = (Ax, Ay)$. Podprostor $\mathcal{M} := \mathcal{H} \times \{0\}$ je maksimalen podmodul v $\mathcal{X}$. Namreč, predpostavimo, da obstaja v $\mathcal{X}$ takšen podmodul $\mathcal{Y}$, ki vsebuje $\mathcal{M}$. Če je $(x, y) \in \mathcal{Y}$, je tudi $(0, y) \in \mathcal{Y}$. Predpostavimo, da je $y \neq 0$. Potem je $\{0\} \times \mathcal{H} = B(\mathcal{H}) \cdot (0, y) \subset \mathcal{Y}$. Se pravi, da je $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. Ni težko videti, da je $(\mathcal{M} : \mathcal{X})$ trivialen ideal v $B(\mathcal{H})$, kar seveda pomeni, da ni maksimalen, saj je vsebovan v idealu kompaktnih operatorjev.

Množico vseh maksimalnih podmodulov v danem levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$ bomo označili s $\Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. V primeru Banachovih modulov nas bodo zanimali le zaprti maksimalni podmoduli, množico teh bomo označili s $\overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Po trditvi 4.2.5 imamo naslednji inkluziji $\Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in $\overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Če je $\mathcal{X}$ cikličen levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, je $\Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = \overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ po trditvi 4.2.4 (vi).

4.3. Upodobitve modulov

Začeli bomo z definicijo upodobitve modula. Ker se bomo v nadaljevanju večkrat zgledovali pri upodobitvah algeber, povejmo, da je teorija slednjih dobro obdelana v [**61**].

Definicija 4.3.1. *Naj bo $\mathcal{X}$ levi modul nad algebro $\mathfrak{A}$ in naj bosta $\mathcal{Y}$ ter $\mathcal{Z}$ vektorska prostora.*

(i) Linearna preslikava $\Theta : \mathcal{X} \to L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ je upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, *če obstaja takšna upodobitev θ algebre $\mathfrak{A}$ na prostoru $\mathcal{Z}$, da velja*

$$\Theta(a \cdot x) = \theta(a)\Theta(x) \quad \textit{za vse } a \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X}. \tag{4.3.1}$$

(ii) Antiupodobitev *modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ je linearna preslikava* $\mathrm{H} : \mathcal{X} \to L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, *za katero velja*

$$\mathrm{H}(a \cdot x) = \mathrm{H}(x)\eta(a) \quad \textit{pri vseh } a \in \mathfrak{A},\ x \in \mathcal{X}, \tag{4.3.2}$$

pri čemer je η antiupodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na prostoru $\mathcal{Y}$.

Če je Θ upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, potem v splošnem pripadajoča upodobitev θ algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Z}$ ni enolično določena. Na primer, če je Θ trivialna, tj. $\Theta(x) = 0$ za vse $x \in \mathcal{X}$, potem vsaka upodobitev θ algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Z}$ zadošča (4.3.1) (skupaj s Θ).

Trditev 4.3.2. *Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul.*

Če je Θ takšna upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, da je

$$lin \bigcup_{x \in \mathcal{X}} im\, \Theta(x) = \mathcal{Z},$$

potem obstaja natanko ena upodobitev θ algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Z}$, da velja (4.3.1)*.*

Za antiupodobitev H *modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ obstaja natanko ena antiupodobitev η algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Y}$, ki zadošča* (4.3.2)*, če je*

$$\bigcap_{x \in \mathcal{X}} ker\, \mathrm{H}(x) = \{0\}.$$

Dokaz trditve je zelo enostaven, zato ga bomo izpustili.

Odslej bomo vedno privzeli, da sta pogoja iz trditve 4.3.2 izpolnjena. S tem nismo izgubili na splošnosti. Če je $lin \bigcup_{x \in \mathcal{X}} im\, \Theta(x)$ pravi podprostor v $\mathcal{Z}$, lahko brez škode prostor $\mathcal{Z}$ nadomestimo s prostorom $lin \bigcup_{x \in \mathcal{X}} im\, \Theta(x)$, saj se na tistem delu prostora $\mathcal{Z}$, ki ni v $lin \bigcup_{x \in \mathcal{X}} im\, \Theta(x)$, nič ne dogaja. Podobno lahko prostor $\mathcal{Y}$ zamenjamo s prostorom $\mathcal{Y} / \bigcap_{x \in \mathcal{X}} ker\, \mathrm{H}(x)$, če je $\bigcap_{x \in \mathcal{X}} ker\, \mathrm{H}(x)$ netrivialen podprostor v $\mathcal{Y}$.

Ker upodobitev modula in pripadajoča upodobitev algebre delujeta v paru, bomo včasih kar paru teh dveh preslikav rekli upodobitev modula. Tako je, na primer, (Θ, θ) upodobitev levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ natanko tedaj, ko velja (4.3.1). Podobno je par (H, η) antiupodobitev natanko tedaj, ko velja (4.3.2).

Na prostor $L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ lahko gledamo kot na levi $L(\mathcal{Z})$-modul: modulsko množenje je komponiranje preslikav. V tem smislu je torej upodobitev modula $\mathcal{X}$ modulski homomorfizem iz $\mathcal{X}$ v levi $L(\mathcal{Z})$-modul $L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Če na $L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ pogledamo kot na desni $L(\mathcal{Y})$-modul, je antiupodobitev modulski antihomomorfizem iz $\mathcal{X}$ v desni $L(\mathcal{Y})$-modul $L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$.

Za dano upodobitev Θ (antiupodobitev H) modula $\mathcal{X}$ bomo rekli, da je *trivialna*, če je $\Theta(x) = 0$ (oziroma $\mathrm{H}(x) = 0$) za vse $x \in \mathcal{X}$. Nadalje bomo rekli, da je Θ *ciklična upodobitev* modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, če obstaja v $\mathcal{Y}$ takšen vektor y — *cikličen vektor* — da je $\{\Theta(x)y;\ x \in \mathcal{X}\} = \mathcal{Z}$. *Ciklična antiupodobitev* je definirana na enak način.

Trditev 4.3.3. *Naj bo $\mathcal{X}$ levi modul nad algebro $\mathfrak{A}$.*

(i) Jedro vsake upodobitve ali antiupodobitve modula $\mathcal{X}$ je podmodul v $\mathcal{X}$.

(ii) Če je (Θ, θ) upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z},)$ potem je za vsak vektor $y \in \mathcal{Y}$ množica $\{\Theta(x)y;\ x \in \mathcal{X}\}$ θ-invarianten podprostor v $\mathcal{Z}$.

(iii) Če je (Θ, θ) *upodobitev modula* $\mathcal{X}$ *na paru* $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$*, potem je* $ker\,\theta \subseteq (ker\,\Theta : \mathcal{X})$*. Podobna inkluzija velja za antiupodobitev* (H, η) *modula* $\mathcal{X}$*.*

Dokaz. (i) Jasno.

(ii) Naj bo y vektor iz $\mathcal{Y}$. Množica $\mathcal{M} = \{\Theta(x)y;\ x \in \mathcal{X}\}$ je očitno linearen podprostor v $\mathcal{Z}$. Zaradi $\theta(a)[\Theta(x)y] = \Theta(a \cdot x)y$, je ta podprostor θ-invarianten.

(iii) Če je $a \in ker\,\theta$, potem za vsak $x \in \mathcal{X}$ velja $\Theta(a \cdot x) = 0$, kar pomeni, da je $a \cdot \mathcal{X} \subseteq ker\,\Theta$, oziroma $a \in (ker\,\Theta : \mathcal{X})$. Enak razmislek velja v primeru antiupodobitev. □

V primeru Banachovih modulov nas bodo zanimale predvsem upodobitve na parih Banachovih prostorov.

Definicija 4.3.4. *Naj bo* $\mathcal{X}$ *levi Banachov* $\mathfrak{A}$*-modul. Upodobitev* Θ *modula* $\mathcal{X}$ *na paru Banachovih prostorov* $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ *je*

(i) normirana*, če je* $\Theta(x) \in B(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ *za vse* $x \in \mathcal{X}$*;*

(ii) topološko ciklična*, če obstaja v* $\mathcal{Y}$ topološko cikličen vektor y*, tj. vektor za katerega velja, da je množica* $\Theta(\mathcal{X})y = \{\Theta(x)y;\ x \in \mathcal{X}\}$ *gosta v* $\mathcal{Z}$*;*

(iii) zvezna*, če je normirana in je kot preslikava iz* $\mathcal{X}$ *v* $B(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ *zvezna;*

(iv) krepko zvezna*, če je preslikava* $\Theta_y : x \mapsto \Theta(x)y$*, ki slika iz* $\mathcal{X}$ *v* $\mathcal{Z}$*, zvezna za vsak* $y \in \mathcal{Y}$*.*

Če je $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul in (Θ, θ) upodobitev $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, ni nujno, da je θ normirana upodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Z}$, toda mi bomo odslej to privzeli. Še več, običajno bomo predpostavili, da norma upodobitve θ ne presega 1, tako da bomo lahko na $\mathcal{Z}$ gledali kot na levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Podoben privzetek bo veljal tudi za antiupodobitve.

Naslednja trditev je modulska varianta trditve 4.2.2 iz [**61**], tudi dokaz je zelo podoben.

Trditev 4.3.5. *Normirana krepko zvezna upodobitev* Θ *levega Banachovega* $\mathfrak{A}$*-modula* $\mathcal{X}$ *na paru Banachovih prostorov* $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ *je zvezna.*

Dokaz. Zaradi krepke zveznosti je vsaka od preslikav Θ_y, $y \in \mathcal{Y}$, zvezna. Ker je Θ tudi normirana, velja $\|\Theta_y(x)\| = \|\Theta(x)y\| \leq \|\Theta(x)\|$ za vse $x \in \mathcal{X}$ in vse $y \in \mathcal{Y}$, $\|y\| \leq 1$. Po principu enakomerne omejenosti (glejte recimo [**22**], III.14.1) obstaja takšna konstanta $M > 0$, da je $\|\Theta_y\| \leq M$ za vse $y \in \mathcal{Y}$, $\|y\| \leq 1$. Od tod sledi

$$\|\Theta(x)\| = \sup\{\|\Theta(x)y\|;\ y \in \mathcal{Y},\ \|y\| \leq 1\} \leq M\|x\|,$$

kar pomeni, da je Θ zvezna. □

Zgled 4.3.6. Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Spomnimo se, da smo v razdelku 4.1 pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ z $\mathrm{P}(x)$ označili linearno preslikavo $a \mapsto a \cdot x$, ki slika iz algebre $\mathfrak{A}$ v modul $\mathcal{X}$. Ni težko videti, da je preslikava $\mathrm{P} : x \mapsto \mathrm{P}(x)$, ki slika iz $\mathcal{X}$ v $L(\mathfrak{A}, \mathcal{X})$, linearna. Označimo z ρ desno regularno upodobitev algebre $\mathfrak{A}$. Zlahka se prepričamo, da pri poljubnih $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ velja $\mathrm{P}(a \cdot x) = \mathrm{P}(x)\rho(a)$, kar pomeni, da je P antiupodobitev levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathfrak{A}, \mathcal{X})$. Tej antiupodobitvi bomo v nadaljevanju rekli *regularna desna upodobitev* levega modula $\mathcal{X}$.

Levi modul nima regularne leve upodobitve. Desni modul ima regularno levo upodobitev, nima pa regularne desne upodobitve. Bimoduli imajo obe regularni upodobitvi.

Če je $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul in (Θ, θ) njegova upodobitev na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, je s $\Theta' : x \mapsto \Theta(x)'$, kjer je $\Theta(x)'$ adjungirana preslikava, definirana linearna preslikava iz $\mathcal{X}$ v $L(\mathcal{Z}', \mathcal{Y}')$. Označimo s θ' na podoben način dobljeno preslikavo iz $\mathfrak{A}$ v $L(\mathcal{Z}')$ Ni težko videti, da je θ' antiupodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Z}'$. Ker pri poljubnih $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ velja $\Theta(a \cdot x)' = \Theta(x)'\theta(a)'$, je (Θ', θ') antiupodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Z}', \mathcal{Y}')$. Bralec se bo brez dvoma strinjal, da bi v primeru, ko bi namesto upodobitve (Θ, θ) imeli antiupodobitev (H, η) modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, dobili upodobitev (H', η') modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Z}', \mathcal{Y}')$. Imamo torej naslednjo trditev.

Trditev 4.3.7. *Če je (Θ, θ) upodobitev ((H, η) antiupodobitev) modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, potem je (Θ', θ') antiupodobitev ((H', η') upodobitev) modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Z}', \mathcal{Y}')$.*

Zgled 4.3.8. Naj bo P desna regularna upodobitev levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$. Potem je P' preslikava iz $\mathcal{X}$ v $L(\mathcal{X}', \mathfrak{A}')$, in zanjo velja

$$\langle \mathrm{P}'(x)\xi, a\rangle = \langle \xi, a \cdot x\rangle \quad (a \in \mathfrak{A},\ \xi \in \mathcal{X}')$$

pri vseh $x \in \mathcal{X}$.

Naj bo Θ upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih modulov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Če je Θ normirana, lahko pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ govorimo o adjungirani preslikavi $\Theta(x)^*$, ki slika iz topološkega duala prostora $\mathcal{Z}$ v topološki dual prostora $\mathcal{Y}$, torej iz $\mathcal{Z}^*$ v $\mathcal{Y}^*$. Označimo s Θ^* preslikavo $x \mapsto \Theta(x)^*$, pa imamo normirano antiupodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Z}^*, \mathcal{Y}^*)$. Podobno dobimo v primeru, ko začnemo z normirano antiupodobitvijo H, normirano upodobitev H^*.

Trditev 4.3.9. *Naj bo Θ normirana upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Če je Θ krepko zvezna, je tudi Θ^* krepko zvezna.*

Dokaz. Ker je Θ krepko zvezna, je vsaka od preslikav $\Theta_y : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, $x \mapsto \Theta(x)y$, pri čemer je $y \in \mathcal{Y}$, zvezna. Podobno kot v dokazu trditve 4.3.5

lahko tudi zdaj zaradi normiranosti upodobitve Θ sklepamo, da obstaja takšna konstanta $M > 0$, da je $\|\Theta_y\| \leq M$ za vse $y \in \mathcal{Y}$, $\|y\| \leq 1$.

Pri poljubnem $\zeta \in \mathcal{Z}^*$ označimo s Θ^*_ζ preslikavo, ki vektorju $x \in \mathcal{X}$ priredi funkcional $\Theta(x)\zeta \in \mathcal{Y}^*$. Ker je

$$\begin{aligned}\|\Theta^*_\zeta(x)\| = \|\Theta(x)\zeta\| &= \sup\{|\langle \Theta(x)^*\zeta, y\rangle|;\ y \in \mathcal{Y},\ \|y\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{|\langle \zeta, \Theta_y(x)\rangle|;\ y \in \mathcal{Y},\ \|y\| \leq 1\} \leq M\|\zeta\|\|x\|,\end{aligned}$$

velja $\|\Theta^*_\zeta\| \leq M\|\zeta\|$, kar pomeni, da je Θ^* krepko zvezna. □

Iz trditev 4.3.5 in 4.3.9 sledi naslednja posledica.

Posledica 4.3.10. *Naj bo Θ normirana upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Če je Θ krepko zvezna, sta Θ in Θ^* zvezni.*

Še naprej naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Naj bo $\Theta :\ \mathcal{X} \to L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ in $\theta :\ \mathfrak{A} \to L(\mathcal{Z})$ pripadajoča upodobitev algebre $\mathfrak{A}$. Predpostavimo, da je podprostor $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$ invarianten za θ. Definirajmo upodobitvi $\theta_{\mathcal{W}} :\ \mathfrak{A} \to L(\mathcal{W})$ in $\theta^{\mathcal{W}} :\ \mathfrak{A} \to \mathcal{Z}/\mathcal{W}$ s predpisoma $\theta_{\mathcal{W}}(a) := \theta(a)|_{\mathcal{W}}$, $a \in \mathfrak{A}$, in $\theta^{\mathcal{W}}(a)(z + \mathcal{W}) := \theta(a)z + \mathcal{W}$, $z \in \mathcal{Z}$, $a \in \mathfrak{A}$. Naj bo

$$\mathcal{U} := \{y \in \mathcal{Y};\ \Theta(x)y \in \mathcal{W} \text{ za vse } x \in \mathcal{X}\} = \bigcap_{x \in \mathcal{X}} \Theta(x)^{-1}(\mathcal{W}).$$

Očitno je $\mathcal{U}$ največji linearen podprostor v $\mathcal{Y}$, za katerega velja $\Theta(x)\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$. Podobna inkluzija velja za vsak podprostor $\mathcal{V}$ v $\mathcal{U}$. Se pravi, da je pri vsakem podprostoru $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ s predpisom $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(x) := \Theta(x)|_{\mathcal{V}}$ dobro definirana linearna preslikava iz $\mathcal{X}$ v $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ velja $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(a \cdot x) = \theta_{\mathcal{W}}(a)\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(x)$, kar pomeni, da je $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Upodobitev $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ je *restrikcija upodobitve Θ na par* $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. (Uporabili smo besedo restrikcija in ne zožitev, to pa zato, ker bomo s slednjo poimenovali neko drugo preslikavo).

Definirajmo še *redukcijo upodobitve Θ na par* $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. To je preslikava $\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})} :\ \mathcal{X} \to L(\mathcal{Y}/\mathcal{V}, \mathcal{Z}/\mathcal{W})$, za katero pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ velja

$$\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(x)(y + \mathcal{V}) = \Theta(x)y + \mathcal{W}, \quad y + \mathcal{V} \in \mathcal{Y}/\mathcal{V}.$$

Velja naslednja enakost: $\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(a \cdot x) = \theta^{\mathcal{W}}(a)\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(x)$, $a \in \mathfrak{A}$, $x \in \mathcal{X}$.

Poglejmo poseben primer, ko je podprostor $\mathcal{W}$ enak kar celemu prostoru $\mathcal{Z}$. Tedaj je seveda prostor $\mathcal{U}$ enak celemu prostoru $\mathcal{Y}$. Če sta $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$ poljubna podprostora v $\mathcal{Y}$ in je $\mathcal{V}_0$ njuna vsota, imamo upodobitve $\Theta_{(\mathcal{V}_k,\mathcal{Z})} :\ \mathcal{X} \to L(\mathcal{V}_k, \mathcal{Z})$, katerih pripadajoča upodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Z}$ je θ. Vsak vektor $v \in \mathcal{V}_0$ lahko zapišemo kot vsoto $v = v_1 + v_2$, pri čemer je $v_1 \in \mathcal{V}_1$ in $v_2 \in \mathcal{V}_2$. Upoštevajmo, kako je definirana restrikcija upodobitve, pa imamo

$$\Theta_{(\mathcal{V}_0,\mathcal{Z})}(x)v = \Theta_{(\mathcal{V}_1,\mathcal{Z})}(x)v_1 + \Theta_{(\mathcal{V}_2,\mathcal{Z})}(x)v_2, \quad \text{pri vseh } x \in \mathcal{X}.$$

Se pravi, da je dano upodobitev mogoče sestaviti iz njenih restrikcij. To lahko izkoristimo, ko v danem konkretnem primeru iščemo upodobitve modula: poiščemo restrikcije iskane upodobitve, recimo na enodimenzionalne podprostore, potem pa iz njih zgradimo iskano upodobitev.

Naj bo Θ normirana upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Če je $\mathcal{W}$ zaprt θ-invarianten podprostor v $\mathcal{Z}$, potem je tudi $\mathcal{U} = \cap_{x\in\mathcal{X}}\Theta(x)^{-1}(\mathcal{W})$ zaprt podprostor v $\mathcal{Y}$. Za vsak zaprt podprostor $\mathcal{V}$ v $\mathcal{U}$ velja, da sta restrikcija $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ in redukcija $\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ normirani upodobitvi modula $\mathcal{X}$. Očitno je pri vsakem $y \in \mathcal{V}$ preslikava $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W}),y}$, ki vektorju $x \in \mathcal{X}$ priredi vektor $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(x)y \in \mathcal{W}$, enaka preslikavi Θ_y. Prav tako je pri vsakem $y + \mathcal{V} \in \mathcal{Y}/\mathcal{V}$ preslikava $\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}_{y+\mathcal{V}} : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}/\mathcal{W}$, ki je definirana z $\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}_{y+\mathcal{V}}(x) = \Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}(x)(y + \mathcal{V})$, enaka kompoziciji kvocientne preslikave iz $\mathcal{Y}$ v $\mathcal{Y}/\mathcal{V}$ in preslikave Θ_y. Sklepamo torej lahko, da sta $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ in $\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ krepko zvezni, če je Θ krepko zvezna. Velja še več: vse tri upodobitve so zvezne, saj smo na začetku privzeli, da je Θ normirana. Zapišimo to kot trditev.

Trditev 4.3.11. *Naj bo Θ normirana upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ in naj bo $\mathcal{W}$ zaprt θ-invarianten podprostor v $\mathcal{Z}$, pri čemer je θ takšna upodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{Z}$, ki pripada Θ. Če je Θ krepko zvezna, potem so za poljuben zaprt podprostor $\mathcal{V}$ v $\cap_{x\in\mathcal{X}}\Theta(x)^{-1}(\mathcal{W})$ upodobitve Θ, $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ in $\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ zvezne.*

Povejmo še, kdaj sta dve upodobitvi ekvivalentni.

Definicija 4.3.12. *Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul in Θ ter* T *upodobitvi modula $\mathcal{X}$: prva na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ in druga na paru $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Upodobitvi Θ in* T *sta* ekvivalentni*, če obstajata takšni linearni bijekciji $U : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ in $V : \mathcal{Z} \to \mathcal{V}$, da velja*

$$\mathrm{T}(x)U = V\Theta(x) \quad \text{za vse } x \in \mathcal{X}. \tag{4.3.3}$$

V primeru, ko je $\mathcal{X}$ Banachov prostor in sta $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ ter $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ dva para Banachovih prostorov, sta upodobitvi Θ in T topološko ekvivalentni*, če obstajata takšni zvezni linearni bijekciji $U : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ in $V : \mathcal{Z} \to \mathcal{V}$, da velja* (4.3.3).

Opomba 4.3.13. Definicija 4.3.12 je precej splošnejša od analogne definicije ekvivalentnosti dveh upodobitev dane algebre. To izhaja iz dejstva, da imamo mi v splošnem na razpolago modulsko strukturo le na eni strani (levi), medtem ko pri upodobitvah algeber upoštevamo tako levo kot desno modulsko strukturo, ki jo ima algebra kot bimodul nad sama sabo.

Zgled 4.3.14. Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul in (Θ, θ) upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Pri vsakem neničelnem številu $\lambda \in \mathbb{C}$ je tudi par $(\lambda\Theta, \theta)$

upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$. Ni težko videti, da sta upodobitvi Θ in $\lambda\Theta$ ekvivalentni, vlogo linearnih bijekcij U in V iz definicije igrata identična operatorja na $\mathcal{Y}$, oziroma $\mathcal{Z}$.

4.4. Nerazcepne upodobitve modulov

Netrivialna upodobitev θ algebre $\mathfrak{A}$ na prostoru $\mathcal{X}$ je *nerazcepna*, če sta trivialni podprostor 0 in cel prostor $\mathcal{X}$ edina θ-invariantna podprostora v $\mathcal{X}$. V primeru, ko je $\mathcal{X}$ Banachov prostor, je θ *topološko nerazcepna*, če sta 0 in $\mathcal{X}$ edina zaprta θ-invariantna podprostora v $\mathcal{X}$.

Definicija 4.4.1. *Netrivialna upodobitev (Θ,θ) levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ je* nerazcepna*, če velja*

(i) upodobitev θ algebre $\mathfrak{A}$ na prostoru $\mathcal{Z}$ je nerazcepna in

(ii) skupno jedro *upodobitve Θ je trivialno, tj.*

$$\bigcap_{x\in\mathcal{X}} ker\,\Theta(x) = \{y\in\mathcal{Y};\ \Theta(x)y=0,\ \text{za vse } x\in\mathcal{X}\}=\{0\}. \tag{4.4.1}$$

Če je $\mathcal{X}$ Banachov prostor in Θ njegova upodobitev na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$, potem je Θ topološko nerazcepna*, če je θ topološko nerazcepna in velja* (4.4.1)*.*

Trditev 4.4.2. *Naj bo $\mathcal{X}$ levi modul nad algebro $\mathfrak{A}$ in (Θ,θ) nerazcepna upodobitev $\mathcal{X}$ na $(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$.*

(i) Vsak neničelni vektor iz $\mathcal{Y}$ je cikličen za Θ. Če je $\mathcal{X}$ Banachov modul in je Θ topološko nerazcepna upodobitev $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$, je vsak neničelni vektor iz $\mathcal{Y}$ topološko cikličen za Θ.

