



Računanje točnih vrednosti trigonometričnih funkcij

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Iz znanih vrednosti

- $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90^\circ = 1$,
- $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$

lahko z **osnovnimi štirimi aritmetičnimi operacijami** in s **kvadratnimi korenjenji** izrazimo sinuse in kosinuse kotov, ki so celi mnogokratniki kota 15° . Z adicijskimi izreki dobimo, razen za zgoraj navedene kote, ki so sicer celi mnogokratniki kota 15° , še:

- $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) =$
 $\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$

Na enak način oz. s formulo $\sin x = \cos(90^\circ - x)$ dobimo tudi

- $\cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$,
 $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$

Ali lahko samo s prej omenjenimi računskimi operacijami izrazimo tudi vrednosti funkcij sinus in kosinus za cele mnogokratnike kakšnega manjšega kota, izraženega v stopinjah z naravnim številom? Izkaže se, da je najmanjši tak kot 3° .

Da bi lahko izrazili $\sin 3^\circ$ in $\cos 3^\circ$, moramo najti

vrednosti funkcij sinus in kosinus kakšnega naravnega mnogokratnika kota 18° ($18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$). Do rezultata bomo prišli po ovinku, s kvadratno enačbo. Najprej je očitno $36^\circ = 90^\circ - 54^\circ$ oz. $18^\circ + 18^\circ = 90^\circ - 18^\circ - 18^\circ - 18^\circ$. Zato je

$$\begin{aligned} \sin(18^\circ + 18^\circ) &= \sin(90^\circ - (18^\circ + 18^\circ + 18^\circ)) = \\ &= \cos((18^\circ + 18^\circ) + 18^\circ). \end{aligned}$$

Po adicijskih izrekih lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ &= \cos(18^\circ + 18^\circ) \cos 18^\circ - \\ &= \sin(18^\circ + 18^\circ) \sin 18^\circ = \\ 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ &= \cos 36^\circ \cos 18^\circ - \\ &= \sin 54^\circ \sin 18^\circ. \end{aligned}$$

Po krajšanju s faktorjem $\cos 18^\circ \neq 0$ in z upoštevanjem osnovne enakosti $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dobimo

$$2 \sin 18^\circ = 1 - 4 \sin^2 18^\circ.$$

Torej je $\sin 18^\circ$ pozitivna rešitev kvadratne enačbe $4x^2 + 2x - 1 = 0$:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Iz tega rezultata ni težko izraziti

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Opazimo, da shajamo z osnovnimi štirimi aritmetičnimi operacijami in s kvadratnimi korenjenji. Sedaj pa takoj vidimo, da je

$$\begin{aligned} \sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) = \\ &= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ. \end{aligned}$$

Z znanimi vrednostmi dobimo

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16} \left((\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}} \right).$$

V decimalni obliki pa je

$$\sin 3^\circ = 0.052\,335\,956\,242\,943\,83\dots$$

Tako bi lahko izrazili tudi $\cos 3^\circ$ in sestavili tabelo sinusov in kosinusov kotov $0^\circ, 3^\circ, 6^\circ, \dots, 42^\circ, 45^\circ$. Več pa zaradi znanih zvez ni potrebno. Vse vrednosti izrazimo le z osnovnimi štirimi aritmetičnimi operacijami in s kvadratnimi koreni. Tako tabelo je sestavil in objavil že baron Jurij Vega (1754–1802).

Zakaj poleg štirih aritmetičnih operacij toliko uporabljamo kvadratne korene? Zato, ker daljico, katere dolžina se izraža s temi operacijami, lahko geometrijsko konstruiramo samo z ravnilom in šestilom. Pomagamo si s sorazmerji in podobnimi trikotniki ter s Pitagorovim izrekom, ki posledično v pravokotnem trikotniku eno stranico izraža s preostalima dvema ravno s kvadratnim korenom.

Kaj pa je s $\sin 1^\circ$? Kakorkoli obračamo znane enakosti in dobljene enačbe, nikoli ne pridemo do kvadratne enačbe, ampak do kubične. Korene kubične enačbe v splošnem primeru lahko natančno izrazimo s t. i. Cardanovimi formulami, ki pa so zapletene in poleg kvadratnega korena vsebujejo tudi tretji koren. Poleg tega Cardanove formule navadno vsebujejo ravno kote, katerih vrednosti trigonometričnih funkcij ne znamo točno izraziti. Dolžine daljice, ki se izraža s tretjim korenom, na splošno ne moremo konstruirati samo z ravnilom in šestilom. Kot 3° torej lahko konstruiramo le z ravnilom in šestilom, kota 1° pa ne.

