Georg Freyherrn von Vega,
Landes-Mitstands des Herzogthums Krain, Ritters des mil. M. Th. Ordens,
Oberst-Lieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments,
Mitgliedes der gelehrten Gesellschaften zu Berlin,
Erfurt, Göttingen und Prag,

Vorlesungen
über die
Mathematik

sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch ins besondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

Erster Band
die
Rechenkunst und Algebra
enthaltend.

Dritte, verbesserte Auflage.

Wien,
bey Christian Friedrich Wappler und Beck.
1802.

Seiner Exzellenz
dem
Hochwürdigsten und Hochgebornen
Herrn Herrn
Joseph
des heil. röm. Reichs Grafen
von
Colloredo-Walsee,
des hohen Maltheser-Ordens
durch
Böheim, Mähren, Schlesien, Oesterreich,
Steiermark, Kärnten, Krain
Großprior,
seiner kais. königl. apost. Majest.
wirklichen Kämmerer,
General-Feldmarschall,
Inhaber eines Regiments zu Fuß,
und

General-Director

der

sämmtlichen kais. königl.

Artillerie

in

tiefster Ehrfurcht

gewidmet.

Euere Exzellenz!

Dieser neuen Auflage widerfährt die Ehre, Euerer Exzellenz gewidmet werden zu dürfen.

Die mathematischen Wissenschaften, welche für jeden Zweig der Kriegskunst nützlich, und ins besondere für die Artillerie höchst nothwendig sind, haben unter Euerer Exzellenz Direction bey dem Artillerie-Corps sich so sehr verbreitet, daß bey der Eröffnung eines jeden mathematischen Lehr-Curses immer mehrere in den eigenen Artillerie-Schulen ausgebildete Köpfe vorfindig sind, die das Lehramt zu übernehmen, und mit Beyfall zu vertreten die Geschicklichkeit besitzen.

Dadurch haben Euere Exzellenz auch mir den Weg geöffnet, nach meiner Neigung der Welt nützlich seyn zu können. Ich benütze

da-

daher die Gelegenheit, durch die Zueignung dieser neuen Auflage, ein unverlöschliches Denkmahl meines innigsten Dankgefühles aufzustellen, und zugleich ein Werk, das ferner zur Bildung des Artillerie-Corps bestimmt verbleibet, mit eben dieser Zueignung zu beehren.

Geruhen Euere Exzellenz diese Gesinnungen gnädigst anzunehmen, mit welchen ich in tiefster Ehrfurcht bin

Euerer Exzellenz

Wien am letzten Oktober 1792.

unterthänigstgehorsamster
Georg Vega.

Vorbericht
zur dritten Auflage.

Nach hergestelltem Frieden war für die mathematischen Schulen des k. k. Artillerie-Corps eine dritte Auflage dieses ersten Theiles meines Lehrbuches erforderlich, nachdem die aus funfzehn hundert Exemplaren bestehende zweyte Auflage desselben, theils durch den Absatz in den k. k. Staaten, theils durch häufige Verschreibungen ins Ausland, in der Verlagshandlung gänzlich vergriffen war.

Eine kurze Anweisung zum Gebrauche dieses ersten Theiles sowohl für diejenigen, welche nur die Anfangsgründe der Arithmetik daraus lernen, als für solche, welche zur höheren Mathematik übergehen wollen, ist in dem hier beygedruckten Vorberichte zur zweyten Auflage enthalten. Darin ist auch bemerket, daß dieses Lehrbuch nicht bloß allein für Kriegsmänner, sondern auch für diejenigen aus dem Civil-Stande geeignet ist, die sich eine ausführlichere, dadurch erst wesentlich nützliche Kenntniß der Mathematik zu erwerben wünschen. Daß auch Zöglinge einer zweckmäßig eingerichteten Marine-Schule aus diesem Lehrbuche einen erwünschten Nutzen schöpfen könnten, ist ohne meine Erinnerung einleuchtend; um so mehr, da auch die ersten Bände des Cours de Mathematique par Bezout in den mathematischen Schulen der Artillerie, des Ingenieur-

Corps,

Corps, und der Marine in Frankreich den solche Schulen besuchenden Officieren zum gemeinschaftlichen Leitfaden dienen.

Diese dritte Auflage durfte zwar von der zweyten nicht wesentlich verschieden seyn. Dessen ungeachtet habe ich nach einer wiederhohlten sehr genauen Durchsicht und nochmahligen Berichtigung der zweyten Auflage einige unumgänglich nothwendige Abänderungen gemacht. Auch bey der Besorgung der Correctur ist die größte Mühe angewendet worden, um den Druck möglichst fehlerfrey zu erhalten. Die übersehenen, in den Aushängebögen sorgfältigst aufgesuchten Druckfehler sind am Ende getreulich angezeiget.

Die Potenzen-Tafel, die Quadrat- und Cubic-Zahlen, wie auch die Quadrat- und Cubic-Wurzeln, die in der zweyten Auflage weggelassen waren, haben hier anstatt der Tafel der Primzahlen ihren Platz wieder erhalten; weil jene den Lehrlingen der Mathematik, die nur mein Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch Leipzig 1800, und nicht meine ausführlicheren Logarithmisch-Trigonometrischen Tafeln in zwey Bänden Leipzig 1797 besitzen, nützlicher seyn können, als diese. Die Quadrat- und Cubic-Wurzeln wurden vermittelst der Logarithmen neu berechnet. Sämmtliche Tafeln des Anhanges sind durchaus richtig.

Nun sind es gerade zwanzig Jahre, daß dieser erste Theil meines Lehrbuches in den mathematischen Schulen des k. k. Artillerie-Corps zum Leitfaden des Unterrichtes angenommen ist.

Die dreyzehn Kriegsjahre dieses Zeitraumes haben den Satz: daß die Mathematik die sicherste Grundlage der echten Kriegswiswissenschaft ist, für alle cultivirte Nationen evident gemacht. Ich selbst genoß das belohnende Vergnügen, mich in den Feldzügen sowohl gegen die Pforte als gegen Frankreich zu überzeugen, daß diejenigen meiner Schüler, welche sich mit ununterbrochenem Eifer den mathematischen Wissenschaften gewidmet hatten, sich auch vorzüglich vor dem Feinde durch kluge Tapferkeit ausgezeichnet, und zur Aufrechthaltung und Vermehrung des alten Ruhmes des Oesterreichischen Artillerie-Corps bestens mitgewirket haben; worunter ich es mir zur vorzüglichen Ehre rechne, auch den von der untersten Stufe eines Kanoniers durch alle Zwischengrade bis zum Major und Mar. Theres. Ordens-Ritter beförderten Carl Perczel von Bonyhad zählen zu können, einen wahrhaft edlen Hungarn, welcher in den Feldzügen in Bosnien, in den Niederlanden, am Mittel- und Oberrhein und endlich in Italien sich rühmlichst ausgezeichnet, und seine militarische Laufbahn durch den ehrenvollesten Tod auf dem Schlachtfelde geendiget hat. —

Es würde überflüßig seyn, Mehreres zur Aneiferung derjenigen anzuführen, für welche nun nach hergestelltem Frieden die mathematischen Schulen wieder eröffnet sind; da die wahre Würdigung der Mathematik bey dem ganzen Artillerie-Corps einheimisch und so allgemein ist, daß sehr viele selbst aus der gemeinen Mannschaft im Felde ihre wenigen Ruhestunden aus eigenem Antriebe dieser Wissenschaft gewidmet haben, welches ich, nicht ohne innigste Rührung, sehr oft als Augenzeuge wahrzunehmen die Gelegenheit hatte.

Wien im Februar 1802.

Grg. Frh. v. Vega.

Vorbericht
zur zweyten Auflage.

Die Absicht, zu welcher diese Vorlesungen bestimmt sind, ist im Vorberichte zur ersten Auflage bemerket. Der Erfolg hat es gezeiget, daß der abgehaltene Unterricht in den unentbehrlichsten mathematischen Kenntnissen nach diesem Leitfaden in unseren Artillerie-Schulen dem abgezielten Endzwecke vollkommen entsprach; dergestalt nähmlich, daß die nach diesem Leitfaden ausgebildeten Schüler in den Stand gesetzet wurden, alle vorgetragenen Gründe vollständig zu begreifen, davon den gehörigen Gebrauch zu machen, und die Schriften anderer Verfasser, wenn solche zur Entwicklung der Wahrheiten auch andere weit schärfere Wege befolgen, ohne allen Anstand zu verstehen; ja daß sogar mehrere dadurch die Geschicklichkeit erlangten beym Privatunterrichte, anderen die mathematischen Kenntnisse sowohl nach diesem, als auch nach jedem anderen, nach Belieben gewählten Leitfaden, beyzubringen; obschon viele unter den Schülern so beschaffen waren,

ren, daß sie in ihren Jünglingsjahren vor dem Eintritte in Militar-Dienste keine Gelegenheit hatten durch die gewöhnlichen Erziehungswissenschaften ausgebildet zu werden. Bey solchen hat sich hauptsächlich gezeiget, wie ungemein vortheilhaft ein gut und auf eine leicht begreifliche Art betriebenes Studium der Mathematik die fernere Selbstbildung in jeder Rücksicht befördere.

Auch wurden diese Vorlesungen an sehr vielen Orten im Civil- und Militar-Stande beym Privatunterrichte in der Mathematik mit entschiedenem Nutzen zum Leitfaden gewählet, wodurch eben die beträchtliche 1te Auflage von 1500 Exemplaren bereits abgesetzet ist. Nur äußerten sich zuweilen einige Schwierigkeiten, hauptsächlich wenn der angestellte Privatlehrer nicht vorher in der arithmetischen Analysis gehörig ausgebildet war, wie es öfters bey Privatlehrern der Mathematik in unseren Gegenden zu geschehen pflegt.

Bey dieser neuen Auflage war daher meine vorzüglichste Bemühung, auch beym Privatunterrichte in der Mathematik dem angestellten Lehrer das Geschäft aufs möglichste zu erleichtern. Um diese Absicht zu erreichen, beobachtete ich genau bey dem mündlichen Vortrage der Mathematik nach diesem Leitfaden, welche Stellen so beschaffen waren, daß sie den meisten aus meinen Schülern etwas dunkel vorkamen, und welche Wendung ich nehmen mußte, damit solche Stellen so-

dann

dann deutlich wurden. Eben solche Beobachtungen hat auf meine Veranlassung unter meinen Schülern der gewesene Oberlieut G e r n r a t h *), sowohl anfänglich, da solcher noch als Schüler Privatunterricht in der Mathematik ertheilte, als auch in der Folge während der Anstellung als Lehrer bey einer Abtheilung der Mathematik-Beflissenen im Bombardier-Corps aufgesammelt. Und da ich es mir zur Dienstpflicht rechnete, die mir anvertrauten Schüler so weit auszubilden, daß die vorzüglicheren aus diesen (nebstdem daß sie die erlernten Gründe gut anzuwenden, und solche andern geschickt beyzubringen wüßten) auch schriftliche Aufsätze über wissenschaftliche Gegenstände zu bearbeiten einige Fertigkeit erlangten; so veranstaltete ich, daß obgenannter G e r n r a t h bey Gelegenheit seiner Anstellung eine vorläufige Bearbeitung dieser neuen Auflage übernahm, solche nach der ersten Auflage, nach den Zusätzen am Ende des 2ten Bandes, nach meinem mündlich darüber abgehaltenen Vortrage, und zum Theil auch nach seinen eigenen Ideen (als z. B. bey der Darstellung der Gründe von der Ausziehung der Quadrat- und Cubic-Wurzel nach der dekadischen Ordnung, bey der Ableitung der sogenannten Reesischen Regel, bey der Auswahl, Anordnung und Auflösung verschiedener

Auf-

*) Dermahls k. k. Provincial-Baudirector in Mähren und Schlesien.

Aufgaben u. m. d.) den obigen Bemerkungen gemäß vollständig ausführte, und meiner Uebersicht und Berichtigung vorlegte. Auf diese Art glaubte ich auch zugleich an der Deutlichkeit des Vortrages zu gewinnen, und diejenigen Schwierigkeiten zu vermeiden, die ihren Ursprung darin haben, daß oft die Entwicklung einer Wahrheit dem Verfasser sehr einleuchtend ist, wo doch ein anderer solche nur mit äußerster Anstrengung einsehen kann. Bey dieser Gelegenheit habe ich auch verschiedene Gegenstände eingeschaltet, welche in der ersten Auflage nicht enthalten sind; als z. B. eine kritische Untersuchung über die Vergleichung verschiedener Gewichte, und Maße im §. 198. u. 199.; die allgemeine Interpolationsformel im §. 315.; die Summirung der $m$ten Potenzen einer arithmetischen Progression im §. 318. u. 319.; die Bestimmung der Exponenten bey der Umkehrung der Functionen statt des sonst hierzu dienlichen analytischen Dreyeckes im §. 240. u. m. d. wie es aus der Vergleichung der 1ten Auflage mit dieser neuen zu ersehen ist.

Auf diese Art entstand nun gegenwärtige neue Auflage dieses ersten Bandes meiner Vorlesungen über die Mathematik; wo ich zugleich auch den Bedacht genommen habe, daß die etwas schwereren eigentlich zur höheren Mathematik gehörigen Gegenstände von anderen unumgänglich nothwendigen abgesondert, und gegen das

Ende

Ende des Werkes hingeordnet wurden; so zwar daß ein mittelmäßiger Kopf (so wie auch jeder andere, dem es sonstige Umstände nicht erlauben sich die Algebra vollständig eigen zu machen), wenn er die bis zum §. 276. vorgetragenen Gründe begriffen hat, sodann gleich in den 2ten Band geführet werden kann. In solchen Fällen können auch einige der vorhergehenden §§. überschlagen werden; z. B. von §. 155. bis 169. ferner §. 228. wie auch §. 246. bis 252. Sollte sich in der Folge die Fähigkeit des Lehrlings besser entwickeln, so kann das Ausgelassene immer nachgeholet werden.

Wenn ich so glücklich wäre meine Absicht erreicht zu haben, und wenn mein Bestreben, zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse etwas beyzutragen, einigen Beyfall finden sollte; so wird auch schon diese einzige Belohnung für meine literarische Bemühungen eine hinlängliche Aufmunterung zu ferneren Arbeiten seyn.

Wien den letzten October 1792.

Georg Vega.

Vor=

Vorbericht
zur ersten Auflage.
An
das sämmtliche k. k. Artillerie-Corps.

Gegenwärtige Vorlesungen sind Ihnen gewidmet, und Ihr Urtheil soll ihren Werth bestimmen. Ich habe sie zum Drucke befördert, weil sie schon von einigen aus Ihnen, denen ich sie vorläufig mitgetheilet habe, des Druckes würdig gefunden worden sind. Dieser Theil enthält nur die nothwendigsten Gründe der allgemeinen Rechenkunst; jene der gemeinen und höheren Meßkunst nebst einer Anwendung sollen darauf folgen. Meine Absicht ist denjenigen einen sichern Leitfaden in die Hände zu geben, welche in einer schicklichen von den übrigen Dienstgeschäften freyen Zeit die unentbehrlichsten Kenntnisse der höheren und angewandten Mathematik sich zu erwerben wünschen. Könnte ich wohl diesen Wunsch bey Ihnen vermissen, da es Ihnen bekannt ist, daß

man

man sich kaum erkühnen darf, ohne diese Kenntnisse ein Artillerie-Buch zu öffnen?

Bezout, Papacino d'Antoni, Tempelhoff, Caravelli haben schon lange der Artillerie diesen Weg gebahnet. Sie kennen den Werth dieser Schriften; und eben dieses flammte mich an, ihren Fußstapfen zu folgen, ohne doch ihnen sklavisch nachzuahmen.

Neue Sätze liefere ich Ihnen nicht; so ein Werk läßt keine andere Neuheit zu, als diejenige, die aus der Verschiedenheit des Zusammenhanges, der Entwicklung und Anwendung einiger Sätze entspringt.

Ihren Einsichten und Kenntnissen überlasse ich es über gegenwärtige Vorlesungen ein Urtheil zu fällen. Sollten sie Ihren Beyfall erhalten, so ist meine Mühe belohnt, und mein Eifer zur Fortsetzung dieses Werkes verdoppelt.

Wien im Februar 1782.

Der Verfasser.

Erste

Erste Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit ganzen Größen.

I. Abschnitt.

Vorläufige Einleitung.

§. 1.

Jedes Ding für sich betrachtet, ist eine Einheit seiner Art; und mehrere Einheiten von der nämlichen Gattung machen eine Zahl aus. Z. B. sechs Menschen sind eine Zahl von Menschen; sieben Klafter sind eine Zahl von Klaftern; acht Pfunde sind eine Zahl von Pfunden, u. s. w. Hieraus ist zu ersehen, daß eine Einheit wieder als eine Zahl in Rücksicht ihrer Theile kann angesehen werden; so ist ein Pfund eine Einheit von Pfunden, aber eine Zahl von Lothen; weil ein Pfund aus mehreren Lothen besteht.

§. 2.

Die Zahlen, und alle diejenigen Dinge, die sich durch Zahlen vorstellen, oder messen lassen, z. B. Gewichte, die sich durch Zentner, Pfunde, Lothe; Entfernungen, die sich durch Klafter, Schuhe, Zolle; Zeiten, die sich durch Täge, Stunden und Minuten, u. d. gl. vorstellen lassen; überhaupt alle jene Dinge, welche durch einiges Hinzuthun, oder Hinwegnehmen vergrößert, oder verkleinert werden können, pflegt man **Größen** zu nennen.

§. 3.

Diejenige Wissenschaft, welche die Eigenschaften der Größen untersuchet, und hauptsächlich lehret, aus einigen bekannten Größen andere unbekannte zu finden, die mit jenen in einer gewissen Verbindung stehen, wird überhaupt die **Mathematik**, oder **Größenlehre** auch **Meßkunst** genennt. Sie wird eingetheilet in die **reine**, und **angewandte** Mathematik. Die erste beschäftiget sich mit der Vergleichung und Bestimmung der Größen, wo blos in Erwägung gezogen wird, daß sie durch einiges Hinwegnehmen, oder Hinzuthun kleiner, oder größer werden, ohne auf ihre übrigen Eigenschaften Acht zu haben. Die zweyte ist eine Anwendung der reinen Mathematik, und zieht nebst der Eigenschaft der Größe auch noch die übrigen physischen Beschaffenheiten mit in Betrachtung. Zur reinen Mathematik gehöret die **Arithmetik**, und die **Geometrie**; erstere beschäftiget sich mit **unstetigen Größen**: das ist, mit Größen, welche aus abgesonderten, und durch eigene Gränzen bestimmten Theilen bestehen; letztere aber hat **stetige Größen** zum Gegenstande: das ist, Größen, deren Theile ununterbrochen aneinander hängen. Z. B. es sollte die Zahl der Ziegeln auf einem Dache bestimmt werden, so ist dieß ein Gegenstand der Arithmetik: sollte aber die Menge des Schnees bestimmt werden, welcher das Dach bedecket, so ist es ein Gegenstand der Geometrie.

Die angewandte Mathematik wird eingetheilet in die **mechanischen**, **optischen**, und **astronomischen** Wissenschaften; die erstern handeln von den Bewegungen der Körper,

und

und den Kräften, die solche verursachen, oder hemmen; die andern beschäftigen sich mit den Gesetzen des Sehens, und den Eigenschaften der Lichtstrahlen; und die letztern lehren die Ausmessung der Körperwelt im Großen; und stellen Untersuchungen über die Größe, Zusammenordnung, und Verbindung der Weltkörper, und ihre Bewegungen an. Jede dieser Wissenschaften wird wieder in verschiedene willkührliche Theile zertheilet, und mit eigenen Namen beleget. Was man eigentlich unter dem Worte die höhere Mathematik versteht, läßt sich hier nicht verständlich erklären; darum muß solches hier mit Stillschweigen übergangen, und an seinem Orte erkläret werden.

Ausser den angeführten Theilen der Mathematik giebt es noch andere Wissenschaften, die zu den mathematischen gerechnet, und unter dem Namen **technische Mathematik** verstanden werden; dergleichen sind die **Befestigungskunst**, die **bürgerliche Baukunst**, die **Wasserbaukunst**, die **Geschützkunst**, die **Markscheidekunst**, die **Steuermannskunst** u. d. gl. Es sind Anwendungen der reinen, und angewandten Mathematik, zu deren Ausübung man aber noch andere Wissenschaften, und Künste nöthig hat; weßentwegen sich deren Benennungen in **Kunst** endigen.

§. 4.

Wir zählen im gemeinen Leben, nach der uns von Jugend auf bekannten Art, von **eins** bis **zehn**; und die Größe dieser Zahl **zehn**, so wie einer jeden der vorhergehenden, **neun**, **acht**, **sieben**, **sechs** u. s. w. ist uns alsogleich bekannt, sobald wir sie uns nur denken, oder aussprechen hören; sodann zählen wir zehn und eins, zehn und zwey, zehn und drey; oder abgekürzt, **eilf**, **zwölf**, **dreyzehn** u. s. f. bis wir auf eine Zahl kommen, die zweymal so groß ist als zehn, und diese nennen wir **zwanzig**; dann fangen wir wieder von eins an, bis wir auf eine Zahl kommen, die drey — vier — fünf — sechs — sieben — acht — neunmal so groß ist als zehn; und nennen solche **dreyßig**, **vierzig**, fünfzig, sechszig, siebenzig, achtzig, neunzig; bis wir auf eine Zahl kommen, die zehnmal so groß ist als zehn; diese nennen wir ein **Hundert**. Dann zählen wir wieder von eins angefangen, und so erhalten wir zwey Hundert, drey Hundert . . . . . neun Hundert. Zehn Hundert nennen wir ein **Tausend**; tausendmal Tausend eine **Million**; eine Million Millionen eine **Billion**; eine Million Billionen eine **Trillion** u. s. w.

