PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 4
Strani 198–201

Marko Razpet:

NOŽIŠČNE KRIVULJE KROŽNICE

Ključne besede: matematika, praktično delo, nožiščne krivulje, Pascalov polž.

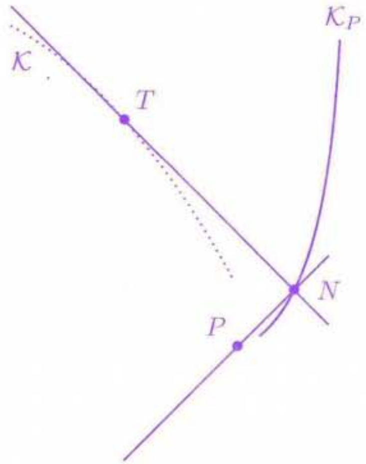
Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1376-Razpet.pdf

NOŽIŠČNE KRIVULJE KROŽNICE

Iz dane ravninske krivulje $\mathcal{K}$ lahko na različne načine naredimo nove krivulje, npr. z raztegi in zrcaljenji. Obstajajo pa tudi bolj zapleteni postopki pridobivanja krivulj. Ogledali si bomo nožiščne krivulje dane krožnice.

V splošnem pridemo do nožiščne krivulje $\mathcal{K}_P$ dane ravninske krivulje $\mathcal{K}$ tako, da najprej v ravnini te krivulje izberemo točko P, nato pa jo pravokotno projiciramo na vse tangente krivulje $\mathcal{K}$. Množica vseh nožišč N, t.j. presečišč pravokotnic skozi P na vse tangente krivulje $\mathcal{K}$, je nožiščna krivulja $\mathcal{K}_P$ krivulje $\mathcal{K}$ glede na pol P.

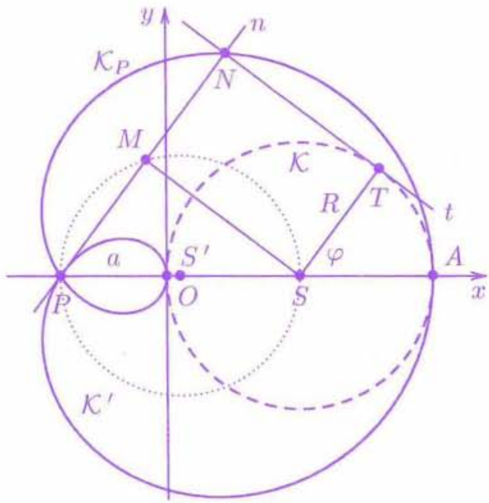
Premica ni zanimiva, saj je sama sebi tangenta. Nožiščna "krivulja" premice glede na katerokoli točko je točka. Kaj pa nožiščna krivulja krožnice? V tem primeru so reči nekoliko bolj zapletene, toda zanimivejše.



Slika 1. Nastanek nožiščne krivulje.

Problema se lotimo z analitičnimi orodji. Vzemimo v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy krožnico $\mathcal{K}$ s polmerom R in s središčem v točki $S(R,0)$. Ni težko najti njene enačbe $x^2+y^2=2Rx$. Točko T na $\mathcal{K}$ podajmo s središčnim kotom φ (slika 2). Točka T ima očitno koordinati $(R(1+\cos\varphi), R\sin\varphi)$. Spomnimo se, da ima tangenta na krožnico $x^2+y^2=2Rx$ v točki $T(x_0,y_0)$ enačbo $x_0x+y_0y=R(x+x_0)$. Če vanjo vstavimo $x_0=R(1+\cos\varphi)$ in $y_0=R\sin\varphi$, dobimo naslednji rezultat: tangenta t na $\mathcal{K}$ v točki T je premica z enačbo $x\cos\varphi+y\sin\varphi=$ $=R(1+\cos\varphi)$.

