PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 6
Strani 376–382, XXIV

Boris Lavrič:

RAZŠIRITEV MORLEYEVEGA IZREKA

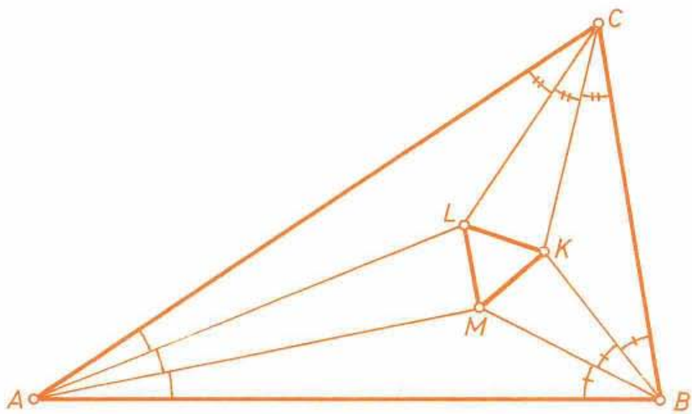
Ključne besede: matematika, geometrija, trikotniki, Morleyev izrek.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1193-Lavric.pdf

RAZŠIRITEV MORLEYEVEGA IZREKA

Kljub temu, da je trikotnik zelo preprost ravninski lik in da so ga proučevali že v antiki, je dolgo skrival nekatere lepe lastnosti. Mednje prav gotovo sodi osupljivo odkritje angleškega matematika Franka Morleya, ki se zdaj po njem imenuje

Morleyev izrek. *Razdelimo notranje kote poljubnega trikotnika ABC s poltraki na tri enake dele in tri presečišča načrtanih poltrakov označimo s K, L, M, kot kaže slika 1. Potem je trikotnik KLM enakostraničen.*

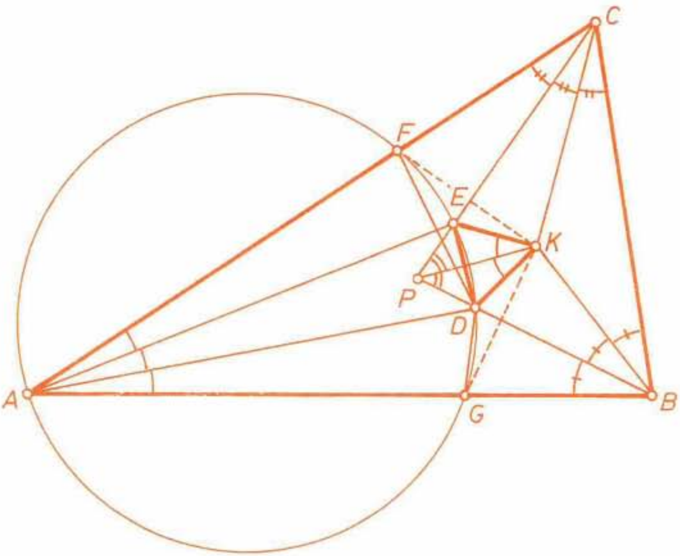


Slika 1.

Menda je vest o tem odkritju iz leta 1899 hitro obšla matematični svet. Čeprav do leta 1914 ni bil objavljen noben dokaz Morleyevega izreka, se to najbrž ni zgodilo zaradi težavnosti dokaza. Izrek namreč lahko potrdimo z izračunom dolžin stranic (Morleyevega) trikotnika KLM. S spretno uporabo lastnosti kotnih funkcij dobimo za dolžine vseh treh stranic isti izraz

$$d = 8r \sin \tfrac{1}{3}\alpha \sin \tfrac{1}{3}\beta \sin \tfrac{1}{3}\gamma, \tag{1}$$

v katerem so α, β, γ velikosti notranjih kotov trikotnika ABC, r pa polmer njemu očrtane krožnice. Podrobnosti prepustimo bralcu in predstavimo "čisto geometrijski" dokaz Morleyevega izreka, ki nam bo koristil pri dokazu razširitve tega izreka.



Slika 2.