§. 5.

Um nicht die Zahlen mit Worten schreiben zu müssen, hat man auf willkührliche Zeichen gedacht, wodurch man solche vorstellen, und kürzer schreiben könnte. Einige Völker, als die Phönicier, Griechen, und Hebräer haben hiezu die Buchstaben ihres Alphabets gewählet, deren zehn ersten sie die Werthe von eins bis zehn beigelegt haben; den eilften ließen sie zwanzig, den zwölften dreyßig u. s. f. gelten, so, daß der neunzehnte den Werth hundert bekam, von wo aus sie wieder verschiedene Eintheilungen machten. Die Römer wählten zu ihren Zahlzeichen einige Buchstaben ihres Alphabets, I eins, V fünf, X zehn, L fünfzig, C hundert, D oder IↃ fünfhundert, und M oder CIↃ tausend. Sie zählten diese Zeichen, wenn sie neben einander stehen, zusammen, als II zwey, VI sechs, XXVII sieben und zwanzig; wenn aber ein kleineres links neben einem größern Zeichen steht, so rechnet man solches von dem größern hinweg; als z. B. IV vier, IX neun, XL vierzig u. s. w. Diese Zahlen werden heut zu Tag noch recht oft bey öffentlichen Aufschriften gebraucht. Die Sinesen, wie Hr. Leibnitz angiebt, bedienten sich nur der zwey Zahlzeichen 1 und 0, durch welche sie jede Zahl vorstellten, indem sie den Werth des Zeichens 1 eins so oft verdoppelten, als es um eine Stelle gegen die Linke geruckt wurde; das Zeichen 0 hatte aber keinen Werth; sondern besetzte nur die leeren Plätze: sie schrieben demnach 1 eins, 10 zwey, 11 drey, 100 vier, 101 fünf, 110 sechs, 111 sieben, 1000 acht, 1001 neun, 1010 zehn, 1011 eilf, 1100 zwölf, 1101 dreyzehn u. s. w.

§. 6.

Die gewöhnlichsten Zahlzeichen sind nun die sogenannten **Ziffern**, die uns so wie die Buchstaben des Alphabets *a*, *b*, *c* ꝛc. bekannt sind; nämlich 1 bedeutet für sich allein eins, 2 zwey, 3 drey, 4 vier, 5 fünf, 6 sechs, 7 sieben, 8 acht, 9 neun, 0 null. Sie werden die **arabischen Ziffern** genennt, weil wir solche von den Arabern sollen erhalten haben.

Um mit diesen zehn Ziffern jede Zahl bezeichnen zu können, hat man durch eine allgemeine Uebereinstimmung folgendes Gesetz angenommen: **Wenn mehrere Ziffern nebeneinander stehen, so bedeutet jede Ziffer an der folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel, als an der nächst vorhergehenden.** Es bedeutet daher bey einer durch die Zusammensetzung der angeführten Ziffern bezeichneten Zahl z. B. bey 8746295 die erste Ziffer zur Rechten bloße Einheiten, oder sogenannte **Einer**, 5 (fünf); die Ziffer an der zweyten Stelle bedeutet **Zehner**, und zwar so viele Zehner als sie für sich allein Einheiten bedeuten würde, 9 neun Zehner oder abgekürzt **neunzig**, zusammen 95 (neunzig und fünf, oder nach dem Sprachgebrauch, **fünf und neunzig**); die dritte Ziffer bedeutet **Hunderter**, oder Einheiten der Hunderter, 295 (zwey Hundert 95); die vierte bedeutet Tausender, 6295 (sechs Tausend 295); die fünfte Zehntausender, 46295 (46 Tausend 295), die sechste Hunderttausender, 746295 (746 Tausend 295); die siebente Einheiten der Millionen, 8746295 (acht Millionen 746 Tausend 295). Nach diesen kommen die Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender der Millionen; endlich an der dreyzehnten Stelle Einheiten der Billionen u. s. w.

Das aus den angeführten zehn Zahlzeichen, und dem dabey angenommenen Gesetze abgeleitete Lehrgebäude pflegt man das **dekadische System**, oder die **Dekadik** zu nennen von dem griechischen Worte Δεκα (zehn); so wie jenes System

stem mit zwey Zahlzeichen (§. 5.) Dyadik von Δυο (zwey) genennt wird, welches aber nicht gebräuchlich ist.

§. 7.

o Null bedeutet für sich allein nichts, sondern vermehret nur bey der Zusammensetzung den Werth der übrigen bedeutlichen Ziffern, wenn diese dadurch weiter links zu stehen kommen. Wenn sich daher bey einer mit Ziffern bezeichneten Zahl Nullen befinden, so ist es ein Zeichen, daß an denjenigen Stellen, wo Nullen stehen, die dahingehörigen Einer, Zehner, Hunderter, oder Tausender &c. abgehen. Z. B. 10 zehn; 20 zwanzig; 400 vier Hundert; 801 acht Hundert und eins; 60040 sechzig Tausend und vierzig.

In folgender Tafel kann man den Werth der Ziffern mit einem Blicke übersehen, der ihnen vermög ihrer Stelle zugehöret; es bedeutet nämlich

die	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1te Stelle
u. s. w.	Hunderter	Zehner	Einheiten	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einheiten	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einheiten	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einheiten
der Trill.				der Billionen						der Millionen						Blosse					

§. 8.

Wer nur einmal die Fertigkeit erlanget hat, jede mit drey Ziffern bezeichnete Zahl richtig auszusprechen, dem wird es sodann auch sehr leicht seyn, jede mit wie viel immer Ziffern aufgeschriebene Zahl auszusprechen; und zwar auf folgende Art.

Man theile die vorgegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen ein, gebe jeder Klasse drey Ziffern (die letzte links kann auch deren weniger behalten); hinter der ersten Klasse mache man einen Punkt, hinter der

zwey-

zweyten einen Strich, hinter der dritten einen Punkt, hinter der vierten zwey Striche, hinter der fünften einen Punkt, hinter der sechsten drey Striche: sodann lese man jede Klasse für sich, als wenn sie allein stünde, und setze an jeder Stelle eines Punktes das Wort Tausend; an der Stelle eines Striches das Wort **Million**, bey zwey Strichen Billion, bei drei Strichen **Trillion** u. s. w. so ist die Zahl richtig ausgesprochen. Z. B. die Zahl 84‚‚‚650.046‚‚508.700‚964.005 heißt; 84 Trillionen, 650 Tausend und 46 Billionen, 508 Tausend und 700 Millionen, 964 Tausend und 5. Eben so 5‚‚640.000‚300.000 heißt 5 Billionen, 640 Tausend Millionen, und 300 Tausend.

Und eben so läßt sich jede ausgesprochene Zahl aufschreiben, wenn man bey der höchsten Klasse links anfängt, die bedeutlichen Ziffern gehörig anschreibt, wo aber keine Hunderte, Zehner, oder Einheiten ausgesprochen werden, Nullen ansetzt, ferner überall wo die Worte Tausend, Millionen, Billionen ꝛc. ausgesprochen werden, die gehörigen Zeichen macht, und nachsieht, ob alle Klassen vorhanden sind, und ob jede Klasse drei Ziffern habe, wo nur die erste links stehende Klasse zuweilen nur zwey, auch gar nur eine Ziffer allein haben kann. Z. B. um folgende Zahl mit Ziffern zu bezeichnen (**sechs und zwanzig Tausend und vier Millionen, neunmal Hundert und sechs Tausend, und acht**) so schreibe man 26; nach diesen folgen die Hunderte und Zehner der Millionen, weil aber keine solche ausgesprochen worden, so setze man an ihre Stellen zwey Nullen, und sodann die vier Einheiten der Millionen, nämlich 26.004 Millionen; nach den Millionen folgen die Hunderttausende, in dem angeführten Beyspiele neun, man setze also 9 an; nach diesen kommen Zehentausende, hier keine, man schreibe also 0; nach diesen kommen sechs Einheiten der Tausende, diese werden auch angesetzt, und dann erhält man 26.004‚906 Tausend; endlich schreibe man an die Stellen der nicht ausgesprochenen blossen Zehner und Hunderte zwey

Nullen, und setze die acht letzten Einheiten an, so sieht die vorgelegte Zahl also aus 26.004,906.008.

§. 9.

Die Zahlen, deren Einheiten noch mit keinem besondern Namen belegt sind, und welche daher noch jede Gattung der Größen vorstellen können, werden **unbenannte Zahlen** genennt; z. B. die Zahl 28 ist in so lang eine unbenannte Zahl, als man sich noch alle Gattungen der Größen, als 28 Menschen, 28 Häuser, 28 Klafter u. s. w. darunter vorstellen kann. Hat man aber einer Zahl einmal einen Namen beygelegt, so ist sie eine **benannte Zahl**; z. B. 8 Menschen, 17 Gulden, 100 Bücher u. s. w. sind benannte Zahlen.

§. 10.

Zahlen sind **gleichnamig**, wenn sie gleichen Namen führen, oder auf gleiche Namen gebracht werden können; im Gegentheil sind sie **ungleichnamig**. Z. B. 6 Klafter und 4 Klafter sind gleichnamige Zahlen; 7 Pfund und 6 Meilen sind ungleichnamig; 3 Bombardier, und 2 Kanonier sind zwar ungleichnamig; wenn aber die Rede von Artilleristen ist, so sind sie gleichnamig; auch könnte man zwey Klafter, und 5 Schuhe oder Fuß für gleichnamig betrachten, wenn man sich einbildet, daß die Schuhe Theile einer Klafter sind.

§. 11.

Zwey gleichnamige Zahlen oder Größen können auf die einfachste Art gegeneinander verglichen werden, wenn man untersuchet, ob sie gleich groß, oder ob eine größer sey als die andere; ungleichnamige Größen hingegen können nicht gegeneinander verglichen werden. Man kann z. B. untersuchen, welches mehr, oder größer sey 5 Klafter oder 2 Klafter; eben so, welches größer sey 1 Pfund oder 12 Loth, weil man sich einbilden kann, daß ein Pfund aus 32 Loth be-

bestehe: aber man kann nicht untersuchen, welches größer sey 4 Klafter oder 5 Pfund. Man hat, um die Gleichheit zweyer Größen auszudrücken, folgendes Zeichen = gewählet, welches zwischen zwey Größen gesetzt wird, die gleich groß sind, das heißt, deren eine für die andere gesetzt werden darf; z. B. 1 Kl. = 6 Sch., und wird gelesen eine Klafter ist gleich 6 Schuhen; 4 Gr. = 12 Kr. Und um die Ungleichheit auszudrücken, bedient man sich des Zeichens >, welches zwischen zwey ungleiche Größen gesetzt wird, so, daß die Spitze gegen die kleinere zu stehen kömmt; z. B. 1 Fl. > 20 Kr. und wird gelesen 1 Fl. ist größer als 20 Kr.; eben so 4 Sch. < 1 Kl. 4 Schuhe sind kleiner als 1 Klafter.

Dieses ist die erste Vergleichung der Größen, womit die Mathematik ihren Anfang macht: sie gründet ihr Lehrgebäude auf die hieraus entspringenden **Grundsätze** (Sätze, deren Wahrheit ohne allen Beweis einleuchtend ist), schreitet sodann zur Erkenntniß anderer verborgener Wahrheiten fort, und führet uns auf diese Art an die Gränzen unseres Verstandes.

§. 12.

Grundsätze. N. 1. Jedes Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich; und ist größer als jeder seiner Theile; z. B. 1 Kl. = 6 Sch.; 1 Fl. = 20 Gr. Hingegen 1 Kl. > 4 Sch.; 19 Gr. < 1 Fl.

N. 2. Gleiches kann für Gleiches gesetzt werden. Statt 18 Schuhen kann man drei Klafter setzen; statt ein Pfund können 32 Lothe gesetzt werden.

N. 3. Wenn zwey Größen einer dritten Größe gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich; ist aber eine Größe größer, oder kleiner, als eine von zwey gleichen Größen, so ist sie auch größer, oder kleiner als die andere; z. B.

1 Fl. = 60 Kr.	1 Fl. = 60 Kr.
1 Fl. = 20 Gr.	3 Gr. < 1 Fl.
also auch 60 Kr. = 20 Gr.	3 Gr. < 60 Kr.

II. Abschnitt.

Von der Addition.

§. 13.

Eine Zahl, welche so groß ist, als zwey, oder mehrere Zahlen zusammengenommen, wird die Summe dieser Zahlen genennt; so z. B. ist die Zahl 5 die Summe der Zahlen 2, und 3; weil 3 und 2 zusammengenommen 5 giebt. Eben so ist 9 die Summe von 2, 3, und 4 u. s. w.

§. 14.

Die Rechnungsart aber, nach welcher man die Summen mehrerer gegebenen Zahlen findet, wird die Addition genennt: nämlich, **addiren heißt die Summe mehrerer gegebenen Zahlen finden.** Die zu addirenden Zahlen müssen aber gleichnamig seyn, sonst können solche nicht addirt werden; z. B. 3 Pfund und 4 Gulden können unmöglich in eine Summe gebracht werden; denn die Summe würde weder Pfunde noch Gulden bedeuten. Eben so kann auch von 5 Pfunden und 4 Lothen die Summe weder 9 Pfunde, noch 9 Lothe seyn: es wird aber weiter hinten gezeigt werden, wie derley Zahlen, welche zwar ungleichnamig sind, doch aber auf gleiche Namen gebracht werden können, zu addiren sind.

§. 15.

Das Zeichen, dessen man sich bei der Addition bedienet, ist ein aufrecht stehendes Kreuz, nämlich +, welches ausgesprochen wird **mehr** (plus), und zeigt an, daß diejenigen Zahlen, oder Größen, zwischen welchen es steht, addirt werden sollen; z. B. $4+3=7$; wird gelesen 4 mehr 3 ist gleich 7; $9+5=14$; $9+8=17$ u. s. w.

An=

Anmerkung. Hier muß der Anfänger sich in der Summirung zweyer Zahlen, welche beyde nur aus einer Ziffer bestehen, oder auch, wenn eine aus zwey, und die andere nur aus einer Ziffer besteht, wohl üben; z. B. 8 und 5 sind 13; 9 und 8 sind 17; 24 und 7 sind 31; 48 und 9 sind 57; 86 und 8 sind 94 u. s. w. Und man kann sich gewisse Regeln machen, die einem ungeübten gut zu statten kommen können; z. B. man wüßte nicht geschwind, wieviel 26 und 9 sey, so erinnere man sich nur, daß 26 und 10 = 36 sey; also um eins weniger giebt 35. Jmgleichen man wüßte nicht alsogleich, wieviel 48 und 7 sey, so gebe man in Gedanken indessen 2 von 7 zu 48, so hat man 50 und 5 giebt 55; und mehr dergleichen.

§. 16.

Grundsätze. N. 1. Wenn man zu gleichen Größen Gleiches addirt, so sind die Summen gleich.

Beyspiele.

$4+3=7$	1 Fl. = 60 Kr.
$2+6=8$	1 Gr. = 3 Kr.
also auch $4+3+2+6=7+8$.	1 Fl. + 1 Gr. = 63 Kr.

Es ist also einerley, ob man die ganzen Größen, oder alle ihre Theile, woraus sie bestehen, zusammen addiret.

N. 2. Addirt man aber zu gleichen Größen Ungleiches; so ist jene Summe größer, wo das Größere addirt worden ist.

Beyspiele.

$7+8=15$	1 Kl. = 6 Sch.
$5>4$	1 Sch. > 4 Zoll.
also auch $7+8+5>15+4$;	also auch 1 Kl. + 1 Sch. > 6 Sch. + 4 Z.

§. 17.

Um nun Zahlen, wenn sie aus noch so viel Ziffern bestehen, addiren zu können, beobachte man folgende Regeln.

1) Man schreibe die zu addirenden Zahlen so untereinander, daß die Einheiten unter die Einheiten, Zehner unter die Zehner, Hunderte unter die Hunderte u. s. w. zu stehen kommen; nämlich man ordne sie von der Rechten gegen die Linke gehörig untereinander; wo bey jenen Zahlen, die aus weniger Ziffern bestehen, die Stellen zur Linken leer verbleiben; und ziehe darunter einen Querstrich.

2) Dann addire man erstlich die Kolumne der Einheiten, und setze die Summe hievon, wenn solche nur aus einer Ziffer besteht (wie hier voraus gesetzt wird), unter den Strich an die Stelle der Einheiten; nämlich im Beyspiele N. 1. sagt man: 4 und 1 giebt 5, und 3 giebt 8 Einheiten; auf die nämliche Art addire man nun auch die Kolumne der Zehner, indem man wieder sagt: 6 und 2 giebt 8, und 1 giebt 9, und setze diese Summe, da sie wieder nur aus einer Ziffer besteht, an die Stelle der Zehner; und so addire man ferner die Hunderte, Tausende, Zehntausende u. s. w.; so wird man die verlangte Summe erhalten, wie aus dem Beyspiele N. 1. zu ersehen ist. Befinden sich in einer Kolumne lauter Nullen, so wird auch in der Summe eine Nulle an die Stelle gesetzt, damit die folgenden Ziffern ihren Rang behalten (§. 7.), wie aus dem Beyspiele N. 2. zu ersehen ist.

Beyspiele.

	N. 1.		N. 2.
Zu addiren	92164	Zu addiren	7001
	321		9505
	5413		302
Summe	97898.	Summe	16808

3)

3) Besteht aber die Summe einer Kolumne aus zwey Ziffern, so schreibe man nur die erste Ziffer rechts unter die addirte Kolumne, und die andere Ziffer addire man zur folgenden Kolumne; nämlich im Beyspiele N. 3. sagt man: 6 und 8 giebt 14, und 9 giebt 23, nämlich 3 Einheiten, und zwey Zehner; man schreibe deswegen die 3 Einheiten an die Stelle der Einheiten, die 2 Zehner aber übertrage man zur Kolumne der Zehner, indem man ferner sagt: 2 geblieben und 5 giebt 7, und 6 giebt 13, und 1 giebt 14 Zehner, nämlich 4 Zehner und 1 Hundert; folglich schreibe man die 4 Zehner an die Stelle der Zehner, und übertrage das 1 Hundert zur Kolumne der Hunderte, und sage ferner: 1 geblieben und 4 giebt 5, und 8 giebt 13, und 7 giebt 20 Hunderte, nämlich kein oder 0 Hundert, und 2 Tausende; man schreibe demnach an die Stelle der Hunderte eine Nulle, damit die folgenden Ziffern ihren Werth behalten, und übertrage die 2 Tausende zur Kolumne der Tausende; und so fahre man fort, bis keine Kolumne mehr vorhanden ist, so wird man die richtige Summe haben. Besteht eine Kolumne aus lauter Nullen, und es ist etwas von der vorigen Kolumne geblieben, so muß solches an diese Stelle gesetzt werden, wie es das Beyspiel N. 4. zeiget.

Beyspiele.

N. 3. Zu addiren	4456 2868 719	N. 4. Zu addiren	3084 2063 8095
Summe	8043	Summe	13242

4) Wenn viele Zahlen zu addiren sind, so kann seyn, daß die Summe irgend einer Kolumne aus 3 Ziffern bestehe; da setze man ebenfalls nur die erste Ziffer rechts unter die addirte Kolumne, und zähle die übrigen zur folgenden Kolumne; z. B. es wäre die Summe der Kolumne der Einheiten = 124, so

so setze man die erste Ziffer 4 an die Stelle der Einheiten, und die übrigen 12 addire man zur Kolumne der Zehner.

Man kann aber auch in dergleichen Fällen, wo gar viele Zahlen zu addiren sind, und also zu viele Aufmerksamkeit erfordert wird, die Zahlen in zwey oder mehrere Theile zertheilen, jeden Theil insbesondere addiren, und die Summen davon in eine Hauptsumme bringen; z. B. es wäre folgende Addition zu verrichten: 87569 + 5498 + 3695 + 95678 + 3097 + 909 + 40895 + 3278 + 78567 + 4039 + 97908 + 21706 + 6537 + 69578 + 59857; so könnte man also schreiben

87569		
5498	78567	
3695	4039	
95678	97908	
3097	21706	
909	6537	
40895	69578	240619
3278	59857	338192
Summe 240619	Summe 338192	Hauptsumme 578811.

Daß man nach diesen vorgeschriebenen Regeln die richtige Summe erhalte, erhellet aus (§. 12. Grundsatz 1.), weil man auf diese Art alle Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w., als alle Theile des Ganzen, welches hier die Summe heißt, zusammenzählet.

§. 18.

Zweifelt man, ob nicht in der Addition gefehlet worden, so ist die beste Probe, wenn man die Addition noch einmal wiederholet; und zwar das zweytemal addire man von unten hinauf, wenn das erstemal von oben hinunter addirt worden ist, oder umgekehrt; erhält man nun in beyden Fällen einerley Summen, so ist die Addition richtig.

III.

III. Abschnitt.

Von der Subtraktion.

§. 19.

Diejenige Zahl, welche anzeigt, um wie viel eine von zwey gegebenen Zahlen größer sey als die andere, wird die **Differenz**, oder der **Unterschied** dieser Zahlen genennt; so z. B. ist 5 die Differenz der Zahlen 9 und 4; weil 9 um 5 größer ist als 4.

§. 20.

Die Rechnungsart, nach welcher dit Differenz jeder zwey gegebenen Zahlen gefunden werden kann, wird die **Subtrakion** genannt; nämlich **subtrahiren** oder **abziehen** heißt die Differenz zweyer gegebenen Zahlen finden.