Naj bo točka $P(-a,0)$ pol, glede na katerega bomo iskali nožiščno krivuljo $\mathcal{K}_P$. Zaradi simetrije krožnice lahko brez škode za splošnost vzamemo P čisto poljubno, za lažji račun jo postavimo kar na abscisno os. Skozi P narišemo pravokotnico n na tangento t. Enačba premice n je $y=$ $=(x+a)\tan\varphi$ oz. $(x+a)\sin\varphi-y\cos\varphi=0$. Druga oblika je splošnejša, ker dopušča tudi, da je $\varphi=\pm\pi/2$, česar prva oblika ne prenese. Vse tangente na $\mathcal{K}$ dobimo, ko kot φ preteče interval $[0,2\pi)$.



Slika 2. Nožiščna krivulja krožnice.

Nožišče N ima koordinati (x, y), kjer sta x in y rešitvi sistema enačb:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = R(1+\cos\varphi)$$
$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = -a\sin\varphi$$

Sistem rešimo brez posebnih težav in dobimo:

$$x = ((R+a)\cos\varphi + R)\cos\varphi - a$$
$$y = ((R+a)\cos\varphi + R)\sin\varphi$$

Gornji enačbi podajata iskano krivuljo v parametrični obliki. Kot φ igra vlogo parametra. Ko ta teče po intervalu $[0, 2\pi)$, točka $N(x, y)$ ravno enkrat obhodi vso krivuljo. Točki $O(0,0)$ in $A(2R, 0)$, v katerih je tangenta na krožnico $\mathcal{K}$ navpična, sta na novi krivulji $\mathcal{K}_P$. Če je P zunaj krožnice $\mathcal{K}$, potem neka tangenta na $\mathcal{K}$ poteka skozi P. Torej je v tem primeru tudi P na $\mathcal{K}_P$.

Oblika nožiščne krivulje krožnice je odvisna od a. Na sliki 2 smo izbrali $a > 0$. Lepo lahko opazujemo krivulje $\mathcal{K}_P$ za različne pole P z računalniškim programom Cabri-géomètre. Takoj bi opazili, da niso vse dobljene krivulje zavozlane tako kot naša na sliki 2.

Premica n, ki je vzporedna z daljico ST, oklepa z osjo x kot φ. Označimo z ϱ razdaljo od P do N. Iz koordinat točke N takoj razberemo

$$\varrho = (R+a)\cos\varphi + R\,. \tag{1}$$

Da bi rezultatu dali drugačen geometrijski pomen, načrtamo krožnico $\mathcal{K}'$ skozi P in S, s središčem v točki S', razpolovišču daljice PS. Premer te krožnice je $R + a$. Premica n seka to krožnico v točki M. Ni težko ugotoviti, da je daljica MS vzporedna z daljico NT in da je štirikotnik $STNM$ pravokotnik.

Iz pravokotnega trikotnika PSM razberemo, da je razdalja r od P do M enaka $(R+a)\cos\varphi$. Pri danem kotu φ je torej razdalja ϱ za R večja od razdalje r.

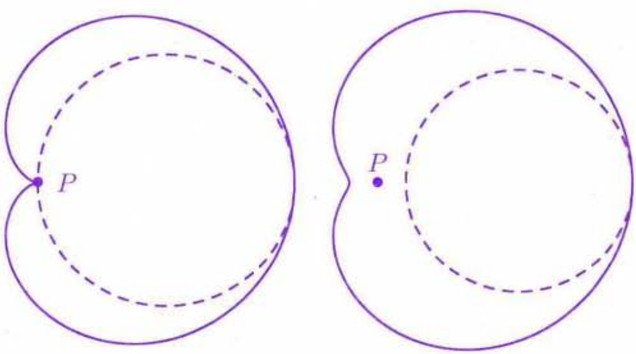
Če vzamemo točko P za pol, za polarno os pa poltrak s krajiščem v P, usmerjen v pozitivni smeri osi x, dobimo polarni koordinatni sistem, v katerem ima krožnica $\mathcal{K}'$ enačbo $r = (R + a)\cos\varphi$, $\mathcal{K}_P$ pa enačbo (1).