Dokaz. Točke A, B, C, K, L in M ter koti α, β in γ naj imajo enak pomen kot doslej, sečišče premic BM in CL pa zaznamujmo s P. Na daljici PB izberimo točko D, na daljici PC pa točko E (slika 2), tako da velja

$$\sphericalangle PKD = \sphericalangle PKE = 30^\circ. \tag{2}$$

Točka K je središče trikotniku PBC včrtanega kroga, zato je

$$\sphericalangle KPD = \sphericalangle KPE = \tfrac{1}{2}(180^\circ - (\tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{2}{3}\gamma))$$

in tedaj zaradi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$\sphericalangle KPD = \sphericalangle KPE = 30^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha\,. \tag{3}$$

Trikotnika PKD in PKE imata torej ob skupni stranici paroma skladna priležna kota, zato sta skladna. Od tod z upoštevanjem enakosti (2) sledi, da je trikotnik KED enakostraničen. V nadaljevanju bomo pokazali, da trikotnika KED in KLM sovpadata, in s tem sklenili dokaz izreka.

Prezrcalimo K preko CP oziroma preko BP, zrcalni sliki pa označimo z F oziroma z G. Zaradi

$$\sphericalangle PCF = \sphericalangle PCK \text{ in } \sphericalangle PBG = \sphericalangle PBK$$

leži F na AC, G pa na AB. Poleg tega z upoštevanjem enakosti (3) dobimo

$$\begin{aligned}\sphericalangle CEF &= \sphericalangle CEK = \sphericalangle PKE + \sphericalangle KPE = 60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha,\\ \sphericalangle BDG &= \sphericalangle BDK = \sphericalangle PKD + \sphericalangle KPD = 60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha,\end{aligned}$$

od koder sledi

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle GDE = 360^\circ - 60^\circ - 2(60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha) = 180^\circ - \tfrac{2}{3}\alpha\,.$$

Ker je poleg tega $|EF| = |DE| = |GD|$, velja

$$\sphericalangle EDF = \sphericalangle DFE = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DEF) = \tfrac{1}{3}\alpha \tag{4}$$

in zato

$$\sphericalangle GDF = \sphericalangle GDE - \tfrac{1}{3}\alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Torej je $\sphericalangle GDF + \sphericalangle GAF = 180^\circ$, štirikotnik $AGDF$ pa je tedaj tetiven. Podobno ugotovimo, da je tudi štirikotnik $AGEF$ tetiven, zato točke A, G, D, E in F ležijo na isti krožnici. S pomočjo izreka o obodnem kotu in enakosti (4) dobimo

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DFE = \tfrac{1}{3}\alpha = \sphericalangle EDF = \sphericalangle EAF\,.$$

Od tod sledi, da točka E sovpada s točko L, D pa z M. Trikotnik KLM torej sovpada s trikotnikom KED in je enakostraničen, izrek pa dokazan.

Iz notranjosti trikotnika ABC se zdaj ozrimo navzven; ob vsaki njegovi stranici načrtajmo zunanja kota, s poltraki ju razdelimo na tri enake dele in zaznamujmo tri presečišča po dveh poltrakov ob vsaki stranici. So tudi v tem primeru zaznamovane točke oglišča enakostraničnega trikotnika? Odgovor na postavljeno vprašanje je pritrdilen in je del naslednjega, precej bolj presenetljivega rezultata.

Izrek 1. *Razdelimo vse notranje in zunanje kote poljubnega trikotnika ABC s poltraki na tri enake dele in dvanajst presečišč teh poltrakov označimo, kot kaže slika 3 na zadnji strani ovitka. Poleg tega zaznamujmo še presečišča premic KL, LM in MK s poltraki, ki delijo notranje kote trikotnika ABC na tri enake dele. Potem velja:*

(a) *Trikotniki KLM, $K_1L_1M_1$, $K_2L_2M_2$, $K_3L_3M_3$ in $K_1L_2M_3$ so enakostranični.*

(b) *Točke K_2, L_2, M_3 in K_3 ležijo na premici p_1, ki je vzporedna LM, točke L_3, M_3, K_1 in L_1 ležijo na premici p_2, ki je vzporedna MK, točke M_1, K_1, L_2 in M_2 pa so na premici p_3, ki je vzporedna KL.*

(c) *Točki R in S ležita na premici p_1, točki T in U na premici p_2, točki V in Z pa na premici p_3.*

Dokaz. Izjavo (a) bomo dokazali podobno kot Morleyev izrek, zato bomo nekaj podrobnosti preskočili. Zadostuje ugotoviti, da sta trikotnika $K_1L_1M_1$ in $K_1L_2M_3$ enakostranična. Brez škode za dokaz bomo privzeli, da je $\alpha < 90^\circ$. Sečišče premic BM_1 in CL_1 zaznamujmo s P_1 (slika 4). Na premici P_1B izberimo točki D_1 in D', na premici P_1C pa točki E_1 in E', tako da velja

$$\sphericalangle P_1K_1D_1 = \sphericalangle P_1K_1E_1 = 30^\circ, \tag{5}$$
$$\sphericalangle P_1K_1D' = \sphericalangle P_1K_1E' = 150^\circ. \tag{6}$$