Von den Zahlen selbst wird die größere, von welcher abgezogen wird, der **Minuendus**, und die kleinere, welche abgezogen werden soll, der **Subtrahendus** genennt.

Auch hier müssen beyde Zahlen, die voneinander subtrahirt werden sollen, gleichnamig seyn; denn sonsten könnten sie ja gar nicht verglichen werden (§. 11.).

§. 21.

Das Zeichen der Subtraktion ist ein liegender Strich —, welches ausgesprochen wird **weniger** (minus), und zeigt an, wenn solches zwischen zwey Zahlen, oder Größen steht, daß die hinter dem Zeichen von jener vor dem Zeichen abgezogen werden soll; z. B. $15-7=8$ wird gelesen 15 weniger 7 ist gleich 8; $11-5=6$; $9-2=7$ u. s. w.

Anmerkung. Die Anfänger müssen sich auch hier üben, um alsogleich die Differenz zweyer Zahlen zu wissen, wo jede nur aus einer einzigen Ziffer besteht, oder auch wenn eine Zahl, der Minuendus aus zwey, die andere aber, der Sub-

tra-

trahendus nur aus einer Ziffer besteht; z. B. $9-2=7$; $8-3=5$; $17-8=9$; $16-9=7$; $13-8=5$ u. s. w.

§. 22.

Grundsätze. N. 1. Wenn man von gleichen Größen Gleiches subtrahiret, so sind die Differenzen gleich.

Beyspiele.

$3+6=9$
$2+5=7$

also auch $3+6-2-5=9-7$;

1 Fl. = 60 Kr.
1 Gr. = 3 Kr.

also auch 1 Fl. − 1 Gr. = 57 Kr.

Es ist darum einerley, ob man die Theile einer Größe von den Theilen einer andern Größe, oder die ganze Größe auf einmal abzieht.

N. 2. Subtrahirt man von gleichen Größen Ungleiches, so sind die Differenzen ungleich, und zwar dort größer, wo am wenigsten subtrahirt worden ist.

Beyspiele.

$12+6=18$
$5>4$

also auch $12+6-5<18-4$;

1 Zent. = 100 Pf.
30 Loth < 1 Pfund.

also auch 1 Z. − 30 L. > 99 Pf.

N. 3. Zieht man von ungleichen Größen Gleiches ab, so ist dort die Differenz größer, wo vorhin Größeres war.

Beyspiele.

1 Tag > 20 Stunden
60 Min. = 1 Stunde

also auch 1 T. − 60 M. > 19 St.

$6+3>8$
$4=4$

also auch $6+3-4>8-4$.

§. 23.

§. 23.

Sind nun zwey Zahlen, die aus mehrern Ziffern bestehen, von einander abzuziehen, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere, so, daß die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner u. s. w. zu stehen kommen, wie bey der Addition, und ziehe darunter einen Querstrich.

2) Dann subtrahire man zuerst die Einheiten der untern Zahl von den Einheiten der obern Zahl, so auch die Zehner von den Zehnern, die Hunderte von den Hunderten u. s. w. und schreibe die Differenz jedesmal an eben dieselbe Stelle, so hat man die verlangte Differenz. Im Beyspiel N. 1. sagt man: 2 von 5 bleiben 3, 3 von 4 bleibt 1, 0 von 9 bleiben 9, 2 von 6 bleiben 4. Bleibt aber irgendwo gar nichts übrig, so muß an die Stelle eine Null gesetzt werden; nämlich im Beyspiel N. 2. sagt man: 1 von 4 bleiben 3, 8 von 8 bleibt 0, 3 von 7 bleiben 4. Besteht die obere Zahl aus mehrern Ziffern als die untere, so werden die noch übrigen Ziffer zur Differenz herunter gesetzt, wie im Beyspiel N. 3. zu ersehen ist.

Beyspiele.

N. 1.	6945	N. 2.	784	N. 3.	23587
	2032		381		432
Diff.	4913	Diff.	403	Diff.	23155

3) Wenn eine Ziffer, von welcher man abziehen soll, kleiner ist, als die abzuziehende, so borge man von der nächstfolgenden links eine Einheit, und bezeichne diese Ziffer mit einem Punkte, zum Zeichen, daß sie sodann um eins weniger gelte: diese geborgte Einheit giebt 10 Einheiten der vorhergehenden Ziffer (§. 6.); derowegen vermehre man die Ziffer, von welcher abgezogen werden soll, um 10 Einheiten, und

ziehe die darunter stehende von ihr ab. So können im Beyspiel (N. 4.) 5 Einheiten von 3 Einheiten nicht abgezogen werden: man borge deßwegen einen Zehner, und sage: 5 von 13 Einheiten bleiben 8 Einheiten, und 3 von 5 bleiben 2 Zehner; ferner 9 Hunderte von 8 Hunderten können nicht abgezogen werden: man borge also ein Tausend, und sage: 9 Hunderte von 18 Hunderten bleiben 9; und endlich 1 von 4 bleiben 3 Tausende. Kömmt eine bedeutliche Ziffer von einer Null abzuziehen, so borge man ebenfalls von der folgenden Ziffer eine Einheit, wo sodann aus 0 zehn wird. Ist aber eine Null von einer andern Nulle abzuziehen, so wird in der Differenz ebenfalls eine Null gesetzt; wie solches aus dem Beyspiel N. 5. zu ersehen ist. Wäre die Ziffer, von welcher man borgt, ein 1, so muß man sich sodann an dessen Stelle eine Null gedenken, wie es das Beyspiel N. 6. zeigt.

Beyspiele.

N. 4	5863	N. 5.	6030	N. 6.	8115
	1935		2014		2057
	3928		4016		6058

4) Wenn einer Ziffer, von welcher man nicht abziehen kann, eine oder mehrere Nullen nachfolgen, so übergehe man alle Nullen, und borge von der nächsten bedeutlichen Ziffer eine Einheit; diese giebt an der Stelle der ersten Null 10 Einheiten: eine davon hinweg geborgt bleibt ein 9; die geborgte Einheit giebt wieder an der Stelle der vorhergehenden Null 10 Einheiten, und eins davon geborgt bleibt wieder an dieser Stelle ein 9 u. s. w., woraus folgende Regel fließt: **Wenn von einer oder mehr nacheinander folgenden Nullen eins geborgt werden soll, so borge man von der nächstfolgenden bedeutlichen Ziffer eine Einheit, und bemerke alle übersprungene Nullen mit ei-**

einem Punkt, zum Zeichen, daß solche sodann lauter 9 sind; wie es im Beyspiel N. 7. und 8. zu ersehen ist.

Beyspiele.

N. 7.	6704	N. 8.	9000800106
	6356		43491638
	348.		8957308468

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet daraus, weil es einerley ist, ob man die Einheiten, Zehner, Hunderte u. s. w. jede insbesondere, oder ob man die ganze kleinere Zahl auf einmal abziehet (§. 22. Grundsatz 1.)

§. 24.

Da vermög (§. 19.) die Differenz anzeigt, um wie viel die größere Zahl größer ist, als die kleinere, so können die Differenz und die kleinere Zahl als Theile der größern angesehen werden; addirt man demnach die Differenz zur kleinern Zahl, so muß die größere zum Vorschein kommen; welches zur Probe der Subtraktion dienen kann.

§. 25.

Einige Beyspiele zur Anwendung der Addition, und Subtraktion.

1. Frage: Die Armee einer Monarchie besteht aus 238500 Mann Infanterie, 65840 Mann Kavallerie, 10830 Mann Artillerie, und noch aus verschiedenen andern Korps 12640 Mann: Wie stark ist wohl diese Kriegsmacht?

Antwort. $238500 + 65840 + 10830 + 12640 = 327810$ Mann.

2. Frage: Die Stadt Trier wird in der Geschichte um 1300 Jahr älter als die Stadt Rom angegeben. Da nun Rom 753 Jahr vor Christi Geburt soll erbaut worden seyn; wie alt ist wohl die Stadt Trier in diesem Jahre 1792?

Antwort. 1300 + 753 + 1792 = 3845 Jahr.

3. Frage: Amerika ist von Christoph Kolumbus im Jahr 1497 entdeckt worden: wie lang ist es nun in diesem Jahr 1792, daß wir von diesem vierten Welttheile eine Wissenschaft haben?

Antwort. 1792 − 1497 = 295 Jahr.

4. Frage: Eine Armee ist 280000 Mann stark ins Feld gezogen: im ersten Feldzuge verlohr sie 25648 Mann; dagegen erhielt sie 36800 Mann Rekruten; im zweyten Feldzuge verlohr sie 38794 Mann, erhielt aber 40500 Rekruten; im dritten Feldzuge verlohr sie 8456 Mann, und erhielt einen Zuwachs von 50000 Rekruten: wie stark ist wohl die Armee nach Ende des dritten Feldzuges?

Antwort. 280000 + 36800 + 40500 + 50000 − 25648 − 38794 − 8456 = 407300 − 72898 = 334402 Mann.

IV. Abschnitt.

Von der Multiplikation.

§. 26.

Wenn eine nämliche Zahl ein oder mehreremal zu sich selbst addirt werden soll, so hat man eine Rechnungsart eingeführt, durch welche der Betrag viel geschwinder, als durch die gewöhnliche Addition gefunden werden kann; diese Rechnungsart wird die **Multiplikation** genennt. Die Zahl, welche etlichemal genommen, oder addirt werden soll, nennt man den **Multiplikandus**, und diejenige Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplikandus zu nehmen ist, heißt der **Multiplikator**; beyde zusammen heissen die **Faktoren**, und der Betrag wird hier das **Produkt** genennt. Zwey Zahlen miteinander **multipliciren heißt demnach eine Zahl so oft nehmen, als die andere Einheiten in sich enthält.** Z. B. 4 mit 3 multipliciren **heißt** die Zahl 4 dreymal, oder welches ei-

ner-

nerley ist, die Zahl 3 viermal nehmen. In beyden Fällen kommt 12 zum Vorschein: 3 und 4 sind demnach die Faktoren, und 12 ist das Produkt.

Es ist deswegen bey der Multiplikation gleichgültig, welchen Faktor man als Multiplikator annimmt, weil das Produkt einerley ist; und es zeigt jeder Faktor mit seinen Einheiten an, wie oft der andere genommen werden muß, damit das Produkt zum Vorschein komme; oder, welches einerley ist, wie oft der andere Faktor in dem Produkt enthalten ist.

§. 27.

Das Zeichen der Multiplikation ist ein liegendes Kreuz $\times$, oder auch nur ein Punkt., wird ausgesprochen multiplizirt, und bedeutet, daß die Zahlen oder Größen, zwischen welchen es steht, miteinander multiplizirt werden sollen; z. B. $6 \times 8 = 48$, wird gelesen: 6 multiplizirt mit 8 ist gleich 48; eben so $9 . 4 = 36$; $7 . 6 = 42$ u. s. w.

Sind 3 oder mehrere Zahlen mit dem Multiplikationszeichen verbunden, so bedeutet es, daß das Produkt der vorhergehenden Zahlen immer mit der nachfolgenden zu multipliziren sey; z. B. $2 . 4 . 9 = 8 . 9 = 72$.

Anmerkung. Die Anfänger müssen die Produkte von zweyen Zahlen, wovon jede nur aus einer Ziffer besteht, welche man das **Einmaleins** nennt, wohl auswendig lernen, wenn sie im Multipliciren eine Fertigkeit erlangen wollen; und es giebt auch hier gewisse Regeln, die sich ein Ungeübter zu Nutzen machen kann; z. B. man wüßte nicht geschwind, wieviel 9mal 7 ist, so kehre man es um, und sage 7mal 9, und es wird vielleicht geschwinder einfallen; oder man sage: 10mal 7 ist 70, 7 davon ist 63 u. d. gl.

Das Einmaleins ist am besten aus folgender Tafel, welche der pythagorische Rechentisch genennt wird, zu erlernen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Der Gebrauch ist folgender: z. B. man wollte das Produkt von 6mal 7 wissen, so suche man einen Faktor, z. B. 6 in der ersten vertikalen Reihe, und den andern 7 in der obersten horizontalen Reihe, und fahre mit dem Finger aus der ersten Reihe horizontal, und aus der andern vertikal; und dort, wo beyde zusammentreffen, findet man das Produkt 42.

§. 28.

Benannte Zahlen können nicht miteinander multiplizirt werden, wenn sie auch gleichnamig sind; denn wären z. B. 6 Fl. mit 3 Fl. zu multipliziren, was sollte wohl das Produkt 18 bedeuten? Wohl aber kann man eine benannte Zahl mit einer unbenannten multipliziren, das heißt, man kann sie so vielmal nehmen, als man will; z. B. 6 Fl. 3mal genommen giebt zum Produkt 18 Fl.; 4 Kr. × 5 = 20 Kr. u. s. w.

§. 29.

§. 29.

Grundsätze. N. 1. Wenn man gleiche Größen mit gleichen multiplizirt, so sind die Produkte gleich.

Beyspiele.

$8=5+3$	2 Gr. = 6 Kr.
$4=4$	$5 \quad =3+2.$
also auch $8.4=5.4+3.4$	also auch 2 Gr. × 5 = 6 Kr. × 3 + 6 Kr. × 2.
nämlich $32=20+12$	nämlich 10 Gr. = 18 Kr. + 12 Kr.
	das ist 10 Gr. = 30 Kr.

Man erhält also einerley Produkt, ob man alle Theile einer Größe, oder die ganze Größe mit einer andern Größe multipliziret.

N. 2. Multiplizirt man aber gleiche Größen mit ungleichen, oder ungleiche Größen mit gleichen, so erhält man verschiedene Produkte; und zwar dort größere, wo die Faktoren größer sind.

Beyspiele.

$8=6+2$	1 Gr. > 2 Kr.
$4>3$	$3 \quad =3$
also auch $8.4>6.3+2.3.$	also auch 3 Gr. > 6 Kr.

§. 30.

Sind nun zwey Zahlen miteinander zu multipliziren, wovon eine nur aus blossen Einheiten, die andere aber aus mehreren Ziffern besteht, so beobachte man Folgendes:

1) Man schreibe den kleinern Faktor unter den größern, und multiplizire damit zuerst die Einheiten, dann die Zehner, Hunderte, Tausende des andern Faktors, und schreibe die Produkte, wenn dieselben nur aus einer Ziffer bestehen, jedesmal an eben dieselbe Stelle, so hat man das verlangte Produkt (§. 29. Grundsatz 1.) wie es das Beyspiel N. 1. zeiget.

2) Besteht aber ein Produkt aus zwey Ziffern, so setze man nur, wie bey der Addition, die erste Ziffer rechts, wenn es auch eine Null wäre, an dieselbe Stelle, und addire die andere zum folgenden Produkt; nämlich im Beyspiel N. 2. sagt man: 4mal 6 giebt 24 Einheiten, nämlich 4 Einheiten, und 2 Zehner: man setze deswegen die 4 Einheiten an ihre Stelle, und behalte die 2 Zehner in Gedanken (man kann selbe auch auf der Seite anmerken); ferner sage man: 4mal 7 giebt 28, und 2 gebliebene Zehner dazu geben 30 Zehner, nämlich keine Zehner, und 3 Hunderte; deswegen setze man an die Stelle der Zehner eine 0, und behalte die 3 Hunderte wieder in Gedanken; ferner 4mal 1 giebt 4, und 3 geblieben giebt 7 Hunderte, und 4mal 8 giebt 32 Tausende.

3) Befindet sich im obern Faktor eine Null, so muß auch im Produkte eine Null gesetzt werden; wäre aber vom vorhergehenden Produkt etwas geblieben, so wird solches an dieser Stelle gesetzt, wie es aus dem Beyspiel N. 3. zu ersehen ist; indem man sagt: 4mal 8 giebt 32; 2 geschrieben, bleibt 3; 4mal 0 giebt 0, und 3 geblieben ist 3; 4mal 1 giebt 4; 4mal 0 giebt 0; und 4mal 5 giebt 20.

Beyspiele.

N. 1.	2341	N. 2.	8176	N. 3.	50108
	2		4		4
Prod.	4682	Prod.	32704	Prod.	200432

§. 31.

Ist eine Zahl mit 10 zu multipliziren, so hänge man nur hinten eine Null daran; denn dadurch erhält jede Ziffer einen zehnfachen Werth (§. 6. und 7.), und folglich ist die ganze Zahl mit 10 multipliziret (§. 29. Grundsatz 1.). Eben so wird eine Zahl mit 100 multiplizirt, wenn man hinten 2 Nullen anhängt; mit 1000, wenn man 3 Nullen anhängt u. s. w.

§. 32.

§. 32.

Wären aber zwey Zahlen, welche beyde aus mehreren bedeutlichen Ziffern bestehen, miteinander zu multipliziren, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe den kleinern Faktor unter den größern, und multiplizire zuerst mit den Einheiten des untern Faktors den ganzen obern Faktor (§. 30.).

2) Dann multiplizire man auch auf eben diese Art mit den Zehnern des untern Faktors den ganzen obern Faktor. Da aber die erste Ziffer dieses Produkts nicht mehr Einheiten, sondern Zehner bedeutet; denn im folgenden Beyspiele N. 1., im 2ten Produkt sollte man eigentlich sagen: 20mal 3 giebt 60, statt daß man abgekürzt sagt 2mal 3 giebt 6; eben deswegen bedeutet die zweyte Ziffer dieses Produktes Hunderte, die 3te Tausende u. s. w. Man schreibe daher dieses Produkt so unter das vorige, daß die erste Ziffer an die Stelle der Zehner zu stehen kömmt.

3) Auf eben diese Art multiplizire man mit den Hunderten des untern Faktors den ganzen obern Faktor, und schreibe dieses Produkt so unter die vorigen, daß die erste Ziffer, welche hier schon Hunderte bedeutet, an die Stelle der Hunderte zu stehen kömmt. Und so multiplizire man mit jeder Ziffer des untern Faktors den ganzen obern Faktor, und rücke das Produkt aus angeführter Ursache jedesmal um eine Stelle weiter gegen die Linke.

4) Hat der untere Faktor eine oder mehrere Nullen in der Mitte, so überspringe man solche, und multiplizire nur mit den folgenden bedeutlichen Ziffern, rücke aber das Produkt um so viele Stellen weiter gegen die Linke, als man Nullen übersprungen hat; wie es das Beyspiel N. 2. zeiget.

5) Sodann addire man diese besondern, oder Partialprodukte, so wie sie untereinander stehn, zusammen, so erhält man das wahre Produkt (§. 29. Grundsatz 1.).

6) Hat einer oder beyde Faktoren am Ende einige Nullen, so multiplizire man solche, als wenn die Nullen hinten nicht wären, und hänge an das Produkt rechts so viele Nullen an, als deren beyde Faktoren zusammen haben; denn es ist im Beyspiel N. 3. vermög (§. 31.), $320 \times 4600 = 32 \times 10 . 46 \times 100 = 32 . 46 . 1000$.

Beyspiele.

N. 1.	N. 2.	N. 3.
4523	4809	4600
324	2006	320
18092	28854	92
9046	9618	138
13569	9646854	1472000
1465452		

§. 33.

Die beste Probe über die Multiplikation ist, wenn man selbe noch einmal wiederholet: und man könnte das zweytemal die Faktoren verwechseln, das heißt, jenen zum Multiplikator annehmen, der vorhin der Multiplikandus war. Erhält man nun einerley Produkt, so ist richtig multiplizirt worden.

Es wird zwar weiter hinten bey der Division noch eine Probe über die Multiplikation gezeigt werden, die aber ebenfalls nicht leichter, als diese seyn wird.

§. 34.

Einige Fragen zur Anwendung der Multiplikation.

1. Frage: Wenn eine Klafter 6 Schuhe enthält, wie viel Schuhe machen 49 Klafter?

Antwort. $6 . 49 = 294$ Schuhe.

2. Frage: Ein Gulden hat 60 Kreuzer; wie viel Kreuzer machen 285 Fl. und 45 Kr.?

Antwort. $285 . 60 + 45 = 17145$ Kr.

3. Frage: Ein Schuh Länge von einem gewissen Bauholze kostet 45 Kr.; wie viel Kreuzer kostet nun ein Baum, welcher 5 Klafter, und 4 Schuh lang ist?

Antwort. 5 Klafter und 4 Schuhe machen 5.6+4 Schuhe=34 Schuhe; mithin kostet der Baum 34.45=1530 Kr.

4. Frage: Wenn ein Soldat monatlich 3 Fl. bekömmt; wie viel bekommen 30 Soldaten in einem Jahre?

Antwort. 3.12.30=1080 Fl.

5. Frage: Es soll eine Mauer von Ziegelsteinen errichtet werden: der Länge nach kommen 2600, der Dicke nach 8, und der Höhe nach 150 Ziegeln zu liegen; wie viel Ziegeln braucht man hiezu?

Antwort. Da der Länge nach 2600, und der Dicke nach 8 Ziegeln liegen sollen, so kommen in einer Schichte 8.2600=20800 Ziegeln zu liegen; und da 150 solche Schichten übereinander liegen sollen, so kommen zur ganzen Mauer 150.20800=208.15.1000=3120000 Ziegeln.

Mehrere Beyspiele kann sich der Anfänger selbst leicht aufgeben.

V. Abschnitt.

Von der Division.

§. 35.

Es kommt recht oft vor, daß man zu wissen nöthig hat, wie oft eine bekannte Zahl von einer andern bekannten abgezogen werden kann, bis nichts mehr übrig bleibt; oder welches einerley ist, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist; z. B. man möchte gern wissen, wie viel 48 Schuhe in Klaftern betragen, so kömmt es nur darauf an, daß man untersuche, wie oft 6 in 48 enthalten ist; weil 6 Schuhe=1 Klafter ist.