(ii) $ker\,\theta = (ker\,\Theta : \mathcal{X})$.

(iii) Jedro upodobitve Θ je prapodmodul v $\mathcal{X}$.

Dokaz. (i) Naj bo y neničelni vektor iz $\mathcal{Y}$. Množica $\mathcal{M}=\{\Theta(x)y;\ x\in\mathcal{X}\}$ je očitno linearen podprostor v $\mathcal{Z}$. Zaradi $\theta(a)\Theta(x)y=\Theta(a\cdot x)y$, je ta podprostor θ-invarianten. Ker je upodobitev θ nerazcepna, je $\mathcal{M}$ bodisi trivialen podprostor bodisi ves $\mathcal{Z}$. Prva možnost odpade, saj je $y\neq 0$ in torej ne more biti v skupnem jedru vseh $\Theta(x)$, $x\in\mathcal{X}$. Dokaz v Banachovem primeru je podoben, le da namesto prostora $\mathcal{M}$ gledamo njegovo zaprtje.

(ii) Inkluzijo $ker\,\theta\subseteq(ker\,\Theta:\mathcal{X})$ smo dokazali v trditvi 4.3.3. Naj bo torej $a\in(ker\,\Theta:\mathcal{X})$. Potem za vsak $x\in\mathcal{X}$ velja $0=\Theta(a\cdot x)=\theta(a)\Theta(x)$. Če je y neničelni vektor iz $\mathcal{Y}$, zaradi nerazcepnosti Θ velja $\{\Theta(x)y;\ x\in\mathcal{X}\}=\mathcal{Z}$. Se pravi, da je $\theta(a)\mathcal{Z}=\{0\}$, od koder sledi $a\in ker\,\theta$.

(iii) Naj bosta $a\in\mathfrak{A}$ in $x\in\mathcal{X}$ takšna, da je $a\mathfrak{A}\cdot x\subseteq ker\,\Theta$. Predpostavimo, da $x\notin ker\,\Theta$. Potem obstaja v $\mathcal{Y}$ takšen y, da je $\Theta(x)y\neq 0$. Množica $\mathcal{N}=\{\Theta(b\cdot x)y;\ b\in\mathfrak{A}\}$ je očitno θ-invarianten podprostor v $\mathcal{Z}$. Zaradi nerazcepnosti je bodisi $\mathcal{N}=\mathcal{Z}$ bodisi $\mathcal{N}=\{0\}$. Če velja prvo, iz enakosti $\Theta(ab\cdot x)=0$, ki velja pri vseh $b\in\mathfrak{A}$, sledi $\theta(a)\mathcal{Z}=\{0\}$, kar nam da $a\in ker\,\theta=(ker\,\Theta:\mathcal{X})$. Pokažimo, da $\mathcal{N}=\{0\}$ ne more veljati. Namreč, če bi, potem je $\theta(b)\Theta(x)y=0$ za vse $b\in\mathfrak{A}$. Toda potem je zaradi $\Theta(x)y\neq 0$ množica $\{z\in\mathcal{Z};\ \theta(b)z=0,\ \forall b\in\mathfrak{A}\}$ netrivialen θ-invarianten podprostor, torej ves $\mathcal{Z}$. Od tod sledi $\theta=0$, kar pa ni res. $\square$

Definicija 4.4.3. *Podmodul $\mathcal{P}$ v levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$ je* primitiven*, če je jedro kakšne nerazcepne upodobitve modula $\mathcal{X}$.*

Množico vseh primitivnih podmodulov v $\mathcal{X}$ bomo označili s $\Pi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. V primeru, ko je $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, je $\overline{\Pi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ množica vseh zaprtih primitivnih podmodulov.

Opomba 4.4.4. Iz točke (ii) trditve 4.4.2 sledi, da je kvocient primitivnega podmodula primitiven ideal v $\mathfrak{A}$, tj. iz $\mathcal{P}\in\Pi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ sledi $(\mathcal{P}:\mathcal{X})\in\Pi(\mathfrak{A})$. Pripomnimo še, da je po točki (iii) iste trditve $\Pi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})\subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$.

Zdaj bomo pokazali, da so vsi maksimalni podmoduli primitivni (da so prapodmoduli, že vemo - trditev 4.2.5).

Trditev 4.4.5. *Vsak maksimalen podmodul v levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$ je primitiven.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{M}$ pravi podmodul v $\mathcal{X}$, je $\mathcal{X}/\mathcal{M}$ enostaven levi $\mathfrak{A}$-modul. Naj bo $\theta:\ \mathfrak{A}\to L(\mathcal{X}/\mathcal{M})$ upodobitev algebre $\mathfrak{A}$, dana z $\theta(a)(x+\mathcal{M})=a\cdot x+\mathcal{M}$, kjer je $x+\mathcal{M}$ poljuben iz $\mathcal{X}/\mathcal{M}$. Jasno, ker je $\mathcal{X}/\mathcal{M}$ enostaven modul, je θ nerazcepna. Definirajmo $\Theta:\ \mathcal{X}\to L(\mathfrak{A}/(\mathcal{M}:\mathcal{X}),\mathcal{X}/\mathcal{M})$ tako, da je pri vsakem $x\in\mathcal{X}$ preslikava $\Theta(x)$ dana z $\Theta(x)(a+(\mathcal{M}:\mathcal{X}))=a\cdot x+\mathcal{M}$. Zlahka se prepričamo, da je definicija dobra. Ker je $\Theta(a\cdot x)=\theta(a)\Theta(x)$ pri vseh $a\in\mathfrak{A}$ in vseh $x\in\mathcal{X}$, je Θ upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathfrak{A}/(\mathcal{M}:\mathcal{X}),\mathcal{X}/\mathcal{M})$.

Če je $a+(\mathcal{M}:\mathcal{X})$ v jedru vsake od preslikav $\Theta(x)$, $x\in\mathcal{X}$, potem iz definicije sledi, da je $a\cdot\mathcal{X}\subseteq\mathcal{M}$, kar pomeni, da je $a\in(\mathcal{M}:\mathcal{X})$. To nam skupaj z nerazcepnostjo θ da nerazcepnost Θ. Pokažimo še, da je $\mathcal{M}=ker\,\Theta$. Inkluzija $\mathcal{M}\subseteq ker\,\Theta$ je očitna, saj je $\mathcal{M}$ podmodul v $\mathcal{X}$. Obratna inkluzija pa sledi iz dejstva, da mora za $x\in ker\,\Theta$ pri vseh $a+(\mathcal{M}:\mathcal{X})\in\mathfrak{A}/(\mathcal{M}:\mathcal{X})$ — in torej tudi pri $1+(\mathcal{M}:\mathcal{X})$ — veljati $\Theta(x)(a+(\mathcal{M}:\mathcal{X}))=\mathcal{M}$. $\square$

Posledica 4.4.6. *Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Potem je*

$$\Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})\subseteq\Pi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})\subseteq\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}).$$

Če je $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, je

$$\overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})\subseteq\overline{\Pi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})\subseteq\overline{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}).$$

Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul in (Θ, θ) njegova upodobitev na paru $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko pri danem θ-invariantnem podprostoru $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$ in $\mathcal{V} \subseteq \cap_{x\in\mathcal{X}}\Theta(x)^{-1}(\mathcal{W})$ napravimo upodobitev $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$ modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, tj. restrikcijo upodobitve Θ na par $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Predpostavimo, da je Θ nerazcepna. Potem sta trivialen podprostor in ves prostor edina θ-invariantna podprostora v $\mathcal{Z}$. Če je $\mathcal{W} = \{0\}$, je, zaradi (4.4.1), tudi $\cap_{x\in\mathcal{X}}\Theta(x)^{-1}(\mathcal{W}) = \{0\}$, od koder sledi $\mathcal{V} = \{0\}$. Naj bo zdaj $\mathcal{W} = \mathcal{Z}$ in $\mathcal{V}$ poljuben netrivialen podprostor v $\mathcal{Y}$. Ker ima restrikcija $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{Z})}$ za pripadajočo upodobitev algebre $\mathfrak{A}$, kar upodobitev θ, je očitno, da je $\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{Z})}$ nerazcepna upodobitev modula $\mathcal{X}$. Očitno je situacija podobna, ko imamo Banachov modul in topološko nerazcepno upodobitev. Se pravi, netrivialne restrikcije (topološko) nerazcepne upodobitve so (topološko) nerazcepne. Kaj pa obratno? Ali lahko (topološko) nerazcepno upodobitev *razširimo do večje* (topološko) nerazcepne upodobitve?

Definicija 4.4.7. *(i) Naj bo $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul in Θ nerazcepna upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Upodobitev* T *modula $\mathcal{X}$ na paru prostorov $(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$ je* nerazcepna razširitev *upodobitve Θ, če je* T *nerazcepna in če obstaja takšna linearna injekcija $U : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$, da velja $\Theta(x) = \mathrm{T}(x)U$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$.*

Če je Θ takšna nerazcepna upodobitev modula $\mathcal{X}$, da je ekvivalentna vsaki svoji nerazcepni razširitvi, potem je Θ maksimalna nerazcepna upodobitev*.*

(ii) Naj bo $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul in Θ topološko nerazcepna upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Upodobitev T *modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$ je* topološko nerazcepna razširitev *upodobitve Θ, če je* T *topološko nerazcepna in če obstaja takšna linearna izometrija $U : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$, da velja $\Theta(x) = \mathrm{T}(x)U$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$.*

Če je Θ takšna topološko nerazcepna upodobitev modula $\mathcal{X}$, da je topološko ekvivalentna vsaki svoji topološko nerazcepni razširitvi, potem je Θ maksimalna topološko nerazcepna upodobitev*.*

Naslednji izrek nam zagotavlja, da je dovolj poznati maksimalne nerazcepne upodobitve danega levega modula.

Izrek 4.4.8. *Vsaka nerazcepna upodobitev levega modula ima maksimalno nerazcepno razširitev. Maksimalna nerazcepna razširitev dane nerazcepne upodobitve je do ekvivalence natančno enolično določena.*

Dokaz. Naj bo Θ nerazcepna upodobitev levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Označimo s $\widetilde{\mathcal{T}}$ družino vseh nerazcepnih razširitev upodobitve Θ. Vsak $\mathrm{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ naj upodablja modul $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{U}_T, \mathcal{W}_T)$, podprostor $\mathcal{V}_T \subseteq \mathcal{U}_T$ pa naj bo takšen, da obstajata takšni bijektivni linearni preslikavi $V_T : \mathcal{Y} \to \mathcal{V}_T$ in $W_T : \mathcal{Z} \to \mathcal{W}_T$, za kateri velja $W_T\Theta(x) = \mathrm{T}_{(\mathcal{V}_T,\mathcal{W}_T)}(x)V_T$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$. Naj bo $\mathcal{T}$ množica kvocientov, ki jo dobimo, ko v $\widetilde{\mathcal{T}}$ izenačimo med sabo ekvivalentne upodobitve. Za $\mathrm{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ naj bo $[\mathrm{T}]$ ustrezni ekvivalenčni razred v $\mathcal{T}$. V $\mathcal{T}$ vpeljimo relacijo delne urejenosti na naslednji način. Za $[\mathrm{T}_1]$ in $[\mathrm{T}_2]$ iz $\mathcal{T}$ velja $[\mathrm{T}_1] \leq [\mathrm{T}_2]$ natanko tedaj, ko obstaja injektivna linearna preslikava $U : \mathcal{U}_{T_1} \to \mathcal{U}_{T_2}$. Da je definicija dobra, tj. neodvisna od izbire predstavnika ekvivalenčnega razreda in da gre res za relacijo delne urejenosti, se ni težko prepričati.

Če je $\mathcal{L}$ linearno urejena poddružina v $\mathcal{T}$, naj bo $\{\mathrm{T}_i;\ i \in \mathbb{I}\}$ družina predstavnikov ekvivalenčnih razredov iz $\mathcal{L}$ — iz vsakega razreda natanko eden. Torej je $\mathcal{L} = \{[\mathrm{T}_i];\ i \in \mathbb{I}\}$. Privzamemo lahko, da je $\mathbb{I}$ linearno urejena množica in da iz $i \leq j$, $i, j \in \mathbb{I}$, sledi $[\mathrm{T}_i] \leq [\mathrm{T}_j]$. Ker v primeru $i \leq j$ obstaja injektivna linearna preslikava $U_{ji} : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j$, lahko privzamemo, da je $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j$. Naj bo $\mathcal{U}$ unija vseh prostorov $\mathcal{U}_i$, $i \in \mathbb{I}$. Na $\mathcal{U}$ vpeljemo strukturo vektorskega prostora: če sta u in v iz $\mathcal{U}$ in α kompleksno število, lahko najdemo takšen indeks i_0 v $\mathbb{I}$, da sta αu in v v vsakem od prostorov $\mathcal{U}_i$, $i_0 \leq i$, kar pomeni, da je tudi vsota $\alpha u + v$ v vsakem od teh prostorov in torej v $\mathcal{U}$. Pri vsakem indeksu $i \in \mathbb{I}$ naj bo U_i vložitev prostora $\mathcal{U}_i$ v prostor $\mathcal{U}$. Zdaj bomo definirali preslikavo $\mathrm{T} :\ \mathcal{X} \to L(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$. Vzemimo $x \in \mathcal{X}$ in ga fiksirajmo. Naj bo $u \in \mathcal{U}$ poljuben in i tak indeks, da je $u \in \mathcal{U}_i$, potem je s $\mathrm{T}(x)u := \mathrm{T}_i(x)u$ dobro definirana linearna preslikava $\mathrm{T}(x)$ iz $\mathcal{U}$ v $\mathcal{Z}$. Ni težko videti, da je tudi T dobro definirana linearna preslikava. Ker je $\mathrm{T}(a \cdot x) = \theta(a)\mathrm{T}(x)$, je T upodobitev $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$. Če je $u \in \mathcal{U}$ takšen, da je $\mathrm{T}(x)u = 0$ za vse $x \in \mathcal{X}$, velja pri nekem indeksu i, da je $\mathrm{T}_i(x)u = 0$ za vse $x \in \mathcal{X}$. Zaradi nerazcepnosti T_i pa je $u = 0$. Se pravi, da je T nerazcepna razširitev upodobitve Θ. To pomeni, da je $[\mathrm{T}] \in \mathcal{T}$. Glede na konstrukcijo je jasno, da je $[\mathrm{T}]$ zgornja meja za $\mathcal{L}$. Zornova lema nam zagotavlja obstoj maksimalnega elementa v $\mathcal{T}$.

Iz tega, kar smo že dokazali, očitno sledi, da sta poljubni dve maksimalni nerazcepni razširitvi upodobitve T med sabo ekvivalentni. Torej velja tudi zadnji del izreka. □

4.5. Hull-kernel topologija

V prejšnjih razdelkih smo definirali nekatere razrede podmodulov v danem levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$, pri čemer je $\mathfrak{A}$ algebra z enoto. Spomnimo se, da smo z $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ označili družino vseh prapodmodulov v $\mathcal{X}$, s $\Pi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ družino vseh primitivnih podmodulov in s $\Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ vse maksimalne podmodule. V primeru Banachovih modulov smo definirali še družine zaprtih prapodmodulov, primitivnih podmodulov in maksimalnih podmodulov ter ustrezne družine po vrsti označili z $\overline{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, $\overline{\Pi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in $\overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Vemo že, da veljajo inkluzije

$$\Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \Pi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$$

in

$$\overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\Pi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}).$$

V nadaljevanju naj bo Ω poljubna neprazna podmnožica v $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ — oziroma v $\overline{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, če imamo Banachov modul. Seveda, najbolj zanimivi so primeri, ko je Ω ena od prej naštetih družin.

Definicija 4.5.1. Ω-radikal *levega modula* $\mathcal{X}$ *nad algebro* $\mathfrak{A}$ *je podmodul* $Rad^{\Omega}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) := \cap_{\mathcal{P}\in\Omega}\mathcal{P}$ *v* $\mathcal{X}$. *Modul* $\mathcal{X}$ *je* Ω-polenostaven*, če je njegov* Ω*-radikal trivialen in je* Ω-radikalski*, če je enak svojemu* Ω*-radikalu.*

V nadaljevanju bomo na Ω definirali *hull-kernel topologijo* (nekateri jo imenujejo *topologija Zariskega* ali *Jacobsonova topologija*). Ideja, kako definirati to topologijo, je iz [**58**], vendar je naš pristop bolj podoben tistemu v teoriji (Banachovih) algeber (glejte [**61**], §7.1).

Definicija 4.5.2. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *algebra z enoto in* $\mathcal{X}$ *levi* $\mathfrak{A}$*-modul.* Jedro *neprazne podmnožice* $S \subseteq \Omega$ *je* $k_{\mathcal{X}}(S) := \cap_{\mathcal{P}\in S}\mathcal{P}$. *Jedro prazne množice je ves* $\mathcal{X}$.

Ovoj *podmodula* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ *je množica*

$$h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \{\mathcal{P} \in \Omega;\ (\mathcal{Y} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})\}.$$

V naslednjem izreku so zbrane osnovne lastnosti jeder in ovojev. Podobnost z analognim izrekom iz teorijo algeber je zelo velika, vendar je potrebno opozoriti na nekatere ključne razlike. Ena izmed njih je, na primer, inkluzija v točki (vi), ki je lahko prava — pri algebrah velja tam vedno enačaj.

Izrek 4.5.3. *Naj bo* $\mathfrak{A}$ *algebra z enoto in* $\mathcal{X}$ *levi* $\mathfrak{A}$*-modul. Potem velja:*

(i) $k_{\mathcal{X}}(\Omega) = Rad^{\Omega}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ *ter* $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(0) = \Omega$ *in* $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \emptyset$.

(ii) Če za podmnožici S_1 *in* S_2 *v* Ω *velja* $S_1 \subseteq S_2$*, potem je* $k_{\mathcal{X}}(S_1) \supseteq k_{\mathcal{X}}(S_2)$.

(iii) Za vsako množico $S \subseteq \Omega$ *velja, da je vsebovana v* $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(k_{\mathcal{X}}(S))$.

(iv) Če je podmodul $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ *vsebovan v podmodulu* $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$*, potem je* $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \supseteq h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})$.

(v) Za vsak podmodul $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ *velja* $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})))$.

(vi) Za vsako množico $S \subseteq \Omega$ *velja* $k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(k_{\mathcal{X}}(S))) \subseteq k_{\mathcal{X}}(S)$.

(vii) Za poljubno družino podmodulov $\{\mathcal{Y}_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ *v* $\mathcal{X}$ *je*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{I}} h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}_i) = h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\sum_{i\in\mathbb{I}}(\mathcal{Y}_i : \mathcal{X}) \cdot \mathcal{X}).$$

(viii) Za poljubna podmodula $\mathcal{Y}$ *in* $\mathcal{Z}$ *v* $\mathcal{X}$ *je*

$$h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \cup h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}) = h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}).$$

DOKAZ. (i) Ker je $(0:\mathcal{X}) = ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in je anihilator modula $\mathcal{X}$ vsebovan v kvocientu vsakega podmodula (glejte prvi dve točki trditve 4.1.2), je $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(0) = \Omega$. Nobeden od kvocientov $(\mathcal{P}:\mathcal{X})$, $\mathcal{P} \in \Omega$, ne vsebuje $(\mathcal{X}:\mathcal{X}) = \mathfrak{A}$, saj so $(\mathcal{P}:\mathcal{X})$ po trditvi 4.1.5 praideali v $\mathfrak{A}$. Torej je $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \emptyset$.

Veljavnost točk (ii), (iii) in (iv) zlahka preverimo.

(v) Če je $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$, je $k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})) \subseteq \mathcal{P}$. Torej je tudi $(k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})):\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$, kar nam da $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})))$.

Vzemimo, da $\mathcal{P}_0 \in \Omega$ ni v $h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$, tj. $(\mathcal{Y}:\mathcal{X}) \not\subset (\mathcal{P}_0:\mathcal{X})$. Naj bo $a \in (\mathcal{Y}:\mathcal{X})$ takšen element, ki ni v $(\mathcal{P}_0:\mathcal{X})$. Pri vsakem $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$ iz $a \in (\mathcal{Y}:\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ sledi $a \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$. Se pravi, da je $a \cdot \mathcal{X} \subseteq k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}))$, oziroma $a \in (k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})):\mathcal{X})$. Torej $(k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})):\mathcal{X}) \not\subset (\mathcal{P}_0:\mathcal{X})$, kar pomeni $\mathcal{P}_0 \notin h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(k_{\mathcal{X}}(h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})))$.

(vi) sledi iz (ii) in (iii).

(vii) Naj bo $\{\mathcal{Y}_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ poljubna družina podmodulov v $\mathcal{X}$. Če je $\mathcal{P} \in \cap_{i\in\mathbb{I}} h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}_i)$, potem je $(\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ za vse $i \in \mathbb{I}$. Od tod sledi, da je $(\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X}$ za vse $i \in \mathbb{I}$. Ker je $(\mathcal{P}:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$, je

$$\sum_{i\in\mathbb{I}} (\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}.$$

Po trditvi 4.1.2 (vi) je potem

$$(\sum_{i\in\mathbb{I}} (\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X}),$$

kar pomeni, da je $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\sum_{i\in\mathbb{I}} (\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X})$.

Vzemimo zdaj, da je $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\sum_{i\in\mathbb{I}} (\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X})$. Potem je

$$(\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \subseteq ((\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X} : \mathcal{X}) \subseteq (\sum_{i\in\mathbb{I}} (\mathcal{Y}_i:\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X}).$$

Prva inkluzija velja po trditvi 4.1.2 (iii), druga velja zaradi (vi) iste trditve, zadnja pa velja po predpostavki. Torej je $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}_i)$ za vsak $i \in \mathbb{I}$.

(viii) Če je $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \cup h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})$, je $(\mathcal{Y}:\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ ali $(\mathcal{Z}:\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$. Ker pa je $(\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}:\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{Y}:\mathcal{X})$ in $(\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}:\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{Z}:\mathcal{X})$ (po trditvi 4.1.2 (vi)), je v vsakem primeru $(\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}:\mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P}:\mathcal{X})$ in torej $\mathcal{P} \in h^{\Omega}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z})$.

Da bi videli veljavnost obrata, se najprej prepričajmo, da je produkt

$$(\mathcal{Y}:\mathcal{X})(\mathcal{Z}:\mathcal{X}) = \{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k; \quad a_k \in (\mathcal{Y}:\mathcal{X}),\ b_k \in (\mathcal{Z}:\mathcal{X})\}$$

vsebovan v $(\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}:\mathcal{X})$. Naj bo $x \in \mathcal{X}$ poljuben. Potem je pri vsakem $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \in (\mathcal{Y}:\mathcal{X})(\mathcal{Z}:\mathcal{X})$ vektor $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdot x$ v preseku $\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}$. Po eni strani so namreč vektorji $a_k \cdot (b_k \cdot x)$ v $\mathcal{Y}$, ker so a_k v $(\mathcal{Y}:\mathcal{X})$, $k = 1, \ldots, n$. Po drugi strani pa so $b_k \cdot x$ v $\mathcal{Z}$, ker so b_k v $(\mathcal{Z}:\mathcal{X})$ pri vseh $k = 1, \ldots, n$. Ker je $\mathcal{Z}$ modul, so tudi $a_k \cdot (b_k \cdot x)$ v $\mathcal{Z}$, $k = 1, \ldots, n$.