Ker pa je načrtovanje kota enakovredno konstrukciji primerne pravokotnega trikotnika, to na splošno ne gre samo z ravnilom in šestilom, če se vrednost ene od kotnih funkcij tega kota izraža s kubičnim korenom.

Za $\sin 1^\circ$ so na tako voljo le še približni izračuni.

Podobno, kot smo računali prej, zlahka zapišemo:

$$\sin 3^\circ = 3 \sin 1^\circ - 4 \sin^3 1^\circ.$$

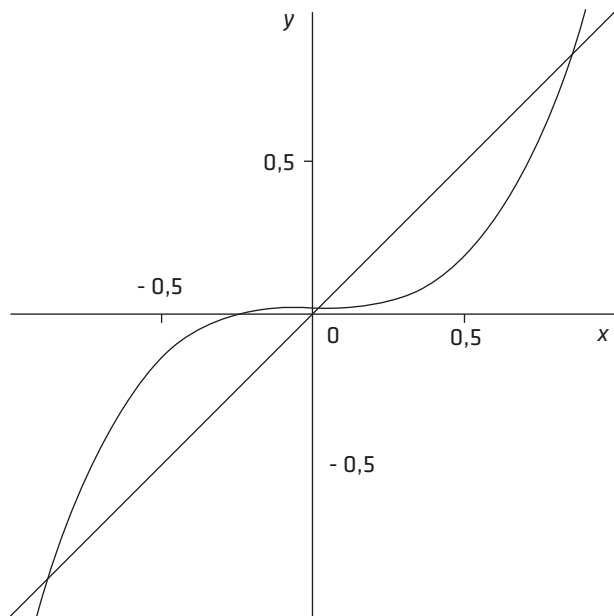
Število $s = \sin 1^\circ$ je torej pozitivna rešitev kubične enačbe

$$4x^3 - 3x + a = 0,$$

pri čemer je $a = \sin 3^\circ$ znano število. Ker je kot 3° majhen, je $\sin 1^\circ$ približno enak $a/3$. V prvi polovici 15. stoletja je Al-Kaši že znal izračunati število s poljubno natančno z iteracijo. Zgornjo kubično enačbo prepišemo v obliko



→ ■ $x = (4x^3 + a)/3$.



SLIKA 1.

Najmanjša pozitivna abscisa presečišča obeh krivulj je $\sin 1^\circ$.

Tri rešitve dobimo kot presečišča krivulj $y = x$ in $y = f(x) = (4x^3 + a)/3$. Najmanjša pozitivna rešitev je ravno s . Za začetni približek s_0 števila s vzamemo kar $a/3$, nato pa izračunamo naslednji, boljši približek $s_1 = f(s_0)$. Iz tega dobimo še boljši približek $s_2 = f(s_1)$. Ta postopek nadaljujemo in števila $s_n = f(s_{n-1})$ se približajo številu s tako blizu, kakor želimo.

n	S_n
0	0.017 445 318 747 647 94
1	0.017 452 397 805 531 90
2	0.017 452 406 426 767 05
3	0.017 452 406 437 270 70
4	0.017 452 406 437 283 49
5	0.017 452 406 437 283 51

TABELA 1.
Računanje
približkov

Torej je zaokroženo na 15 decimalk:

■ $\sin 1^\circ = 0.017\,452\,406\,437\,284$.

Zanimivo bi bilo odgovoriti na vprašanje, zakaj vrednosti funkcij sinus in kosinus za nekatere kote lahko izrazimo le z osnovnimi štirimi aritmetičnimi operacijami in s kvadratni korenjenji, drugih pa ne. V prvem primeru lahko kot načrtamo samo z ravnilom in šestilom, v drugem pa ne. Izkaže se, da je problem enakovreden problemu, kdaj lahko krogu včrtamo pravilni n -kotnik samo z ravnilom in šestilom. To gre npr. za $n = 3, 4, 5, 6$, za $n = 7$ pa ne. Kdaj pravilni n -kotnik lahko načrtamo samo z ravnilom in šestilom? Odgovor na to vprašanje imamo, izrazimo pa ga s t. i. Fermatovimi števili (Pierre de Fermat, 1601–1665, francoski matematik). O tem je dosti napisanega v matematični literaturi, nekaj tudi v Preseku.

xxx

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

	2						7
			7	6	4	8	
			6			3	8
5		7					
					3		4
	7	4		8			
	5	1				6	

xxx