Um

Um nun dieses leichter, als durch eine öfters wiederholte Subtraktion finden zu können, hat man eine besondere Rechnungsart eingeführt, welche die Division genennt wird. **Dividiren heißt demnach untersuchen, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist.** Die Zahl, welche dividirt werden soll, heißt der **Dividendus**; jene, durch welche dividirt wird, heißt der **Divisor**; und die zu suchende Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, wird der **Quotient** genannt. In unserm angeführten Beyspiele ist 48 der Dividendus, 6 der Divisor, und 8 der Quotient; weil 6 in 48, 8mal enthalten ist.

§. 36.

Da der Quotient mit seinen Einheiten anzeiget, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist; so kann vermög (§. 26.) der Dividendus als ein Produkt, wovon der Quotient und der Divisor die Faktoren sind, angesehen werden; und es zeigt also auch der Divisor mit seinen Einheiten an, wie oft der Quotient im Dividendus enthalten ist; das heißt, wie viel Theile man aus dem Dividendus machen kann, deren jeder so groß, als der Quotient ist. Man kann demnach auch sagen: **Dividiren heißt eine gegebene Zahl in so viel gleiche Theile zertheilen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten in sich enthält.** 48 durch 6 dividiren heißt deswegen auch die Zahl 48 in 6 gleiche Theile theilen.

§. 37.

Das Zeichen der Division sind zwey aufrecht stehende Punkte, nämlich : und wird ausgesprochen **dividirt durch**; dieses Divisionszeichen, wo es zwischen zwey Zahlen, oder Größen steht, zeigt an, daß die links vor dem Zeichen stehende durch jene rechts nach dem Zeichen folgende Größe dividirt werden soll. Unser obenangeführtes Beyspiel wird dem-

demnach also geschrieben, $48:6=8$, und gelesen, 48 dividirt durch 6 ist gleich 8.

Man pflegt auch die Division durch einen horizontalen Strich, über welchen der Dividendus, und unter welchem der Divisor steht, anzudeuten; so heißt auch $\frac{28}{7}=4$, nämlich 28 dividirt durch 7 ist gleich 4.

§. 38.

Eine benannte Zahl kann durch eine andere gleichnamig benannte Zahl dividirt werden; so ist z. B. 12 Pf. : 4 Pf. = 3, und es zeigt hier der Quotient an, wie oft 3 Pf. in 12 Pfunden enthalten sind. Auch kann eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividirt werden; z. B. 15 Fl. : 3 = 5 Fl., und hier zeigt der Quotient an, wie groß jeder Theil wird, wenn man 15 Fl. in 3 gleiche Theile theilet; nicht aber kann eine unbenannte Zahl durch eine benannte, oder eine benannte Zahl durch eine gänzlich ungleichnamige benannte dividiret werden.

§. 39.

Grundsätze. N. 1. Wenn man gleiche Größen durch Gleiches dividiret, so sind auch die Quotienten gleich.

Beyspiele.

$9=6+3$	6 Gr. = 18 Kr.
$3=3$	2 = 2
also auch $9:3=6:3+3:3$;	also auch 6 Gr. : 2 = 18 Kr. : 2
nämlich $3=2+1$	nämlich 3 Gr. = 9 Kr.

Es ist deswegen auch einerley, ob man ein Ganzes oder jeden seiner Theile durch eine nämliche Zahl dividiret.

N. 2. Dividirt man aber gleiche Größen durch Ungleiches, so sind die Quotienten ungleich, und zwar dorten größer, wo der Divisor kleiner ist.

Bey-

Beyspiele.

$12 = 9 + 3$	2 Fl. = 12 Sch.
$4 > 3$	$2 < 3$
also auch $12 : 4 < 9 : 3 + 3 : 3$	also auch 2 Fl. : 2 > 12 Sch. : 3.
nämlich $3 < 3 + 1$	nämlich 1 Fl. > 4 Sch.

Nimmt man daher bey ungeändertem Dividendus den Divisor 2, 3, 4 . . . n mal größer, oder kleiner an, so wird der Quotient 2, 3, 4 . . . n mal kleiner oder größer seyn.

N. 3. Dividirt man hingegen ungleiche Größen durch Gleiches, so ist dort der Quotient größer, wo der Dividendus größer ist.

Beyspiele.

$12 > 8$	10 Gr. < 35 Kr.
$4 = 4$	$5 = 5$
also auch $12 : 4 > 8 : 4$	also auch $10 : 5 < 35 : 5$
nämlich $3 > 2$.	nämlich 2 Gr. < 7 Kr.

Nimmt man daher bey ungeändertem Divisor den Dividendus 2, 3, 4 . . . n mal größer, oder kleiner an, so wird auch der Quotient 2, 3, 4 . . . n mal größer, oder kleiner seyn.

§. 40.

Wenn man bey einer Division den Dividendus und Divisor mit einer nämlichen Größe multiplizirt oder dividirt, so bleibt der Quotient ungeändert:

Denn durch die Multiplikation des Dividendus wird der Quotient vergrößert (§. 39. N. 3.), und durch die Multiplikation des Divisors wird der Quotient verkleinert (§. 39. N. 2.). Wird nun der Dividendus und Divisor mit einer nämlichen Zahl multiplizirt, so wird der Quotient eben so vielmal vergrößert als verkleinert, und

folg-

folglich bleibt er ungeändert. Eben so wird auch der Quotient durch die Division des Dividendus so vielmal verkleinert, als er durch die Division des Divisors vergrößert wird, wenn beyde durch eine nämliche Zahl dividirt werden, und folglich bleibt er ganz ungeändert.

§. 41.

Wenn eine Zahl, die kleiner als hundert ist, durch eine einfache Zahl dividirt werden soll, so ist der Quotient schon aus dem Einmaleins bekannt. Ist aber eine Zahl, die aus mehr als 2 Ziffern besteht, durch eine Zahl, die nur blosse Einheiten enthält, zu dividiren, so verfahre man auf folgende Art:

1) Man schreibe den Dividendus zur Linken, den Divisor zur Rechten, zwischen ihnen das Divisionszeichen, und hinter dem Divisor setze man das Gleichheitszeichen, nach welchem der Quotient zu stehen kömmt.

2) Dann untersuche man, wie oft der Divisor in der ersten links stehenden Ziffer des Dividendus, oder wenn diese kleiner ist als der Divisor, in den zwey ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey; (im Beyspiel N. 1. sagt man: 4 in 9 geht 2 mal) diesen gefundenen Theil des Quotienten schreibe man hinter das Gleichheitszeichen, multiplizire damit den Divisor, schreibe das Produkt unter jene Ziffer des Dividendus, in welche man dividirt hat, und ziehe es davon ab (man sagt in unserm Beyspiel 2mal 4 giebt 8; 8 von 9 bleibt 1.)

3) Zu dem Rest (1) hänge man die nächstfolgende Ziffer des Dividendus (4) rechts an (14), und dividire dieses wieder durch den Divisor; (4 in 14 geht 3mal); den Quotienten hänge man an den schon gefundenen Theil an, multiplizire damit den Divisor, und ziehe das Produkt wieder von den Ziffern ab, in welche man dividirt hat; (3mal 4 giebt 12; 2 von 14 bleiben 2). Zu dem Rest setze man wieder die nächstfolgende Ziffer des Dividendus (8)

herun-

herunter, und dividire solches wieder durch den Divisor (4 in 28 geht 7mal), den Quotienten wieder an den schon gefundenen angehängt, den Divisor damit multiplizirt, und das Produkt wieder abgezogen u. s. w.

4) Bleibt irgendwo gar kein Rest übrig, wie im Beyspiel N. 2., so wird die folgende Ziffer des Dividendus allein herunter gesetzt, und wie vorhin dividirt; wäre sie aber kleiner als der Divisor, so muß zuerst in dem Quotienten eine Null angesetzt werden; sodann wird die folgende Ziffer des Dividendus noch herunter gesetzt, und wieder wie vorhin dividirt, wie es im Beyspiel N. 3. zu ersehen ist.

5) Hat man nun auf diese Art alle Ziffern des Dividendus schon herunter gesetzt, und es ist bey der letzten Subtraktion gar nichts übrig geblieben, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor in dem Dividendus genau enthalten sey; und zwar so oft, als der Quotient Einheiten in sich enthält; so ist im Beyspiel N. 1. der Divisor, 4 in 948 genau 237 mal enthalten. Sollte aber bey der letzten Subtraktion noch ein Rest übrig bleiben, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor im Dividendus nicht genau enthalten sey. So bleibt im Beyspiel N. 3. bey der letzten Subtraktion noch der Rest 2 übrig, welcher anzeigt, daß noch 2 durch 7 zu theilen übrig bleiben. In einem solchen Fall schreibt man den Rest ober einen Strich, unter welchem der Divisor zu stehen kömmt, und hängt diese angezeigte Division, welche man einen Bruch nennt, mit etwas kleinern Ziffern geschrieben, an den Quotienten an; zum Zeichen, daß der Quotient noch um etwas, welches aber keine ganze Einheit mehr betragen kann, vermehrt werden muß. Wie viel aber dieser Bruch betrage, wird weiter hinten bey der Lehre von Brüchen gezeiget werden.

Beyspiele.

N. 1.	N. 2.	N. 3.
948 : 4 = 237.	1575 : 5 = 315.	1444 : 7 = 206$\frac{2}{7}$
8	15	14
14	7	44
12	5	42
28	25	2
28	25	
0	0	

Daß man durch dieses Verfahren den richtigen Quotienten erhalte, ist aus (§. 39. Grundsatz 1.) leicht zu begreifen; weil man durch dieses Verfahren, die Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende des Dividendus, jede insbesondere vom Höchsten angefangen dividiret, und den Rest jedesmal zum Nächstkleinern addiret.

Anmerkung. In der Ausübung pflegt man gemeiniglich die Division, wenn der Divisor nur aus einer Ziffer besteht, zu verrichten, indem man jedesmal den Quotienten mit dem Divisor in Gedanken multiplizirt, das Produkt von dem betreffenden Dividendus abzieht, und den Rest oberhalb ansetzt; z. B.

$$\begin{array}{l} \;\;\;{\scriptstyle 3\,1\,5\,2} \\ 15776 : 6 = 2629\tfrac{2}{6} \end{array}$$

da man sagt; 6 in 15 geht 2mal; 2mal 6 ist 12; 12 von 15 bleiben 3; 6 in 37 geht 6mal; 6mal 6 ist 36; 36 von 37 bleibt 1; 6 in 17 geht 2mal; 2mal 6 ist 12; 12 von 17 bleiben 5; 6 in 56 geht 9mal; 9mal 6 ist 54; 54 von 56 bleiben 2.

§. 42.

Besteht aber auch der Divisor aus mehrern Ziffern, so beobachte man folgende Regeln:

1) Man ordne die Division wie im vorigen (§. 41.) und dividire mit der ersten linken Ziffer des Divisors in die erste, oder wenn diese zu klein ist, in die zwey ersten Ziffern des Dividendus; die gefundene Ziffer setze man an die Stelle des Quotienten hin, multiplizire damit den ganzen Divisor: das Produkt schreibe man unter so viel Ziffern des Dividendus, als der Divisor Ziffern hat, wenn die erste Ziffer des Divisors kleiner ist, als jene des Dividendus, wie im Beyspiele N. 4.; hätte man aber in die zwey ersten Ziffern des Dividendus dividiren müssen, wie im Beyspiele N. 5., so muß auch das Produkt um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt werden; sodann ziehe man dieses Produkt gehörig ab.

2) Zu dem Reste setze man die folgende Ziffer des Dividendus herab, und dividire solchen wieder durch den Divisor; wenn er aber nicht darinn enthalten ist, wie im Beyspiele N. 5., so hänge man im Quotienten eine Null an, setze noch eine Ziffer des Dividendus herunter, und dividire sodann, wie in 1.) mit dem Divisor hinein, und setze die gefundene Ziffer an die folgende Stelle im Quotienten. Mit dieser gefundenen Ziffer des Quotienten multiplizire man wieder den ganzen Divisor, ziehe das Produkt gehörig ab, und setze abermal eine Ziffer zum Rest herunter u. s. w.

3) Sollte sich ereignen, daß irgendwo ein Produkt zu groß ist, und von den Ziffern, in welche man dividirt hat, nicht abgezogen werden kann; so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden, und solcher muß daher vermindert werden. Wäre hingegen nach geschehener Subtraktion der Rest noch größer als der Divisor, so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu klein angenommen worden ist, und solcher muß daher größer gemacht werden; worauf jedesmal zu sehen ist, weil nicht allezeit der ganze Divisor so oft im ganzen Dividendus, als die erste Ziffer des Divisors in jener des Dividendus enthalten ist.

4) Hat man nun auf diese vorgeschriebene Art alle Ziffern des Dividendus schon herunter gesetzt, so ist die Division vollendet, und man muß nur dem etwa noch vorhandenen Reste den Divisor unterschreiben, und nach (§. 41. N. 5.) an den Quotienten anhängen, wie im Beyspiele N. 5. zu ersehen ist.

Beyspiele.

N. 4.

$$\begin{array}{l} 738364 : 2134 = 346 \\ \underline{6402} \\ \quad 9816 \\ \quad \underline{8536} \\ \quad 12804 \\ \quad 12804 \end{array}$$

N. 5.

$$\begin{array}{l} 25882891 : 4257 = 6080\tfrac{331}{4257} \\ \underline{25542} \\ \quad 34089 \\ \quad \underline{34056} \\ \qquad 331 \end{array}$$

5) Ist eine Zahl durch 10 zu dividiren, so schneide man rechts eine Ziffer ab; dadurch wird jede Ziffer des Dividendus 10mal kleiner (§. 6.), und folglich ist die ganze Zahl durch 10 dividiret (§. 39. Grundsatz I.); eben so wird eine Zahl durch 100 dividiret, wenn man zwey Ziffern, durch 1000, wenn man drey Ziffern u. s. w. rechts abschneidet; die abgeschnittenen Ziffern aber müssen, wenn es keine Nullen sind, als der Rest mit dem unterschriebenen Divisor an den Quotienten, wie vorhin angehängt werden; z. B. 6837 Pf. wie viel Zentner machen solche? Antwort: $6837 : 100 = 68\tfrac{37}{100}$ Zent.

6) Haben beyde, Divisor und Dividendus, am Ende einige Nullen, so schneide man von beyden gleichviel Nullen ab, und dividire sodann nach den vorigen Regeln; dadurch werden beyde, Divisor und Dividendus durch eine nämliche Zahl dividiret; daher verbleibt der Quotient ungeändert (§. 40.) Z. B. $36000 : 600 = 360 : 6 = 60$.

7) Hat aber nur der Divisor allein am Ende Nullen, so schneide man von dem Dividendus rechts so viel Ziffern ab, als der Divisor am Ende Nullen hat, und dividire die übrigen durch die bedeutlichen Ziffern des Divisors; dem Reste aber werden die abgeschnittenen Ziffern wieder angehängt, und der ganze Divisor unterschrieben; denn es ist z. B. $2367 : 400 = (2300 + 67) : 400 = 2300 : 400 + \frac{67}{400} = 23 : 4 + 67 : 400 = 5 + \frac{3}{4} + \frac{67}{400} = 5 + \frac{300}{400} + \frac{67}{400} = 5\frac{367}{400}$.

Anmerkung. Man pflegt auch öfters die Division zu ordnen, indem man den Divisor links, den Dividendus in der Mitte, und den Quotienten rechts ansetzt, und alle drey durch Striche voneinander absondert; übrigens aber die Division nach eben den gegebenen Gründen verrichtet, wie im nachstehenden Beyspiele zu ersehen ist.

```
Divis.   Divid.   Quotient.
  24   | 38567 | 1606 23/24
       | 24    |
       ------
         145
         144
         ----
          167
          144
       -------
           23
```

Bey der wirklichen Anwendung der Rechenkunst ist es am vortheilhaftesten die Division jederzeit so anzusetzen, wie es in diesem letzten Beyspiele geschehen ist, weil man auf diese Art weniger Platz dazu braucht, und es fast allenthalben so gebräuchlich ist.

§. 43.

In den Rechnungen, wo mehrere Zahlen durch eine nämliche Zahl dividirt, oder auch multiplizirt werden sollen, kann man sich die Arbeit um vieles erleichtern, wenn man sich die vielfachen dieser Zahl bis zum neunfachen in eine Tafel einträgt: hiedurch kann man nicht nur jedesmal den

Theil

Theil des Quotienten richtig bestimmen, sondern man erspa-ret auch das jedesmalige Multipliziren, weil man das betreffende Produkt nur aus der Tafel heraus schreiben darf; z. B. Es wären mehrere Zahlen durch 864 zu dividiren, so verfertige man sich nachstehende Tafel.

1 fach	864
2 =	1728
3 =	2592
4 =	3456
5 =	4320
6 =	5184
7 =	6048
8 =	6912
9 =	7776

Es sey nun die Zahl 2511648 durch 864 zu dividiren, so sieht man aus der Tafel, daß die erste Ziffer des Quotienten nicht 3, sondern 2 seyn muß; weil bey 3 das Produkt 2592 größer ist als 2511, in

```
2511648:864=2907.
1728
 7836
 7776
   6048
   6048
     0
```

welches man dividiret; man schreibe deswegen im Quotienten 2, und ziehe das Produkt aus der Tafel bey 2, nämlich 1728 gehörig ab, setze die folgende Ziffer herunter u. s. w.

§. 44.

Da man nach (§. 36.) den Dividendus als ein Produkt ansehen kann, wovon der Quotient und der Divisor die Faktoren sind, so kann die Division am besten geprüft werden, wenn man den Quotienten mit dem Divisor multipliziret, und den etwa gebliebenen Rest zum Produkte addiret; kömmt nun der Dividendus zum Vorschein, so ist die Division gut verrichtet worden. Und so könnte man auch umgekehrt die Multiplikation durch die Division prüfen, wenn man das Produkt durch den einen Faktor dividiret, wo dann der andere Faktor zum Vorschein kommen muß; allein, da die Division etwas beschwerlicher als die Multiplikation ist, so wird mancher lieber die Multiplikation durch die Wiederholung, wie im (§. 33.) gesagt worden, prüfen.

§. 45.

Einige Fragen zur Anwendung der Division.

1. Frage. Wenn 8 Personen 1248 Fl. unter sich gleich zertheilen sollen, wie viel bekömmt jede?

Antwort. 1248 Fl. : 8 = 156 Fl.

2. Frage. Eine Klafter hat 6 Schuhe, und der Schuh 12 Zolle; wie viel betragen also 23400 Zoll in Klaftern aus?

Antwort 23400 Z. : 12 = 1950 Sch., und 1950 Sch. : 6 = 325 Kl.

3. Frage. Ein Jahr hat 31556928 Sekunden: wie viel macht dieses Tage, Stunden, Minuten, und Sekunden aus?

Antwort. Da 60 Sekunden eine Minute ausmachen, so sind 31556928 Sek. : 60 = 525948 Min. + 48 Sek.; ferner, da 60 Minuten eine Stunde ausmachen, so sind 525948 Min. : 60 = 8765 St. + 48 Min.; endlich sind 8765 St. : 24 = 365 Tage + 5 St.; folglich hat das Jahr 365 T. + 5 St. + 48 M. + 48 S.

4. Frage. Es sollen 270000 Ziegelsteine in einen Haufen geschichtet werden: in jeder Schichte sollen der Länge nach 150, der Breite nach aber 60 Ziegeln zu liegen kommen; wie viel müssen solche Schichten aufeinander gelegt werden?

Antwort. Da der Länge nach 150, und der Breite nach 60 liegen sollen, so kommen in eine Schichte 150.60 = 9000, und folglich 270000 : 9000 = 30 Schichten.

5. Frage. Wenn man zu einer Montur 6 Ellen Tuch braucht; wie viele Montirungen wird man aus 20 Stücken von diesem Tuche erzeugen können, wenn jedes Stück 36 Ellen hat.

Antwort. Da in einem Stück Tuch 36 Ellen sind, so haben 20 Stücke 36.20 = 720 Ellen; und weil man zu jeder Montur 6 Ellen braucht, so bekommt man von allen diesen Ellen 720 : 6 = 120 Montirungen.

VI.

VI. Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit ungleichnamigen Zahlen, welche gleichnamig gemacht werden können.

§. 46.

Durch die bisher gezeigten 4 Rechnungsarten können nun auch ungleichnamige Zahlen, welche auf gleichen Namen gebracht werden können, addirt, subtrahirt, multiplizirt, und dividirt werden, wenn man sie vorher auf gleiche Namen, und zwar auf Einheiten der kleinsten Gattung bringet, wie in einigen Beyspielen (§. 34.) gezeigt worden ist; z. B. es wären 3 Kl. 5 Sch. 9 Zoll zu addiren zu 4 Kl. 4 Sch. und 8 Z.; so sind 3 Kl. + 5 Sch. + 9 Z. = 285 Z., und 4 Kl. + 4 Sch. + 8 Z. = 344 Z.; folglich ist die Summe 285 + 344 = 629 Zoll; welches wieder zu Klaftern, Schuhen, und Zollen gebracht werden kann, wie es in einigen Beyspielen (§. 45.) gezeigt worden ist.