Naj bo $\mathcal{P} \in h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z})$. Potem je

$$(\mathcal{Y} : \mathcal{X})(\mathcal{Z} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X}).$$

Po trditvi 4.1.5 je $(\mathcal{P} : \mathcal{X})$ praideal in zato je $(\mathcal{Y} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$ ali $(\mathcal{Z} : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$. V vsakem primeru torej $\mathcal{P} \in h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y}) \cup h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Z})$. □

Iz prve in zadnjih dveh točk pravkar dokazanega izreka sledi, da je družina $\{h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y});\quad \mathcal{Y}$ je podmodul v $\mathcal{X}\}$ zaprta za poljubne preseke in končne unije ter vsebuje prazno množico in celo množico Ω. Od tod sledi, da je družina

$$\{\omega^{\Omega}(\mathcal{Y}) := \Omega \setminus h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y});\ \mathcal{Y} \text{ je podmodul v } \mathcal{X}\}$$

topologija na Ω. To topologijo bomo v nadaljevanju imenovali *hull-kernel topologija.*

Posledica 4.5.4. *Če je $S \subseteq \Omega$ poljubna množica, potem je njeno zaprtje v hull-kernel topologiji množica $h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(k_{\mathcal{X}}(S))$.*

Dokaz. Po točki (iii) prejšnjega izreka je S vsebovana v $h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(k_{\mathcal{X}}(S))$. Recimo, da je $\mathcal{Y}$ takšen podmodul v $\mathcal{X}$, da je $S \subseteq h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y})$. Potem je $k_{\mathcal{X}}(S) \supseteq k_{\mathcal{X}}(h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y}))$ in nato $h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(k_{\mathcal{X}}(S)) \subseteq h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(k_{\mathcal{X}}(h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y})))$, po točkah (ii) in (iv) izreka 4.5.3. Po istem izreku, točka (v), je $h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(k_{\mathcal{X}}(h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y}))) = h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y})$. Se pravi, da je $h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(k_{\mathcal{X}}(S)) \subseteq h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y})$, kar pomeni, da je $h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(k_{\mathcal{X}}(S))$ najmanjša zaprta množica v hull-kernel topologiji, ki vsebuje S. □

Zlahka se prepričamo, da je v primeru $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, hull-kernel topologija na Ω_1 enaka relativni hull-kernel topologiji, ki jo ima Ω_1 kot podmnožica v Ω_2.

4.6. Naravna preslikava

Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto. Če je $\mathcal{Y}$ podmodul v levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$, potem je njegov kvocient $(\mathcal{Y} : \mathcal{X})$ dvostranski ideal v $\mathfrak{A}$ (glejte trditev 4.1.2 (i)). *Naravna preslikava* je predpis $\nu_{\mathfrak{A}}$, ki podmodulu $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ priredi njegov kvocient $(\mathcal{Y} : \mathcal{X})$. Običajno nas bo v množici vseh podmodulov zanimala le določena podmnožica, recimo prapodmoduli, primitivni podmoduli itd., tedaj bomo zožitvi preslikave $\nu_{\mathfrak{A}}$ na to izbrano podmnožico rekli naravna preslikava in jo prav tako označili z $\nu_{\mathfrak{A}}$.

Naravna preslikava ni nujno injektivna, saj je v $\mathcal{X}$ lahko veliko prapodmodulov, ki imajo isti kvocient. Prav tako naravna preslikava v splošnem ni surjektivna.

Trditev 4.6.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul.*

(i) Naravna preslikava preslika prapodmodule v praideale, primitivne podmodule v primitivne ideale. Slika maksimalnega podmodula ni nujno maksimalen ideal. Če je $\mathcal{X}$ Banachov modul, slika $\nu_{\mathfrak{A}}$ zaprte podmodule v zaprte ideale.

(ii) Za poljuben dvostranski ideal $\mathcal{I}$ v $\mathfrak{A}$ velja

$$h_{\mathfrak{A}}^{\mathrm{P}}(\mathcal{I}) \cap \nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) = \nu_{\mathfrak{A}}(\{\mathcal{P} \in \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X});\ \mathcal{I} \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})\}).$$

(iii) Za poljubno podmnožico $S \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ velja $k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(S)) = (k_{\mathcal{X}}(S) : \mathcal{X})$.

Dokaz. (i) Da je kvocient prapodmodula praideal, smo dokazali v trditvi 4.1.5. V opombi 4.4.4 smo omenili, da je kvocient primitivnega podmodula primitiven ideal. Da kvocient maksimalnega podmodula ni nujno maksimalen ideal, smo videli v zgledu 4.2.6. Zadnji del te točke je trditev 4.1.2 (vii).

(ii) Očitno.

(iii) Za poljuben $\mathcal{P} \in S$ je $(\mathcal{P} : \mathcal{X}) \in \nu_{\mathfrak{A}}(S)$, kar pomeni, da je $k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(S)) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$. Torej velja $k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(S)) \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$ za vsak $\mathcal{P} \in S$. Se pravi, da je $k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(S)) \cdot \mathcal{X} \subseteq \cap_{\mathcal{P} \in S} \mathcal{P} = k_{\mathcal{X}}(S)$, kar pa je le drug zapis za $k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(S)) \subseteq (k_{\mathcal{X}}(S) : \mathcal{X})$. Veljavnost obratne inkluzije se vidi še enostavneje: ker je $(k_{\mathcal{X}}(S) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$ za vsak $\mathcal{P} \in S$, je tudi

$$(k_{\mathcal{X}}(S) : \mathcal{X}) \subseteq \cap_{\mathcal{P} \in S} (\mathcal{P} : \mathcal{X}) = k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(S)).$$

□

Naslednja trditev kaže, da je naravna preslikava uglašena s topološkima strukturama, ki jo imata $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in $\mathrm{P}(\mathfrak{A})$, ko ju opremimo s hull-kernel topologijama.

Trditev 4.6.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Množici $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in $\mathrm{P}(\mathfrak{A})$ opremimo s hull-kernel topologijama.*

(i) Naravna preslikava $\nu_{\mathfrak{A}} :\ \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \to \mathrm{P}(\mathfrak{A})$ je zvezna.

(ii) Če je $\mathcal{F}$ zaprta podmnožica v $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$ zaprta v relativni topologiji množice $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Podobno za odprto množico $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ velja, da je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ odprta v relativni topologiji množice $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Se pravi, da je naravna preslikava odprta in zaprta, če je surjektivna.

Dokaz. (i) Pokazali bomo, da je $\mathcal{F} := \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(F)$ zaprta podmnožica v $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, če je F zaprta podmnožica v $\mathrm{P}(\mathfrak{A})$. Ker vedno velja $\mathcal{F} \subseteq h_{\mathcal{X}}^{\mathrm{P}}(k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}))$, je potrebno preveriti le veljavnost obratne inkluzije. Če je $\mathcal{P} \in h_{\mathcal{X}}^{\mathrm{P}}(k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}))$, zaradi $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) \subseteq F$ velja

$$k_{\mathfrak{A}}(F) \subseteq k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})) = (k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X}),$$

pri čemer enačaj v sredini velja zaradi točke (iii) v trditvi 4.6.1. Se pravi, da je praideal $(\mathcal{P} : \mathcal{X})$ v $h_{\mathfrak{A}}^{\mathrm{P}}(k_{\mathfrak{A}}(F)) = F$, od koder sledi $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$.

(ii) Naj bo $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ zaprta. Postavimo v točko (ii) trditve 4.6.1 za $\mathcal{I}$ ideal $(k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}) : \mathcal{X})$, pa imamo

$$\begin{aligned} h^{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}((k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}) : \mathcal{X})) \cap \nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) &= \nu_{\mathfrak{A}}(\{\mathcal{P} \in \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X});\ (k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})\} \\ &= \nu_{\mathfrak{A}}(h^{\mathrm{P}}_{\mathcal{X}}(k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}))) = \nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Se pravi, da je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$ zaprta v relativni topologiji.

Naj bo zdaj $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ odprta. Potem je $\mathcal{F} := \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \setminus \mathcal{U}$ zaprta in torej velja, da je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$ zaprta v relativni topologiji množice $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Če pokažemo, da je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U}) = \nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) \setminus \nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$, bo trditev dokazana. Dovolj je videti, da sta $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ in $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$ disjunktni, saj je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ ravno njuna unija. Toda to bo hitro sledilo iz naslednje lastnosti, ki jo imajo vse zaprte in odprte podmnožice v $\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Namreč, če je $\mathcal{F}$ zaprta in za prapodmodul $\mathcal{P}$ velja, da je v $\mathcal{F}$, potem za vse prapodmodule v $\mathcal{X}$, ki imajo isti kvocient kot $\mathcal{P}$, velja, da so v $\mathcal{F}$, saj je $\mathcal{F} = h^{\mathrm{P}}_{\mathcal{X}}(k_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}))$. Podobno velja za odprte množice. Od tod sledi, da sta $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$ in $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$ disjunktni podmnožici v $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. $\square$

Trditev 4.6.3. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $\Gamma \subseteq \mathrm{P}(\mathfrak{A})$ takšna hull-kernel zaprta množica, da velja $\cap_{\mathcal{P} \in \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma)} \mathcal{P} = 0$, potem je $\Gamma \subseteq \nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ natanko tedaj, ko je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = k_{\mathfrak{A}}(\Gamma)$.*

Dokaz. Najprej uporabimo enakost iz točke (iii) trditve 4.6.1 za množico $S = \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma)$, pa imamo

$$ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = (0 : \mathcal{X}) = (k_{\mathcal{X}}(\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma)) : \mathcal{X}) = k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma))).$$

Če je $\Gamma \subseteq \nu_{\mathfrak{A}}(\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$, potem je seveda $\Gamma = \nu_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma))$ in torej velja $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = k_{\mathfrak{A}}(\Gamma)$.

Obratno. Naj bo $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = k_{\mathfrak{A}}(\Gamma)$. Ker je $\nu_{\mathfrak{A}}$ zvezna in zaprta preslikava, je $\nu_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma))$ zaprta podmnožica v Γ. Velja torej prva od naslednjih enakosti

$$\nu_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma)) = h_{\mathfrak{A}}(k_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}(\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\Gamma)))) = h_{\mathfrak{A}}(ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) = h_{\mathfrak{A}}(k_{\mathfrak{A}}(\Gamma)) = \Gamma.$$

$\square$

Posledica 4.6.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $\mathcal{X}$ P-polenostaven, potem je naravna preslikava $\nu_{\mathfrak{A}} : \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \to \mathrm{P}(\mathfrak{A})$ surjektivna natanko tedaj, ko je $ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = Rad^{\mathrm{P}}(\mathfrak{A})$.*

Enostavni multiplikatorji

V tem poglavju nas bo zanimalo, ali lahko za kakšen poseben razred multiplikatorjev na levem Banachovem modulu pokažemo, da imajo njegovi elementi podobne lastnosti kot multiplikatorji na komutativni Banachovi algebri. Vpeljali in študirali bomo *enostavne multiplikatorje*, pri tem pa nam bodo v veliko pomoč *točkasti multiplikatorji* — slednje lahko imamo za analog karakterjev v teoriji modulov.

5.1. Točkasti multiplikatorji

Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Karakter φ na $\mathfrak{A}$ — če seveda obstaja — je nerazcepna upodobitev algebre $\mathfrak{A}$ na enodimenzionalnem prostoru $\mathbb{C}$. V tem razdelku želimo poiskati tiste nerazcepne upodobitve modula $\mathcal{X}$, katerih pripadajoča upodobitev algebre $\mathfrak{A}$ je φ. Iščemo torej takšne prostore $\mathcal{Y}$ in linearne preslikave $\Phi: \mathcal{X} \to L(\mathcal{Y}, \mathbb{C})$, za katere velja $\Phi(a \cdot x) = \varphi(a)\Phi(x)$ pri vseh $a \in \mathfrak{A}$ ter vseh $x \in \mathcal{X}$ in ki zadoščajo pogoju (4.4.1) iz definicije 4.4.1. Dovolj je poiskati vse maksimalne nerazcepne upodobitve, saj so vse ostale nerazcepne upodobitve restrikcije le-teh. Naloge se bomo lotili tako, da bomo najprej poiskali restrikcije iskane maksimalne nerazcepne upodobitve Φ na kakšen enodimenzionalen podprostor v $\mathcal{Y}$. Se pravi, da lahko našo nalogo za začetek zastavimo tako: poišči vse tiste neničelne preslikave $\xi: \mathcal{X} \to L(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, za katere velja

$$\xi(a \cdot x) = \varphi(a)\xi(x) \quad \text{pri vseh } a \in \mathfrak{A} \text{ in } x \in \mathcal{X}. \tag{5.1.1}$$

Pogoj (4.4.1) iz definicije 4.4.1 je avtomatično izpolnjen, ker smo zahtevali, da je ξ netrivialna preslikava. Namreč, če za neničelno število α velja $\xi(x)\alpha = 0$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$, potem je $\xi(x) = 0$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$ in torej $\xi = 0$.

Napravimo levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathbb{C}_\varphi$ (glejte zgled 1.5.5). Potem nam (5.1.1) pove, da iščemo multiplikatorje, ki slikajo iz $\mathcal{X}$ v $\mathbb{C}_\varphi$, ali krajše, zanima nas prostor $L_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}, \mathbb{C}_\varphi) \subseteq \mathcal{X}'$.

V nadaljevanju algebra $\mathfrak{A}$ ne bo imela nujno enote, k množici netrivialnih multiplikativnih linearnih funkcionalov bomo zato dodali še funkcional 0. Unijo $\Sigma(\mathfrak{A}) \cup \{0\}$ bomo označili s $\Sigma_0(\mathfrak{A})$.

Definicija 5.1.1. *Naj bo* $\mathcal{X}$ *levi modul nad algebro* $\mathfrak{A}$*. Linearen funkcional* $\xi \in \mathcal{X}'$ *je* točkasti multiplikator *pri* $\varphi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$*, če velja*

$$\langle \xi, a \cdot x\rangle = \varphi(a)\langle \xi, x\rangle \qquad \text{za vse } a \in \mathfrak{A} \text{ in vse } x \in \mathcal{X}.$$

Očitno je trivialen funkcional na $\mathcal{X}$ točkasti multiplikator pri vsakem $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$.

Definicija 5.1.2. *Maksimalen podmodul* $\mathcal{M}$ *v levem* $\mathfrak{A}$*-modulu* $\mathcal{X}$ *je* hiper-maksimalen*, če je njegova kodimenzija enaka 1.*

Množico vseh hiper-maksimalnih podmodulov v $\mathcal{X}$ bomo označili z $\Delta_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. V primeru Banachovega modula $\mathcal{X}$ bo $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ množica vseh zaprtih hiper-maksimalnih podmodulov. Tej množici bomo rekli *hiperspekter* modula $\mathcal{X}$.

Trditev 5.1.3. *Naj bo* $\mathcal{X}$ *levi modul nad algebro* $\mathfrak{A}$*. Netrivialen linearen funkcional* $\xi \in \mathcal{X}'$ *je točkasti multiplikator natanko tedaj, ko je njegovo jedro hiper-maksimalen podmodul v* $\mathcal{X}$*.*

Dokaz. V eno smer je dokaz enostaven: če je ξ netrivialen točkasti multiplikator pri nekem $\varphi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$, potem je $\mathcal{P} := \mathit{ker}\,\xi$ linearen podprostor s kodimenzijo 1 in za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ ter $x \in \mathcal{P}$ velja $\langle \xi, a\cdot x\rangle = \varphi(a)\langle \xi, x\rangle = 0$, kar pomeni, da je $\mathcal{P}$ podmodul. Obratno. Naj bo $\mathit{ker}\,\xi$ podmodul v $\mathcal{X}$. Ker je ξ netrivialen, obstaja v $\mathcal{X}$ takšen vektor e, da je $\langle \xi, e\rangle = 1$. Definirajmo preslikavo $\varphi:\ \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ s predpisom $\varphi(a) := \langle \xi, a \cdot e\rangle$. Očitno gre za linearen funkcional. Hitro tudi vidimo, da je definicija φ neodvisna od izbire vektorja e : če tudi za vektor $e' \in \mathcal{X}$ velja $\langle \xi, e'\rangle = 1$, je $e - e' \in \mathit{ker}\,\xi$, od koder sledi $\langle \xi, a \cdot e\rangle = \langle \xi, a \cdot e'\rangle$, pri vseh $a \in \mathfrak{A}$, saj je $\mathit{ker}\,\xi$ podmodul. Vsak vektor $x \in \mathcal{X}$ lahko zapišemo kot $x = \langle \xi, x\rangle e + x_0$, kjer je $x_0 \in \mathit{ker}\,\xi$. S pomočjo tega dejstva ni težko ugotoviti, da je φ multiplikativen: za poljubna $a,\ b \in \mathfrak{A}$ velja

$$\varphi(ab) = \langle \xi, ab\cdot e\rangle = \langle \xi, a\cdot(\varphi(b)e + x_0)\rangle = \varphi(a)\varphi(b).$$

Zdaj je enostavno videti, da je ξ točkasti multiplikator pri φ. □

Obstaja torej korespondenca med netrivialnimi točkastimi multiplikatorji in hiper-maksimalnimi podmoduli.

Iz same definicije hiper-maksimalnih podmodulov sledita inkluziji

$$\Delta_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \quad \text{in} \quad \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}).$$

Hiper-maksimalni podmoduli so torej tudi primitivni.

Pri danem $\varphi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$ označimo z $\Delta_\varphi(\mathcal{X})$ množico vseh tistih hiper-maksimalnih podmodulov v $\mathcal{X}$, ki so jedra točkastih multiplikatorjev, ki pripadajo φ. V primeru Banachovih modulov naj bo $\overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})$ podmnožica zaprtih podmodulov iz $\Delta_\varphi(\mathcal{X})$.

Posledica 5.1.4. *Za vsak* $\mathcal{P} \in \Delta_\varphi(\mathcal{X})$, $\varphi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$, *je* $(\mathcal{P} : \mathcal{X}) = ker\, \varphi$.

Dokaz. Naj bo ξ tak točkasti multiplikator na $\mathcal{X}$, ki pripada φ in katerega jedro je $\mathcal{P}$. Ker je ξ nerazcepna upodobitev $\mathcal{X}$ na paru $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, je v primeru, ko ima algebra enoto, ta posledica poseben primer trditve 4.4.2 (ii). Seveda pa lahko to posledico dokažemo neposredno: element $a \in \mathfrak{A}$ je v kvocientu $(\mathcal{P} : \mathcal{X})$ natanko tedaj, ko velja $\langle \xi, a \cdot x\rangle = 0$ za vse $x \in \mathcal{X}$. Slednje pa velja natanko tedaj, ko je $a \in ker\, \varphi$. □

Če ima algebra $\mathfrak{A}$ enoto, potem pri trivialnem funkcionalu ni nobenega netrivialnega točkastega multiplikatorja, kar z drugimi besedami pomeni, da je tedaj množica $\Delta_0(\mathcal{X})$ prazna.

Zgled 5.1.5. Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna algebra in poglejmo nanjo kot na levi $\mathfrak{A}$-modul. Podmoduli so torej ideali in hiper-maksimalni podmoduli so natanko vsa jedra netrivialnih multiplikativnih linearnih funkcionalov. Se pravi, da so v tem primeru vse množice $\Delta_\varphi(\mathfrak{A})$, $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, singletoni.

Preden navedemo nekaj zgledov za točkaste multiplikatorje, bomo za primer zaprtih hiper-maksimalnih podmodulov v Banachovem modulu zapisali nekaj ugotovitev, ki smo jih za prapodmodule dokazali že v razdelku 4.6.

Spomnimo se, da smo z $\nu_\mathfrak{A}$ označili naravno preslikavo. Zdaj, ko obravnavamo zaprte hiper-maksimalne podmodule, je to preslikava iz $\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ v $\Delta(\mathfrak{A})$ (to zagotavlja posledica 5.1.4).

Trditev 5.1.6. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Prostora $\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ in $\Delta(\mathfrak{A})$ naj bosta opremljena s hull-kernel topologijama.*

(i) Naravna preslikava $\nu_\mathfrak{A} : \overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X}) \to \Delta(\mathfrak{A})$ je zvezna.

(ii) Če je $\mathcal{F}$ zaprta podmnožica v $\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, je $\nu_\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ zaprta v relativni topologiji množice $\nu_\mathfrak{A}(\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X}))$. Podobno za odprto množico $\mathcal{U} \subseteq \overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ velja, da je $\nu_\mathfrak{A}(\mathcal{U})$ odprta v relativni topologiji množice $\nu_\mathfrak{A}(\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X}))$. Se pravi, da je naravna preslikava odprta in zaprta, če je surjektivna.

(iii) Če je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven, potem je naravna preslikava $\nu_\mathfrak{A} : \overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X}) \to \Delta(\mathfrak{A})$ surjektivna natanko tedaj, ko je $ann_\mathfrak{A}(\mathcal{X}) = Rad^\Delta(\mathfrak{A})$.

Dokaz. (i) je neposredna posledica trditve 4.6.2 (i).

(ii) Naj bo $\mathcal{F}$ zaprta podmnožica v $\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$. Potem je

$$\nu_\mathfrak{A}(\mathcal{F}) = h_\mathfrak{A}((k_\mathcal{X}(\mathcal{F}) : \mathcal{X})) \cap \nu_\mathfrak{A}(\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})).$$

Namreč, ker je $\mathcal{F} = h_\mathcal{X}^{\overline{\Delta}}(k_\mathcal{X}(\mathcal{F}))$, iz $\varphi \in h_\mathfrak{A}((k_\mathcal{X}(\mathcal{F}) : \mathcal{X})) \cap \nu_\mathfrak{A}(\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X}))$ sledi, da je $\overline{\Delta}_\varphi$ neprazna množica in da za vsak $\mathcal{P}$ iz te množice velja $(k_\mathcal{X}(\mathcal{F}) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$, oziroma $\mathcal{P} \in h_\mathcal{X}^{\overline{\Delta}}(k_\mathcal{X}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$. To nam da $\varphi \in \nu_\mathfrak{A}(\mathcal{F})$. Obrat je trivialen. Zdaj je jasno, da je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$ zaprta v relativni hull-kernel topologiji množice $\nu_{\mathfrak{A}}(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}))$. Primer odprte množice obravnavamo tako kot smo to storili v dokazu trditve 4.6.2 (ii).

(iii) Ravnamo podobno kot v dokazu trditve 4.6.3. Upoštevati moramo prejšnjo točko te trditve. $\square$

Vrnimo se k točkastim multiplikatorjem.

Zgled 5.1.7. Naj bosta m in n naravni števili. Označimo z $\mathfrak{X}$ prostor $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ vseh kompleksnih $m\times n$ matrik in z $\mathfrak{A}$ algebro $D_m(\mathbb{C})$ vseh diagonalnih kompleksnih $m\times m$ matrik. Očitno je $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathfrak{X}$ je Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul pri običajnem množenju matrik. Definirajmo preslikave $\varphi_k : \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$, $k=1,\dots,m$, s predpisi $\varphi_k : [a_{ij}]\mapsto a_{kk}$. Brez težav se lahko prepričamo, da je $\Sigma(\mathfrak{A})=\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$. Pri vsakem paru indeksov p in q, pri čemer je $1\le p\le m$ in $1\le q\le n$, definirajmo še funkcionale ξ_{pq} na $\mathfrak{X}$ s predpisi $\xi_{pq}: [x_{ij}]\mapsto x_{pq}$. Enostavno preverjanje nam pokaže, da je funkcional $\xi\in\mathfrak{X}^*$ točkasti multiplikator pri $\varphi_k\in\Sigma(\mathfrak{A})$ natanko tedaj, ko ga lahko zapišemo kot linearno kombinacijo funkcionalov $\xi_{k1},\dots,\xi_{kn}$.

Definicija 5.1.8. *Naj bo $\mathfrak{A}$ algebra in $\mathfrak{X}$ levi $\mathfrak{A}$-modul. Neničelni vektor $x\in\mathfrak{X}$ je* karakterističen *za $\mathfrak{A}$, če v $\Sigma_0(\mathfrak{A})$ obstaja takšen φ, da pri vseh $a\in\mathfrak{A}$ velja $a\cdot x=\varphi(a)x$. Multiplikativnemu linearnemu funkcionalu φ, ki zadošča tej relaciji, pravimo* karakterističen multiplikativen funkcional.

Pri danem $\varphi\in\Sigma_0(\mathfrak{A})$ označimo s $Ch_{\varphi}(\mathfrak{X})$ množico, ki vsebuje vektor 0 ter vse karakteristične vektorje v $\mathfrak{X}$, ki pripadajo φ. Ni težko videti, da je $Ch_{\varphi}(\mathfrak{X})$ podmodul v $\mathfrak{X}$. V primeru, ko je $\mathfrak{X}$ Banachov modul (in je torej $\mathfrak{A}$ Banachova algebra, kar pomeni, da so multiplikativni linearni funkcionali omejeni, tj. zvezni), je $Ch_{\varphi}(\mathfrak{X})$ zaprt podmodul v $\mathfrak{X}$. Še več, če je $\mathfrak{X}^*$ dualen Banachov $\mathfrak{A}$-modul, je $Ch_{\varphi}(\mathfrak{X}^*)$ šibko-$*$ zaprt podmodul v $\mathfrak{X}^*$.

Naj bo $Ch_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ linearna lupina unije $\cup_{\varphi\in\Sigma_0(\mathfrak{A})}Ch_{\varphi}(\mathfrak{X})$. Če je $\mathfrak{X}$ Banachov modul naj bo $\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ zaprtje $Ch_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ v $\mathfrak{X}$ in $\overline{Ch}^*_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}^*)$ šibko-$*$ zaprtje $Ch_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}^*)$ v $\mathfrak{X}^*$. Jasno, $Ch_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ je podmodul v $\mathfrak{X}$. Očitno je tudi, da sta podmodula $\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$ in $\overline{Ch}^*_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}^*)$ zaprta po normi oz. v šibki-$*$ topologiji, ko je $\mathfrak{X}$ Banachov modul.