Točka K_1 je središče trikotniku P_1BC včrtanega kroga, zato lahko izračunamo

$$\sphericalangle K_1P_1D_1 = \sphericalangle K_1P_1D' = \sphericalangle K_1P_1E_1 = \sphericalangle K_1P_1E' = 30^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha \tag{7}$$

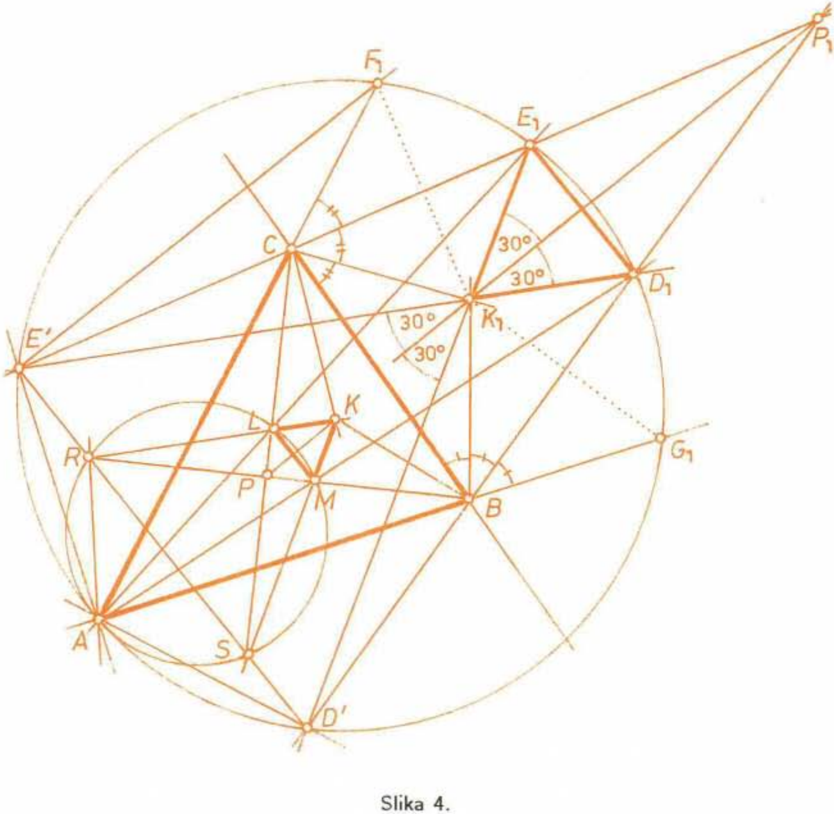
in ugotovimo, da sta trikotnika $K_1E_1D_1$ in $K_1E'D'$ enakostranična.

Prezrcalimo K_1 preko CP_1 oziroma preko BP_1, zrcalni sliki pa označimo z F_1 oziroma z G_1. Podobno kot v dokazu Morleyevega izreka ugotovimo, da točke A, G_1, D_1, E_1, F_1 in D', E' ležijo na isti krožnici in s pomočjo izreka o obodnem kotu ter enakosti (5), (6), (7) pokažemo, da točka E_1 sovpada s točko L_1, D_1 z M_1, E' z L_2, D' pa z M_3, in s tem sklenemo dokaz trditve (a).

Za dokaz izjave (b) je zaradi (a) dovolj videti, da sta premici E_1K_1 (ali E_1D') in KM vzporedni. Ker velja $\sphericalangle PBP_1 = 120^\circ$ in je po Morleyevem izreku ter enakosti (7)

$$\sphericalangle KPB + \sphericalangle K_1P_1B = \sphericalangle KPM + \sphericalangle K_1P_1D_1 = 60^\circ,$$

sta premici PK in P_1K_1 vzporedni. Zato sta vzporedni tudi premici E_1K_1 (ali E_1D') in KM, torej velja (b).



Slika 4.