Allein man hat auch hier eine besondere Art eingeführet, durch welche man geschwinder zum Zweck kömmt: es ist aber vorher bey einem wie beym andern nothwendig, daß man bey den Rechnungen, wo solche ungleichnamige Zahlen vorkommen, die Eintheilung wisse, wie viel eine Einheit der größern Gattung Einheiten der nächst kleinern Gattung enthält. Da aber nicht nur diese Eintheilungen selbsten, besonders der Gewichte, Längenmaßen, und Münzen, fast in jedem Lande verschieden sind, sondern auch unter einem nämlichen Namen in verschiedenen Ländern ganz ungleiche Dinge verstanden werden (so ist z. B. ein Kaisergulden = 60 Kaiserkreuzer, ein Reichsgulden = 50 Kaiserkreuzer, ein pohlnischer Gulden = 15 Kaiserkreuzer u. s. w.), so wollen wir uns hier blos an die in Oesterreich eingeführten Eintheilungen halten, welche aus folgenden Tabellen zu ersehen sind.

				Grán.	Quinten.						
			Quintl.	60	12	Punkt.					
		Lothe	4	240	144	12	Linien.				
	Unzen	2	8	480	1728	144	12	Zolle.			
Pfunde.	16	32	128	7680	20736	1728	144	12	Schuhe.		
1 Z.	100	1600	3200	12800	768000	124416	10368	864	72	6	1 K.

				Heller.	Terzen.				
			Pfennig	2	60	Sekunden.			
		Kreuzer	4	8	3600	60	Minuten.		
	Groschen	3	12	24	216000	3600	60	Stunden.	
1 Guld.	20	60	240	480	5184000	86400	1440	24	1 Tag.

Große Entfernungen werden durch **Meilen** gemessen; eine österreichische Meile ist genau = 4000 Wiener Klaftern, oder 10000 militärische Schritte; eine halbe Meile nennt man eine **Stunde Weges**.

Getränke als Wein, Bier u. d. gl. werden hier durch **Eymer** gemessen. Ein Eymer enthält 40 **Maaß**, und eine Maaß 4 **Seidl**. Beym Wein pflegt man 10 Eymer ein **Faß**, und 30 Eymer einen **Dreyling** zu nennen.

Getraide wird nach Metzen gemessen; ein Metzen wird abgetheilt in den halben- viertel- und achtel Metzen.

Kalk mißt man mit **Mittel**; ein Kalkmittel enthält 2 und einen halben Metzen.

Kohlen werden mit **Stibich** gemessen; ein Stibich ist 2 Metzen.

Bey Dingen, die nach der Zahl verkauft werden, pflegt man 12 ein **Duzent**, 15 einen **Mandel**, 30 einen **Schilling**, 60 ein **Schock** zu nennen.

Beym

Beym Papier machen 24 Bogen ein Buch, 20 Buch einen Riß, und 10 Riß einen Ballen. Beym Druckpapier machen 25 Bogen ein Buch.

Es wird aber weiter hinten bey der Lehre von den Proportionen auch gezeigt werden, wie die verschiedenen Maßen und Gewichte eines Landes in ähnliche von einem andern Lande verwandelt werden können.

§. 47.

Sind nun solche ungleichnamige Zahlen, welche auf gleichen Namen gebracht werden können, zu addiren, so ordne man selbe so, daß alle diejenigen, welche gleichen Namen haben, untereinander, und die von der kleinsten Gattung rechts zu stehen kommen, dann fange man bey der kleinsten Gattung zu addiren an; enthält nun die Summe davon einige Einheiten der größern Gattung, so dividire man selbe durch die Zahl, welche eine Einheit der größern Gattung ausmacht; den Rest schreibe man unter die addirte Stelle, und den Quotienten zähle man zur folgenden Gattung; und eben so fahre man nun weiter gegen die Linke von Gattung zu Gattung fort, wie es folgende Beyspiele zeigen.

Beyspiele.

8 Fl.	12 Gr.	2 Kr.	3 Dr.
10 =	18 =	1 =	2 =
2 =	17 =	2 =	3 =
26 =	9 =	1 =	1 =
48 Fl.	18 Gr.	2 Kr.	1 Dr.

22 St.	45 Min.	27 Sek.
13 =	14 =	30 =
6 =	0 =	20 =
42 St.	0 Min.	17 Sek.

Im ersten Beyspiele sagt man: 1 und 3, und 2, und 3 sind 9 Pfen., das ist 2 Kr. und 1 Dr. (weil 4 in 9 2mal enthalten ist); 1 Dr. wird angesetzt, und 2 Kr. zur folgenden Stelle addirt: 2 und 1, und 2, und 1, und 2 sind 8 Kr., das sind 2 Gr. und 2 Kr. (weil 3 in 8 2mal enthalten ist); darum werden die 2 Kr. an die Stelle der Kreuzer gesetzt, und die 2 Gr. wieder zur Stelle der Groschen addirt, nämlich 2 + 12 + 18 + 17 + 9 = 58 Gr. = 2 Fl. und 18 Gr. (weil 20 in 58 zweymal enthalten ist, und noch 18 zum Reste läßt); also 18 wieder an die Stelle der Groschen gesetzt; endlich ist 2 + 8 + 10 + 2 + 26 = 48 Fl.

§. 48.

Sollen solche Zahlen voneinander abgezogen werden, so ordne man selbe wie bey der Addition (§. 47.), fange von der kleinsten Gattung an, und subtrahire jede Gattung insbesondere. Ereignet sich aber, daß irgendwo bey einer Gattung die obere Zahl kleiner ist, als die abzuziehende, so borge man von der nächstfolgenden Gattung eine Einheit, vermehre sodann die Zahl um so viel, als die ausgeborgte Einheit Einheiten dieser Gattung enthält, und verrichte die Subtraktion.

Beyspiele.

von	36 Fl.	4 Kr.	3 Dr.	von	13 St.	0 M.	0 Sek.
abzuziehen	9 =	16 =	1 =	abzuziehen	10 =	29 =	40 =
Diff.	26 Fl.	48 Kr.	2 Dr.	Diff.	2 St.	30 M.	20 Sek.

In dem ersten Beyspiele können 16 Kr. von 4 Kr. nicht abgezogen werden; man borge deswegen einen Gulden, dieser macht 60 Kr., also hat man 64 Kr.; 16 davon bleiben 48 Kr. Eben so muß im zweyten Beyspiele von 13 St. 1 geborgt werden: dieses an die Stelle der Minuten getragen giebt 60 Min.; dann wieder 1 davon geborgt, und an die Stelle der Sekunden getragen, giebt 60 Sek.; wo sodann die Subtraktion verrichtet werden kann.

§. 49.

Wenn ungleichnamige Zahlen, die auf einerley Namen gebracht werden können, mit einer unbenannten Zahl mul-

multiplizirt werden sollen, so fange man wieder bey der kleinsten Gattung zu multipliziren an, und ziehe aus dem Produkte die etwa darin enthaltenen Einheiten der größern Gattung durch die Division heraus, und addire solche zum folgenden Produkte, der Rest aber wird an die Stelle gesetzt; und so auch bey den übrigen Gattungen.

Beyspiele.

21 Kl. 5 Sch. 7 Zoll	6 Zent. 24 Pf. 18 Loth
multiplizirt mit 4	multiplizirt mit 9
99 Kl. 4 Sch. 4 Zoll	56 Zent. 21 Pf. 2 Loth

Im ersten Beyspiele sagt man: 4mal 7 sind 28 Zoll, nämlich 2 Sch. und 4 Zoll (weil 12 in 28 2mal enthalten ist); man setzt deswegen 4 Zoll an die Stelle der Zolle, und behält die 2 Schuh auf die künftige Stelle; ferner 4mal 5 sind 20, und 2 geblieben sind 22 Schuhe, nämlich 3 Kl. und 4 Sch. u. s. w.

Es kann allhier auch noch erinnert werden, daß man öfters die Klaftern mit dem auf die Ziffern rechts oberhalb angesetzten Zeichen ^{0}, mit ^{I} die Schuhe, mit ^{II} die Zolle, mit ^{III} die Linien, mit ^{IV} die Punkten, und mit ^{V} die Quinten zu bezeichnen pflegt; so schreibt man z. B. 5^{0}, 4^{I}, 9^{II}, 10^{III}, 7^{IV}, 11^{V} anstatt 5 Klafter, 4 Schuhe, 9 Zolle, 10 Linien, 7 Punkten, und 11 Quinten.

§. 50.

Sollen dergleichen ungleichnamige Zahlen, die auf einen gleichen Namen gebracht werden können, durch eine unbenannte Zahl dividirt, das heißt in eine gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden, so fange man bey der größten Gattung zu dividiren an, und den Rest addire man jederzeit zur nächst kleinern Gattung, wo man solchen vorher auf Einheiten dieser Gattung bringt, so erhält man den richtigen Quotienten.

Bey=

Beyspiele.

$(10^{\circ},\ 5^{I},\ 9^{II},\ 8^{III}) : 4 = 2^{\circ},\ 4^{I},\ 5^{II},\ 5^{III}.$
(25 St. 8 Min. 30 Sek.) : 6 = 4 St. 11 Min. 25 Sek.

Im ersten Beyspiele sagt man: 4 in 10 geht 2mal, und es bleiben noch 2° übrig; diese zu Schuhen gemacht, geben 12^{I}, und zu 5^{I} addirt sind 17^{I}; 4 in 17 geht 4mal u. s. w.

§. 51.

Wären aber solche ungleichnamige Zahlen wieder durch derley Zahlen, die mit ihnen gleichnamig gemacht werden können, zu dividiren, nämlich zu untersuchen, wie oft diese in jenen enthalten sind, so bringe man beyde auf die kleinste Gattung, damit beyde gleichnamig werden, und verrichte sodann die Division, als wenn es unbenannte Zahlen wären.

Beyspiele.

(12 Fl. 18 Kr. 2 Dr.) : (1 Fl. 45 Kr. 2 Dr.)
= 2954 Dr. : 422 Dr. = 7mal.
$(11^{\circ},\ 4^{I}) : (5^{I},\ 10^{II}) = 840^{II} : 70^{II} = 12$mal.
3 Zentner : 18 Loth = 9600 L. : 18 L. = $533\frac{6}{18}$.

VII. Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 52.

Die Ziffern, oder Zahlenzeichen, obwohl man durch solche jede Gattung der Größen vorstellen kann, sind doch noch zu eingeschränkt, um damit allgemeine Rechnungen anlegen zu können, die für jeden ähnlichen Fall gelten sollen; z. B. durch 5 kann ich nur 5 Menschen, 5 Gulden, 5 Pfunde, aber keineswegs fünf, acht, eilf oder wie viel immer,

ent=

entweder Menschen oder Gulden oder Pfunde, und dergleichen bezeichnen. Man müßte daher die Rechnung so oft von neuem anfangen, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht würde; ja es giebt Rechnungen, die durch blosse Zahlzeichen entweder gar nicht, oder mit äußerster Schwierigkeit sich verrichten lassen. Man war deswegen auf allgemeinere Zeichen bedacht, durch welche man nicht nur jede Gattung der Größen, sondern auch jede Menge der Einheiten sich vorstellen kann; und man hat hiezu das kleine lateinische Alphabet gewählet, weil es den meisten Völkern in Europa bekannt ist; durch a z. B. kann man 5, 8, oder 11 Menschen, 5, 11 oder 20 Gulden, 5, 10 oder 106 Pfund u. s. w. vorstellen; und so auch durch b, c, d . . . x, y, z: nur muß jeder Buchstab den Werth, den man ihm beym Anfange einer Rechnung beylegt, durch die ganze Rechnung beybehalten.

Zuweilen werden auch die großen Buchstaben dieses Alphabets genommen, A, B, C . . . X, Y, Z; auch bedienen sich einige Schriftsteller der griechischen Buchstaben, α, β, γ, δ . . . π, φ, ψ, ω.

§. 53.

Die Wissenschaft mit Buchstaben zu rechnen wird die **allgemeine Rechenkunst**, oder die **Algebra** genennt. Hiedurch wird die Arithmetik in zwey Theile, nämlich in die **Zahlen-Rechenkunst**, oder die **gemeine** Arithmetik, und in die **Buchstaben-Rechenkunst**, oder die **allgemeine** Arithmetik eingetheilet.

§. 54.

Bey den Rechnungsarten mit Buchstaben bedient man sich der nämlichen Zeichen, wie bey der Zahlenrechnung; so bedeutet $a + b$, daß der Werth von a zum Werth von b addirt werden soll; eben so heißt $a + b + c + 5$, daß die

Werthe

Werthe der Buchstaben a, b, c, zusammen addiret, und die Summe davon noch um 5 vermehrt werden soll.

Soll ein Buchstab von einem andern Buchstaben, oder von einer Zahl, oder auch eine Zahl von einem Buchstaben abgezogen werden, so verbindet man selbe durch das Subtraktionszeichen (§. 21.), als $a-b$, $a-20$, $56-a$; eben so bedeutet $(a+b)-(a+c)$, daß die Summe aus a und c von der Summe aus a und b abgezogen werden soll; z. B. es wäre $a=30$, $b=20$, und $c=8$; so ist der angeführte Ausdruck $(a+b)-(a+c)$ eben so viel als $(30+20)-(30+8)=50-38=12$.

§. 55.

Sind Buchstaben miteinander zu multipliziren, z. B. a mit b, so schreibt man $a\times b$, oder $a.b$; **meistens aber werden die einzelnen Buchstaben, die miteinander zu multipliziren sind, ohne alle Zeichen dicht aneinander geschrieben**, nämlich ab; eben so ist $abcd$ das Produkt die vier Faktoren a, b, c und d; imgleichen bedeutet auch $(a+b)(b-c)$, daß die Summe von a und b, mit der Differenz von b und c multiplizirt werden soll; z. B. es sey $a=8$, $b=5$, $c=3$, so ist der angeführte Ausdruck $=(8+5)(5-3)=13.2=26$.

Kömmt ein Buchstab einigemal mit sich selbst zu multipliziren, so pflegt man Kürze halber den Buchstaben nur einmal zu schreiben, und ober demselben rechts eine Zahl zu setzen, welche anzeiget, wie oft dieser Faktor eigentlich stehn sollte; so schreibt man z. B. a^4 anstatt $aaaa$; eben so a^3b^2c, anstatt $aaabbc$. Die Zahlen, welche über den Buchstaben stehen, werden hier **Exponenten** genennt; und dort, wo keine Zahl ausdrücklich angesetzt ist, wird jederzeit ein 1 darunter verstanden; so ist im letzten Beyspiele (a^3b^2c) 3 der Exponent von a, 2 der Exponent von b, und 1 der Exponent von c. Das Produkt a^3b^2c wird gelesen: a der 3ten b der 2ten c; und x^n heißt, x der $n$ten (Potenz.).

Auch

Auch die Zahlen, wenn selbe mit Buchstaben multiplizirt werden sollen, werden ohne Zeichen, dicht an die Buchstaben vorwärts angeschrieben; z. B. $3a$ heißt a soll mit 3 multiplizirt werden, oder welches einerley ist, a soll 3mal genommen werden; es ist also $3a=a+a+a$; ingleichen $4bx=bx+bx+bx+bx$. Eben so heißt auch $3a(bc-x)$, daß 3 mit a und mit $(bc-x)$ multiplizirt werden soll; z. B. es wäre $a=5$, $b=7$, $c=2$, und $x=8$; so ist der angeführte Ausdruck $=3.5.(7.2-8)=15(14-8)=15.6=90$. Die Zahlen, welche vor den Buchstaben ohne Zeichen stehen, werden hier **Koeffizienten** genennt; z. B. in dem Ausdruck $3a$ ist 3 der Koeffizient von a; in dem Ausdruck $8bx$ ist 8 der Koeffizient von bx u. s. w. Hat ein Buchstab keine Zahl vor sich, so kann man sich den Koeffizienten 1 hingedenken, weil z. B. $ab=1ab$ ist.

Die Anfänger müssen sich wohl hüten, um die Koeffizienten mit den Exponenten nicht zu verwechseln; denn, um den Unterschied zwischen $3a$, und a^3 deutlicher einzusehen, sey $a=4$, so ist $3a=3.4=12$; und $a^3=4.4.4=16.4=64$.

§. 56.

Soll endlich eine mit Buchstaben geschriebene Größe wieder durch Buchstaben, oder durch eine Zahl, oder auch eine Zahl durch Buchstaben dividirt werden, so verbindet man selbe gehörig durch das Divisionszeichen; z. B. $a:b$, oder $\frac{a}{b}$ heißt, es soll der Werth von a durch den Werth von b dividirt werden; eben so heißt $\frac{a-b}{3}$, man soll b von a abziehen, und die Differenz durch 3 dividiren; imgleichen $\frac{a+x}{b-c}$ heißt, man soll die Summe von a und x durch die Differenz von b und c dividiren.

Noch

Noch kommt hier zu erinnern, daß die Buchstaben in Betreff der Stelle, wo sie stehen, gar keinen solchen Rang haben, wie die Ziffern im §. 6. und 7.; es ist nämlich einerley, ob man schreibet $a+b+c$, oder $a+c+b$, oder $b+a+c$ u. s. w.; so wie es auch einerley ist, ob man schreibt abc, acb, bca ...; denn es sey z. B. $a=4$, $b=7$, und $c=3$, so ist $4+7+3=3+4+7\ldots=14$; und $4\cdot7\cdot3=7\cdot3\cdot4=84$; wohl aber ist $a-b$ von $b-a$ zu unterscheiden; denn das erste heißt, man soll b von a, und das andere man soll a von b abziehen. Eben so muß auch $a:b$ von $b:a$ unterschieden werden, weil im ersten Falle a durch b, und im andern b durch a dividiret wird.

Anmerkung. Den Anfänger darf es nicht befremden, daß man mit Buchstaben rechnet, da man doch noch nicht weiß, was jeder Buchstab für einen Werth habe; denn derselbe darf sich nur erinnern, daß man mit den unbenannten Zahlen und Ziffern auch alle Rechnungsarten anstellet, ohne noch zu wissen, welche Größen als Einheiten zum Grunde liegen.

§. 57.

Jeder durch Buchstaben angeschriebene Ausdruck wird überhaupt eine **algebraische Größe** genennt; und zwar heißt solche eine **einfache**, oder **einnamige** algebraische Größe, wenn sie nur aus einem, oder auch aus mehreren Buchstaben besteht, welche nicht durch die Zeichen + und − aneinander hängen; so sind z. B. die Größen $3a$, $14ab$, $\frac{abd}{c}$ einnamige algebraische Größen. Besteht aber eine Größe aus mehreren Theilen, die durch die Zeichen + und − verbunden sind, so ist sie eine **mehrnamige** algebraische Größe, und zwar: sie ist eine **zwey**, **drey**, **viernamige** Größe, wenn sie aus 2, 3, 4 ... Theilen besteht; so ist z. B. $a+b$ eine zweynamige, $a+bc-5$ eine dreynamige, $\frac{ac}{b}$

$-18+cd-y$ eine viernamige algebraische Größe u. s. w. Die Theile einer algebraischen Größe werden auch die Glieder dieser Größe genennt; man sagt demnach, eine Größe bestehe aus 1, 2, 3, 4 . . . Gliedern.

Auch werden die algebraischen Größen **Funktionen** derjenigen Buchstaben genennt, die sich auf was immer für eine Art darinnen befinden; so z. B. sind die Größen $3a$, $a-x$, $ab+1$, $\frac{5}{a}$, Funktionen von a, so wie die zweyte auch zugleich eine Funktion von x, und die dritte auch eine Funktion von b ist.

§. 58.

Die Glieder einer algebraischen Größe heißen **gleichnamig**, oder **ähnlich**, wenn selbe vollkommen einerley Buchstaben, mit den nämlichen Exponenten, enthalten; nur die Zeichen und Koeffizienten können auch verschieden seyn; so z. B. sind $4ab^2c$, und $-3ab^2c$ gleichnamige Glieder. Eben so sind auch jene Glieder, die nur aus blossen Zahlen bestehen, gleichnamig. Bestehen aber die Glieder nicht vollkommen aus den nämlichen Buchstaben, so sind sie **ungleichnamige Glieder**. Es sind daher in der algebraischen Größe $3ab-3cb^2d+5ab-3cbd$ nur das erste und dritte Glied gleichnamig; hingegen das zweyte und vierte ungleichnamig, weil im vierten Gliede b nur den Exponenten 1 hat; so sind auch diese Glieder $3a^2b$ und $3ab^2$ ungleichnamig.

§. 59.

Es kommen in den algebraischen Rechnungen Größen vor, die einander ganz, oder zum Theil tilgen, in Anbetracht dessen, was man durch selbe zu bestimmen sucht. Z. B. man wollte die Verlassenschaft eines Verstorbenen berechnen, und es haben sich a Fl. baares Geld vorgefunden, und für die verkauften Geräthschaften sind gelöset worden

b Fl.; hingegen haben sich auch c Fl. Schulden vorgefunden, und die Begräbnißunkosten betragen d Fl. Hier sieht man nun, daß die Verlassenschaft durch die vier Größen a, b, c, und d bestimmt werden muß, welche alle einerley Einheiten, nämlich Gulden bedeuten, aber in dieser Rechnung gerade einander entgegen gesetzt sind; denn die ersten zwey a, b sind der Verlassenschaft zum Vortheil, und die letztern zwey, c, d sind derselben zum Nachtheil, nämlich vermindern dieselbe. Solche Größen, deren gleich grosse Theile einander tilgen, werden in einer Rechnung **entgegengesetzte Größen** genennt, und zwar jene, welche der daraus zu bestimmenden Größe zum Vortheile dienen, oder dieselbe vermehren, heißen **positive** (bejahende) Größen; und jene, welche der daraus zu bestimmenden Größe zum Nachtheile dienen, oder dieselbe vermindern, werden **negative** (verneinende) Größen genennt; und damit man in einer Rechnung die positiven Größen von den negativen unterscheiden kann, ist es am natürlichsten die positiven Größen mit dem Additionszeichen $+$, und die negativen mit dem Subtraktionszeichen $-$ zu bezeichnen, weil erstere die zu bestimmende Größe vermehren, nämlich dazu addirt werden müssen, und letztere dieselbe vermindern, und davon subtrahirt werden sollen. In unserem Beyspiele ist demnach die Verlassenschaft $= + a + b - c - d$, oder $= a + b - c - d$, weil das Zeichen $+$ im Anfange fast niemals angesetzt, sondern jederzeit schon darunter verstanden wird. Und so werden auch alle diejenigen Glieder einer algebraischen Größe, die das Zeichen $+$ vor sich haben **positiv**, und die das Zeichen $-$ vor sich haben, **negativ** genennt.