Zdaj lahko odgovorimo na vprašanje, ki smo si ga zastavili na začetku razdelka, ko smo spraševali o nerazcepnih upodobitvah levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathfrak{X}$, ki pripadajo $\varphi\in\Sigma(\mathfrak{A})$.

Pri vsakem $x\in\mathfrak{X}$ naj bo $\Phi(x)$ preslikava iz $Ch_{\varphi}(\mathfrak{X}')$ v $\mathbb{C}_{\varphi}$, ki je definirana s $\Phi(x)\xi=\langle\xi,x\rangle$. Očitno je vsaka od preslikav $\Phi(x)$, $x\in\mathfrak{X}$, linearna. Torej je Φ preslikava iz $\mathfrak{X}$ v $L(Ch_{\varphi}(\mathfrak{X}'),\mathbb{C}_{\varphi})$. Tudi zanjo ni težko videti, da je linearna. Za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ ter $x \in \mathcal{X}$ velja

$$\Phi(a \cdot x)\xi = \langle \xi, a \cdot x \rangle = \varphi(a)\langle \xi, x \rangle = \varphi(a)\Phi(x)\xi$$

pri vseh $\xi \in Ch_{\varphi}(\mathcal{X}')$, kar pomeni, da je Φ upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(Ch_{\varphi}(\mathcal{X}'), \mathbb{C})$.

Izrek 5.1.9. *Upodobitev Φ je maksimalna nerazcepna.*

DOKAZ. Hitro vidimo, da je Φ nerazcepna: za φ vemo, da je nerazcepna upodobitev algebre $\mathfrak{A}$, pogoju (4.4.1) iz definicije 4.4.1 pa je tudi zadoščeno, saj za $\xi \in Ch_{\varphi}(\mathcal{X}')$ iz $0 = \Phi(x)\xi = \langle \xi, x \rangle$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$ sledi $\xi = 0$.

Po trditvi 4.4.8 ima upodobitev Φ maksimalno nerazcepno razširitev $\Theta : \mathcal{X} \to L(\mathcal{Y}, \mathbb{C})$. Obstaja torej takšna injektivna linearna preslikava

$$U : \ Ch_{\varphi}(\mathcal{X}') \to \mathcal{Y},$$

da pri vseh $x \in \mathcal{X}$ velja

$$\Phi(x) = \Theta(x)U. \tag{5.1.2}$$

Spomnimo se, da smo v razdelku 4.3 pri danem $y \in \mathcal{Y}$ s Θ_y označili linearno preslikavo $x \mapsto \Theta(x)y$, $x \in \mathcal{X}$. Brez težav lahko preverimo, da je preslikava V, ki slika iz $\mathcal{Y}$ v $Ch_{\varphi}(\mathcal{X}')$, linearna, če je definirana z $Vy := \Theta_y$ pri vseh $y \in \mathcal{Y}$.

Iz (5.1.2) sledi veljavnost enakosti $\Phi(x)V = \Theta(x)UV$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$. Ker pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ in vsakem $y \in \mathcal{Y}$ velja $\Phi(x)Vy = \langle Vy, x \rangle = \Theta(x)y$, imamo $\Theta(x)UVy = \Phi(x)Vy = \Theta(x)y$ pri vseh $x \in \mathcal{X}$ in vseh $y \in \mathcal{Y}$. Zaradi nerazcepnosti Θ je torej $UVy = y$ pri vseh $y \in \mathcal{Y}$, kar pomeni, da je UV identični operator na $\mathcal{Y}$.

Poglejmo zdaj še produkt VU. Pri poljubnem $\xi \in Ch_{\varphi}(\mathcal{X}')$ je

$$\Phi(x)VU\xi = \langle VU\xi, x \rangle = \Theta(x)U\xi = \Phi(x)\xi$$

pri vseh $x \in \mathcal{X}$. Ker je Φ nerazcepna, je torej $VU\xi = \xi$ za vse $\xi \in Ch_{\varphi}(\mathcal{X}')$, kar pomeni, da je VU identični operator na $Ch_{\varphi}(\mathcal{X}')$. Ugotovili smo, da sta upodobitvi Φ in Θ ekvivalentni, kar seveda pomeni, da je Φ maksimalna nerazcepna. $\square$

Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Pri vsakem $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ naj bo $\mathcal{M}_{\varphi} := ker\,\varphi$ in naj bo $\mathcal{M}_0 = \mathfrak{A}$. Z $\mathcal{X}_{\varphi}$ označimo zaprtje linearne množice $\mathcal{M}_{\varphi} \cdot \mathcal{X}$ v $\mathcal{X}$. Očitno je $\mathcal{X}_{\varphi}$ zaprt podmodul v $\mathcal{X}$. Če gledamo na $\mathcal{X}$ kot na levi Banachov $\mathcal{M}_{\varphi}$-modul, je $\mathcal{X}_{\varphi}$ *bistveni podmodul* v smislu [**25**] §15.

Predpostavimo, da je $\mathcal{Z}$ takšen zaprt podprostor v $\mathcal{X}$, da velja $\mathcal{X}_{\varphi} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ za nek $\varphi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$. Vsak $a \in \mathfrak{A}$ lahko zapišemo kot $a = \varphi(a) + a_0$, kjer je $a_0 \in \mathcal{M}_{\varphi}$. Se pravi, da za vsak $z \in \mathcal{Z}$ in vsak $a \in \mathfrak{A}$ velja $a \cdot z = \varphi(a)z + a_0 \cdot z$, od koder sledi $a \cdot z \in \mathcal{Z}$, saj je produkt $a_0 \cdot z$ v $\mathcal{X}_\varphi$. Torej je podprostor $\mathcal{Z}$ podmodul v $\mathcal{X}$.

Iz pravkar povedanega sledi, da je vsak zaprt podprostor v $\mathcal{X}$, ki ima kodimenzijo 1 in vsebuje $\mathcal{X}_\varphi$, element množice $\overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})$. Očitno velja tudi obrat: vsak element v $\overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})$ je zaprt podmodul s kodimenzijo 1, ki vsebuje $\mathcal{X}_\varphi$. Ker je $\mathcal{X}_\varphi$ seveda enak preseku vseh zaprtih podprostorov v $\mathcal{X}$, ki imajo kodimenzijo 1 in ga vsebujejo, je torej

$$\mathcal{X}_\varphi = \bigcap_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})} \mathcal{P}.$$

Definicija 5.1.10. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul.* $\overline{\Delta}$-radikal *ali* hiperradikal *modula $\mathcal{X}$ je podmodul*

$$Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X}) := \bigcap_{\varphi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})} \mathcal{X}_\varphi = \bigcap_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})} \mathcal{P}.$$

Trditev 5.1.11. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Potem je*

$$(5.1.3) \qquad Ch_\varphi(\mathcal{X}^*) = B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}, \mathbb{C}_\varphi) = \mathcal{X}_\varphi^\perp \quad \text{za vse } \varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$$

in

$$(5.1.4) \qquad \overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*) = Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X})^\perp.$$

Dokaz. Enakosti v (5.1.3) zlahka preverimo, zato poglejmo (5.1.4). Ker je $Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X})$ vsebovan v vsakem $\mathcal{X}_\varphi$, $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, je $\mathcal{X}_\varphi^\perp \subseteq Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X})^\perp$. Zaradi (5.1.3) je $\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)$ šibko-$*$ zaprtje linearne lupine unije $\cup\{\mathcal{X}_\varphi^\perp;\ \varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})\}$. Ker je $Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X})^\perp$ šibko-$*$ zaprt podmodul v $\mathcal{X}^*$, je torej $\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)$ vsebovan v njem.

Predpostavimo zdaj, da $\xi \in \mathcal{X}^*$ ni v $\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)$. Če bi jedro $ker\,\xi = \{\xi\}_\perp$ vsebovalo $\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)_\perp$, potem bi imeli $\xi \in (\{\xi\}_\perp)^\perp \subseteq (\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)_\perp)^\perp = \overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)$, kar pa ne velja. Torej obstaja v $\overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)_\perp$ takšen x, da je $\langle \xi, x \rangle \neq 0$. Iz $\mathcal{X}_\varphi^\perp \subseteq \overline{Ch}_{\mathfrak{A}}^*(\mathcal{X}^*)$ pri vseh $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ sledi, da je $x \in \mathcal{X}_\varphi$ pri vseh $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, kar pomeni, da je $x \in Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X})$. Torej ξ ni v $Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X})^\perp$. $\square$

Definicija 5.1.12. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul.* Približna enota v $\mathfrak{A}$ za $\mathcal{X}$ *je takšno posplošeno zaporedje $\{e_i\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathfrak{A}$, za katerega velja*

$$e_i \cdot x \to x \quad \text{pri vseh } x \in \mathcal{X}.$$

Če na samo algebro $\mathfrak{A}$ gledamo kot na levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, potem je posplošeno zaporedje $\{e_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ leva približna enota v $\mathfrak{A}$, če je pogoj iz definicije izpolnjen za vse $x \in \mathfrak{A}$.

Posledica 5.1.13. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in $\mathfrak{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $\varphi \in \Sigma_0(\mathfrak{A})$ takšen, da v $\mathcal{M}_\varphi$ obstaja približna enota za $\mathfrak{X}$ (na $\mathfrak{X}$ gledamo kot na levi Banachov $\mathcal{M}_\varphi$-modul), potem je $Ch_\varphi(\mathfrak{X}^*) = \{0\}$.*

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj zgledov točkastih multiplikatorjev.

Zgled 5.1.14. Na Banachovo algebro $\mathfrak{A}$ z enoto poglejmo kot na levi $\mathfrak{A}$-modul. Linearen funkcional $\xi \in \mathfrak{A}^*$ je v $Ch_\varphi(\mathfrak{A}^*)$ za nek $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ natanko tedaj, ko je $\xi = \alpha\varphi$, pri čemer je $\alpha \in \mathbb{C}$. Da je $\alpha\varphi \in Ch_\varphi(\mathfrak{A}^*)$ ni težko videti. Obrat pa sledi iz dejstva, da za vsak ξ iz $Ch_\varphi(\mathfrak{A}^*)$ velja $\langle \xi, a\rangle = \varphi(a)\langle \xi, 1\rangle$ pri vseh $a \in \mathfrak{A}$.

Naj bo $\mathfrak{I}$ zaprt levi ideal v $\mathfrak{A}$ s kodimenzijo 1. Ni težko videti, da obstaja takšen $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, da je $\mathfrak{I} = ker\,\varphi = \mathcal{M}_\varphi$ (torej je $\mathfrak{I}$ dvostranski ideal v $\mathfrak{A}$). Označimo z $\overline{\mathfrak{I}^2}$ zaprtje množice $\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{I}$. Se pravi, da je $\mathfrak{I}_\varphi = \overline{\mathcal{M}_\varphi \cdot \mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}^2}$. Po trditvi 5.1.11 so točkasti multiplikatorji na $\mathfrak{I}$, ki pripadajo φ, natanko vsi tisti funkcionali iz duala $\mathfrak{I}^*$, ki so v $\overline{\mathfrak{I}^2}^\perp$. Kot je dobro znano je prostor $\overline{\mathfrak{I}^2}^\perp$ lahko trivialen (recimo pri pogojih posledice 5.1.13), končnodimenzionalen ali neskončnodimenzionalen.

Vzemimo $\psi \in \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus \{\varphi\}$ (če obstaja). Potem je $\mathfrak{I}_\psi = \overline{\mathcal{M}_\psi \cdot \mathfrak{I}}$ dvostranski ideal v $\mathfrak{A}$, ki je vsebovan v $\mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I}$. Ker je ψ v $Ch_\psi(\mathfrak{I}^*) = \mathfrak{I}_\psi^\perp$, je kodimenzija ideala $\mathfrak{I}_\psi$ v $\mathfrak{I}$ vsaj 1. Od te kodimenzije je odvisno, ali obstajajo na $\mathfrak{I}$ poleg $\alpha\psi$, $\alpha \in \mathbb{C}$, še kakšni drugi točkasti multiplikatorji, ki pripadajo ψ. Recimo, če ima $\mathcal{M}_\psi$ levo približno enoto $\{e_i\}_{i\in\mathbb{I}}$, potem za vsak $x \in \mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I}$ velja $x = \lim_{i\in\mathbb{I}} e_i \cdot x$. Ker je vsak produkt $e_i \cdot x$ v $\mathcal{M}_\psi \cdot (\mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I})$, velja $\overline{\mathcal{M}_\psi \cdot (\mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I})} = \mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I}$. Od tod potem sledi

$$\mathfrak{I}_\psi \subseteq \mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I} = \overline{\mathcal{M}_\psi \cdot (\mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I})} \subseteq \overline{\mathcal{M}_\psi \cdot \mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_\psi,$$

oziroma $\mathfrak{I}_\psi = \mathcal{M}_\psi \cap \mathfrak{I}$. Se pravi, da je v tem primeru $Ch_\psi(\mathfrak{I}^*)$ enodimenzionalni podprostor v $\mathfrak{I}^*$, ki ga napenja ψ.

Zgled 5.1.15. Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra in $\mathfrak{I}$ tak gost ideal v $\mathfrak{A}$, na katerem je definirana norma $\|\cdot\|'$, glede na katero je $\mathfrak{I}$ Banachova algebra in za katero velja, da je $\|x\| \leq \|x\|'$ pri vseh $x \in \mathfrak{I}$, pri čemer je $\|\cdot\|$ norma iz $\mathfrak{A}$. Ni težko videti, da je potem $\mathfrak{I}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul.

Če ima $\mathfrak{A}$ približno enoto, potem je po posledici 5.1.13 $Ch_0(\mathfrak{I}) = \{0\}$.

Zožitev multiplikativnega linearnega funkcionala $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ na $\mathfrak{I}$ je od 0 različen multiplikativen linearen funkcional na $\mathfrak{I}$. Pokazati se da, da je $\varphi \mapsto \varphi|_\mathfrak{I}$ bijektivna preslikava iz $\Sigma(\mathfrak{A})$ na $\Sigma(\mathfrak{I})$. Jasno je, da je $\varphi|_\mathfrak{I}$ v $Ch_\varphi(\mathfrak{I}^*)$ za vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. Naj bo zdaj ξ poljuben od 0 različen točkasti multiplikator iz $Ch_\varphi(\mathfrak{I}^*)$. Ker je $\mathfrak{I}$ gost v $\mathfrak{A}$, obstaja takšen $e \in \mathfrak{I}$, da je $\varphi(e) = 1$. Torej je

$$\langle \xi, x\rangle = \langle \xi, ex\rangle = \langle \xi, xe\rangle = \varphi(x)\langle \xi, e\rangle$$

za vse $x \in \mathfrak{I}$. To pomeni, da je $\xi = \langle \xi, e\rangle \varphi|_{\mathfrak{I}}$ in $Ch_{\varphi}(\mathfrak{I}^*)$ je enodimenzionalen podprostor v $\mathfrak{I}^*$, ki ga napenja $\varphi|_{\mathfrak{I}}$.

Zgled 5.1.16. Naj bo G lokalno kompaktna Abelova grupa. V zgledu 1.5.8 smo videli, da je pri vsakem številu $1 \leq p \leq \infty$ prostor $L^p(G)$ Banachov levi $L^1(G)$-modul, če je modulsko množenje definirano s konvolucijo. Kaj so točkast multiplikatorji na $L^1(G)$ pri danem $\varphi \in \Sigma(L^1(G))$, lahko ugotovimo na podoben način kot v zgledu 5.1.14. Vzemimo, da je $1 < p < \infty$ in naj bo q takšno realno število, za katerega velja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Kot je dobro znano lahko izenačimo dual prostora $L^p(G)$ in prostor $L^q(G)$.

Ker je $L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$, glejte zgled 16.6 v [**25**], ni točkastih multiplikatorjev na $L^p(G)$, ki bi pripadali trivialnemu multiplikativnem funkcionalu.

Predpostavimo, da je grupa G kompaktna. V tem primeru je $L^p(G)$ gost ideal v $L^1(G)$. Kot smo videli v zgledu 5.1.15, je pri vsakem funkcionalu $\varphi \in \Sigma(L^1(G))$ množica točkastih multiplikatorjev na $L^p(G)$, ki mu pripada, enodimenzionalen prostor napet na zožitev $\varphi|_{L^p(G)}$. Zdaj lahko pokažemo, da je v tem primeru radikal $Rad^{\overline{\Delta}}_{L^1(G)}(L^p(G))$ trivialen. Namreč, zaradi kompaktnosti grupe G lahko na vsak φ gledamo kot na funkcijo iz $L^q(G)$. Če je torej funkcija f v radikalu, je

$$0 = \varphi(f) = \langle \varphi, f\rangle = \int_G f(x)\varphi(x)dx.$$

Definirajmo $g(x) := f(-x)$, $x \in G$. Potem je seveda $g \in L^p(G)$. Zaradi $L^p(G) \subseteq L^1(G)$, imamo

$$0 = \langle \varphi, f\rangle = \int_G f(x)\varphi(x)dx = \int_G g(x)\varphi(-x)dx = \widehat{g}(\varphi),$$

pri čemer je $\widehat{g}$ Fourierova transformiranka funkcije g. Grupna algebra je polenostavna, zato je $g = 0$. Se pravi, da je tudi funkcija f trivialna.

Predpostavimo zdaj, da G ni kompaktna. S $\mathcal{C}_c(G)$ označimo algebro vseh zveznih funkcij na G, katerih nosilec je kompakten. Naj bo $\varphi \in \Sigma(L^1(G))$ in recimo, da je ξ točkasti multiplikator na $L^p(G)$, ki pripada φ. Potem je

$$\langle \xi, f * g\rangle = \varphi(f)\langle \xi, g\rangle \quad \text{za vse } f \text{ in } g \text{ iz } \mathcal{C}_c(G).$$

Algebra $\mathcal{C}_c(G)$ je gosta v $L^p(G)$, zato obstaja v njej takšna funkcija e, da je $\varphi(e) = 1$. Iz zgornje enakosti sledi, da je $\xi|_{\mathcal{C}_c(G)} = \langle \xi, e\rangle \varphi|_{\mathcal{C}_c(G)}$. Če bi bilo število $\langle \xi, e\rangle$ od nič različno, bi bil $\eta := \langle \xi, e\rangle^{-1}\xi$ zvezen linearen funkcional na $L^p(G)$, za katerega bi veljalo $\eta|_{\mathcal{C}_c(G)} = \varphi|_{\mathcal{C}_c(G)}$. Toda to je nemogoče, saj funkcionala $\varphi|_{\mathcal{C}_c(G)}$ ni mogoče zvezno razširiti na ves $L^p(G)$. Ugotovili smo, da so v primeru, ko G ni kompaktna, vsi moduli $Ch_{\varphi}(L^q(G))$, $\varphi \in \Sigma(L^1(G))$, trivialni.

5.2. Enostavni multiplikatorji na Banachovih modulih

V tem razdelku bomo obravnavali poseben razred multiplikatorjev na danem levem Banachovem modulu. Pokazali bomo, da imajo multiplikatorji iz obravnavanega razreda podobne lastnosti kot multiplikatorji na komutativnih Banachovih algebrah.

Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in naj bosta $\mathcal{X}$ ter $\mathcal{Z}$ leva Banachova $\mathfrak{A}$-modula. Če je T iz $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, potem velja

$$\langle T^*(\xi \cdot a), x\rangle = \langle \xi, a \cdot Tx\rangle = \langle (T^*\xi) \cdot a, x\rangle$$

za vse $a \in \mathfrak{A}$, $x \in \mathcal{X}$ in $\xi \in \mathcal{Z}^*$. Se pravi, da je $T^* \in B(\mathcal{Z}^*, \mathcal{X}^*)_{\mathfrak{A}}$. To dokazuje prvi del naslednje trditve, ki je modulska varianta izreka 1.2.4 iz [**49**].

Trditev 5.2.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in naj bosta $\mathcal{X}$ ter $\mathcal{Z}$ leva Banachova $\mathfrak{A}$-modula. Če je $T \in B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, potem je $T^* \in B(\mathcal{Z}^*, \mathcal{X}^*)_{\mathfrak{A}}$ in pri vseh $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ velja $T^*(\mathcal{Z}_\varphi^\perp) \subseteq \mathcal{X}_\varphi^\perp$. Po drugi strani, če je T takšen omejen linearen operator iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{Z}$, za katerega velja $T^*(\mathcal{Z}_\varphi^\perp) \subseteq \mathcal{X}_\varphi^\perp$ pri vseh $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, potem je za poljubna $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ element $T(a \cdot x) - a \cdot Tx$ v $\overline{\Delta}$-radikalu modula $\mathcal{Z}$. V posebnem primeru, ko je $\mathcal{Z}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven, je torej $T \in B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$.*

Dokaz. Vzemimo $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ in $\zeta \in \mathcal{Z}_\varphi^\perp$. Zaradi (5.1.3) je $(T^*\zeta) \cdot a = T^*(\zeta \cdot a) = \varphi(a)T^*\zeta$ za vse $a \in \mathfrak{A}$, zato je $T^*\zeta \in \mathcal{X}_\varphi^\perp$ po trditvi 5.1.11.

Naj bo zdaj T takšna omejena linearna preslikava iz $\mathcal{X}$ v $\mathcal{Z}$, za katero velja $T^*(\mathcal{Z}_\varphi^*) \subseteq \mathcal{X}_\varphi^\perp$ pri vseh $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. Označimo z $\mathcal{W}$ linearno lupino unije $\cup\{\mathcal{Z}_\varphi^\perp;\ \varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})\}$. V dokazu trditve 5.1.11 smo videli, da je šibko-$*$ zaprtje množice $\mathcal{W}$ enako $Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{Z})^\perp$. Naj bosta $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ poljubna. Potem za $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k$ iz $\mathcal{W}$, pri čemer so ξ_k v $\mathcal{X}_{\varphi_k}^\perp$ pri nekih $\varphi_k \in \Sigma(\mathfrak{A})$, $k = 1, \dots, n$, velja

$$\begin{aligned}\langle \xi, T(a \cdot x) - a \cdot Tx\rangle &= \sum_{k=1}^n (\langle \xi_k, T(a \cdot x)\rangle - \langle \xi_k, a \cdot Tx\rangle)\\ &= \sum_{k=1}^n (\langle (T^*\xi_k) \cdot a, x\rangle - \langle T^*(\xi_k \cdot a), x\rangle)\\ &= \sum_{k=1}^n (\varphi_k(a)\langle T^*\xi_k, x\rangle - \varphi_k(a)\langle T^*\xi_k, x\rangle) = 0.\end{aligned}$$

Od tod sledi $T(a \cdot x) - a \cdot Tx \in Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{Z})$ za vse $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$. □

Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Kot smo videli v prejšnji trditvi, je za vsak $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ in vsak $T \in B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ prostor $\mathcal{X}_\varphi^\perp$ invarianten za T^*. Se pravi, da T^* preslika vsak točkasti multiplikator $\xi \in \mathcal{X}_\varphi^\perp$ v točkasti multiplikator $T^*\xi \in \mathcal{X}_\varphi^\perp$. Očitno je

$T^*\xi = 0$ natanko tedaj, ko je $im\, T \subseteq ker\, \xi$. Če pa je $T^*\xi$ različen od 0, je jedro $ker\,(T^*\xi)$ v $\overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})$. Ni težko videti, da T preslika $ker\,(T^*\xi)$ v $ker\,\xi$.

V nadaljevanju nas bodo zanimali tisti multiplikatorji iz $B_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, ki ohranjajo vse zaprte hiper-maksimalne podmodule.

Definicija 5.2.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Operator $T \in B(\mathcal{X})$ je* enostaven multiplikator *na $\mathcal{X}$, če je multiplikator, za katerega velja $T\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$ pri vseh $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$.*

Množico vseh enostavnih multiplikatorjev na $\mathcal{X}$ bomo označili z $M_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, torej

$$M_\mathfrak{A}(\mathcal{X}) = \{T \in B_\mathfrak{A}(\mathcal{X});\ T\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P} \text{ za vse } \mathcal{P} \in \overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})\}.$$

Naslednji zgled nam kaže, da je vsak multiplikator na polenostavni komutativni Banachovi algebri enostaven. V nadaljevanju bomo videli (trditev 5.2.4), da imajo enostavni multiplikatorji precej lastnosti, ki so značilne za multiplikatorje na algebrah.