Krivulja $\mathcal{K}_P$ je poseben primer krivulje, ki ima v polarnih koordinatah (ϱ, φ) enačbo

$$\varrho = 2d\cos\varphi + b\,, \tag{2}$$

kjer sta d in b pozitivni števili. Taki krivulji pravimo *Pascalov polž*. Pascalov polž po točkah konstruiramo tako, da načrtamo najprej krožnico s premerom $2d$, imenovano *osnovnica polža*, nato v enem krajišču premera potegnemo poltrak. Iz presečišča poltraka s krožnico nanesemo razdaljo b po poltraku na obe strani in dobimo eno ali dve točki Pascalovega polža. Nato opisano konstrukcijo ponavljamo za več poltrakov in dobljene točke povežemo. Tudi ta konstrukcija je primerna za računalniški program Cabri-géomètre.

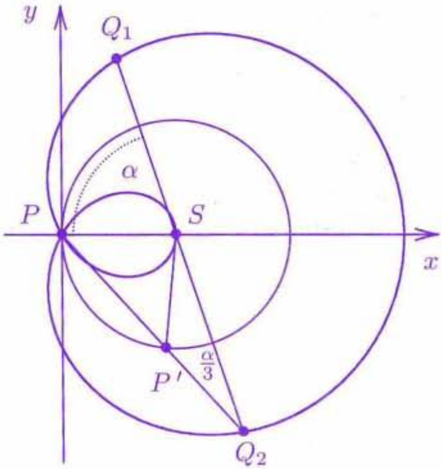
Torej je nožiščna krivulja krožnice glede na katerokoli točko Pascalov polž, pri katerem je $2d = R + a$ in $b = R$.



Slika 3. Primera Pascalovih polžev.

V posebnem primeru $a = 0$ je enačba krivulje $\mathcal{K}_P$ v polarnih koordinatah $\varrho = R(1 + \cos\varphi)$, kar predstavlja *srčnico* ali *kardioido* (slika 3 levo). Če je P znotraj $\mathcal{K}$, Pascalov polž nima značilne male zanke (slika 3 desno), kot jo ima tisti na sliki 2.

Pascalov polž je zanimiv tudi kot trisektrisa, to je krivulja, ki pomaga razdeliti kot na tri enake dele. V ta namen je treba vzeti tisti primer polža, ko je $d = b$. Tedaj ima polž pentljo, ki sega ravno do središča krožnice, njegove osnovnice (slika 4).



Slika 4. Tretjinjenje kota.

Na sliki 4 je kot $\alpha = \sphericalangle PSQ_1$. Daljico skozi Q_1 in S podaljšamo tako, da seka polža v točki Q_2. Premica skozi Q_2 in P seka osnovnico polža v točki P'. Zaradi posebne izbire le-tega sta trikotnika PSP' in $SP'Q_2$ enakokraka. Naj bo $\varepsilon = \sphericalangle P'SQ_2 = \sphericalangle P'Q_2S$. Potem je $\sphericalangle PP'S = \sphericalangle SPP' = 2\varepsilon$, saj je v trikotniku vselej zunanji kot enak vsoti notranjih, nepriležnih kotov. Kot α je kot zunanji kot trikotnika PSQ_2 enak vsoti notranjih, nepriležnih kotov, torej $\alpha = 3\varepsilon$. Ugotovili smo torej, da je $\sphericalangle SP'Q_2 = \frac{\alpha}{3}$.

Obliko Pascalovega polža imajo menda pri železnici ekscentri za dviganje in spuščanje signalov, ki povedo stanje kretnic. Oblika poskrbi, da se naprava najhitreje vrti na sredi vrtljaja, na začetku in koncu pa najpočasneje, da ne prihaja do nepotrebnih sunkovitih gibanj.

Marko Razpet