Es sey noch z. B. die Größe eines Bankerots zu bestimmen, wo sich nur a Fl. Vermögen, hingegen b Fl. Schulden vorgefunden haben; so ist die Größe des Bankerots $= b - a$ Fl.; weil die vorgefundene a Fl. Vermögen den Bankerot vermindern. Man sieht hieraus, daß auch ein wirkliches Vermögen eine negative Größe seyn kann, wenn es der dadurch zu bestimmenden Größe zum Nachtheil ist, und eine Verminderung verursacht. **Positive und negative Größen sind demnach gerade einander entgegengesetzte Größen in einer Rechnung**, so daß, wenn die eine ein Vermögen, eine Erhöhung, eine Bewegung gegen die Rechte u. d. gl. vorstellet, die andere eine dem Vermögen entgegengesetzte Schuld, eine Vertiefung, eine Bewegung gegen die Linke u. s. w. bedeutet.

§. 60.

Wäre nun in dem letzten angeführten Beyspiele das vorgefundene Vermögen $a = 8000$ Fl., und die vorgefundene Schuld b ebenfalls $= 8000$ Fl.; so ist die Größe des Bankerots $= 8000 - 8000 = 0$; weil das Vermögen die Schuld gänzlich tilget. Wäre aber das Vermögen $a = 6000$, und die Schuld $b = 8000$, so ist der Bankerot $= 8000 - 6000 = 2000$; weil die 6000 Fl. Vermögen eben so viel an der Schuld tilgen. Wäre hingegen das Vermögen $a = 9000$ Fl. und die Schuld $b = 8000$ Fl., so ist die Größe des Bankerots $= -1000$ Fl.; nämlich es bleiben dem Schuldner, nach Tilgung aller Schulden, noch 1000 Fl. Vermögen übrig; das heißt, **wenn positive und negative Größen in einer Rechnung vorkommen, so tilget die kleinere in der größern so viele Einheiten, als sie selbsten hat; sind aber beyde gleich groß, so tilgen sie einander gänzlich.**

Befinden sich mehrere positive und negative Größen in einer Rechnung, so tilget die kleinere Summe in der größern so viele Einheiten als sie deren selbsten hat.

§. 61.

Sind nun algebraische Größen, welche aus positiven und negativen Gliedern bestehen, zu addiren, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe alle Glieder der zu addirenden Größen mit ihren Zeichen in einer Zeile, oder auch in mehreren

Zeilen untereinander dahin, weil algebraisch addiren eigentlich nichts anders heißt, als die Größen mit ihren Zeichen zusammenfügen; denn es sey zu $a+b$ die Größe $c-d$ zu addiren, so ist klar, daß die Summe $=a+b+c-d$ ist; denn würde man $+d$ statt $-d$ setzen, so wäre die Größe $a+b$ um die Summe von c und d vermehrt worden, da doch eigentlich der Sinn ist, daß sie nur um die Differenz von c und d vermehrt werden soll.

2) Suche man die gleichnamigen Glieder auf (§. 58.); und hat man deren zwey gefunden, so sehe man auf ihre Zeichen.

3) Sind dir Zeichen gleich, nämlich in beyden gleichnamigen Gliedern + oder in beyden −, so addire man nur die Koeffizienten mit Beybehaltung des gemeinschaftlichen Zeichens, und die Buchstaben werden nur einmal mit ihren Exponenten geschrieben; so ist z. B. $3a^2b+5a^2b=8a^2b$; imgleichen $-9d^3x-12d^3x=-21d^3x$. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehe man den kleinern Koeffizienten von dem größern ab, mit Beybehaltung des größern Zeichens, und der gemeinschaftlichen Buchstaben; z. B. $+5ab-2ab=3ab$; imgleichen $4ax^2-9ax^2=-5ax^2$. Haben endlich beyde Glieder gleiche Koeffizienten, und verschiedene Zeichen, so lasse man beyde Glieder gänzlich hinweg; z. B. $4ab-4ab=0$. Alles dieses erhellet aus (§. 60.)

4) Die ungleichnamigen Glieder aber schreibe man in der Summe mit ihren Zeichen dahin.

Beyspiele.

I. Zu addiren $\begin{cases} 3ab+2ac+3d^2g \\ 2ab-5ac-3dg^2 \end{cases}$

Sum. $5ab-3ac+3d^2g-3dg^2$.

II. Zu addiren $\begin{cases} 8ax-3bc-5dx+12 \\ -ax+7bc+2dx-8 \end{cases}$

Sum. $7ax+4bc-3dx+4$.

III.

III. Zu addiren $\begin{cases} a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{cases}$

Sum. $2a^3 + 6ab^2$.

IV. $a^3 + 2ax + x^2 - a^3 + 2ax - x^2 = 4ax$.

V. $a^m b^2 + 2c^3 x^{m+1} - 3c^3 x^{m+1} + 10a^m b^2$
$= 11a^m b^2 - c^3 x^{m+1}$

§. 62.

Bey der Subtraktion der algebraischen Größen merke man folgendes:

Man verändere die Zeichen aller Glieder bey der abzuziehenden Größe, nämlich — in +, und + in — und addire sodann nach dem vorigen (§. 61.) diese veränderte Größe zu derjenigen, von welcher sie abzuziehen ist, so wird man die gehörige Differenz haben.

Beyspiele.

I.	II.	III.	IV.
von a	von a	von $-a$	von $-a$
abzuz. b	abzuz. $-b$	abzuz. $+b$	abzuz. $-b$
Diff. $a-b$	Diff. $a+b$	Diff. $-a-b$	Diff. $-a+b$

Daß bey der Subtraktion das Zeichen + in — verwandelt werden muß, daran wird Niemand zweifeln; aber auch daß — in + verändert werden müsse ist leicht einzusehen; denn die Differenz muß nach (§. 24.) so beschaffen seyn, daß, wenn man selbe zur Größe, welche man abgezogen hat, addiret, die Größe, von welcher man abgezogen hat, zum Vorschein komme, **nämlich die Differenz zum Subtrahendus (§. 24.) addirt, muß den Minuendus wieder** herstellen; würde man nun in dem Beyspiele II. in der Differenz $a - b$ setzen, so wäre $a - b - b = a - 2b$; setzt man aber in der Differenz $a + b$, so ist $a + b - b = a =$ der Größe, von welcher man abgezogen hat. **Es heißt daher eine Größe algebraisch subtrahiren nichts anders, als eben diese Größe mit verkehrten Zeichen hinzu addiren.**

Noch einige Beyspiele zur Uebung.

VI. von $a^2 b - 4c$
ist abzuziehen $5a^2 b - dc - 4c$
die Zeichen geändert $-\quad + \quad +$

Differenz $= -4a^2 b + dc$.

VII. von $5ax - x^2 - 3a - 9$
ist abzuziehen $3ax + x^2 + 30 - 3a - 5b$
die Zeichen geändert $-\quad -\quad -\quad +\quad +$

Differenz $= 2ax - 2x^2 - 39 + 5b$.

VIII. von $5a^m x^2 - 20 + 7ab^3 x - 4b^m cx^2$
ist abzuziehen $2b^m cx^2 + 5a^m x^2 + 8 - 2a^3 bx$
die Zeich. geänd. $-\quad -\quad -\quad +$

Differenz $= -28 + 7ab^3 x - 6b^m cx^2 + 2a^3 bx$.

§. 63.

Ist eine mehrnamige algebraische Größe mit einer einnamigen zu multipliziren, so multiplizire man jedes Glied der mehrnamigen Größe mit der einnamigen; weil es einerley ist, ob man das Ganze, oder jeden seiner Theile insbesondere multipliziret (§. 29. Grundsatz 1.), allwo man jederzeit die in beyden Faktoren verschiedenen Buchstaben in alphabetischer Ordnung dicht hintereinander anschreibt vermög (§. 55.); nur beobachte man dabey auch noch folgende Regeln.

1)

1) Sind beyde Glieder, die miteinander zu multipliziren sind, positiv, so ist ohne Zweifel auch das Produkt positiv; z. B. $+a \times +b = +ab$.

2) Wäre ein Glied negativ, und das andere positiv, so ist das Produkt negativ; z. B. $-a \times +b = -ab$, welches aus folgendem erhellet:

es ist $+a = 2a - a$

und $+b = +b$

also auch $+ab = +2ab - ab$, vermög (§. 29. Grundsatz 1.); denn würde man im Produkte rechts das letzte Glied $+ab$ setzen, so wäre $+2ab + ab$ nicht gleich $+ab$, welches doch vermög (§. 29. Grundsatz 1.) seyn muß.

3) Sind aber beyde Glieder negativ, so ist das Produkt positiv; z. B. $-a \times -b = +ab$;

denn es ist $a = 2a - a$

und $-b = -b$

also auch $-ab = -2ab + ab$ vermög (§. 29. Grundsf. 1.); denn würde man hier im Produkte rechts das letzte Glied $-ab$ setzen, so wäre $-2ab - ab$ nicht gleich $-ab$, welches doch wieder vermög des angeführten Grundsatzes seyn muß. Hieraus fließt nun die Regel: **gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche aber ein negatives Produkt.**

4) Die Koeffizienten beyder Glieder werden miteinander multipliziret; so ist z. B. $2a \times 3cd = 6acd$; $4a \times -5b = -20ab$; $-3a \times -5bc = +15abc$.

5) Haben beyde Glieder gleiche Buchstaben, so wird im Produkte jeder gemeinschaftliche Buchstab nur einmal geschrieben, und die Exponenten dieses Buchstabens werden zusammen addiret; z. B. $4a^3 \times 5a^2 = 20a^5$; denn es ist $4a^3 \times 5a^2 = 4 \cdot 5 \cdot aaa \cdot aa = 20 \cdot aaaaa = 20a^5$ (§. 55.); eben so ist $ab^2 \times -4abc = -4a^2b^3c$.

Beyspiele.

I. $(2a - 3a^2b + bc^2) \times 6ab^2d$
$= 12a^2b^2d - 18a^3b^3d + 6ab^3c^2d.$

II. $(a^3 - 3a^2b + 4ab^2) \times -2ab^2c$
$= -2a^4b^2c + 6a^3b^3c - 8a^2b^4c.$

III. $(4a - 30 + b^2c^m) \times 5ab^nc$
$= 20a^2b^nc - 150ab^nc + 5ab^{n+2}c^{m+1}.$

§. 64.

Sind aber beyde Faktoren mehrnamige Größen, so multiplizire man mit jedem Gliede des einen Faktors rechts oder links angefangen den ganzen anderen Faktor nach den im vorigen (§. 63.) gegebenen Regeln, so hat man das richtige Produkt vermög (§. 29.), wo man nur noch die etwa darin befindlichen gleichnamigen Glieder reduziren darf.

Beyspiele.

I. $\left.\begin{array}{r} 3a^2 - 2ax + x^2 \\ 2a - 3x \end{array}\right\}$ Faktoren

Prod. $= 6a^3 - 4a^2x + 2ax^2 - 9a^2x + 6ax^2 - 3x^3$
$= 6a^3 - 13a^2x + 8ax^2 - 3x^3.$

II. $\left.\begin{array}{l} a^m + b^x - 2c^n \\ 2a^m - 3b \end{array}\right\}$ Fakt.

Prod. $2a^{2m} + 2a^mb^x - 4a^mc^n - 3a^mb - 3b^{x+1} + 6bc^n.$

III. $\left.\begin{array}{l} 2a^{3-2m}bc^{m-2} - 5a^{-2}b^{m+1} \\ 3a^{4m-5}b^{2m}c^{3-4m} - 6 \end{array}\right\}$ Fakt.

Prod. $= 6a^{2m-2}b^{2m+1}c^{1-3m} - 15a^{4m-7}b^{3m+1}c^{3-4m}$
$- 12a^{3-2m}bc^{m-2} + 30a^{-2}b^{m+1}.$

§. 65.

§. 65.

Wenn eine einnamige algebraische Größe wieder durch eine einnamige zu dividiren ist, so kann die Division nur damals wirklich verrichtet werden, wenn sich alle Buchstaben des Divisors in dem Dividendus befinden, und zwar nach folgenden Regeln.

1) Gleiche Zeichen geben einen positiven, ungleiche aber einen negativen Quotienten.

2) Der Koeffizient des Dividendus wird durch den Koeffizienten des Divisors dividiret.

3) Die Buchstaben, welche im Divisor und Dividendus mit dem nämlichen Exponenten enthalten sind, werden in dem Quotienten ganz hinweg gelassen; sind aber die Exponenten verschieden, so wird der Exponent des Divisors von jenem des Dividendus abgezogen.

4) Die übrigen Buchstaben des Dividendus, welche der Divisor nicht zugleich gemein hat, werden im Quotienten mit ihren Exponenten angesetzt; so ist z. B. $12ab : 3a = 4b$;

$$5a^2b^3cd : -ab^2d = -5abc;$$
$$-8a^mb^3c : -2ab^n = +4a^{m-1}b^{3-n}c;$$
$$-15a^3b : 5a^3b = -3;\ a^mb^{1-n} : a^mb^{1-n} = 1.$$

Die Richtigkeit dieser Regeln erhellet daraus, weil das Produkt aus dem Quotienten in den Divisor jederzeit den Dividendus zum Vorschein bringen muß (§. 44.)

Wären aber nicht alle Buchstaben des Divisors in dem Dividendus enthalten, so kann die Division nicht wirklich verrichtet werden; sondern man deutet in diesem Falle die Division durch den liegenden Strich (§. 37.) an, und man kann diejenigen Faktoren, die der Divisor und Dividendus gemein haben, ganz hinweg lassen (§. 40.); z. B.

$$5ab^2 : 3b^2c = \frac{5a}{3c};\ 6a^2b : -2ac = -\frac{3ab}{c}$$

§. 66.

Besteht der Dividendus aus mehr Gliedern, der Divisor aber nur aus einem einzigen Gliede, so dividire man nach den erstgegebenen Regeln jedes Glied durch den Divisor, wenn solcher in jedem Gliede des Dividendus enthalten ist; im Gegentheile kann die Division entweder nur allein angezeigt, oder zum Theil verrichtet, und zum Theil angezeigt werden; z. B.

$$(6a^2b - 10ax) : 2a = 3ab - 5x.$$

$$(4a^2b - 2x + 3a) : 2b = 2a^2 - \frac{x}{b} + \frac{3a}{2b}.$$

§. 67.

Sind aber beyde, Divisor und Dividendus, zusammengesetzte Größen, so verfahre man auf folgende Art:

1) Mit dem ersten Gliede des Divisors dividire man in ein Glied des Dividendus, so hat man den ersten Theil des Quotienten; mit diesem Quotienten multiplizire man den ganzen Divisor, und ziehe das Produkt von dem Dividendus ab.

2) In dem Reste wähle man wieder ein Glied, in welchem das erste Glied des Divisors enthalten ist, und dividire solches, so hat man den zweyten Theil des Quotienten, welcher mit seinen Zeichen zum ersten hinzugefügt wird; mit diesem gefundenen zweyten Theile des Quotienten multiplizire man den ganzen Divisor, und ziehe das Produkt vom Dividendus ab; den Rest dividire man wieder durch das erste Glied des Divisors u. s. w.

3) Kommt man nun durch diese Operation einmal zu Ende, nämlich daß alles genau aufgehet, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor im Dividendus genau enthalten sey; im Gegentheile muß man den noch vorhandenen Rest mit dem unterschriebenen Divisor an den Quotienten mittels ge-

hörigen Zeichens + oder − anhängen, wie bey der Division mit Zahlen (§. 41. N. 5.)

Beyspiele.

$$\text{I. } (b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 - 3b^2cx^4 + 9b^2x^5) : (b^2cx - 3b^2x^2) = cx - 3x^3$$

$$\begin{array}{l} +\,b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 \\ -\qquad\quad + \\ \hline -3b^2cx^4 + 9b^2x^5 \\ -3b^2cx^4 + 9b^2x^5 \\ +\qquad\quad - \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

$$\text{II. } (12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4) \text{ Divid.}$$

$$:(3a^2b - 6abc + 3bc^2) \text{ Divis.} \qquad = 4a^2 - 5c^2$$

$$\begin{array}{l} +\,12a^4b - 24a^3bc + 12a^2bc^2 \\ -\qquad\quad +\qquad\quad - \\ \hline -15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 \\ -15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 \\ +\qquad\quad -\qquad\quad + \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

$$\text{III. } (a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$$

$$\begin{array}{l} +\,a^3 - a^2b \\ -\quad + \\ \hline \quad +\,a^2b - b^3 \\ \quad +\,a^2b - ab^2 \\ \quad -\quad + \\ \hline \qquad +\,ab^2 - b^3 \\ \qquad +\,ab^2 - b^3 \\ \qquad -\quad + \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

IV. $(6a^2 - x^2 - ax + ab) : (3a + x) = 2a - x + \frac{ab}{3a + x}$

$$\begin{array}{l} +6a^2 + 2ax \\ \;\,- \quad\;\; - \\ \hline \qquad -3ax - x^2 + ab \\ \qquad -3ax - x^2 \\ \qquad\;\, + \qquad + \\ \hline \qquad\qquad +ab \end{array}$$

§. 68.

Es ereignet sich aber bey den algebraischen Divisionen meistens, daß der Divisor im Dividendus nicht genau enthalten ist, und deswegen werden auch die algebraischen Divisionen gar selten wirklich verrichtet, sondern meistens nur angezeiget. Um aber die Rechnung doch zuweilen etwas abkürzen zu können, pflegt man den Divisor und Dividendus in ihre Faktoren zu zerlegen; das heißt man betrachtet jedes als ein Produkt, und suchet die Faktoren auf, durch deren Multiplikation sie entstanden sind. Haben nun Divisor und Dividendus einen oder mehrere gleiche Faktoren, so kann man solche vermög (§. 40.) ganz hinweg lassen, weil dadurch beyde durch eine nämliche Größe dividiret werden. So ist z. B.

$$(ax + x^2) : (2bx - cx) = x(a + x) : x(2b - c) = \frac{a + x}{2b - c};$$

$$(ax - a) : (3bx - 3b) = a(x - 1) : 3b(x - 1) = \frac{a}{3b};$$

$$(6a^2b + 3ax^2) : (12ax - 9a^2c) = 3a(2ab + x^2) : 3a(4x - 3ac)$$
$$= \frac{2ab + x^2}{4x - 3ac}.$$

Wie

Wie aber eine Größe sich in Faktoren zerlegen läßt, kann am besten durch eine aufmerksame Uebung erlernet werden.

Folgende Beyspiele können zum Theil zur Richtschnur dienen:

1. $2abx - 3dgx = x(2ab - 3dg)$.

2. $6ab^2 - 12abc - 3ab = 3ab(2b - 4c - 1)$.

3. $ax \pm x^2 = x(a \pm x)$.

4. $(y \pm by) = y(1 \pm b)$.

5. $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
$= a(a+b) + b(a+b) = (a+b)(a+b)$.

6. $c^2 - 2cy^2 + y^4 = c^2 - cy^2 - cy^2 + y^4 = c(c-y^2) - y^2(c-y^2)$
$= (c-y^2).(c-y^2) = (c-y^2)^2$.

7. $a^2 - x^2 = a^2 + ax - ax - x^2 = a(a+x) - x(a+x)$
$= (a+x)(a-x)$.

8. $a^4 - y^2 = (a^2+y)(a^2-y)$; $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$.

9. $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x^2 + x + 2x + 2)$
$= x[x(x+1) + 2(x+1)] = x(x+1)(x+2)$.

10. $2y^3 + 3y^2 + y = y(2y^2 + 3y + 1) = y(2y^2 + 2y + y + 1)$
$= y[2y(y+1) + (y+1)] = y(y+1)(2y+1)$.

11. $n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n^2 - n - 2n + 2)$
$= n[n(n-1) - 2(n-1)] = n.(n-1)(n-2)$.

12. $2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n = n(2n^2 + 3mn + 3m - 2)$
$= n(2n^2 - 2 + 3mn + 3m)$
$= n[2(n^2 - 1) + 3m(n + 1)]$
$= n[2(n + 1).(n - 1) + 3m(n + 1)]$
$= n(n + 1)(2n - 2 + 3m).$

13. $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$
$= 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$
$= c^2(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2) - c^4 - (a^2 - b^2)^2$
$= c^2[(a + b)^2 + (a - b)^2] - c^4 - (a - b)^2(a + b)^2$
$= c^2(a + b)^2 - c^4 - (a - b)^2(a + b)^2 + c^2(a - b)^2$
$= c^2[(a + b)^2 - c^2] - (a - b)^2[(a + b)^2 - c^2]$
$= [(a + b)^2 - c^2].[c^2 - (a - b)^2]$
$= (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b).$

Eine allgemeine Regel wird weiter hinten in der siebenten Vorlesung bey den höhern Gleichungen gegeben werden, um die Faktoren einer zusammengesetzten algebraischen Größe zu bestimmen. Man thut aber öfters sehr gut, wenn man die in den Rechnungen vorkommenden zusammengesetzten Multiplikationen nicht jederzeit wirklich verrichtet, sondern solche nur andeutet, damit man die Faktoren jederzeit vor Augen habe, und solche bey einer vorzunehmenden Abkürzung nicht erst suchen darf.