Zgled 5.2.3. Naj bo $\mathfrak{A}$ polenostavna komutativna Banachova algebra. Spomnimo se, da je preslikava $T:\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ *multiplikator* na $\mathfrak{A}$, če je $x(Ty) = (Tx)y$ za vse $x,\ y \in \mathfrak{A}$. Množica vseh multiplikatorjev na $\mathfrak{A}$, je $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$. Kot vemo je to krepko zaprta podalgebra v $B(\mathfrak{A})$, ki vsebuje identični operator (izreka 1.1.1 in 1.1.2 v [**49**]). Poglejmo na $\mathfrak{A}$ kot na levi Banachov $\mathfrak{A}_1$-modul. Množica $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{A})$ je enaka množici maksimalnih modularnih idealov v $\mathfrak{A}$. Ker je po izreku 1.2.4 iz [**49**] linearna preslikava $T:\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ v $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ natanko tedaj, ko je $T\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ za vse maksimalne modularne ideale v $\mathfrak{A}$, je torej $\mathcal{M}(\mathfrak{A}) = M_{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{A})$.

Naslednja trditev je modulska varianta nekaterih trditev iz izrekov 1.1.1 in 1.1.2 v [**49**].

Trditev 5.2.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Množica $M_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ je podalgebra v $B_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, zaprta v krepki operatorski topologiji. Za a iz centra algebre $\mathfrak{A}$ velja, da je pripadajoči operator množenja $L_a:\ x \mapsto a\cdot x$, $x \in \mathcal{X}$, v $M_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, kar pomeni, da je identični operator vedno v $M_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$.*

Dokaz. Da je $M_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ podalgebra v $B_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, ni težko videti. Prav tako je jasno, da so operatorji množenja L_a, kjer je a iz centra $\mathfrak{A}$, multiplikatorji na $\mathcal{X}$, ki ohranjajo podmodule. Pokažimo, da je $M_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ zaprta v krepki operatorski topologiji.

Naj bo $\{T_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ poljubno posplošeno zaporedje v $M_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, ki konvergira k $T \in B(\mathcal{X})$ v krepki operatorski topologiji. Pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ torej velja

$\lim_{i\in\mathbb{I}} \|T_i x - Tx\| = 0$. Naj bosta $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$ poljubna. Potem je

$$\|T(a\cdot x) - a\cdot Tx\| \leq \|T(a\cdot x) - T_i(a\cdot x)\| + \|a\cdot T_i x - a\cdot Tx\| \to 0,$$

kar pomeni, da je T multiplikator. Ker pri vsakem $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ iz $x \in \mathcal{P}$ sledi $T_i x \in \mathcal{P}$, je tudi $Tx \in \mathcal{P}$, saj je $\mathcal{P}$ zaprt podmodul. $\square$

Ker imajo enostavni multiplikatorji v splošnem lepše lastnosti kot splošni multiplikatorji iz $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, je seveda zanimivo vprašanje, kdaj velja enakost $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. V zgledu 5.2.3 smo videli, da ta enakost velja, če na polenostavno komutativno Banachovo algebro $\mathfrak{A}$ gledamo kot na levi Banachov $\mathfrak{A}_1$-modul.

Trditev 5.2.5. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Enakost $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ velja, če je izpolnjen kateri od naslednjih pogojev.*

(i) Pri vsakem $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ je množica $\overline{\Delta}_{\varphi}(\mathcal{X})$ bodisi prazna bodisi singleton.

(ii) Algebra $\mathfrak{A}$ deluje na $\mathcal{X}$ topološko ciklično.

Dokaz. Trditev očitno velja, če je izpolnjen pogoj (i). Predpostavimo, da velja (ii).

Naj bo $e \in \mathcal{X}$ topološko cikličen vektor. Izberimo $T \in B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\varphi}(\mathcal{X})$, $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$. Naj bo $\xi \in \mathcal{X}_{\varphi}^{\perp}$ takšen, da je $\mathcal{P} = ker\,\xi$. Ker e ne more biti v $\mathcal{P}$, je $c := |\langle \xi, e\rangle|$ pozitivno število. Za poljubna $\varepsilon > 0$ in $x \in \mathcal{P}$ obstaja takšen $a_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ da je $\|x - a_\varepsilon \cdot e\| < \varepsilon$. Torej je $|\varphi(a_\varepsilon)| = c^{-1}|\langle \xi, x - a_\varepsilon\cdot e\rangle| < \varepsilon c^{-1}\|\xi\|$. Zdaj lahko naredimo naslednjo oceno

$$\begin{aligned}
|\langle \xi, Tx\rangle| &\leq |\langle \xi, T(x - a_\varepsilon\cdot e)\rangle| + |\langle \xi, T(a_\varepsilon \cdot e)\rangle| \\
&\leq \|\xi\|\|T\|\|x - a_\varepsilon\cdot e\| + |\varphi(a_\varepsilon)||\langle \xi, Te\rangle| \\
&< \varepsilon\|\xi\|(\|T\| + \frac{1}{c}|\langle \xi, Te\rangle|).
\end{aligned}$$

Ker je bil ε poljuben, je $\langle \xi, Tx\rangle = 0$, kar pomeni, da je $T\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$. $\square$

Iz definicije enostavnihih multiplikatorjev ter zveze med zaprtimi hipermaksimalnimi podmoduli in zveznimi točkastimi multiplikatorji sledi, da za vsak $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ pri vsakem $\xi \in \mathcal{X}_{\varphi}^{\perp}$, $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, obstaja takšno število $\lambda_\xi \in \mathbb{C}$, da je $T^*\xi = \lambda_\xi \xi$. Če sta η in ξ poljubna neničelna točkasta multiplikatorja iz $\mathcal{X}_{\varphi}^{\perp}$, potem je

$$\lambda_{\alpha\xi+\beta\eta}(\alpha\xi + \beta\eta) = T^*(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\lambda_\xi\xi + \beta\lambda_\eta\eta$$

za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Torej število λ_ξ ni odvisno od ξ ampak od φ. Imamo torej takšno število λ_φ, da je $T^*\xi = \lambda_\varphi\xi$ za vse $\xi \in \mathcal{X}_{\varphi}^{\perp}$. Prostor $\Sigma(\mathfrak{A})$ vseh karakterjev na $\mathfrak{A}$ izenačimo s prostorom hiper-maksimalnih idealov, $\Delta(\mathfrak{A})$.

Na $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ lahko s predpisom $\widetilde{T}(\mathcal{P}) := \lambda_{\nu(\mathcal{P})}$ definiramo kompleksno funkcijo $\widetilde{T}$. Ni težko videti, da za poljuben neničelni ξ iz $\mathcal{P}^\perp$ in poljuben $x \in \mathcal{X}$, za katerega je $\langle \xi, x\rangle \neq 0$, velja $\widetilde{T}(\mathcal{P}) = \langle \xi, x\rangle^{-1}\langle \xi, Tx\rangle$. Pripomnimo, da je funkcija $\widetilde{T}$ konstantna na vsaki od množic $\overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})$, $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$, in da je $\widetilde{L}_a(\mathcal{P}) = \varphi(a)$, $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})$, za vsak a iz centra algebre $\mathfrak{A}$.

Pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ označimo z $\widehat{x}(\mathcal{P})$ element $x + \mathcal{P}$ v kvocientnem modulu $\mathcal{X}/\mathcal{P}$.

Trditev 5.2.6. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, potem za poljubna $x \in \mathcal{X}$ in $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ velja*

$$(Tx)\widehat{\ }(\mathcal{P}) = \widetilde{T}(\mathcal{P})\widehat{x}(\mathcal{P}).$$

Dokaz. Naj bo $\varphi \in \Sigma(\mathfrak{A})$ in $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_\varphi(\mathcal{X})$. Izberimo $\xi \in \mathcal{X}_\varphi^\perp$ in $e \in \mathcal{X}$ tako, da bo $\mathcal{P} = \mathit{ker}\,\xi$ in $\langle \xi, e\rangle = 1$. Poljuben $x \in \mathcal{X}$ lahko zapišemo kot $x = \langle \xi, x\rangle e + x_0$, pri čemer je $x_0 \in \mathcal{P}$. Ker je $\mathcal{P}$ invarianten za T, velja

$$\begin{aligned}\langle \xi, Tx - \widetilde{T}(\mathcal{P})x\rangle &= \langle \xi,\ \langle \xi, x\rangle Te + Tx_0 - \widetilde{T}(\mathcal{P})\langle \xi, x\rangle e - \widetilde{T}(\mathcal{P})x_0\rangle \\ &= \langle \xi, x\rangle\langle \xi, Te\rangle - \langle \xi, x\rangle\widetilde{T}(\mathcal{P}) = 0.\end{aligned}$$

Od tod sledi $(Tx)\widehat{\ }(\mathcal{P}) = Tx + \mathcal{P} = \widetilde{T}(\mathcal{P})x + \mathcal{P} = \widetilde{T}(\mathcal{P})\widehat{x}(\mathcal{P})$. □

Za vsak $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ definirajmo

$$\|\widetilde{T}\|_\infty := \sup\{|\widetilde{T}(\mathcal{P})|;\ \mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})\}.$$

Trditev 5.2.7. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto, $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul in naj bo $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Potem je*

$$\|\widetilde{T}\|_\infty \leq \|T\|.$$

Dokaz. Naj bo $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Potem je $0 \leq K_{\mathcal{P}} := \sup\{\|\widehat{x}(\mathcal{P})\|;\ \|x\| = 1\} \leq 1$. Torej velja

$$\|\widetilde{T}(\mathcal{P})\widehat{x}(\mathcal{P})\| = \|(Tx)\widehat{\ }(\mathcal{P})\| \leq K_{\mathcal{P}}\|Tx\| \leq K_{\mathcal{P}}\|T\|\|x\|$$

za vse $x \in \mathcal{X}$. Če se omejimo le na take $x \in \mathcal{X}$, ki imajo normo 1, dobimo

$$\begin{aligned}|\widetilde{T}(\mathcal{P})| &\leq \inf\{K_{\mathcal{P}}\|T\|\|\widehat{x}(\mathcal{P})\|^{-1};\ \|x\| = 1\} \\ &= K_{\mathcal{P}}\|T\|(\sup\{\|\widehat{x}(\mathcal{P})\|;\ \|x\| = 1\})^{-1} = \|T\|.\end{aligned}$$

Se pravi, da je res $\|\widetilde{T}\|_\infty \leq \|T\|$. □

Če je $T \in B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ bijektiven operator, potem je T^{-1} v $B(\mathcal{X})$. Še več, T^{-1} je v $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, saj velja

$$\begin{aligned}T^{-1}(a \cdot x) - a \cdot T^{-1}x &= T^{-1}(T(T^{-1}(a \cdot x)) - T(a \cdot T^{-1}x)) \\ &= T^{-1}(a \cdot x) - T^{-1}(a \cdot x) = 0,\end{aligned}$$

za vse $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$.

Trditev 5.2.8. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ bijektiven, potem je tudi $T^{-1} \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. V tem primeru velja $\widetilde{T^{-1}}(\mathcal{P}) = \widetilde{T}(\mathcal{P})^{-1}$ za vse $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$.*

Dokaz. Naj bo $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ bijektiven. Vemo že, da je T^{-1} v $B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Vzemimo poljuben $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in naj bo $\xi \in \mathcal{X}^*$ takšen, da je $\mathcal{P} = ker\,\xi$. Izberimo še takšen $e \in \mathcal{X}$, da bo $\langle \xi, e\rangle = 1$. Potem za vse $y \in \mathcal{P}$ velja, da je $T^{-1}y = \langle \xi, T^{-1}y\rangle e + x_0$, kjer je $x_0 \in \mathcal{P}$. Od tod sledi $y = \langle \xi, T^{-1}y\rangle Te + Tx_0$. Ker sta y in Tx_0 oba v $\mathcal{P}$, vektor Te pa ne more biti v $\mathcal{P}$ (če bi Te bil v $\mathcal{P}$, bi slika multiplikatorja T bila vsebovana v $\mathcal{P}$), mora veljati $\langle \xi, T^{-1}y\rangle = 0$, kar je ekvivalentno $T^{-1}y \in \mathcal{P}$. Iz $\widehat{e}(\mathcal{P}) = (T^{-1}Te)\widehat{\ }(\mathcal{P}) = \widetilde{T^{-1}}(\mathcal{P})\widetilde{T}(\mathcal{P})\widehat{e}(\mathcal{P})$ sledi, da je $\widetilde{T^{-1}} = \widetilde{T}^{-1}$, saj je $\widehat{e}(\mathcal{P}) \neq 0$. □

Če je $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, potem lahko nanj na naraven način vpeljemo strukturo levega Banachovega $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$-modula: za poljubna $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in $x \in \mathcal{X}$ je $T \cdot x := Tx$. Se pravi, da je $\mathcal{X}^*$ desni Banachov $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$-modul. Ni težko videti, da za $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ in $\xi \in \mathcal{P}^{\perp}$, $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, velja $\xi \cdot T = \widetilde{T}(\mathcal{P})\xi$.

Vsak podmodul $\mathcal{P}$ iz $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ je po definiciji invarianten za vsak enostaven multiplikator. Se pravi, da je vsak podmodul iz $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ tudi v $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$. Naslednji zgled nam kaže, da je inkluzija $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ lahko prava.

Zgled 5.2.9. Naj bo $\mathcal{X}$ Banachov prostor dimenzije več kot 1 in naj bo $\mathfrak{A} = B(\mathcal{X})$. Z običajnim delovanjem algebre $\mathfrak{A}$ na $\mathcal{X}$ postane slednji levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Hitro vidimo, da so v $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ skalarni večkratniki enote. Torej so v $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ vse zaprte hiperravnine (podprostori s kodimenzijo 1), medtem ko je $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ prazna množica (saj v $\mathcal{X}$ ni hiperravnine, ki bi bila invariantna za vse operatorje.

Ker bomo v nadaljevanju na Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ gledali tudi kot na levi Banachov $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$-modul, se dogovorimo, da bomo ovoje podmnožic v $\mathcal{X}$ in jedra podmnožic v $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ označevali s $H_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}$ in $K_{\mathcal{X}}$, ko bo $\mathcal{X}$ obravnavan kot $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$-modul.

Trditev 5.2.10. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto. Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ obravnavajmo tudi kot levi Banachov $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$-modul. Potem je $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ in hull-kernel topologija na $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ je relativna hull-kernel topologija, ki jo ima $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ kot podmnožica v $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$, tj. $S = H_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(K_{\mathcal{X}}(S)) \cap \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ za vsako hull-kernel zaprto podmnožico S v $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$.*

Če je $\mathfrak{A}$ komutativna, potem je $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) = \overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ in obe hull-kernel topologiji sovpadata.

Dokaz. Očitno je $S \subseteq H_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(K_{\mathcal{X}}(S)) \cap \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Po drugi strani, če je $\mathcal{P} \in H_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(K_{\mathcal{X}}(S)) \cap \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, potem je $(K_{\mathcal{X}}(S) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$. Toda $K_{\mathcal{X}}(S) = k_{\mathcal{X}}(S)$ in zato je $\mathcal{P} \in h_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(k_{\mathcal{X}}(S)) = S$.

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna. Potem je vsak operator množenja T_a na $\mathcal{X}$, $a \in \mathfrak{A}$, enostaven multiplikator. Se pravi, če je $\mathcal{P}$ v $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$, je tudi v $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. □

Posledica 5.2.11. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven, potem je $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ polenostavna komutativna Banachova algebra z enoto.*

Dokaz. Naj bosta S in T iz $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Izberimo poljuben vektor x iz $\mathcal{X}$. Ker je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven, veljajo pri vseh $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ enakosti $(STx)\widehat{\ }(\mathcal{P}) = \widetilde{S}(\mathcal{P})\widetilde{T}(\mathcal{P})\widehat{x}(\mathcal{P}) = (TSx)\widehat{\ }(\mathcal{P})$. To dokazuje komutativnost. Da je $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ Banachova algebra z enoto, že vemo.

Radikal $Rad^{\overline{\Delta}}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ je enak Gelfandovemu radikalu algebre $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Namreč, $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ je komutativna in, po zgledu 5.1.5, so v $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ natanko maksimalni ideali M_φ, $\varphi \in \Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Obravnavajmo $\mathcal{X}$ kot Banachov levi $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$-modul in predpostavimo, da je $T \in Rad^{\overline{\Delta}}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Potem je $T\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$ za vse $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$, ker je $\langle \xi, Tx \rangle = \varphi(T)\langle \xi, x \rangle = 0$ pri vsakem $\varphi \in \Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ in vsakem $\xi \in Ch_{\varphi}(\mathcal{X}^*)$. Uporabimo $\overline{\Delta}$-polenostavnost modula $\mathcal{X}$, pa vidimo, da je linearna množica $T\mathcal{X}$ trivialna. □

Če gledamo na levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ tudi kot na levi Banachov $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$-modul, potem imamo za $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ definirani dve funkciji: $\widetilde{T} : \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}$ in $\widetilde{\widetilde{T}} : \overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})} \to \mathbb{C}$. Brez težav lahko preverimo, da je $\widetilde{T}$ le zožitev $\widetilde{\widetilde{T}}$, zato bomo odslej za obe funkciji uporabili isto oznako $\widetilde{T}$.

Izenačimo množico karakterjev na $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, tj. $\Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$, z množico hiper-maksimalnih idealov v $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, tj. z množico $\Delta(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Če je $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, naj bo $\widehat{T} : \Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) \to \mathbb{C}$ Gelfandova transformiranka elementa T, tj. funkcija, ki je definirana z $\widehat{T}(\varphi) := \varphi(T)$, $\varphi \in \Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Označimo z ν_M naravno preslikavo, ki slika iz $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ v $\Delta(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Potem je $\widetilde{T} = \widehat{T} \circ \nu_M$. Se pravi, da je funkcija $\widetilde{T}$ hull-kernel zvezna natanko tedaj, ko je $\widehat{T}$ zvezna glede na relativno hull-kernel topologijo na $\nu_M(\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}))$.

5.3. Spektralne lastnosti enostavnih multiplikatorjev

V tem razdelku bomo študirali enostavne multiplikatorje s stališča spektralne teorije. Naslednja trditev nam zagotavlja, da imajo enostavni multiplikatorji na $\overline{\Delta}$-polenostavnih modulih SVEP. Dokaz je podoben dokazu trditve 2.3 iz [**21**].

Trditev 5.3.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Potem ima vsak enostaven multiplikator na $\mathcal{X}$ SVEP.*

Dokaz. Naj bo $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Če je f takšna analitična funkcija na odprti množici $U \subseteq \mathbb{C}$ in z vrednostmi v $\mathcal{X}$, da je $(\lambda - T)f(\lambda) = 0$ za vse $\lambda \in U$, potem velja

$$(\lambda - \widetilde{T}(\mathcal{P}))f(\lambda)\widehat{\ }(\mathcal{P}) = 0 \quad \text{za vse } \lambda \in U \text{ in vse } \mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}). \tag{5.3.1}$$

Fiksirajmo poljuben $\mathcal{P}_0 \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Iz (5.3.1) sledi, da je $f(\lambda)\widehat{\ }(\mathcal{P}_0) = 0$ za vse $\lambda \in U \setminus \{\widetilde{T}(\mathcal{P}_0)\}$. Ker pa je $f(\lambda)\widehat{\ }(\mathcal{P}_0)$ zvezna glede na λ, imamo $f(\lambda)\widehat{\ }(\mathcal{P}_0) = 0$ na celi množici U, oziroma ekvivalentno: $f(\lambda) \in \mathcal{P}_0$ za vse $\lambda \in U$. Podmodul $\mathcal{P}_0$ je bil poljuben iz $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, zato je $f(\lambda)$ v $Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\Delta}}(\mathcal{X})$ pri vseh $\lambda \in U$. Od tod sledi $f(\lambda) = 0$ za vse $\lambda \in U$, saj je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven. $\square$

V dokazu naslednjega izreka, ki razširja del trditve 3 iz [**55**] in del trditve 1 iz [**30**] na module, bomo potebovali naravno preslikavo, ki slika iz $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ v $\Delta(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$. Tako kot na koncu razdelka 5.2 jo bomo označili z ν_M.

Izrek 5.3.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Če ima $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ lastnost (δ) ali šibko $2-SDP$, potem je $\widehat{T}: \Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija na $\nu_M(\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}))$ glede na relativno hull-kernel topologijo.*

Dokaz. Vzemimo, da $\widehat{T}$ ni zvezna na $\nu_M(\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}))$ glede na relativno hull-kernel topologijo. Potem tudi $\widetilde{T}$ ni zvezna na $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$. Se pravi, da obstaja takšna zaprta podmnožica F v $\mathbb{C}$, da $\mathcal{F} := \{\mathcal{P} \in \Delta_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X});\ \widetilde{T}(\mathcal{P}) \in F\}$ ni hull-kernel zaprta v $\overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$. Izberimo $\mathcal{P}_0 \in H_{\mathcal{X}}(K_{\mathcal{X}}(\mathcal{F})) \setminus \mathcal{F}$ in označimo $\lambda_0 = \widetilde{T}(\mathcal{P}_0) \notin F$. Naj bosta V_1 in V_2 takšni odprti okolici λ_0, oziroma množice F, da velja $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$. Označimo $U_k = (\overline{V}_k)^c$, $k = 1, 2$. Potem je $\{U_1, U_2\}$ odprto pokritje ravnine $\mathbb{C}$.

Obravnavajmo najprej primer, ko ima T lastnost (δ). Dani $x \in \mathcal{X}$ lahko zapišemo kot $x = u_1 + u_2$, pri čemer je $u_k = (T - \lambda)f_k(\lambda)$ za vse $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}_k$ in neko analitično funkcijo $f_k: \mathbb{C} \setminus \overline{U}_k \to \mathcal{X}$, $k = 1, 2$. Točka λ_0 je v $\mathbb{C} \setminus \overline{U}_1$, zato je $u_1 = (T - \lambda_0)f_1(\lambda_0)$. Naj bo $\varphi_0 = \nu_M(\mathcal{P}_0) \in \Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ in vzemimo poljuben točkasti multiplikator ξ iz $\mathcal{P}_0^{\perp}$. Potem velja

$$\langle \xi, u_1 \rangle = \langle \xi, (T - \lambda_0)f_1(\lambda_0) \rangle = \varphi_0(T - \lambda_0)\langle \xi, f_1(\lambda_0) \rangle = 0,$$

kar pomeni, da je $u_1 \in \mathcal{P}_0$.

Naj bo zdaj $\mathcal{P}$ poljubna točka iz $\mathcal{F}$. Ker je $\mu := \widetilde{T}(\mathcal{P}) \in F$, imamo $u_2 = (T - \mu)f_2(\mu)$. Element $T - \mu$ je v $k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\{\nu_M(\mathcal{P})\})$, zato je $u_2 \in k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\{\nu_M(\mathcal{P})\}) \cdot \mathcal{X}$. Velja torej

$$\begin{aligned} u_2 \in \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathcal{F}} (k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\{\nu_M(\mathcal{P})\}) \cdot \mathcal{X}) &= (\bigcap_{\mathcal{P} \in \mathcal{F}} k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\{\nu_M(\mathcal{P})\})) \cdot \mathcal{X} \\ &= k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\nu_M(\mathcal{F})) \cdot \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Ker je $\mathcal{P}_0$ v $H_{\mathcal{X}}(K_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}))$, po trditvi 4.6.1 (iii) pa je $k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\nu_M(\mathcal{F})) = (K_{\mathcal{X}}(\mathcal{F}) : \mathcal{X})$, mora biti $u_2 \in k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\nu_M(\mathcal{F})) \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_0$. Se pravi, da je $x = u_1 + u_2 \in \mathcal{P}_0$ za vse $x \in \mathcal{X}$, kar je pa seveda protislovje.