Trditev (c) bo dokazana, brž ko ugotovimo, da točka R leži na premici $E'D'$. Premica $E'D'$ namreč po prejšnjem sovpada s premico L_2M_3, dokazi ostalih izjav iz (c) pa so podobni. Vemo že, da je trikotnik LMP enakokrak s kotom $\sphericalangle LPM = 60° + \frac{2}{3}\alpha$ med krakoma. Zato velja $\sphericalangle PML = 60° - \frac{1}{3}\alpha$ in tedaj $\sphericalangle LRM = \sphericalangle KLM - \sphericalangle PML = \frac{1}{3}\alpha$. Seveda velja tudi $\sphericalangle LSM = \frac{1}{3}\alpha$, zato po izreku o obodnem kotu točki R in S ležita na krožnici skozi A, L in M. Poleg tega sta premici RS in LM vzporedni, torej velja

$$\sphericalangle RSL = \sphericalangle PLM = 60° - \tfrac{1}{3}\alpha,$$

izrek o obodnem kotu pa nam da še enakost

$$\sphericalangle RAL = \sphericalangle RSL = 60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha.$$

Zdaj lahko izračunamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle RAD' &= \sphericalangle RAL + \sphericalangle LAB + \sphericalangle BAD' = \\ &= (60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha) + \tfrac{2}{3}\alpha + (60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha) = 120^\circ\end{aligned}$$

in

$$\sphericalangle RBD' = \sphericalangle RBA + \sphericalangle ABD' = \tfrac{1}{3}\beta + (60^\circ - \tfrac{1}{3}\beta) = 60^\circ$$

ter sklepamo od tod, da je štirikotnik $RAD'B$ tetiven. Po izreku o obodnem kotu dobimo

$$\sphericalangle AD'R = \sphericalangle ABR = \tfrac{1}{3}\beta. \tag{8}$$

Ker točke A, D', E_1, F_1 in E' ležijo na isti krožnici in ker je $|E_1F_1| = |E_1D_1|$, s pomočjo izreka o obodnem kotu dobimo najprej

$$\sphericalangle F_1E'E_1 = \sphericalangle F_1AE_1 = \tfrac{1}{3}\alpha$$

in nato še

$$\sphericalangle AD'E' = \sphericalangle AF_1E' = \sphericalangle F_1CE_1 - \sphericalangle F_1E'E_1 = \tfrac{1}{3}\beta. \tag{9}$$

Iz enakosti (8) in (9) vidimo, da je $\sphericalangle AD'R = \sphericalangle AD'E'$, zato R leži na premici $E'D'$, izrek pa je dokazan.

Poglejmo spet na sliko 3 na zadnji strani ovitka in dopolnimo družino enakostraničnih trikotnikov, tako da načrtamo premice L_1M_1, K_2M_2, K_3L_3 in LM, KM, KL. V nastali družini $\mathcal{T}$ je 27 enakostraničnih trikotnikov s skupno 27 oglišči. Množico teh oglišč zaznamujmo z $\mathcal{M}$. Osemnajst oglišč iz $\mathcal{M}$ smo že srečali v izreku 1, devet pa je novih. Tudi ta oglišča lahko opišemo podobno kot prvih osemnajst.

Popolnost družine $\mathcal{T}$ oziroma množice $\mathcal{M}$ se pokaže, če skozi vsako oglišče trikotnika ABC načrtamo še po dve premici, ki razdelita dopolnilni kot ob oglišču na tri enake dele. Spomnimo se, da dopolnilni kot danega kota skupaj z njim tvori polni kot, in že lahko oblikujemo

Izrek 2. *Vsaka točka množice $\mathcal{M}$ je presečišče dveh premic iz družine osemnajstih premic, ki delijo notranje, zunanje in dopolnilne kote trikotnika ABC na tri enake dele.* (Glej sliko 5 na zadnji strani ovitka.)

Dokaz izreka 2 je podoben dokazu izreka 1, zato ga prepustimo bralcu.

Dolžine stranic vseh enakostraničnih trikotnikov družine $\mathcal{T}$ lahko izrazimo s koti α, β, γ in polmerom r trikotniku ABC očrtane krožnice. Veljajo podobne formule kot (1). Tako na primer stranica trikotnika $K_1L_2M_3$ meri

$$e = 8r\sin(60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha)\sin(60^\circ - \tfrac{1}{3}\beta)\sin(60^\circ - \tfrac{1}{3}\gamma), \tag{10}$$

stranica največjega enakostraničnega trikotnika iz družine $\mathcal{T}$ pa

$$f = 8r\sin(60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha)\sin(60^\circ + \tfrac{1}{3}\beta)\sin(60^\circ + \tfrac{1}{3}\gamma). \tag{11}$$