§. 69.

Es ist auch öfters erforderlich, die Faktoren einer gegebenen Zahl zu bestimmen, das ist, diejenigen Zahlen aufzusuchen, durch welche sich eine gegebene Zahl ohne Rest theilen läßt; hiezu können folgende Regeln angemerket werden.

1) **Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0, 2, 4, 6, 8, ist, läßt sich genau durch 2 theilen.**

Daß jede der einfachen Zahlen 2, 4, 6, 8, wie auch 10, und jedes Vielfache von 10 durch 2 theilbar sey, ist für sich klar; bey andern größern Zahlen von der angeführten Beschaffenheit z. B. bey 918 erhellet es daher, weil $918=910+8$ ist, wo nun jeder Theil 910 und 8 einzeln betrachtet, und daher auch ihre Summe oder das Ganze 918 durch 2 theilbar ist. Man nennt solche Zahlen, die sich durch 2 ohne Rest dividiren lassen, **gerade Zahlen**, und jene, welche sich durch 2 nicht theilen lassen, werden **ungerade Zahlen** genennt.

2. **Wenn man alle Ziffern einer Zahl, ohne auf ihren Rang zu sehen, zusammen addiret, und die Summe davon läßt sich genau durch 3 theilen, so läßt sich auch die Zahl durch 3 ohne Rest theilen; und wenn diese Summe durch 9 theilbar ist, so ist auch die Zahl selbst durch 9 theilbar.** Z. B. da bey der Zahl 4281 die Summe der Ziffern $4+2+8+1=15$ durch 3 theilbar ist, so ist auch die Zahl 4281 selbst durch 3 theilbar; und da bey der Zahl 45216 die Summe der Ziffern $4+5+2+1+6=18$ durch 9 theilbar ist; so läßt sich auch diese Zahl 45216 selbst durch 9 genau theilen. Um dieses allgemein einzusehen, benenne man die Ziffern einer Zahl von der Rechten gegen die Linke mit a, b, c, d, e u. s. w., so ist (§. 6.) die Zahl selbsten $=a+10b+100c+1000d \ldots\ldots$ $=a+(9+1)b+(99+1)c+(999+1)d+\ldots\ldots$ $=a+9b+b+99c+c+999d+d+\ldots$ woraus man sieht, daß sich die Glieder $9b$, $99c$, $999d \ldots$ jedes insbesondere durch 3 und durch 9 theilen lassen; wenn daher die Summe aller Ziffern $a+b+c+d \ldots$ ebenfalls durch 3 oder 9 theilbar ist, so ist auch die ganze Zahl durch 3, oder 9 theilbar; denn wenn jeder Theil eines ganzen durch irgend eine Größe genau theilbar ist, so ist auch das Ganze durch eben diese Größe genau theilbar.

3. **Wenn die zwey letzten Ziffern einer Zahl durch 4 theilbar sind, so ist auch die Zahl selbst durch 4**

theilbar. Denn es ist z. B. $317572 = 317500 + 72$. Nun aber läßt sich jede Zahl, welche hinten 2 Nullen hat, durch 4 genau dividiren, weil $317500 = 3175 \cdot 100$, und 100 durch 4 theilbar ist; wenn daher die zwey letzten Ziffern 72 sich ebenfalls durch 4 theilen lassen, so ist auch die ganze Zahl durch 4 theilbar.

4) **Wenn die letzte Ziffer einer Zahl entweder 0 oder 5 ist, so läßt sich die Zahl durch 5 theilen**; denn ist die letzte Ziffer eine 0, so bilde man sich ein, die Zahl sey mit 10 multipliziret (§. 31.), und 10 ist durch 5 theilbar; ist aber die letzte Ziffer 5 z. B. 8735, so ist $8735 = 8730 + 5$, wo sowohl 8730 als auch 5, und folglich auch deren Summe durch 5 theilbar ist.

5) Soll eine Zahl durch 6 theilbar seyn, so muß sie auch durch 2 und durch 3 theilbar seyn, weil sowohl 2 als 3 in 6 genau enthalten ist; **wenn daher eine gerade Zahl durch 3 theilbar ist, so ist sie auch durch 6 theilbar.**

6) **Wenn die drey letzten Ziffern einer Zahl sich durch 8 theilen lassen, so ist auch die Zahl selbst durch 8 theilbar**; denn es ist z. B. $4678762 = 4678000 + 762 = 4678 \cdot 1000 + 762$; da nun 1000 durch 8 theilbar ist, so läßt sich das erste Glied jederzeit durch 8 theilen; es kömmt daher nur darauf an, daß die letzten drey Ziffern durch 8 theilbar sind.

7) **Hat eine Zahl am Ende eine 0, so ist sie durch 10 theilbar** (§. 42. N. 5.).

8) **Will man untersuchen, ob eine Zahl sich durch 11 dividiren lasse, so addire man die Ziffern, die an der ersten, dritten, fünften, überhaupt die Ziffern, die an den ungeraden Stellen stehen; dann addire man auch die Ziffern zusammen, die an den geraden Stellen stehen, und ziehe eine Summe von der andern ab; ist nun die Differenz = 0, oder 11, 22, 33, 44, ... so läßt sich die Zahl durch 11 theilen.**

Denn

Denn wenn man eine Zahl z. B. 1432 mit 11 multipliziret, so schreibt man nur die Zahl einmal unter sich selbsten, und zwar so, daß die Einheiten unter die Zehner zu stehen kommen; dadurch kömmt jede Ziffer der Zahl sowohl in einer geraden als auch in einer ungeraden Stelle zu stehen; daher ist die Summe der geraden Stellen der Summe der ungeraden gleich. Ereignet sich aber, daß beym Addiren der Partialprodukte die Summe einer Stelle 10, 11, 12, ... 18 ist, (größer kann sie nicht seyn); so verliert dadurch diese Stelle 10 Einheiten, und die künftige Stelle gewinnt eine Einheit; daher ist der Unterschied 11; und so vielmal sich dieses bey einer Stelle der nämlichen Benennung, z. B. bey einer geraden Stelle ereignet, so vielmal eilf wird die Differenz seyn.

$$\begin{array}{r} 1432 \\ 1432 \\ \hline 15752 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8356 \\ 8356 \\ \hline 91916 \end{array}$$

9) Soll eine Zahl durch 12 theilbar seyn, so muß sie sich auch durch 3 und durch 4 theilen lassen.

Und so könnte man sich auch von allen übrigen Zahlen, z. B. von 7, 13, 17, gewisse Regeln machen, die aber theils wegen Mangel des Raumes hier nicht Platz finden können; theils auch weil solche Regeln zu weitläuftig sind, und mehrere Zeit zur Untersuchung, als zur Division selbst verwendet werden müßte. Läßt sich aber eine Zahl durch nichts, als durch die Einheit, und durch sich selbst theilen, so wird sie eine Primzahl genennt; so sind z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13 ... Primzahlen.

§. 70.

Wenn man eine Zahl in lauter solche Faktoren zerleget, welche Primzahlen sind, so sagt man, man habe die Zahl in ihre einfache Faktoren aufgelöset; die übrigen aber werden zusammengesetzte Faktoren genennt. So z. B. sind 2.2.2.3. die einfachen Faktoren von 24; hingegen sind 4.6 zusammengesetzte Faktoren dieser nähmlichen Zahl 24.

Sollen nun von einer gegebenen Zahl, z. B. von 330, sowohl alle einfache, als auch alle zusammengesetzte Faktoren aufgesucht werden, so verfahre man auf folgende Art.

330	2
165	3,6
55	5,10,15,30
11	11,22,33,66,55
	110,165,330.

Man dividire diese Zahl durch den kleinsten in ihr enthaltenen Faktor, und setze diesen Faktor rechts seitwärts hinter einen gezogenen Strich, den Quotienten aber unter die vorgegebene Zahl; dann dividire man wieder den Quotienten durch die möglichst kleinste Zahl, schreibe diesen Faktor oder Divisor unter den andern rechts, und den zweyten Quotienten unter den ersten; multiplizire auch die zwey Faktoren miteinander, und schreibe das Produkt darneben hin; den vorigen zweyten Quotienten dividire man abermal durch den kleinsten möglichen Faktor, schreibe diesen Faktor hinter den Strich unter die vorigen Faktoren, und multiplizire damit alle die vorigen schon gefundenen; und dieses setze man so lang fort, bis man zum Quotienten 1 erhält, so sind die Faktoren längst dem Striche herunter alle einfache, und die übrigen alle zusammengesetzte Faktoren. Im angeführten Beyspiele sind daher, 2 . 3 . 5 . 11 die einfachen, und 6, 10, 15, 30, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330 alle zusammengesetzte Faktoren der Zahl 330.

Zweyte Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

I. Abschnitt.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 71.

Ein **Bruch** ist eine Größe, welche einen oder mehrere gleiche Theile einer Einheit anzeiget. Z. B. wenn man einen Gulden, eine Klafter u. d. gl. in etliche gleiche Theile theilet, und einige solche Theile nimmt, so wird dieses in Rücksicht der ganzen Einheit ein **Bruch** genennt. Um einen Bruch auszudrücken sind also zwey Zahlen nöthig, wovon eine angiebt, in wie viele gleiche Theile man eine ganze Einheit theilen soll, die andere aber, wie viel solche Theile den Bruch ausmachen, oder genommen werden müssen. Jene heißt der **Nenner**, und diese der **Zähler** des Bruches. Beyde Zahlen unterscheidet man durch einen liegenden Strich; den Zähler setzt man über, und den Nenner unter den Strich. So sind z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{7}$ Brüche, wovon die Zähler 2, 4, 13, und die Nenner 3, 5, 7 sind; und werden ausgesprochen, **zwey Drittel, vier Fünftel, dreyzehn Siebentel.**

Die Brüche werden so wie die ganzen Zahlen (§. 9.) **unbenannte** Brüche genennt, wenn die Gattung der Einheit, auf welche sich ein Bruch bezieht, noch unbestimmt ist; im Gegentheile, wenn es schon bekannt ist, welche Einheit bey einem Bruche zum Grunde liege, so ist es ein **benannter** Bruch. Z. B. $\frac{2}{3}$ ist ein unbenannter Bruch, $\frac{2}{3}$ Fl. aber ist ein benannter Bruch, und bedeutet, daß man einen Gulden in drey gleiche Theile theilen, und 2 solche Theile nehmen solle.

§. 72.

Ist nun bey einem Bruche der Zähler kleiner als der Nenner, so ist es ein Zeichen, daß man nicht alle Theile der ganzen Einheit nehmen solle, und daher ist der Bruch < 1; solche Brüche werden **eigentliche**, oder **ächte** Brüche genennt; so sind z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ächte Brüche, so wie auch alle Reste der Divisionen (§. 41. N. 5.) ächte Brüche sind.

Ist aber der Zähler eines Bruches dem Nenner gleich, wie $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \ldots \frac{a}{a}$, so ist es ein Zeichen, daß alle Theile der Einheit genommen werden müssen; daher sind solche Brüche $= 1$.

Wenn endlich der Zähler eines Bruches größer ist, als der Nenner: und folglich mehrere Theile genommen werden müssen, als eine Einheit deren enthält, so werden solche Brüche **Afterbrüche**, oder **uneigentliche** Brüche genennt; z. B. $\frac{4}{3}, \frac{11}{2}, \frac{194}{26}, \frac{5a}{3a}$.

§. 73.

Ein Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ eines Guldens bedeutet vermög (§. 71.), daß 1 Fl. in vier gleiche Theile zu theilen, und der Quotient dreymal zu nehmen sey; nämlich

$\frac{3}{4}$

$$\tfrac{3}{4}\ \text{Fl.} = \frac{1\ \text{Fl.}}{4} + \frac{1\ \text{Fl.}}{4} + \frac{1\ \text{Fl.}}{4} = \frac{1\ \text{Fl.}}{4} \times 3;$$

es ist aber vermög (§. 39. Grundſ. 1.) auch

$$\frac{1\ \text{Fl.}}{4} + \frac{1\ \text{Fl.}}{4} + \frac{1\ \text{Fl.}}{4} = \frac{3\ \text{Fl.}}{4},$$

weil es einerley iſt, ob man das Ganze (1 Fl. + 1 Fl. + 1 Fl. = 3 Fl.), oder jeden Theil (1 Fl.) von eben dieſem Ganzen durch 4 dividiret; folglich iſt auch $\tfrac{3}{4}\ \text{Fl.} = \frac{3\ \text{Fl.}}{4}$ vermög (§. 12. Grundſ. 3.), nämlich **drey Viertel eines Guldens nehmen iſt eben ſo viel als drey Gulden in vier gleiche Theile zertheilen, und dieſen Quotienten einmal nehmen.** Eben dieſes gilt von jedem anderen Bruche. **Der Werth eines jeden Bruches iſt daher der Quotient, wenn man den Zähler durch den Nenner dividiret**

Es iſt hieraus zu erſehen, daß überhaupt jede nach (§. 37.) durch einen liegenden Strich angezeigte Diviſion als ein Bruch zu betrachten ſey, wo der Dividendus den Zähler, und der Diviſor den Nenner des Bruches vorſtellet.

§. 74.

Wenn man den Zähler eines Afterbruchs durch ſeinen Nenner wirklich dividiret, ſo erhält man für den Werth des Bruches eine bloſſe ganze Zahl, wenn der Nenner in dem Zähler genau enthalten iſt; im Gegentheile erhält man eine ganze Zahl nebſt einem Reſte nach (§ 41. N. 5.), der ein ächter Bruch ſeyn wird (§. 72.).

Um aber auch den Werth eines ächten Bruches jederzeit beſtimmt angeben zu können, iſt es, ſo wie bey der Rechnung mit ganzen benannten Zahlen, nothwendig zu wiſſen, was für Einheiten eigentlich zum Grunde liegen; nämlich wie viel Einheiten der nächſt kleineren Gattung, in einer solchen Einheit, worauf sich der Bruch bezieht, enthalten sind. Wenn man nun mit der Anzahl der Einheiten kleinerer Gattung den Zähler des Bruches multipliziret, und dieses Produkt durch den Nenner dividiret, so erhält man den Werth des Bruches in bekannten Einheiten kleinerer Gattung ausgedrückt; so z. B. ist

$$\frac{7}{15}\text{Fl.} = \frac{7 \cdot 60\ \text{Kr.}}{15} = \frac{420\ \text{Kr.}}{15} = 28\ \text{Kr.}$$

$$\frac{11}{24}\text{Fl.} = \frac{11 \cdot 60\ \text{Kr.}}{24} = \frac{660\ \text{Kr.}}{24} = 27\tfrac{12}{24}\ \text{Kr.}$$

$$= 27\ \text{Kr.} + \frac{12}{24}\ \text{Kr.} = 27\ \text{Kr.} + \frac{12.4\ \text{Dr.}}{24}$$

$$= 27\ \text{Kr.} + \frac{48}{24}\ \text{Dr.} = 27\ \text{Kr.}\ 2\ \text{Dr.}$$

$$\frac{23}{96}\text{Kl.} = \frac{23.6^{\text{I}}}{96} = \frac{138^{\text{I}}}{96} = 1\tfrac{42}{96}\ \text{Schuh} = 1^{\text{I}} + \frac{42 \cdot 12^{\text{II}}}{96}$$

$$= 1^{\text{I}} + \frac{504^{\text{II}}}{96} = 1^{\text{I}} + 5\tfrac{24}{96}\ \text{Zoll} = 1^{\text{I}} + 5^{\text{II}} + \frac{24 \cdot 12^{\text{III}}}{96}$$

$$= 1^{\text{I}} + 5^{\text{II}} + 3^{\text{III}}.$$

$$\frac{31}{64}\text{Pf.} = \frac{31 \cdot 32}{64}\text{Loth} = 15\tfrac{32}{64}\text{Loth} = 15\ \text{Loth} + \frac{32.4}{64}\ \text{Quintl}$$

$$= 15\ \text{Loth} + 2\ \text{Quintl.}$$

$$\frac{2}{240}\text{Stunden} = \frac{2.60}{240}\ \text{Min.} = \frac{120}{240}\ \text{Min.} = \frac{120 \cdot 60}{240}\ \text{Sek.}$$

$$= 30\ \text{Sekunden.}$$

§. 75.

Eine jede ganze Zahl kann zu einem Afterbruche von einem verlangten Nenner gemacht werden, wenn man die Zahl mit dem gegebenen Nenner multipliziret, und den Nenner unterschreibet; so ist z. B. $5 = \frac{5 \cdot 3}{3} = \frac{15}{3}$; $a = \frac{ab}{b}$.

Auch

Auch kann jede Zahl als ein Bruch vorgestellt werden, dessen Nenner = 1 ist; z. B. $4 = \frac{4}{1}$; $a = \frac{a}{1}$; $m + x = \frac{m+x}{1}$.

So kann auch jede ganze benannte Zahl als ein Bruch vorgestellt werden, die sich auf Einheiten der nächst größern Gattung bezieht, wenn man ihr diejenige Zahl als Nenner unterschreibt, welche anzeigt, wie viel Einheiten dieser Gattung in einer Einheit der größern Gattung enthalten sind. So ist z. B.

25 Kr. $= \frac{25}{60}$ Fl.;

5 Schuh $= \frac{5}{6}$ Klafter;

11 Loth $= \frac{11}{32}$ Pf.

§. 76.

Eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche aber wird zum Afterbruche gemacht, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner multiplizirет, zu dem Produkte den Zähler des Bruchs addiret, und den Nenner unterschreibet. So ist z. B.

$$11\tfrac{3}{5} = 11 + \frac{3}{5} = \frac{11 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{55}{5} + \frac{3}{5} = \frac{58}{5};$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}.$$

3 Fl. + 7 Kr. = 3 Fl. + $\frac{7}{60}$ Fl. = $3\frac{7}{60}$ Fl. = $\frac{187}{60}$ Fl.

4 Pf. 9 Loth = 4 Pf. + $\frac{9}{32}$ Pf. = $4\frac{9}{32}$ Pf. = $\frac{137}{32}$ Pf.

§. 77.

Wenn man bey ungeändertem Nenner den Zähler eines Bruches vermehret, so wird der Werth des Bruches vergrößert; vermindert man aber den Zähler, so wird der Werth des Bruches verkleinert; **und zwar der Bruch wird 2, 3, 4 . . . . n mal größer, wenn man den Zähler mit 2, 3, 4 . . . n multiplizieret; und 2, 3, 4 . . . n mal kleiner, wenn man denselben durch 2, 3, 4 . . . n dividiret.**

Denn der Zähler zeigt nach (§. 71.) an, wie viel Theile man für den Werth des Bruches nehmen soll. Vermehret man nun den Zähler, so werden mehr solche Theile genommen als vorhin; daher wird der Bruch größer; und zwar wird er zweymal so groß, wenn man zweymal so viel Theile, dreymal so groß, wenn man dreymal so viel Theile, und n mal so groß, wenn man n mal so viele Theile nimmt, das ist, wenn man den Zähler mit 2, 3 . . . n multiplizieret. Und aus dieser nämlichen Ursache wird der Bruch 2, 3 . . . n mal kleiner, wenn man bey unverändertem Nenner den Zähler durch 2, 3 . . . n dividiret, weil man dadurch 2, 3 . . . n mal weniger Theile nimmt.

Es ist darum bey zweyen Brüchen, welche gleiche Nenner haben, jener größer, welcher den größern Zähler hat; z. B. $\frac{8}{9} > \frac{7}{9}$; $\frac{22}{4} < \frac{23}{4}$.

§. 78.

Eben so wird auch der Werth eines Bruches 2, 3, 4 . . . n mal größer, wenn man bey unverändertem Zähler den Nenner durch 2, 3, 4 . . . n dividiret; hingegen 2, 3, 4 . . . n mal kleiner, wenn man den Nenner mit 2, 3, 4 . . . n multiplizieret.

Denn der Nenner zeigt an, in wie viel Theile das Ganze soll getheilt werden (§. 71.); vermehrt man nun den

Nen-

Nenner, so wird das Ganze in eine größere Anzahl Theile getheilet; daher wird jeder Theil kleiner, und zwar zweymal kleiner, wenn das Ganze in zweymal so viel Theile, dreymal kleiner, wenn das Ganze in dreymal so viel Theile getheilt wird, u. s. w.; daher wird auch der ganze Bruch $2, 3, 4 \ldots n$ mal kleiner, wenn man den Nenner mit $2, 3, 4 \ldots n$ multipliziret; und so umgekehrt, wenn man den Nenner dividiret.

Bey zweyen Brüchen, die gleiche Zähler und verschiedene Nenner haben, ist deswegen jener größer, welcher den kleinern Nenner hat; z. B. $\frac{4}{7} > \frac{4}{8} > \frac{4}{9}$.

§. 79.

Hingegen bleibt der Werth des Bruches ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit einer nämlichen Zahl multipliziret, oder dividiret.

Denn durch die Multiplikation des Zählers wird der Bruch größer, und durch die Multiplikation des Nenners wird der Bruch kleiner; wird nun Zähler und Nenner mit einer nämlichen Zahl multipliziret, so wird der Bruch durch die Multiplikation des Zählers so vielmal vergrößert, als er durch die Multiplikation des Nenners verkleinert wird; und folglich verbleibt er ungeändert. Eben so wird der Werth des Bruches durch die Division des Zählers eben so vielmal verkleinert, als er durch die Division des Nenners vergrößert wird; folglich bleibt er ebenfalls ungeändert. So ist

z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$; $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$; imgleichen

$\frac{25}{10} = \frac{25:5}{10:5} = \frac{5}{2}$.