Predpostavimo zdaj, da ima T šibko $2-SDP$. Potem obstajata takšna T-invariantna podprostora $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Z}$, da je $\sigma(T|_{\mathcal{Y}}) \subseteq U_1$, $\sigma(T|_{\mathcal{Z}}) \subseteq U_2$ in $\overline{\mathcal{Y} + \mathcal{Z}} = \mathcal{X}$. Poljuben $y \in \mathcal{Y}$ lahko zapišemo kot $y = (T|_{\mathcal{Y}} - \lambda_0)u = (T - \lambda_0)u$ za nek $u \in \mathcal{Y}$, ker λ_0 ni v U_1. Če je ξ v $\mathcal{P}_0^{\perp}$, potem velja $\langle \xi, u_2 \rangle = \langle \xi, (T - \lambda_0)u \rangle = 0$. To pomeni, da je $y \in \mathcal{P}_0$. Za nek poljuben $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ naj bo $\mu := \widetilde{T}(\mathcal{P}) \in F$. Ker $\mu \notin U_2$, je vsak $z \in \mathcal{Z}$ oblike $z = (T|_{\mathcal{Z}} - \mu)v = (T - \mu)v$ za nek $v \in \mathcal{Z}$. Torej je $z \in k_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\{\nu_M(\mathcal{P})\}) \cdot \mathcal{X}$. Od tod tako kot prej sledi, da je $z \in k_{\mathfrak{A}}(\nu_M(\mathcal{F})) \cdot \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_0$. Prišli smo do protislovja, da je $\mathcal{Y} + \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}_0$. $\square$

Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Za vsak $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ je kvocient $\mathcal{X}/\mathcal{P}$ enodimenzionalen Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Označimo z $\underline{\mathcal{X}}$ podmnožico vseh tistih $\underline{x} = (x_{\mathcal{P}} + \mathcal{P})_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}$ v kartezijskem produktu $\prod_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})} \mathcal{X}/\mathcal{P}$, za katere velja $\|\underline{x}\| = \sup\{\|x_{\mathcal{P}} + \mathcal{P}\|;\ \mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})\} < \infty$, pri čemer so norme v supremumu običajne kvocientne norme. Ni težko videti, da je $\underline{\mathcal{X}}$ Banachov prostor, oziroma celo Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul za množenje dano z $a \cdot \underline{x} = (a \cdot x_{\mathcal{P}} + \mathcal{P})_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}$, $a \in \mathfrak{A}$, $\underline{x} \in \underline{\mathcal{X}}$.

Pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ in vsakem $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ označimo z $\widehat{x}(\mathcal{P})$ odsek $x + \mathcal{P}$ v $\mathcal{X}/\mathcal{P}$. Se pravi, da lahko na $\widehat{x}$ gledamo kot na element v $\underline{\mathcal{X}}$. Jasno je, da je $\|\widehat{x}\| \leq \|x\|$ za vse $x \in \mathcal{X}$ in da je preslikava $\Gamma :\ x \mapsto \widehat{x}$ injektivna natanko tedaj, ko je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven.

Definicija 5.3.3. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Enostaven multiplikator T na $\mathcal{X}$ ima* naraven spekter*, če je $\sigma(T) = \overline{\widetilde{T}(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))}$.*

Naslednji izrek razširja na module preostanek trditev 3 iz [**55**] in 1 iz [**30**].

Izrek 5.3.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Če ima $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ lastnost (δ) ali šibko $2-SDP$, potem ima naraven spekter.*

Dokaz. Ni težko videti, da je $S :\ (x_{\mathcal{P}} + \mathcal{P})_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})} \mapsto (\widetilde{T}(\mathcal{P})x_{\mathcal{P}} + \mathcal{P})_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}$ omejen linearen operator na $\underline{\mathcal{X}}$ in da velja $\Gamma T = S\Gamma$. Ker je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven, ima T po trditvi 5.3.1 SVEP. Zaradi $\overline{\Delta}$-polenostavnosti je Γ injektivna. Če ima T lastnost (δ), lahko uporabimo lemo 1 iz [**55**], ki trdi, da je $\sigma(T) \subseteq \sigma(S)$. Po lemi 1 iz [**26**] velja enak zaključek, če ima T šibko 2-SDP. Po drugi strani pa je skoraj očitno, da je $\sigma(S) \subseteq \overline{\widetilde{T}(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))} \subseteq \sigma(T)$. Namreč, če λ ni v $\overline{\widetilde{T}(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))}$, potem je $S_\lambda :\ (x_{\mathcal{P}} + \mathcal{P})_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})} \mapsto ((\widetilde{T}(\mathcal{P}) - \lambda)^{-1} x_{\mathcal{P}} + \mathcal{P})_{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}$ omejen linearen operator na $\underline{\mathcal{X}}$, za katerega velja $S_\lambda(S-\lambda) = (S-\lambda)S_\lambda = I$. To dokazuje prvo inkluzijo. Druga inkluzija sledi iz dejstva, da $(\widetilde{T}-\lambda)^{-1}$ ne more obstajati, če je λ v $\widetilde{T}(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ (trditev 5.2.8). □

Naslednji izrek je razširitev dobro znanega rezultata M. M. Neumanna ([**59**], [**60**]).

Izrek 5.3.5. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Če je T tak enostaven multiplikator na $\mathcal{X}$, da je $\widehat{T}:\ \Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) \to \mathbb{C}$ hull-kernel zvezna, potem je T super-dekomponibilen.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul, je — po posledici 5.2.11 — $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ polenostavna komutativna Banachova algebra z enoto. Se pravi, da je po izreku 1.2 iz [**60**] operator množenja $L_T:\ M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \to M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ super-dekomponibilen. Ker pa je $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ zaprta podalgebra v $B(\mathcal{X})$, lahko uporabimo izrek 3.2 iz [**54**], ki pravi, da je potem tudi T super-dekomponibilen. □

Naslednja posledica le združuje izreka 5.3.2 in 5.3.5. Pripomnimo, da je naravna preslikava $\nu_M:\ \overline{\Delta}_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) \to \Delta(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}))$ surjektivna, če je $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven. Namreč, po posledici 5.2.11 je algebra $M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ polenostavna. Ker je $ann_{M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \{0\}$, pa po trditvi 5.1.6 (iii) velja, da je $\nu_{\mathfrak{A}}$ surjektivna.

Posledica 5.3.6. *Naj bo $\mathfrak{A}$ Banachova algebra z enoto in naj bo $\mathcal{X}$ $\overline{\Delta}$-polenostaven Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Za $T \in M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ so ekvivalentne naslednje trditve:*

(a) T je super-dekomponibilen;
(b) T ima lastnost (δ);
(c) T ima šibko $2-SDP$;
(d) $\widehat{T}:\Sigma(M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) \to \mathbb{C}$ je hull-kernel zvezna.

Banachovi moduli z ločljivim spektrom

Iz rezultatov drugega poglavja izhaja, da so med vsemi komutativnimi Banachovimi algebrami z enoto natanko algebre z ločljivim spektrom tiste, za katere velja, da vsak njihov element na vsakem levem Banachovem modulu inducira dekomponibilen operator množenja. V tem poglavju bomo vprašanje obrnili. Naj bo dana komutativna Banachova algebra z enoto. Kakšen mora biti levi Banachov modul nad to algebro, da bodo vsi elementi iz algebre inducirali dekomponibilne operatorje množenja na tem modulu?

6.1. Algebre z delno ločljivim spektrom

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Pri vsaki podmnožici $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ smo z $\mathfrak{A}_S$ označili pripadajoči kospektralni ideal, tj. zaprtje ideala

$$\mathfrak{A}_{(S)} := \{a \in \mathfrak{A};\ Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap S = \emptyset\}.$$

Definicija 6.1.1. *Neprazna podmnožica $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ je* ločljiv del spektra*, če je $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_S$ algebra z ločljivim spektrom.*

Jasno, če je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom, potem je ves $\Sigma(\mathfrak{A})$ ločljiv del spektra, saj je $\mathfrak{A}_{\Sigma(\mathfrak{A})} = \{0\}$ in zato $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_{\Sigma(\mathfrak{A})} = \mathfrak{A}$.

Očitno ovoj ideala $\mathfrak{A}_S$ vsebuje vse točke iz S, še več, ker je ovoj vedno hull-kernel zaprta množica, je hull-kernel zaprtje množice S vsebovano v ovoju $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$.

Trditev 6.1.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ ločljiv del spektra. Potem relativna Gelfandova in relativna hull-kernel topologija na S sovpadata. Še več, topologiji se ujemata na ovoju $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$.*

Dokaz. Spekter $\Sigma(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_S)$ in ovoj $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$ sta homeomorfna, ko ima prvi prostor hull-kernel topologijo, drugi pa relativno hull-kernel topologijo (glejte [**61**], izrek 7.1.7), in ko ima prvi Gelfandovo topologijo, drugi pa relativno Gelfandovo topologijo (glejte [**50**], izrek 7.3.1). Če je S ločljivi del spektra, je algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_S$ regularna (saj ima celo ločljiv spekter), kar pomeni, da Gelfandova in hull-kernel topologija na njenem spektru sovpadata. Od tod pa sledi, da se tudi relativna Gelfandova in relativna hull-kernel topologija na $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$ ujemata. $\square$

Naslednja trditev je lokalna verzija razčlenitve enote (glejte izrek 2.2.11). Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ ločljiv del spektra. Označimo z $\mathfrak{B}$ kvocientno algebro $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_S$.

Trditev 6.1.3. *Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_m\}$ spektra $\Sigma(\mathfrak{A})$ obstajajo takšni $a_1, \ldots, a_m$ iz $\mathfrak{A}$ in $b \in \mathfrak{A}_S$, da velja $a_1 + \ldots + a_m = 1 + b$ in $Sp_{\mathfrak{B}}(a_k + \mathfrak{A}_S) \subseteq U_k \cap h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$ pri vseh $k = 1, \ldots, m$.*

Dokaz. Ker se ralativna Gelfandova in relativna hull-kernel topologija na $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$ $(= \Sigma(\mathfrak{B})\ )$ ujemata, je vseeno, v kateri topologiji je $\mathcal{U}$ odprto pokritje $\Sigma(\mathfrak{A})$. Pri vsakem indeksu $k = 1, \ldots, m$ naj bo $V_k := U_k \cap \Sigma(\mathfrak{B})$. Očitno je $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_m\}$ odprto pokritje spektra $\Sigma(\mathfrak{B})$. Ker je $\mathfrak{B}$ algebra z ločljivim spektrom, lahko uporabimo izrek o razčlenitvi enote (izrek 2.2.11). Se pravi, da obstajajo v $\mathfrak{B}$ takšni elementi $a_1 + \mathfrak{A}_S, \ldots, a_m + \mathfrak{A}_S$, da je

$$a_1 + \mathfrak{A}_S + \ldots + a_m + \mathfrak{A}_S = 1 + \mathfrak{A}_S$$

in pri vsakem $k = 1, \ldots, m$ velja $Sp_{\mathfrak{B}}(a_k + \mathfrak{A}_S) \subseteq V_k$. Povedano drugače: obstaja takšen $b \in \mathfrak{A}_S$, da je $a_1 + \ldots + a_m = 1 + b$ in $Sp_{\mathfrak{B}}(a_k + \mathfrak{A}_S) \subseteq U_k \cap \Sigma(\mathfrak{B})$, $k = 1, \ldots, m$. $\square$

Posledica 6.1.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\emptyset \neq S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ ločljiv del spektra. Za poljubni disjunktni zaprti podmnožici F_1 in F_2 v $\Sigma(\mathfrak{A})$ obstaja takšen $a \in \mathfrak{A}$, da je $\widehat{a}(\tau) = 1$ za vse $\tau \in F_1 \cap h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$ in $Sp_{\mathfrak{B}}(a + \mathfrak{A}_S) \cap F_2 = \emptyset$.*

Dokaz. Ker je $\Sigma(\mathfrak{A})$ kompakten Hausdorffov prostor, podmnožici F_1 in F_2 pa sta disjunktni in zaprti, obstajata takšni disjunktni odprti podmnožici U_1 in U_2 v $\Sigma(\mathfrak{A})$, da je $F_1 \subseteq U_1$ in $F_2 \subseteq U_2$. Naj bo $U_3 := \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus (F_1 \cup F_2)$. Družina $\{U_1, U_2, U_3\}$ je odprto pokritje $\Sigma(\mathfrak{A})$, zato obstajajo po prejšnji trditvi takšni a_1, a_2 in a_3 v $\mathfrak{A}$ ter $b \in \mathfrak{A}_S$, da je $a_1 + a_2 + a_3 = 1 + b$ in $Sp_{\mathfrak{B}}(a_k + \mathfrak{A}_S) \subseteq U_k \cap \Sigma(\mathfrak{B})$, $k = 1, 2, 3$. Naj bo $a := a_1$. Zaradi disjunktnosti množic U_1 in U_2 velja $Sp_{\mathfrak{B}}(a + \mathfrak{A}_S) \cap F_2 = \emptyset$. Če je $\tau \in F_1 \cap h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$, je $\tau(b) = 0$, prav tako pa je tudi $\tau(a_k) = 0$, $k = 2, 3$, saj τ ni v nobenem od spektrov $Sp_{\mathfrak{B}}(a_k + \mathfrak{A}_S)$, $k = 2, 3$. Se pravi, da iz $a_1 + a_2 + a_3 = 1 + b$ sledi $\tau(a) = 1$. $\square$

Naslednja posledica nam kaže, da je ločljive dele spektra mogoče definirati na podoben način kot algebre z ločljivim spektrom.

Posledica 6.1.5. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Neprazna podmnožica $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ je ločljiv del spektra natanko takrat, ko za* *poljubna različna funkcionala* φ_1 *in* φ_2 *iz* $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$ *obstajata takšna* a_1 *in* a_2 *v* $\mathfrak{A}$, *da je* $a_1a_2 \in \mathfrak{A}_S$ *in* $\varphi_k(a_k) \neq 0$, $k = 1, 2$.

Dokaz. Naj bo $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ ločljiv del spektra. Označimo $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_S$. Potem je $\Sigma(\mathfrak{B}) = h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$. Naj bosta φ_1 in φ_2 različna funkcionala iz $h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_S)$. Ker je $\Sigma(\mathfrak{A})$ Hausdorffov topološki prostor, obstajata takšni disjunktni odprti podmnožici (v Gelfandovi topologiji) U_1 in U_2 v $\Sigma(\mathfrak{A})$, da je $\varphi_k \in U_k$, $k = 1, 2$. Naj bo $U_3 := \Sigma(\mathfrak{A}) \setminus \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Jasno, $\{U_1, U_2, U_3\}$ je odprto pokritje $\Sigma(\mathfrak{A})$. Po trditvi 6.1.3 obstajajo takšni a_1, a_2 in a_3 v $\mathfrak{A}$ ter takšen b v $\mathfrak{A}_S$, da je

(6.1.1)
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + b \quad \text{in} \quad Sp_{\mathfrak{B}}(a_k + \mathfrak{A}_S) \subseteq U_k \cap \Sigma(\mathfrak{B}),\ k = 1, 2, 3.$$

Zaradi

$$Sp_{\mathfrak{B}}(a_1a_2 + \mathfrak{A}_S) \subseteq Sp_{\mathfrak{B}}(a_1 + \mathfrak{A}_S) \cap Sp_{\mathfrak{B}}(a_2 + \mathfrak{A}_S) \subseteq U_1 \cap U_2 \cap \Sigma(\mathfrak{B}) = \emptyset,$$

je $a_1a_2 \in \mathfrak{A}_S$. Ker φ_1 ni v $Sp_{\mathfrak{B}}(a_k + \mathfrak{A}_S)$, $k = 2, 3$, iz (6.1.1) sledi $\varphi_1(a_1) = 1$. Podobno vidimo, da je $\varphi_2(a_2) = 1$.

Dokažimo še obrat. Veljajo naj iste oznake kot v prvem delu dokaza. Iz pogojev sledi, da za različna funkcionala φ_1 in φ_2 iz $\Sigma(\mathfrak{B})$ obstajata takšna $a_1 + \mathfrak{A}_S$ in $a_2 + \mathfrak{A}_S$ v $\mathfrak{B}$, da je $(a_1 + \mathfrak{A}_S)(a_2 + \mathfrak{A}_S) = \mathfrak{A}_S$ in $\varphi_k(a_k + \mathfrak{A}_S) \neq 0$, $k = 1, 2$. To pa pomeni, da je $\mathfrak{B}$ algebra z ločljivim spektrom. □

6.2. Arvesonov spekter upodobitve modula

Kako sta definirana Arvesonov spekter in njegova lokalna verzija dane upodobitve komutativne Banachove algebre, smo videli v razdelku 2.1. Zdaj bomo pojem Arvesonovega spektra razširili na upodobitve modulov nad komutativnimi algebrami.

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Par (Θ, θ) naj bo normirana upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Najprej definirajmo *anihilator v* $\mathcal{X}$ dane neprazne podmnožice $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Y}$:

$$ann_{\Theta}(\mathcal{N}) := \{x \in \mathcal{X};\ \Theta(x)y = 0 \text{ za vse } y \in \mathcal{N}\}.$$

V posebnem primeru je torej $ann_{\Theta}(\mathcal{Y}) = ker\,\Theta$.

Trditev 6.2.1. *Anihilator v* $\mathcal{X}$ *neprazne podmnožice* $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Y}$ *je podmodul v* $\mathcal{X}$ *in je enak anihilatorju v* $\mathcal{X}$ *najmanjšega zaprtega linearnega podprostora v* $\mathcal{Y}$, *ki vsebuje* $\mathcal{N}$. *Če je upodobitev* Θ *krepko zvezna, je* $ann_{\Theta}(\mathcal{N})$ *zaprt podmodul v* $\mathcal{X}$.

Dokaz. Da je množica $ann_{\Theta}(\mathcal{N})$ linearna, ni težko videti. Če je $x \in ann_{\Theta}(\mathcal{N})$, element a pa je poljuben iz $\mathfrak{A}$, potem pri vsakem $y \in \mathcal{N}$ velja $\Theta(a \cdot x)y = \theta(a)\Theta(x)y = 0$, kar pomeni, da je $a \cdot x \in ann_{\Theta}(\mathcal{N})$.

Naj bo $lin\,(\mathcal{N})$ linearna lupina množice $\mathcal{N}$ in $\overline{lin\,(\mathcal{N})}$ njeno zaprtje. Potem zaradi $\mathcal{N} \subseteq lin\,(\mathcal{N}) \subseteq \overline{lin\,(\mathcal{N})}$ očitno velja

$$ann_{\,\Theta}(\mathcal{N}) \supseteq ann_{\,\Theta}(lin\,(\mathcal{N})) \supseteq ann_{\,\Theta}(\overline{lin\,(\mathcal{N})}).$$

Toda po drugi strani je jasno, da velja

$$\Theta(x)(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n) = \alpha_1 \Theta(x) y_1 + \ldots + \alpha_n \Theta(x) y_n = 0$$

za vsak $x \in ann_{\,\Theta}(\mathcal{N})$ in poljubna nabora $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ter $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{N}$. Ker je $\Theta(x)$ zvezna preslikava iz $\mathcal{Y}$ v $\mathcal{Z}$, velja tudi $\Theta(x)y = 0$ za vse $y \in \overline{lin\,(\mathcal{N})}$.

Če je upodobitev Θ krepko zvezna, je po trditvi 4.3.5 zvezna. Naj bo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje iz $ann_{\,\Theta}(\mathcal{N})$, ki konvergira k $x \in \mathcal{X}$. Potem pri poljubnem $y \in \mathcal{N}$ velja

$$\|\Theta(x)y\| = \|\Theta(x - x_n)y\| \leq \|\Theta\| \|x - x_n\| \|y\| \to 0.$$

$\square$

Do konca razdelka bomo privzeli, da je (Θ, θ) zvezna upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ (spomnimo se na predpostavko, da je θ zvezna z $\|\theta\| = 1$).

Arvesonov spekter upodobitve $\Theta: \mathcal{X} \to B(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ je

$$Sp\,(\Theta) := h_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(ker\,\Theta) = \{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X});\ (ker\,\Theta : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})\}.$$

Že prej smo ugotovili, da je jedro upodobitve Θ enako anihilatorju v $\mathcal{X}$ prostora $\mathcal{Y}$. Se pravi, da je $Sp\,(\Theta) = h_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(ann_{\,\Theta}(\mathcal{Y}))$. V zadnji enakosti lahko prostor $\mathcal{Y}$ zamenjamo z manjšo množico $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Y}$ in dobimo *lokalen Arvesonov spekter* upodobitve Θ na množici $\mathcal{N}$:

$$Sp_{\Theta}(\mathcal{N}) := h_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(ann_{\,\Theta}(\mathcal{N})) = \{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X});\ (ann_{\,\Theta}(\mathcal{N}) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})\}.$$

V posebnem primeru, ko je $\mathcal{N}$ singleton $\{y\}$, je

$$Sp_{\Theta}(y) := h_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(ann_{\,\Theta}(y)) = \{\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X});\ (ann_{\,\Theta}(y) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})\}$$

lokalni Arvesonov spekter upodobitve Θ pri $y \in \mathcal{Y}$.

Trditev 6.2.2. *Lokalni Arvesonovi spektri upodobitve Θ imajo naslednje lastnosti.*

(i) Za poljubno neprazno podmnožico $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Y}$ je $Sp_{\Theta}(\mathcal{N})$ hull-kernel zaprta podmnožica v $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$.

(ii) Če je $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Y}$ neprazna podmnožica vsebovana v $\cap_{x \in \mathcal{X}} ker\,\Theta(x)$, potem je $Sp_{\Theta}(\mathcal{N})$ prazna množica. Obratno, če je $\mathcal{X}$ takšen modul, da je naravna preslikava $\nu_{\mathfrak{A}}:\ \overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}) \to \Sigma(\mathfrak{A})$ surjektivna, potem iz $Sp_{\Theta}(\mathcal{N}) = \emptyset$ sledi $\mathcal{N} \subseteq \cap_{x \in \mathcal{X}} ker\,\Theta(x)$.

(iii) Za vsako neprazno podmnožico $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Y}$ je $Sp_\Theta(\mathcal{N}) = Sp_\Theta(\overline{lin\,(\mathcal{N})})$.

(iv) Če je $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{Y}$, je $Sp_\Theta(\mathcal{N}_1) \subseteq Sp_\Theta(\mathcal{N}_2)$.

(v) Za poljuben končen nabor vektorjev $y_1, \dots, y_n$ iz $\mathcal{Y}$ velja

$$Sp_\Theta(y_1 + \dots + y_n) \subseteq Sp_\Theta(y_1) \cup \dots \cup Sp_\Theta(y_n).$$

DOKAZ. Točka (i) sledi neposredno iz definicije.

(ii) Če je $\mathcal{N}$ neprazna podmnožica v $\cap_{x\in\mathcal{X}} ker\,\Theta(x)$, potem je očitno $ann_\Theta(\mathcal{N}) = \mathcal{X}$ in torej $(ann_\Theta(\mathcal{N}) : \mathcal{X}) = \mathfrak{A}$. Od tod seveda sledi $Sp_\Theta(\mathcal{N}) = \emptyset$. Dokažimo še obrat. Naj bo $\nu_\mathfrak{A}$ surjektivna in naj bo $\mathcal{N}$ takšna neprazna podmnožica v $\mathcal{Y}$, za katero velja $Sp_\Theta(\mathcal{N}) = \emptyset$. To pomeni, da kvocient $(ann_\Theta(\mathcal{N}) : \mathcal{X})$ ni vsebovan v nobenem idealu $(\mathcal{P} : \mathcal{X})$, $\mathcal{P} \in \overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, oziroma, povedano drugače, $h_\mathfrak{A}((ann_\Theta(\mathcal{N}) : \mathcal{X})) \cap \nu_\mathfrak{A}(\overline{\Delta}_\mathfrak{A}(\mathcal{X})) = \emptyset$. Ker je $\nu_\mathfrak{A}$ surjektivna, mora veljati $h_\mathfrak{A}((ann_\Theta(\mathcal{N}) : \mathcal{X})) = \emptyset$, od koder sledi $(ann_\Theta(\mathcal{N}) : \mathcal{X}) = \mathfrak{A}$. Zaradi $\mathfrak{A} \cdot \mathcal{X} = \mathcal{X}$, je cel modul $\mathcal{X}$ vsebovan v $ann_\Theta(\mathcal{N})$, oziroma $\mathcal{N} \subseteq \cap_{x\in\mathcal{X}} ker\,\Theta(x)$.

Točka (iii) sledi iz trditve 6.2.1, točka (iv) pa iz dejstva, da je anihilator manjše množice večji od anihilatorja večje množice. Točko (v) dobimo, če upoštevamo, da je $ann_\Theta(y_1) \cap \dots \cap ann_\Theta(y_n) \subseteq ann_\Theta(y_1 + \dots + y_n)$, uporabimo izrek 4.5.3 (viii) ter točko (iv) te trditve. □

Naj bo (Θ, θ) zvezna upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula na paru Banachovih prostorov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Na $\mathcal{Z}$ lahko preko upodobitve θ gledamo kot na levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Predpostavimo, da je tudi $\mathcal{Y}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Rekli bomo, da je upodobitev Θ *levo $\mathfrak{A}$-modularna*, oz. krajše *modularna*, če je $\Theta(x) \in B_\mathfrak{A}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ za vse $x \in \mathcal{X}$.