Če upoštevamo enakost

$$4\sin x\,\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x) = \sin 3x$$

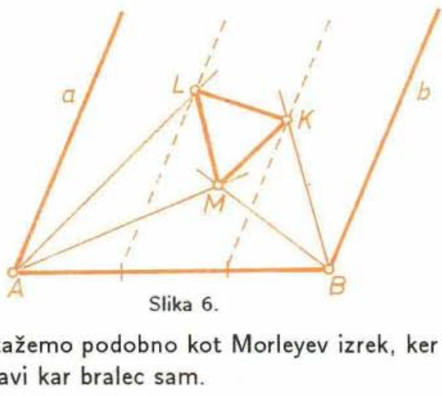
ter formule za dolžine stranic trikotnika ABC

$$a = 2r\sin\alpha, \quad b = 2r\sin\beta, \quad c = 2r\sin\gamma,$$

lahko (1), (10) in (11) združimo v zanimivo zvezo $def = abc$.

Sklenimo prispevek z naslednjo posplošitvijo Morleyevega izreka.

Izrek 3. *S krajišč daljice AB načrtajmo enako usmerjena vzporedna poltraka a, b in razdelimo kota, ki ju oklepata z AB, s paroma poltrakov na tri enake dele. Tudi pas med poltrakoma a in b razdelimo s premicama na tri enake dele, presečišča razdelilnih poltrakov in premic pa zaznamujmo s K, L, M, kot kaže slika 6. Potem je trikotnik KLM enakostraničen, njegova stranica pa meri $\frac{4}{3}|AB|\sin\frac{1}{3}\alpha\sin\frac{1}{3}\beta$, kjer sta α in β kota, ki ju poltraka a in b oklepata z daljico AB.*

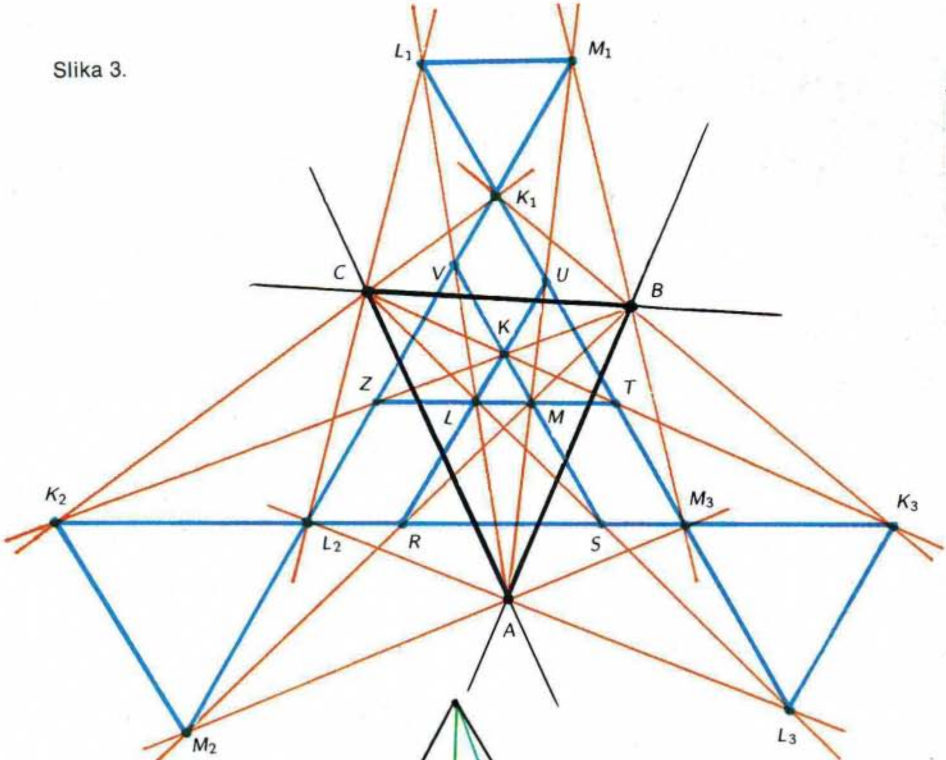


Slika 6.

Izrek 3 lahko dokažemo podobno kot Morleyev izrek, ker pa je z njim še manj dela, naj ga opravi kar bralec sam.

Boris Lavrič

Slika 3.



Slika 5.