Naj bo $\Theta : \mathcal{X} \to B_\mathfrak{A}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ modularna upodobitev modula $\mathcal{X}$ in $\mathcal{U} := \cap_{x\in\mathcal{X}} ker\,\Theta(x)$ njeno *skupno jedro*. Jasno, $\mathcal{U}$ je zaprt podmodul v $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{W} := \mathcal{Y}/\mathcal{U}$ je levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. S predpisom $\widetilde{\Theta}(x)(y + \mathcal{U}) := \Theta(x)y$ je pri vsakem $x \in \mathcal{X}$ dobro definirana zvezna preslikava iz $\mathcal{W}$ v $\mathcal{Z}$. Brez težav lahko preverimo, da je $\widetilde{\Theta}$ normirana krepko zvezna modularna upodobitev modula $\mathcal{X}$ na paru $(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$. Jasno, skupno jedro upodobitve $\widetilde{\Theta}$ je trivialno.

Trditev 6.2.3. *Za vsak $y \in \mathcal{Y}$ velja.*

(i) $ann_\Theta(y) = ann_{\widetilde{\Theta}}(y)$ in $Sp_\Theta(y) = Sp_{\widetilde{\Theta}}(y)$.

(ii) Če je skupno jedro upodobitve Θ trivialno, je $(ann_\Theta(y) : \mathcal{X}) = ann_\mathfrak{A}(y)$.

(iii) Če je skupno jedro upodobitve Θ trivialno, je $Sp_\Theta(y) = \nu_\mathfrak{A}^{-1}(Sp_\mathfrak{A}(y))$.

(iv) $Sp_\Theta(y) = \nu_\mathfrak{A}^{-1}(Sp_\mathfrak{A}(y + \mathcal{U}))$.

DOKAZ. (i) Enakost $ann_\Theta(y) = ann_{\widetilde{\Theta}}(y)$ očitno velja, zato velja tudi $Sp_\Theta(y) = Sp_{\widetilde{\Theta}}(y)$.

(ii) Po definiciji je element $a \in \mathfrak{A}$ v $(ann_\Theta(y) : \mathcal{X})$ natanko tedaj, ko velja $a \cdot \mathcal{X} \subseteq ann_\Theta(y)$. Zadnja inkluzija je ekvivalentna pogoju $\Theta(a \cdot x)y = 0$

pri vseh $x \in \mathcal{X}$, ta pogoj pa lahko zapišemo kot $\Theta(x)(a \cdot y) = 0$ za vse $x \in \mathcal{X}$, saj je Θ modularna upodobitev. Toda, ker je skupno jedro upodobitve Θ trivialno, je zadnji pogoj isto kot $a \cdot y = 0$, oziroma $a \in ann_{\mathfrak{A}}(y)$.

(iii) Po prejšnji točki je $(ann_{\,\Theta}(y) : \mathcal{X}) = ann_{\mathfrak{A}}(y)$. Vzemimo, da je $\mathcal{P} \in Sp_{\Theta}(y)$. Označimo $\varphi = \nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P})$. Če je $a \in ann_{\mathfrak{A}}(y) = (ann_{\,\Theta}(y) : \mathcal{X})$, je torej $a \in (\mathcal{P} : \mathcal{X}) = ker\, \varphi$. To pomeni, da je $\varphi \in Sp_{\mathfrak{A}}(y)$ in zato $\mathcal{P} \in \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(y))$. Še obrat. Naj bo $\mathcal{P} \in \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(Sp_{\Theta}(y))$ in $\varphi \in Sp_{\mathfrak{A}}(y)$ takšen, da je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}) = \varphi$. Iz $ann_{\mathfrak{A}}(y) \subseteq ker\, \varphi$ sledi $(ann_{\,\Theta}(y) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$, oziroma $\mathcal{P} \in Sp_{\Theta}(y)$.

(iv) Velja

$$Sp_{\Theta}(y) = Sp_{\,\widetilde{\Theta}}(y) = \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(y + \mathcal{U})),$$

prvi enačaj zaradi točke (i), drugi enačaj pa zaradi točke (iii) te trditve. □

Trditev 6.2.4. *Naj bo Θ modularna upodobitev levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ na paru levih Banachovih $\mathfrak{A}$-modulov $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ in naj bo njeno skupno jedro trivialno. Označimo z $\nu_{\mathfrak{A}}$ naravno preslikavo iz $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ v $\Sigma(\mathfrak{A})$. Potem za vsak $a \in \mathfrak{A}$ in vsak $y \in \mathcal{Y}$ velja*

$$h_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}(k_{\mathcal{X}}(\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\omega(a)) \cap Sp_{\Theta}(y))) \subseteq Sp_{\Theta}(a \cdot y) \subseteq \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(a)) \cap Sp_{\Theta}(y).$$

Dokaz. Ker ima Θ trivialno skupno jedro, je $ann_{\mathfrak{A}}(y) = (ann_{\,\Theta}(y) : \mathcal{X})$ in $ann_{\mathfrak{A}}(a \cdot y) = (ann_{\,\Theta}(a \cdot y) : \mathcal{X})$. Naj bo $\mathcal{P} \in \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\omega(a)) \cap Sp_{\Theta}(y)$. Označimo $\varphi = \nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P})$. Če je $b \in (ann_{\,\Theta}(a \cdot y) : \mathcal{X}) = ann_{\mathfrak{A}}(a \cdot y)$, potem iz $0 = b \cdot (a \cdot y) = ab \cdot y$ sledi $ab \in ann_{\mathfrak{A}}(y) = (ann_{\,\Theta}(y) : \mathcal{X})$. Ker je $\mathcal{P} \in Sp_{\Theta}(y)$, je torej $ab \in (\mathcal{P} : \mathcal{X}) = ker\, \varphi$. Zaradi $\varphi \in \omega(a)$, mora veljati $\varphi(b) = 0$. Tako smo dokazali, da je $(ann_{\,\Theta}(a \cdot y) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X})$, oziroma $\mathcal{P} \in Sp_{\Theta}(a \cdot y)$. Dokazali smo inkluzijo $\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(\omega(a)) \cap Sp_{\Theta}(y) \subseteq Sp_{\Theta}(a \cdot y)$. Ker pa je $Sp_{\Theta}(a \cdot y)$ hull-kernel zaprta, velja tudi inkluzija iz trditve.

Iz $ann_{\,\Theta}(y) \subseteq ann_{\,\Theta}(a \cdot y)$ sledi $(ann_{\,\Theta}(y) : \mathcal{X}) \subseteq (ann_{\,\Theta}(a \cdot y) : \mathcal{X})$. Torej je vsak $\mathcal{P}$ iz $Sp_{\Theta}(a \cdot y)$ tudi v $Sp_{\Theta}(y)$. Pokažimo, da je $\mathcal{P} \in Sp_{\Theta}(a \cdot y)$ tudi v $\nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(a))$. Upoštevajmo, da je skupno jedro upodobitve Θ trivialno, pa imamo

$$ann_{\mathfrak{A}}(a) \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(a \cdot y) = (ann_{\,\Theta}(a \cdot y) : \mathcal{X}) \subseteq (\mathcal{P} : \mathcal{X}).$$

Od tod seveda sledi $\mathcal{P} \in \nu_{\mathfrak{A}}^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(a))$. □

Na koncu tega razdelka poglejmo še poseben primer, s katerim bomo imeli opraviti v zadnjem razdelku. Gre za upodobitvi modulov $\mathcal{X}$ in $\mathcal{X}^*$. Ker je algebra $\mathfrak{A}$ komutativna, lahko na dualni modul $\mathcal{X}^*$ gledamo kot na levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul.

Naj bo

$$\mathrm{P}^* : \ \mathcal{X} \to B(\mathcal{X}^*, \mathfrak{A}^*)$$

preslikava, ki vektorju $x \in \mathcal{X}$ priredi $\mathrm{P}^*(x)$ — preslikavo iz $\mathcal{X}^*$ v $\mathfrak{A}^*$, za katero pri vseh $\xi \in \mathcal{X}^*$ in vseh $a \in \mathfrak{A}$ velja $\langle \mathrm{P}^*(x)\xi, a \rangle = \langle \xi, a \cdot x \rangle$. Upodobitev P^* je očitno normirana in krepko zvezna (norma preslikave $x \mapsto \mathrm{P}^*(x)\xi$ je manjša ali enaka $\|\xi\|$). Prav tako ni težko preveriti, da je upodobitev P^* modularna. Če je $\xi \in \mathfrak{X}^*$ v skupnem jedru upodobitve P^*, potem pri vseh $x \in \mathfrak{X}$ velja $0 = \langle \mathrm{P}^*(x)\xi, 1\rangle = \langle \xi, x\rangle$, od koder sledi $\xi = 0$. Se pravi, da upodobitev P^* zadošča vsem pogojem, ki smo jih imeli v tem razdelku, kar pomeni, da vse trditve iz tega razdelka zanjo veljajo.

Poglejmo še podobno definirano upodobitev dualnega modula $\mathfrak{X}^*$. To upodobitev bomo označili z P^*_*. Pri danem $\xi \in \mathfrak{X}^*$ je $\mathrm{P}^*_*(\xi)$ zvezna preslikava iz $\mathfrak{X}^{**}$ v $\mathfrak{A}^*$, za katero pri vseh $F \in \mathfrak{X}^{**}$ in vseh $a \in \mathfrak{A}$ velja $\langle \mathrm{P}^*_*(\xi)F, a\rangle = \langle F, a \cdot \xi\rangle$. Jasno, za P^*_* velja vse tisto, kar velja za P^*. Nas bodo zanimali predvsem lokalni Arvesonovi spektri upodobitve P^*_* pri elementih iz $\mathfrak{X}$, pri čemer je $\mathfrak{X}$ na kanoničen način vložen v $\mathfrak{X}^{**}$. Za vsak $x \in \mathfrak{X}$ velja

$$\langle \mathrm{P}^*_*(\xi)x, a\rangle = \langle x, a \cdot \xi\rangle = \langle \xi, a \cdot x\rangle = \langle \mathrm{P}^*(x)\xi, a\rangle$$

pri vseh $a \in \mathfrak{A}$ in vseh $\xi \in \mathfrak{X}^*$. Se pravi, da je $\mathrm{P}^*_*(\xi)x = \mathrm{P}^*(x)\xi$ pri vseh $x \in \mathfrak{X}$ in vseh $\xi \in \mathfrak{X}^*$. Od sledi, da je $ann_{\,\mathrm{P}^*_*}(x) = ker\,\mathrm{P}^*(x)$ in torej $Sp_{\,\mathrm{P}^*_*}(x) = h^{\overline{\Delta}}_{\mathfrak{X}^*}(ker\,\mathrm{P}^*(x))$.

6.3. Banachovi moduli z ločljivim spektrom

V tem razdelku bomo ves čas imeli opravka s komutativno Banachovo algebro $\mathfrak{A}$, ki bo imela enoto. Zanima nas, za katere leve Banachove $\mathfrak{A}$-module $\mathfrak{X}$ velja, da je vsak operator množenja $T_a : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $a \in \mathfrak{A}$, dekomponibilen, oziroma, povedano na drug način, za katere module je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{A}$. Dva delna odgovora sta na dlani. Prvič, če je prostor $\mathfrak{X}$ končne dimenzije. Drugič, če $\mathfrak{A}$ deluje na $\mathfrak{X}$ zelo enostavno: v $\Sigma_0(\mathfrak{A})$ obstaja takšen φ, da je $a \cdot x = \varphi(a)x$ za vse $a \in \mathfrak{A}$ in vse $x \in \mathfrak{X}$. Prav tako je jasno, da je $Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{A}$, če je $\mathfrak{A}$ algebra z ločljivim spektrom (glejte izrek 2.4.2), vendar v tem razdelku ne želimo postavljati pogojev na algebro — $\mathfrak{A}$ naj bo splošna komutativna Banachova algebra z enoto.

Naj bo $\mathfrak{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Ker je $\mathfrak{A}$-komutativna, lahko tudi na dualni modul $\mathfrak{X}^*$ gledamo kot na levi $\mathfrak{A}$-modul. Tako kot na koncu razdelka 6.2 naj bo tudi tu $\mathrm{P}^*_* : \mathfrak{X}^* \to B_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}^{**}, \mathfrak{A}^*)$ upodobitev modula $\mathfrak{X}^*$, ki je dana z

$$\langle \mathrm{P}^*_*(\xi)F, a\rangle = \langle F, a \cdot \xi\rangle \quad (\xi \in \mathfrak{X}^*,\ F \in \mathfrak{X}^{**},\ a \in \mathfrak{A}).$$

Z $\nu^*_{\mathfrak{A}}$ označimo naravno preslikavo iz $\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}^*)$ v $\Sigma(\mathfrak{A})$.

Spomnimo se (razdelek 2.3), da je pri vsaki podmnožici $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ kospektralni ideal $\mathfrak{A}_S$ definiran kot zaprtje množice

$$\mathfrak{A}_{(S)} = \{a \in \mathfrak{A};\ Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap S = \emptyset\}.$$

Trditev 6.3.1. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathfrak{X}$ Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul. Naj bo $E := \nu^*_{\mathfrak{A}}(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}^*))$. Potem je $\mathfrak{A}_E \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$.*

Dokaz. Za vsak $a \in \mathfrak{A}_{(E)}$ po definiciji velja $Sp_{\mathfrak{A}}(a) \cap E = \emptyset$. Torej je množica $(\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(a))$ prazna. Uporabimo trditvi 6.2.4 in 6.2.2 (ii), pa imamo $a \in ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. Ker je anihilator zaprt ideal, je $\mathfrak{A}_E \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$. $\square$

Neposredna posledica pravkar dokazane trditve je naslednji izrek.

Izrek 6.3.2. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Če je množica $\nu_{\mathfrak{A}}^*(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*))$ ločljiv del spektra, potem je za vsak $a \in \mathfrak{A}$ operator množenja, ki ga na $\mathcal{X}$ inducira a, superdekomponibilen.*

Dokaz. Označimo $E = \nu_{\mathfrak{A}}^*(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*))$. Po predpostavki je E ločljiv del spektra, zato je $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_E$ algebra z ločljivim spektrom. Ker je $\mathfrak{A}_E \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, je $\mathcal{X}$ na naraven način levi Banachov $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_E$-modul: produkt poljubnega $a + \mathfrak{A}_E \in \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_E$ z $x \in \mathcal{X}$ je definiran z $(a + \mathfrak{A}_E) \cdot x := a \cdot x$. Očitno je pri vsakem $a \in \mathfrak{A}$ operator množenja z a na $\mathcal{X}$ enak operatorju množenja z $a + \mathfrak{A}_E$ na $\mathcal{X}$. Algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_E$ ima ločljiv spekter, zato so množenja z njenimi elementi superdekomponibilni operatorji na $\mathcal{X}$, glejte izrek 2.4.2. $\square$

Izrek 6.3.2 velja za module, katerih dual zadošča pogoju, da je naravna slika njegovega hiperspektra ločljiv del spektra. Takšnim modulom bomo dali posebno ime.

Definicija 6.3.3. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto. Banachov levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$ je* modul z ločljivim spektrom*, če je naravna slika njegovega hiperspektra ločljiv del spektra* $\Sigma(\mathfrak{A})$.

Definicija modula z ločljivim spektrom ni modulska varianta definicije algebre z ločljivim spektrom, vendar obstaja med njima določena analogija.

Trditev 6.3.4. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul z ločljivim spektrom. Če sta $\mathcal{P}_1$ in $\mathcal{P}_2$ takšna hipermaksimalna podmodula v $\mathcal{X}$, da je $\nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}_1) \neq \nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}_2)$, potem obstajata takšna $a \in \mathfrak{A}$ in $x \in \mathcal{X}$, da je $a \cdot x = 0$, $a \notin (\mathcal{P}_1 : \mathcal{X})$ in $x \notin \mathcal{P}_2$.*

Dokaz. Ker sta $\varphi_1 := \nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}_1)$ in $\varphi_2 := \nu_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}_2)$ različna karakterja iz $E := \nu_{\mathfrak{A}}(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})) \subseteq h_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_E)$, obstajata po posledici 6.1.5 v $\mathfrak{A}$ takšna a_1 in a_2, da je $a_1 a_2 \in \mathfrak{A}_E$ ter $\varphi_k(a_k) \neq 0$, $k = 1, 2$. Se pravi, da $a_k \notin (\mathcal{P}_k : \mathcal{X})$, $k = 1, 2$. Zaradi $a_2 \notin (\mathcal{P}_2 : \mathcal{X})$ obstaja v $\mathcal{X}$ takšen y, da $a_2 \cdot y \notin \mathcal{P}_2$. Označimo $a = a_1$ in $x = a_2 \cdot y$, pa smo iskana elementa našli, saj zaradi $a_1 a_2 \in \mathfrak{A}_E \subseteq ann_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ velja $a \cdot x = 0$. $\square$

V izreku 6.3.2 smo ugotovili, da vsak element iz komutativne Banachove algebre z enoto $\mathfrak{A}$ inducira na levem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$ superdekomponibilen operator množenja, če ima dualni modul $\mathcal{X}^*$ ločljiv spekter.

Iz dokaza tega izreka sledi, da je pri vsakem $a \in \mathfrak{A}$ spektralna kapaciteta pripadajočega operatorja množenja T_a dana z

$$\mathsf{E}_a(F) := \mathcal{X}((\widehat{a + \mathfrak{A}_E})^{-1}(F)), \quad F \in cl\,(\mathbb{C}),$$

pri čemer je $\mathcal{X}((\widehat{a + \mathfrak{A}_E})^{-1}(F))$ spektralni podmodul v $\mathcal{X}$, ki pripada množici $(\widehat{a + \mathfrak{A}_E})^{-1}(F) \subseteq \Sigma(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_E)$. V nadaljevanju bomo spektralno kapaciteto E_a izrazili še nekoliko drugače.

Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul. Pri poljubni podmnožici $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ definirajmo

$$\mathcal{X}^{\mathrm{P}_*^*}(S) := \{x \in \mathcal{X};\ Sp_{\,\mathrm{P}_*^*}(x) \subseteq (\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(S)\}.$$

Iz trditev 6.2.2 in 6.2.4 sledi, da je $\mathcal{X}^{\mathrm{P}_*^*}(S)$ podmodul v $\mathcal{X}$, rekli mu bomo P_*^*-*spektralni podmodul pri* S. Očitno velja $\mathcal{X}^{\mathrm{P}_*^*}(S) = \mathcal{X}^{\mathrm{P}_*^*}(S \cap \nu_{\mathfrak{A}}^*(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*)))$.

Trditev 6.3.5. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ takšen levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, da ima njegov dualni modul $\mathcal{X}^*$ ločljiv spekter. Označimo $E := \nu_{\mathfrak{A}}^*(\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*))$ in $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_E$. Potem za vsako množico $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ velja $\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(S \cap \Sigma(\mathfrak{B})) = \mathcal{X}^{\mathrm{P}_*^*}(S)$.*

V trditvi smo z $\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(S \cap \Sigma(\mathfrak{B}))$ označili spektralni podmodul pri $S \cap \Sigma(\mathfrak{B}) \subseteq \Sigma(\mathfrak{B})$ v $\mathfrak{B}$-modulu $\mathcal{X}$, tj.

$$\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(S \cap \Sigma(\mathfrak{B})) = \{x \in \mathcal{X};\ Sp_{\,\mathfrak{B}}(x) \subseteq S \cap \Sigma(\mathfrak{B})\}.$$

Dokaz. Če je $x \in \mathcal{X}$, je element $a \in \mathfrak{A}$ v $ann_{\mathfrak{A}}(x)$ natanko tedaj, ko je $a + \mathfrak{A}_E \in ann_{\mathfrak{B}}(x)$. Se pravi, da je

$$Sp_{\mathfrak{B}}(x) = \{\varphi \in \Sigma(\mathfrak{B});\ \varphi(a) = 0 \text{ za vse } a \in ann_{\mathfrak{A}}(x)\} = Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap \Sigma(\mathfrak{B}).$$

Naj bo $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ poljubna množica. Potem je

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(S \cap \Sigma(\mathfrak{B})) &= \{x \in \mathcal{X};\ Sp_{\mathfrak{B}}(x) \subseteq S \cap \Sigma(\mathfrak{B})\}\\ &= \{x \in \mathcal{X};\ Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap \Sigma(\mathfrak{B}) \subseteq S \cap \Sigma(\mathfrak{B})\}.\end{aligned}$$

Ker je $(\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(x) \cap \Sigma(\mathfrak{B})) = (\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(x))$ in $(\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(S \cap \Sigma(\mathfrak{B})) = (\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(S)$, je

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(S \cap \Sigma(\mathfrak{B})) &= \{x \in \mathcal{X};\ (\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(Sp_{\mathfrak{A}}(x)) \subseteq (\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(S)\}\\ &= \{x \in \mathcal{X};\ Sp_{\,\mathrm{P}_*^*}(x) \subseteq (\nu_{\mathfrak{A}}^*)^{-1}(S)\},\end{aligned}$$

pri čemer zadnja enakost velja zaradi trditve 6.2.3 (iii). □

Posledica 6.3.6. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ takšen levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, da ima njegov dualni modul $\mathcal{X}^*$ ločljiv spekter. Če je $S \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ zaprta množica, je $\mathcal{X}^{\mathrm{P}_*^*}(S)$ zaprt podmodul v $\mathcal{X}$.*

DOKAZ. Uporabimo oznake iz prejšnje trditve. Ker je $\mathfrak{B}$ algebra z ločljivim spektrom, $S \cap \Sigma(\mathfrak{B})$ pa zaprta množica, je spektralni podmodul $\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(S \cap \Sigma(\mathfrak{B}))$ zaprt po trditvi 2.3.1. $\square$

Zdaj lahko tudi povemo, kako se izražajo spektralne kapacitete operatorjev množenja.

Posledica 6.3.7. *Naj bo $\mathfrak{A}$ komutativna Banachova algebra z enoto in $\mathcal{X}$ takšen levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul, da ima njegov dualni modul $\mathcal{X}^*$ ločljiv spekter. Potem vsak element $a \in \mathfrak{A}$ inducira na $\mathcal{X}$ superdekomponibilen operator T_a, katerega spektralna kapaciteta je dana z $\mathsf{E}_a(F) = \mathcal{X}^{\mathrm{P}^*_*}(\widehat{a}^{-1}(F))$, $F \in cl\,(\mathbb{C})$.*

DOKAZ. Da je T_a superdekomponibilen, že vemo. Ker je $\left(\widehat{a + \mathfrak{A}_E}\right)^{-1}(F) = \widehat{a}^{-1}(F) \cap \Sigma(\mathfrak{B})$, pri vsaki množici $F \in cl\,(\mathbb{C})$, velja

$$\mathsf{E}_a(F)\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}\left(\left(\widehat{a + \mathfrak{A}_E}\right)^{-1}(F)\right) = \mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(\widehat{a}^{-1}(F) \cap \Sigma(\mathfrak{B})) = \mathcal{X}^{\mathrm{P}^*_*}(\widehat{a}^{-1}(F)).$$

$\square$

Literatura

[1] E. Albrecht, Generalized spectral operators, In *Functional analysis: surveys and recent results* , North-Holland Mathematics Studies, No. 27 (ed. K.-D. Bierstedt and B. Fuchssteiner), North-Holland, Amsterdam, (1977), 259-277.

[2] E. Albrecht, On decomposable operators, *Integral Equat. Operator Theory*, 2 (1979), 1-10.

[3] E. Albrecht, On joint spectra, *Studia Math.*, LXIV (1979), 263-271.

[4] E. Albrecht, Spectral decompositions for systems of commuting operators, *Proc. Roy. Irish Acad.*, A 81 (1981), 81-98.

[5] E. Albrecht, Decomposable systems of operators in harmonic analysis, In *Toeplitz centennial*, Operator Theory: Advances and Applications, No. 4 (ed. I. Gohberg) Birkhäuser, Basel (1982), 19-35.

[6] E. Albrecht and J. Eschmeier, Analytic functional models and local spectral theory, *Proc. Lond. Math. Soc.* , III. Ser. 75, No.2 (1997), 323-348.

[7] E. Albrecht and F.-H. Vasilescu, On spectral capacities, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XIX, No.6 (1974), 701-705.

[8] C. Apostol, Roots of decomposable operator-valued analytic functions, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XIII, No.4 (1968), 433-438.

[9] C. Apostol, Remarks on the perturbation and a topology for operators, *J. Funct. Anal.*, 2 (1968), 395-409.

[10] C. Apostol, Decomposable multiplication operators, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XVII, No.3 (1972), 323-333.

[11] W. Arveson, On Groups of Automorphisms of Operator Algebras, *J. Funct. Analysis*, 15 (1974), 217-243.

[12] A. G. Baskakov, Spektralna sinteza in Banachovi moduli nad komutativnimi Banachovimi algebrami, *Mat. zametki*, t. 34, no.4 (1983), 573-585 (v ruščini).

[13] A. G. Baskakov, Spectral synthesis in Banach modules over commutative Banach algebras, *Math. Notes* 34, (1983), 776-782. (prevod iz Mat. Zametki.)

[14] F. F. Bonsall and J. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer-Verlag, 1973.

[15] J. Bračič, A characterisation of multipliers with spectral subspaces, *RMZ-Materials and geoenvironment*, 46 (1999), 5-12.

[16] J. Bračič, Unital strongly harmonic commutative Banach algebras, *Studia Math.*, sprejeto v objavo.

[17] J. Bračič, Strongly harmonic operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, sprejeto v objavo.

[18] J. Bračič, Simple multipliers on Banach modules, preprint.

[19] J. Bračič, Local multipliers, preprint.

[20] J. Bračič, Representations and derivations of modules, preprint.

[21] I. Colojoară and C. Foiaş, Theory of Generalized Spectral Operators, Gordon and Breach, New York, 1968.

[22] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[23] Y. Domar, Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras, *Acta Math.*, 96 (1956), 1-66.

[24] Y. Domar and L.-Å. Lindahl, Three spectral notions for representations of commutative Banach algebras, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* 25 (1975), 1-32.

[25] R. S. Doran and J. Wichmann, Approximate Identities and Factorization in Banach Modules, Springer, Berlin, 1979.

[26] J. Eschmeier, Operator decomposability and weakly continuous representations of locally compact abelian groups, *J. Operator Theory,* 7 (1982), 201-208.

[27] J. Eschmeier, On two notions of the local spectrum for several commuting operators, *Michigan Math. J.,* 30 (1983), 245-248.

[28] J. Eschmeier, Are commuting systems of decomposable operators decomposable? *Operator theory,* 12 (1984), 213-219.

[29] J. Eschmeier, Spectral decompositions and decomposable multipliers, *Manuscripta Math.,* 51 (1985), 201-224.

[30] J. Eschmeier, K. B. Laursen and M. M. Neumann, Multipliers with natural local spectra on commutative Banach algebra, *J. Funct. Anal.,* 138 (1996), 273-294.

[31] J. Eschmeier and M. Putinar, Spectral decomposition and analytic sheaves, London Math. Soc. Monographs 10, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[32] U. Fixman, Problems in spectral operators, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 1029-1051.

[33] C. Foiaş, Spectral capacities and decomposable operators, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XIII, No.10 (1968), 1539-1545.

[34] Şt. Frunză, A characterization of regular Banach algebras, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* XVIII (1973), 1057-1059.

[35] Şt. Frunză, The Taylor Spectrum and Spectral Decompositions, *J. Functional Analysis,* 19 (1975), 390-421.

[36] Şt. Frunză, Spectral decomposition and duality, *Illinois J. Math.,* 20 (1976), 314-321.

[37] O. Hatori, On the greatest regular closed subalgebras and the Apostol algebras of L^p-multipliers whose Furier transforms are continuous and vanish at infinity, *Tokyo J. Math.,* 20 (1997), 453-462.

[38] O. Hatori, Measures with natural spectra on locally compact abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 126 (1998), 2351-2353.

[39] O. Hatori, Subalgebras of commutative Banach algebras and Fourier multipliers with natural spectra, *Contemporary Mathematics,* 232 (1999), 171-187.

[40] O. Hatori in K. Izuchi, Apostol algebras and decomposition in Douglas algebras, *Michigan Math. J.,* 44 (1997), 435-449.

[41] E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, I, Springer-Verlag, 1963.

[42] M. Hladnik, Spectrality of elementary operators, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 49 (1990), 327-346.

[43] J. Inoue and S.-E. Takahasi, A remark on the largest regular subalgebra of a Banach algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116 (1992), 961-962.

[44] S. Kaijser, On Banach Modules I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 90 (1981), 423-444.

[45] S. Kaijser, On Banach Modules II. Pseudodeterminants and traces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 121 (1997), 325-341.

[46] Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[47] S. H. Kim, On the strongly harmonic algebras, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XXIII (1978), 1553-1575.

[48] K. Koh, On a representation of a strongly harmonic ring by sheaves, *Pacific J. Math.,* 41 (1972), 459-468.

[49] R. Larsen, An Introduction to the Theory of Multipliers, *Springer-Verlag*, Berlin, 1971.

[50] R. Larsen, Banach Algebras, *Marcel Dekker, Inc.* , New York, 1973.

[51] K. B. Laursen, Multipliers and local spectral theory, *Functional analysis and operator theory, Banach center publications,* 30 (1994), 223-236.

[52] K. B. Laursen, V. G. Miller and M. M. Neumann, Local spectral properties of commutators, *Proc. Edinburgh Math. Soc.,* 38 (1995), 313-329.

[53] K. B. Laursen and M. M. Neumann, An Introduction to Local Spectral Theory, London Math. Soc. Monographs 20, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[54] K. B. Laursen and M. M. Neumann, Decomposable operators and automatic continuity, *J. Operator Theory,* 15 (1986), 33-51.

[55] K. B. Laursen and M. M. Neumann, Local spectral properties of multipliers on Banach algebras, *Arch. Math.,* 58 (1992), 368-375.

[56] K. B. Laursen in M. M. Neumann, Decomposable multipliers and applications to harmonic analysis, *Studia Math.*, 101 (1992), 193-214.

[57] C.-P. Lu, Spectra of modules, *Comm. Algebra*, 23 (1995), 3741-3752.

[58] C.-P. Lu, The Zariski topology on the prime spectrum of a module, *Houston J. Math.*, 25 (1999), 417-432.

[59] M. M. Neumann, Banach algebras, decomposable convolution operators, and a spectral mapping property, in: *Proceedings of the Conference of Function Spaces at Southern Illinois University at Edwardsville*, Marcel Dekker, New York 1991, 307-323.

[60] M. M. Neumann, Commutative Banach Algebras and Decomposable Operators, *Monatsh. Math.*, 113 (1992), 227-243.

[61] T. W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras, Volume 1: Algebras and Banach Algebras, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications 49*, Cambridge University Press, 1994.

[62] C. J. Read, Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem, *J. London Math. Soc,* (2) 56 (1997), 595-606.

[63] C. E. Rickart, General Theory of Banach Algebras, D. van Nostrand Company, Inc., 1960.

[64] R. C. Smith, Local spectral theory for invertible composition operators on H^p, *Integr. Equat. Oper. Th.*, 25 (1996), 329-335.

[65] J. L. Taylor, Joint Spectrum for Several Commuting Operators, *J. Functional Analysis,* 6 (1970), 172-191.

[66] S. Teleman, Analyse harmonique dans les algebres regulieres, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, XIII, No.5 (1968), 691-750.

[67] S. Teleman, Theory of harmonic algebras with applications to von Neumann algebras and cohomology of locally compact spaces (de Rham's theorem), *Lectures on the applications of sheaves to ring theory, 99-315, Lecture Notes in Mathematics,* 248, Springer, Berlin, 1971.

Seznam oznak in stvarno kazalo

Seznam oznak

Število ob oznaki označuje stran, kjer je oznaka vpeljana.

$\widehat{a}$, 2	Gelfandova transformiranka elementa a
$\mathfrak{A}_1$, 17	standardna unitizacija algebre $\mathfrak{A}$
$A(\mathbb{D})$, 39	disk algebra
$ann_{\mathfrak{A}}$, 16	anihilator v algebri $\mathfrak{A}$
$ann_{\,\Theta}$, 96	anihilator glede na upodobitev Θ
$\mathfrak{A}_{op}$, 15	algebra $\mathfrak{A}$ z obrnjenim množenjem
$B(\mathcal{X})$, 2	algebra omejenih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru $\mathcal{X}$
$B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, 9	prostor omejenih linearnih preslikav iz Banachovega prostora $\mathcal{X}$ v Banachov prostor $\mathcal{Y}$
$B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 21	omejeni multiplikatorji na levem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, 21	omejeni multiplikatorji iz levega Banachovega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ v levi Banachov $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{Y}$
$B(\mathcal{X})_{\mathfrak{B}}$, 21	omejeni multiplikatorji na desnem Banachovem $\mathfrak{B}$-modulu $\mathcal{X}$
$B(\mathcal{X},\mathcal{Y})_{\mathfrak{B}}$, 21	omejeni multiplikatorji iz desnega Banachovega $\mathfrak{B}$-modula $\mathcal{X}$ v desni Banachov $\mathfrak{B}$-modul $\mathcal{Y}$
$B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})_{\mathfrak{B}}$, 21	omejeni multiplikatorji na Banachovem $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodulu $\mathcal{X}$
$B_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})_{\mathfrak{B}}$, 21	omejeni multiplikatorji iz Banachovega $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodula $\mathcal{X}$ v Banachov $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul $\mathcal{Y}$
$\mathcal{C}(\Sigma(\mathfrak{A}))$, 2	Banachova algebra vseh omejenih kompleksnih zveznih funcij na $\Sigma(\mathfrak{A})$
$\mathcal{C}_0(\Sigma(\mathfrak{A}))$, 2	Banachova algebra tistih kompleksnih zveznih funcij na $\Sigma(\mathfrak{A})$, ki imajo ničlo v neskončnosti
$\mathbb{C}_{\varphi}$, 20	enodimenzionalen Banachov modul, ki ga določa karakter φ
$Ch_{\,\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 80	prostor karakterističnih vektorjev v $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$\overline{Ch}_{\,\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 80	zaprtje prostora $Ch_{\,\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ v Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$\overline{Ch}{}^{*}_{\,\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*)$, 80	šibko $*$ zaprtje prostora $Ch_{\,\mathfrak{A}}(\mathcal{X}^*)$ v dualnem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}^*$
$Ch_{\,\varphi}(\mathcal{X})$, 80	prostor karakterističnih vektorjev v $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$, ki pripadajo karakterju φ
$cl\,(\Omega)$, 10	družina vseh zaprtih podmnožic v topološkem prostoru Ω
$\mathbb{D}$, 32	množica vseh kompleksnih števil z absolutno vrednostjo manj kot 1

$Dec_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$, 5	Apostolova algebra
$Dec_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 8	množica tistih elementov v $\mathfrak{A}$, ki na levem Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$ inducirajo dekomponibilne operatorje množenja
$\Delta_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 78	množica hiper-maksimalnih podmodulov v $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$\overline{\Delta}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 78	množica zaprtih hiper-maksimalnih podmodulov v Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$\Delta_{\varphi}(\mathcal{X})$, 78	množica hiper-maksimalnih podmodulov v $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$, ki pripadajo karakterju φ
$\overline{\Delta}_{\varphi}(\mathcal{X})$, 78	množica zaprtih hiper-maksimalnih podmodulov v Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$, ki pripadajo karakterju φ
$\delta_{S,T}$, 51	posplošeno odvajanje, ki ga določata operatorja S in T
E, 10	spektralna kapaciteta
$E_{S,T}$, 51	elementarni operator, ki ga določata n-terici $\underline{S}$ in $\underline{T}$
$\mathcal{G}(\mathcal{X})$, 59	množica cikličnih vektorjev v $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
Γ, 2	Gelfandova transformacija
$h_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$, 2	ovoj (glede na algebro $\mathfrak{A}$) množice $\mathcal{U}$
$h_{\mathcal{X}}^{\Omega}(\mathcal{Y})$, 72	ovoj podmodula $\mathcal{Y}$ v množici podmodulov Ω
$H_{\mathcal{X}}^{\overline{\Delta}}$, 89	ovoj v prostoru zaprtih hiper-maksimalnih podmodulov, ko je $\mathcal{X}$ modul nad algebro enostavnih multiplikatorjev
$k_{\mathfrak{A}}(E)$, 2	jedro množice $E \subseteq \Sigma(\mathfrak{A})$ v algebri $\mathfrak{A}$
$k_{\mathcal{X}}(S)$, 72	jedro množice $S \subseteq \mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$ v modulu $\mathcal{X}$
$K_{\mathcal{X}}$, 89	jedro v modulu $\mathcal{X}$, ko je modul nad algebro enostavnih multiplikatorjev
$\Xi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 62	množica maksimalnih podmodulov
$\overline{\Xi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 62	množica zaprtih maksimalnih podmodulov
L_a, 13	operator množenja z leve, ki ga $a \in \mathfrak{A}$ inducira na $\mathfrak{A}$
$\Lambda(x)$, 14	preslikava iz algebre $\mathfrak{A}$ v desni $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$, ki jo inducira element $x \in \mathcal{X}$
$Lat\,(T)$, 2	mreža zaprtih invariantnih podprostorov za operator T
$L(\mathcal{X})$, 14	algebra linearnih operatorjev na vektorskem prostoru $\mathcal{X}$
$L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, 14	prostor linearnih preslikav iz vektorskega prostora $\mathcal{X}$ v vektorski prostor $\mathcal{Y}$
$L_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 16	algebra multiplikatorjev na levem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$L_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})_{\mathfrak{B}}$, 16	algebra multiplikatorjev na $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodulu $\mathcal{X}$
$L(\mathcal{X})_{\mathfrak{B}}$, 16	algebra multiplikatorjev na desnem $\mathfrak{B}$-modulu $\mathcal{X}$
$L_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, 16	prostor multiplikatorjev iz levega $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$ v levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{Y}$
$L_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})_{\mathfrak{B}}$, 16	prostor multiplikatorjev iz $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodula $\mathcal{X}$ v $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-bimodul $\mathcal{Y}$
$L(\mathcal{X},\mathcal{Y})_{\mathfrak{B}}$, 16	prostor multiplikatorjev iz desnega $\mathfrak{B}$-modula $\mathcal{X}$ v desni $\mathfrak{B}$-modul $\mathcal{Y}$
$L^{\infty}(G)$, 20	Banachov prostor omejenih funkcij na Abelovi grupi G
$L^{p}(G)$, 20	Banachov prostor funkcij na Abelovi grupi G, katerih p-ta potenca absolutne vrednosti je integrabilna
L_S, 51	elementarni operator množenja z leve z operatorjem S

$(\mathcal{M})$, 14	najmanjši podmodul, ki vsebuje množico $\mathcal{M}$
$\mathcal{M}(\mathfrak{A})$, 86	(klasični) multiplikatorji na algebri $\mathfrak{A}$
$M_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 86	enostavni multiplikatorji na $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$\mathcal{M}_{\varphi}$, 81	jedro karakterja φ
$M(G)$, 40	algebra omejenih regularnih Borelovih mer na Abelovi grupi G
$M_{S,T}$, 51	elementaren operator dolžine 1, ki ga določata operatorja S in T
$\nu_{\mathfrak{A}}$, 74	naravna preslikava, ki slika v množico idealov algebre $\mathfrak{A}$
ν_M, 91	naravna preslikava, ki slika v množico idealov algebre enostavnih multiplikatorjev
$\omega(a)$, 24	množica karakterjev, ki ne uničijo elementa a
$\omega^{\Omega}(\mathcal{Y})$, 74	množica prapodmodulov v množici Ω, katerih kvocient ne vsebuje kvocienta podmodula $\mathcal{Y}$
$\Pi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 69	množica primitivnih podmodulov v $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$\overline{\Pi}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 69	množica zaprtih primitivnih podmodulov v Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
R_a, 14	operator množenja z desne, ki ga $a \in \mathfrak{A}$ inducira na $\mathfrak{A}$
$r(a)$, 41	spektralni polmer
$Rad^{\triangle}(\mathfrak{A})$, 79	Gelfandov radikal algebre $\mathfrak{A}$
$Rad_{\mathfrak{A}}^{\overline{\triangle}}(\mathcal{X})$, 82	hiperradikal $\mathfrak{A}$-modula $\mathcal{X}$
$Rad_{\mathfrak{A}}^{\Omega}(\mathcal{X})$, 72	Ω-radikal
$Rad^{\mathrm{P}}(\mathfrak{A})$, 76	P-radikal
$\mathrm{P}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 59	množica prapodmodulov v $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$\overline{\mathrm{P}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{X})$, 59	množica zaprtih prapodmodulov v Banachovem $\mathfrak{A}$-modulu $\mathcal{X}$
$Reg\,(\mathfrak{A})$, 7	največja regularna podalgebra v Banachovi algebri $\mathfrak{A}$
$\mathrm{P}(\mathfrak{A})$, 56	množica praidealov v algebri $\mathfrak{A}$
$\rho_T(x)$, 11	lokalna resolventna množica operatorja T pri vektorju x
$\rho(\underline{T}, x)$, 12	analitična resolventna množica n-terice $\underline{T}$ pri vektorju x
$\mathrm{P}(x)$, 13	preslikava iz algebre $\mathfrak{A}$ v levi $\mathfrak{A}$-modul $\mathcal{X}$, ki jo inducira element $x \in \mathcal{X}$
R_T, 51	elementarni operator množenja z desne z operatorjem T
$Sep\,(\mathfrak{A})$, 40	največja podalgebra z ločljivim spektrom v algberi $\mathfrak{A}$
$\Sigma(\mathfrak{A})$, 1	množica karakterjev na algebri $\mathfrak{A}$
$\Sigma_0(\mathfrak{A})$, 19	množica karakterjev na algebri $\mathfrak{A}$ in funkcional 0
$\sigma_T(x)$, 11	lokalni spekter operatorja T pri vektorju x
$\sigma(\underline{a}, \mathcal{X})$, 53	Taylorjev spekter n-terice $\underline{L}_a$
$\sigma(\underline{T}, \mathcal{X})$, 53	Taylorjev spekter n-terice $\underline{T}$
$\sigma(\underline{T}, x)$, 12	analitičen lokalni spekter n-terice $\underline{T}$ pri vektorju x
$Sp_{\mathfrak{A}}(\mathcal{U})$, 23	Beurlingov spekter množice $\mathcal{U}$
$Sp_{\mathfrak{A}}(x)$, 23	Beurlingov spekter vektorja x
$Sp\,(\theta)$, 23	Arvesonov spekter upodobitve θ
$Sp_{\,\theta}(x)$, 23	lokalni Arvesonov spekter upodobitve θ pri vektorju x
$Sp\,(\Theta)$, 97	Arvesonov spekter upodobitve Θ
$Sp_{\Theta}(\mathcal{N})$, 97	lokalni Arvesonov spekter upodobitve Θ pri množici $\mathcal{N}$

supp (f), 24	nosilec funkcije f
$\mathcal{S}(\mathcal{X})$, 10	mreža zaprtih podprostorov v Banachovem prostoru $\mathcal{X}$
T_a, 1	operator množenja, ki ga element a inducira na modulu
$\Theta_{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$, 66	restrikcija upodobitve Θ
$\Theta^{(\mathcal{V},\mathcal{W})}$, 66	redukcija upodobitve Θ
$\widetilde{T}$, 88	funkcija, ki jo enostaven multiplikator T določa na hiperspektru
$\mathcal{W}_\perp$, 32	podprostor vektorjev, ki jih uničijo vsi funkcionali iz $\mathcal{W}$
$\mathcal{X}(F)$, 25	spektralni podmodul pri F
$\mathcal{X}^{\mathfrak{B}}(S)$, 102	spektralni podmodul pri S v levem Banachovem $\mathfrak{B}$-modulu $\mathcal{X}$
$\mathcal{X}_{(F)}$, 25	množica vektorjev, ki imajo z F disjunkten Beurlingov spekter
$\mathcal{X}_F$, 25	kospektralni podmodul
$\mathcal{X}_\varphi$, 81	zaprtje koideala $\mathcal{M}_\varphi \cdot \mathcal{X}$
$\mathcal{X}^{\mathrm{P}^*_*}(S)$, 102	P^*_*-spektralni podmodul pri S
$X_T(S)$, 11	lokalni spektralni podprostor operatorja T pri množici S
$\mathcal{Y}^\perp$, 31	prostor vseh funkcionalov, ki uničijo vse vektorje iz $\mathcal{Y}$
$(\mathcal{Y} : \mathcal{X})$, 57	kvocient podmodula $\mathcal{Y}$

Stvarno kazalo

A

algebra
  Apostolova, 6, 42
  dopustna, 45
  krepko harmonična, 26
  polenostavna, 2
  regularna, 2, 6
  z ločljivim spektrom, 7, 22, 26, 31, 44, 94, 100
  za inverze zaprta, 41, 45, 48
analitična resolventna množica, 12, 53
anihilator, 16, 57
anihilator v $\mathcal{X}$, 96
antiupodobitev
  ciklična, 63
  modula, 62

B

bimodul, 14
Bishopovo lastnost (β), 12

D

dekompozicijska lastnost (δ), 13, 37, 91
disk algebra, 39

E

ekvivalentni upodobitvi, 67

F

funkcija
  $\mathfrak{A}$-spektralna, 45

G

Gelfandova
  transformacija, 2
  transformiranka, 1, 2

H

hiperradikal, 82
hiperravnina, 57
hiperspekter, 78, 101
homomorfizem modulov, 16

I

ideal
  kospektralni, 26, 29, 94, 100
  primitiven, 9
  spektralni, 26, 29
izrek o razčlenitvi enote, 30, 31, 95

J

jedro
  množice, 2, 72
  skupno, 98
  upodobitve, 63, 68, 97

K

karakter, 1, 9, 77
karakterističen multiplikativen funkcional, 80
koideal, 17, 57
kvocient podmodula, 57

L

ločljiv del spektra, 94, 101
lokalna resolventna množica, 11
lokalni spektralni podprostor, 11
lokalno kompaktna Abelova grupa, 84

M

modul, 13
  Ω-polenostaven, 72
  Ω-radikalski, 72
  $\overline{\Delta}$-polenostaven, 79, 85, 90, 93
  Banachov, 17
  cikličen, 59
  desni, 14
  dualni, 10, 15, 21
  izometričen, 18
  levi, 13
  normiran, 17
  unitalen, 17
  z ločljivim spektrom, 10, 101
  zvest, 16
modulsko množenje, 13, 15
multiplikator, 9, 16, 21, 86
  enostaven, 10, 86, 93
  točkasti, 78

N

n-terica operatorjev
  dekomponibilna, 12, 51
  krepko harmonična, 52
naravna preslikava, 74, 79, 91, 99
nerazcepna razširitev upodobitve, 70
0-dimenzionalen topološki prostor, 27
nosilec, 24
nosilni prostor, 2

O

operator
  $\mathfrak{A}$-skalaren, 45
  dekomponibilen, 2, 11, 100
  elementaren, 9, 51
  krepko harmoničen, 9, 44, 51
  regularen $\mathfrak{A}$-skalaren, 46
  s šibko 2-SDP, 3, 91
  super-dekomponibilen, 3, 37, 93, 101
ovoj
  podmnožice, 2
  podmodula, 72

P

podalgebra
  največja regularna, 40
  največja z ločljivim spektrom, 40
  normalna glede na operator, 46
  spektralno zaprta, 41
podmodul, 14
  P_*^*-spektralni, 102
  bistveni, 81
  hiper-maksimalen, 78, 101
  kocikličen, 60
  kospektralni, 26, 31
  maksimalen, 60, 69
  najmanjši, 14
  primitiven, 69
  spektralni, 26, 31, 102
popolnoma nepovezan topološki prostor, 45
praideal, 9, 56
prapodmodul, 56
približna enota, 82

R

radikal, 9
  Ω-, 72
  $\overline{\Delta}$-, 82, 85
redukcija upodobitve, 66
restrikcija upodobitve, 66

S

spekter
  analitičen lokalni, 12, 53
  Arvesonov, 9, 10, 23, 96, 97
  Beurlingov, 23, 33
  lokalen, 9, 11
  lokalen Arvesonov, 23, 97
  naraven, 92

Taylorjev, 12, 53
spektralna kapaciteta, 10, 36, 53, 102
tipa $(\mathbb{C}^n, \mathcal{X})$, 12
tipa $(\Omega, \mathcal{X})$, 10, 35
spektralni polmer, 41
spektralno maksimalen podprostor, 46
spektralno zaprtje, 41
standardna unitizacija, 17
strukturni prostor, 2
SVEP, 11, 90

T

topološko ekvivalentni upodobitvi, 67
topološko nerazcepna razširitev, 70
topologija
Gelfandova, 2, 94
hull-kernel, 2, 72, 89, 91, 94
Jacobsonova, 72
Zariskega, 72

U

upodobitev
algebre, 9
ciklična, 63
krepko zvezna, 64, 96
levo $\mathfrak{A}$-modularna, 98
maksimalna nerazcepna, 70, 77, 81
maksimalna topološko nerazcepna, 70
modula, 10, 62
modularna, 98
nerazcepna, 68, 77
normirana, 64
regularna desna, 65
regularna leva, 65
topološko ciklična, 64
topološko nerazcepna, 68
trivialna, 63
zvezna, 64, 97

V

vektor
cikličen, 59, 63, 68
karakterističen, 80
kocikličen, 60
topološko cikličen, 59, 64

Izjavljam, da je disertacija rezultat mojega lastnega raziskovalnega dela.

Janko Bračič