Die Richtigkeit des angeführten Satzes, so wie auch im (§. 77. und 78.) erhellet auch übrigens aus (§. 40.), weil ein jeder Bruch als eine angezeigte Division anzusehen ist (§. 73.)

§. 80.

Einen Bruch **abkürzen** heißt ihm, ohne Veränderung seines Werthes, eine kleinere Gestalt verschaffen; und man erhält solches, wenn man nach (§. 69.) eine Zahl aufsuchet, welche sowohl im Zähler, als auch im Nenner genau enthalten ist, und sodann beyde dadurch dividiret; z. B.

$$\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{105}{210} = \frac{105:5}{210:5} = \frac{21}{42} = \frac{21:3}{42:3} = \frac{7}{14} = \frac{7:7}{14:7} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{30a^4b^2}{60a^2b^3c} = \frac{30a^4b^2 : 30a^2b^2}{60a^2b^3c : 30a^2b^2} = \frac{a^2}{2bc};$$

$$\frac{a^2 - y^2}{3a - 3y} = \frac{(a+y)(a-y)}{3(a-y)} = \frac{a+y}{3};$$

In der Ausübung kömmt man mit der Abkürzung der Brüche am geschwindesten fort, wenn man in der Zerlegung einer vorgelegten Größe in ihre Faktoren sich eine Fertigkeit erworben hat. **Denn wenn man die im Zähler und Nenner gemeinschaftlich befindlichen Faktoren ausstreichet**, so ist die Abkürzung schon fertig.

Beyspiele.

$$\frac{210}{1155} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{2}{11}$$

$$\frac{45}{180} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a^2x^3 - x^4}{a^2x + ax^2} = \frac{x \cdot x \cdot (a+x) \cdot (a-x)}{a \cdot x \cdot (a+x)} = \frac{x(a-x)}{a}$$

Läßt sich aber keine Zahl ausfindig machen, die sowohl im Zähler, als auch im Nenner genau enthalten ist, das ist, haben Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Faktor, so läßt sich auch der Bruch nicht abkürzen; und man sagt sodann, Zähler und Nenner sind **Primzahlen unter sich**. So z. B. sind die Zahlen 20 und 9 unter sich Primzahlen, weil man, ausser der Einheit, keine Zahl ausfindig machen kann, die in beyden genau enthalten ist, obwohl jede für sich keine Primzahl ist.

§. 81.

Eine Zahl, welche in zwey andern Zahlen genau enthalten ist, wird ihr **gemeinschaftliches Maaß** genennt; und zwar **das größte gemeinschaftliche Maaß**, wenn es keine größere Zahl giebt, die in beyden genau enthalten ist. So z. B. ist 6 ein gemeinschaftliches Maaß der Zahlen 24, und 36, aber nicht das größte gemeinschaftliche Maaß; weil beyde sich auch durch 12 theilen lassen. Um nun bey Abkürzung der Brüche sowohl des Zählers und Nenners größtes gemeinschaftliches Maaß finden zu können, als auch zu erfahren, ob solche unter sich Primzahlen sind, verfahre man auf folgende Art.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; geht die Division genau auf, so ist die kleinere Zahl selbst ein gemeinschaftliches Maaß; bleibt aber ein Rest übrig, so dividire man den vorigen Divisor durch diesen Rest; bleibt wieder ein Rest übrig, so dividire man wieder den letzten Divisor durch den letzten Rest, und so fahre man fort, bis kein Rest mehr übrig bleibt; diejenige Größe nun, durch welche man das letztemal ohne Rest dividiret hat, ist des Zählers und Nenners größtes gemeinschaftliches Maaß. Z. B.

Um das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 65 und 104 zu bestimmen, verfahre man also:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 2 & \\ 104 & : & 65 & : & 39 & : & 26 & : & 13 \\ \underline{65} & & \underline{39} & & \underline{26} & & \underline{26} & & \\ 39 & & 26 & & 13 & & 0 & & \end{array}$$

nämlich 104 : 65 giebt 39 zum Reste; 65 : 39 giebt 26 zum Reste; 39 : 26 giebt 13 zum Reste; endlich 26 : 13 geht genau auf; folglich ist 13 das größte gemeinschaftliche Maaß von 65 und 104. Es ist demnach $\frac{65}{104} = \frac{65:13}{104:13} = \frac{5}{8}$; und $\frac{104}{65} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$. Sollte aber bey diesem Verfahren die Division nicht eher zu Ende kommen, als bis der letzte Divisor = 1 ist; so ist es ein Zeichen, daß die vorgelegten Zahlen unter sich Primzahlen sind. Z. B. wenn für die zwey Zahlen 361 und 1495 das größte gemeinschaftliche Maaß nach der eben gezeigten Art gesucht wird,

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 4 & & 7 & & 12 & & 1 & & 3 & \\ 1495 & : & 361 & : & 51 & : & 4 & : & 3 & : & 1 \\ \underline{1444} & & \underline{357} & & \underline{48} & & \underline{3} & & \underline{3} & & \\ 51 & & 4 & & 3 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

so zeigt es sich, daß die zwey vorgelegten Zahlen 361 und 1495 ausser 1 kein anderes gemeinschaftliches Maaß haben, und daß sie daher Primzahlen unter sich sind.

Die Richtigkeit dieser gegebenen Regel läßt sich auf folgende allgemeine Art erweisen.

1) Es sey die größere Zahl = a und die kleinere = b;

2) a durch b dividirt gebe p zum Quotienten und c zum Reste, nämlich $\frac{a}{b} = p + \frac{c}{b}$; so ist vermög (§. 44.) $a = bp + c$.

3) Der vorige Divisor b durch den Rest c getheilet, gebe q zum Quotienten und d zum Reste, nämlich $\frac{b}{c} = q + \frac{d}{c}$; so ist wieder vermög (§. 44.) $b = cq + d$.

4) Und nun wieder der vorige Divisor c durch den zugehörigen Rest d getheilet, gebe r zum Quotienten und e zum Reste; nämlich $\frac{c}{d} = r + \frac{e}{d}$; so ist vermög (§. 44.) $c = dr + e$.

5) Endlich der vorige Divisor d durch den zugehörigen Rest e getheilet gebe den Quotienten s ohne Rest; nämlich $\frac{d}{e} = s$, so ist vermög (§. 44.) $d = es$.

6) Und nun läßt sich leicht zeigen, daß nur der Divisor e allein, womit zuletzt die Division genau aufgieng, in beyden vorgelegten Zahlen a und b genau enthalten, und ihr größtes gemeinschaftliches Maaß sey.

7) Denn, da in N. 5. $d = es$ ist, so ist auch (wenn man diesen Werth in N. 4. statt d setzet) vermög (§. 12. Grundſ. N. 2.) $c = ers + e$.

8) Aus der nämlichen Ursache ist (wenn man itzt den eben gefundenen Werth für c in N. 3. setzet) $b = eqrs + eq + d$; und wenn man ferner auch für d den Werth aus N. 5. setzet $b = eqrs + eq + es$.

9) Und endlich ist, wenn man den eben bestimmten Werth für b in N. 2. setzet, $a = epqrs + epq + eps + c$; und ferner, wenn man hier statt c den Werth aus N. 7. setzet $a = epqrs + epq + eps + ers + e$.

10) Zerlegt man nun die in N. 3 und 9 gefundenen Werthe für a und b in Faktoren, so ist

$$a = e(pqrs + pq + ps + rs + 1) \text{ und}$$
$$b = e(qrs + q + s)$$

woraus es zu ersehen ist, daß die zwey vorgelegten Zahlen a und b ausser dem letzten Divisor e keinen andern gemeinschaftlichen Faktor haben; einen kleinern z. B. $\frac{e}{2}$, $\frac{e}{3}$ können sie wohl haben, keineswegs aber einen größern, etwa $2e$, $3e$ u. s. w. Es ist nämlich wohl begreiflich, daß zwey Zahlen, z. B. 72 und 48, wenn solche durch 24 theilbar sind, auch beyde durch 12, 8, 6 als die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel von 24, keineswegs aber auch durch 48, 72, 96 als das Doppelte, Dreyfache, Vierfache vom nämlichen Divisor 24 theilbar seyn müssen. Wenn nun $e = 1$ wäre, so sind a und b Primzahlen unter sich. Es ist hier angenommen worden, daß bey der vierten Division der Divisor in dem zugehörigen Dividendus genau enthalten sey; die Schlußfolge bleibt immer die nämliche, wenn sich solches entweder früher oder auch später zuträgt.

Scharfsinnige Anfänger können es versuchen die nämliche Schlußfolge zu machen, wenn erst bey der fünften, oder sechsten Division, der Divisor in dem Dividendus genau enthalten ist; diejenigen Anfänger aber, deren Verstandeskräfte durch die bisher gegebenen Gründe, noch nicht hinlänglich entwickelt sind, um bey dergleichen algebraischen Arbeiten die Schlußfolgen deutlich einzusehen, können den gegebenen Beweis indessen übergehen, und solchen in der Folge nach abgehandelter Lehre von den Gleichungen nachholen.

Anmerkung. Daß durch den Divisor e, womit zuletzt die Division genau aufgieng, beyde vorgelegte Größen a und b genau theilbar seyn, läßt sich auch mittelst nachstehender zwey bekannten, zum Theil schon oben im (§. 69.) gebrauchten Sätze erweisen.

I. Wenn jeder Theil einer Summe durch irgend eine nämliche Größe theilbar ist, so ist auch die ganze Summe durch die nämliche Größe theilbar. Eben so wenn sowohl die ganze Summe als auch ein Theil dieser Summe durch irgend eine nämliche Größe theilbar ist, so ist auch der andere Theil dieser nämlichen Summe durch eben dieselbe Größe theilbar. Z. B. weil bey $18 + 12 = 30$ sowohl 18 als 12 durch 6 theilbar ist, so ist auch 30 durch 6 theilbar; und weil bey $14 + 21 = 35$ sowohl 35 als auch 14 durch 7 theilbar ist, so ist auch 21 durch 7 theilbar.

II. Wenn ein Faktor eines Produktes durch irgend eine Größe theilbar ist, so ist auch das Produkt durch die nämliche Größe theilbar. Z. B. weil bey $37 \cdot 14 \cdot 3 = 1554$ der Faktor 14 durch 7 theilbar ist, so ist auch das Produkt 1554 durch 7 theilbar.

Da nun im (§. 81. N. 5.) d durch e theilbar ist, so ist wegen II. auch dr, und wegen I. auch $dr + e$ nämlich c in N. 4. durch e theilbar; daher ist wegen II. auch cq, und wegen I. auch $cq + d$ nämlich b in N. 3. durch e theilbar; weil nun b durch e theilbar ist, so ist wegen II. auch bp durch e theilbar; c war auch durch e theilbar; folglich ist wegen I. auch $bp + c$ nämlich a in N. 2. ebenfalls durch e theilbar. Es sind daher beyde Größen a und b durch e theilbar, wenn zuletzt mit e die Division genau aufgeht.

Um nun auch zu erweisen, daß e das größte gemeinschaftliche Maaß von a und b sey, muß man noch darthun, daß die zwey Größen a und b durch eine andere Größe f, wenn $f > e$ ist, gar nicht theilbar seyn können; dieses kann auf folgende Art geschehen.

Es sey $f > e$, und wenn es möglich ist, so sey sowohl a als auch b durch f theilbar, so ist $bp + c$ in N. 2. und $cq + d$ in N. 3. durch f theilbar; es ist aber wegen II. auch bp durch f theilbar; folglich ist wegen I. auch c in

N.

N. 2., und wegen II. auch cq in N. 3. durch f theilbar; da nun in N. 3. sowohl b als auch cq durch f theilbar ist, so ist eben daselbst wegen I. auch d, und ferner wegen II. auch dr in Nr. 4. durch f theilbar; da endlich in N. 4. sowohl c als auch dr durch f theilbar ist, so ist wegen I. auch e in Nr. 4. durch f theilbar, welches unmöglich ist, weil $f > e$ angenommen wurde; folglich ist auch unmöglich, daß sowohl a als auch b beyde zugleich durch f theilbar seyn können, wenn $f > e$ ist; e ist daher das größte gemeinschaftliche Maaß der zwey Größen a und b, wenn mit e die letzte Division genau aufgeht.

§. 82.

Wenn zwey oder mehrere Brüche einen nämlichen Nenner haben, so werden sie Brüche **von gleicher Benennung** genennt; im Gegentheile heissen sie Brüche von verschiedener Benennung.

Es können aber Brüche von verschiedener Benennung auf gleiche Benennung gebracht werden, und zwar auf folgende Art:

1) Man multiplizire jeden Zähler mit allen Nennern, nur mit seinem eigenen nicht, so erhält man dadurch bey jedem Bruche den neuen Zähler.

2) Sodann multiplizire man alle Nenner miteinander, so wird dieses Produkt der gemeinschaftliche Nenner der verwandelten Brüche seyn.

Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5}, \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5}, \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5}, = \frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{24}{30}$

eben so ist $\frac{3}{4}, \frac{a}{b}, \frac{4c}{3a}, \frac{3b}{2} = \frac{18ab}{24ab}, \frac{24a^2}{24ab}, \frac{32bc}{24ab}, \frac{36ab^2}{24ab}$

Daß auf diese Art die Werthe der Brüche ungeändert bleiben, erhellet aus (§. 79.); weil der Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einer nämlichen Größe multipliziret wird.

Man

Man kann demnach auch untersuchen, welcher von zweyen Brüchen, die verschiedene Zähler und Nenner haben, der größte sey, wenn man sie vorher auf gleiche Benennung bringt. So ist z. B. $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$; weil $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ und $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ ist.

§. 83.

Wären viele Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, wo sodann nach dieser vorgeschriebenen Art der allgemeine Nenner zu groß ausfällt, so suche man ein solches Vielfaches vom größten Nenner auf, in welchem alle übrige Nenner ebenfalls genau enthalten sind. Hat man ein solches Vielfaches gefunden, so giebt dieses den allgemeinen Nenner; und um den neuen Zähler bey jedem Bruche zu erhalten, dividire man den allgemeinen Nenner durch den alten Nenner, und multiplizire den Quotienten mit dem alten Zähler, so hat man den neuen Zähler.

Z. B. Es wären die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, auf gleiche Benennung zu bringen; so ist das Dreyfache von dem größten Nenner 8, nämlich 24, schon so beschaffen, daß alle Nenner darinn enthalten sind; darum nehme man 24 für den allgemeinen Nenner an, und die Brüche sind $\frac{12}{24}, \frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}$ anstatt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$.

Daß auch hier die Werthe der Brüche ungeändert bleiben, erhellet ebenfalls daraus, weil der Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einer nämlichen Zahl multipliziret wird.

§. 84.

Um aber das kleinste Vielfache vom größten Nenner, in welchem alle übrige Nenner genau enthalten sind, finden zu können, so suche man zu den zwey ersten Nennern die möglichst kleinste Zahl auf, in welcher beyde genau enthalten sind; **wo man den einen Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß dividiren, und den Quotienten mit dem andern Nenner multiplizieren muß**; zu dieser gefundenen Zahl und zum nächst folgenden Nenner suche man wieder eben auf diese Art die kleinste Zahl auf, in welcher beyde genau enthalten sind; und so fahre man fort, bis kein Nenner mehr übrig ist, so hat man die verlangte Zahl. Z. B. es solle die kleinste Zahl aufgesuchet werden, worin die Nenner 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, genau enthalten sind, so ist

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.
56 168 840 840 840 840

nämlich 8 und 7 haben keinen gemeinschaftlichen Faktor; daher ist $8 \cdot 7 = 56$ die kleinste Zahl, in welcher beyde genau enthalten sind. Ferner 56 und 6 haben zum größten gemeinschaftlichen Faktor 2; 2 in 6 geht 3mal; 56mal 3 sind 168; 5 und 168 haben keinen gemeinschaftlichen Faktor; daher ist $5 \cdot 168 = 840$ die kleinste Zahl, in welcher beyde genau enthalten sind; übrigens ist 4, 3, 2 auch schon in 840 enthalten; daher ist 840 die gesuchte Zahl.

§. 85.

Wenn ein Bruch in einen andern verwandelt werden soll, dessen Nenner gegeben ist, so multiplizire man den Zähler mit dem gegebenen Nenner, und dividire das Produkt durch den alten Nenner, so hat man den neuen Zähler. Z. B. es sey $\frac{86}{125}$ in einen andern Bruch zu verwandeln, dessen Nenner = 1000 seyn soll; so ist der neue Zähler $= 86 \cdot 1000 : 125 = 688$;

näm-

nämlich $\frac{86}{125} = \frac{688}{1000}$. Eben so, wenn der Bruch $\frac{5}{6}$ in einen andern verwandelt werden soll, dessen Nenner 32 ist, so ist der neue Zähler $= 5 \cdot 32 : 6 = 26\frac{2}{3}$; daher $\frac{5}{6} = \frac{26\frac{2}{3}}{32}$. Sollte hingegen ein gegebener Bruch in einen andern verwandelt werden, dessen Zähler gegeben ist, so multiplizire man den Nenner des Bruches mit dem gegebenen Zähler, und dividire das Produkt durch den alten Zähler, so hat man den neuen Nenner. Z. B. der Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen andern verwandelt werden, dessen Zähler 12 ist, so ist der Nenner gleich $\frac{12 \cdot 4}{3} = 16$, und der Bruch ist $\frac{12}{16}$.

Daß auf diese Art der Werth des Bruches ungeändert bleibe, erhellet aus (§. 79.)

§. 86.

Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches Gleiches addiret, so wird der Werth des Bruches geändert, und zwar vermehrt, wenn es ein ächter Bruch, hingegen vermindert, wenn es ein Afterbruch ist; nämlich es ist $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, wenn $a < b$ ist; und $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$, wenn $a > b$ ist. Denn man bringe die Brüche auf gleiche Benennung, so hat man $\frac{ab+ac}{b(b+c)}$ statt $\frac{a}{b}$, und $\frac{ab+bc}{b(b+c)}$ statt $\frac{a+c}{b+c}$; wo $ac < bc$, wenn $a < b$, und $ac > bc$, wenn $a > b$ ist. Und umgekehrt ist es, wenn man von eines Bruches Zähler und Nenner Gleiches abzieht; es ist nämlich $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b-c}$, wenn $a < b$; hingegen $\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-c}$, wenn $a > b$ ist.

II. Abschnitt.

Von der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Brüche.

§. 87.

Bey der Addition der Brüche beobachte man folgende Regeln:

1) Haben die Brüche gleiche Nenner, so addire man die Zähler, und unterschreibe den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{17}{7} = 2\tfrac{3}{7};$$

$$\frac{2a^2}{5b} - \frac{3a^2}{5b} + \frac{x^2}{5b} = \frac{x^2 - a^2}{5b}.$$

2) Haben die zu addirenden Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie nach (§. 82. 83.) auf gleiche Benennung, addire sodann die Zähler, und unterschreibe den gemeinschaftlichen Nenner; z. B.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70 + 84 + 90}{105} = \frac{244}{105} = 2\tfrac{34}{105};$$

$$\frac{7}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{19}{24}$$

$$= \frac{21 + 16 + 12 + 14 + 20 + 18 + 19}{24} = \frac{120}{24} = 5.$$

$$\frac{2c}{3ab} + \frac{1}{2} + -\frac{5a}{4b} = \frac{8c + 6ab + 15a^2}{12ab}$$

3) Sind nebst Brüchen auch Ganze zu addiren, so kann man sie entweder besonders addiren, oder in Afterbrüche verwandeln (§. 76.), und zu den übrigen Brüchen addiren; so ist z. B.

$$3\tfrac{2}{5} + 7\tfrac{1}{2} + \frac{2}{3} = 3 + 7 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

$$= 10 + \frac{12 + 15 + 20}{30} = 10 + \frac{47}{30} = 11 + \frac{17}{30}.$$

$$5\tfrac{2}{3} + 6\tfrac{5}{6} + 7\tfrac{3}{4} + 8\tfrac{1}{2} = 26 + \frac{8 + 10 + 9 + 6}{12}$$

$$= 26 + \frac{33}{12} = 28\tfrac{3}{4}.$$

$$a + \frac{b}{3} - \frac{2b}{5} + \frac{c}{x} = \frac{15ax + 5bx - 6bx + 15c}{15x}$$

$$= \frac{15ax - bx + 15c}{15x}.$$

§. 88.

Bey der Subtraktion der Brüche beobachte man folgendes:

1) Man bringe die Brüche auf gleiche Benennung, wenn sie noch verschiedene Nenner haben sollten, ziehe sodann die Zähler voneinander ab, und unterschreibe der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner; so ist z. B.

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14 - 12}{21} = \frac{2}{21};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{2a}{3b} = \frac{3a - 2a}{3b} = \frac{a}{3b}.$$

2) Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen ist, so borge man von der ganzen Zahl eine Einheit, verwandle selbe in einen Bruch, der mit dem abzuziehenden einerley Nenner hat, ziehe sodann den Zähler des abzuziehenden Bruches von dem Zähler dieses Bruches ab; z. B.

$$5 - \frac{2}{3} = 4\tfrac{3}{3} - \frac{2}{3} = 4\tfrac{1}{3};$$

$$1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8};$$

$$8 - 4\tfrac{3}{5} = 7\tfrac{5}{5} - 4\tfrac{3}{5} = 3\tfrac{2}{5};$$

$$3a - \frac{2a}{5} = \frac{15a - 2a}{5} = \frac{13a}{5};$$

$$8\tfrac{3}{4} - 5 = 3\tfrac{3}{4}.$$

3) Sind ganze Zahlen nebst angehängten Brüchen voneinander abzuziehen, so ziehe man die Brüche voneinander, und auch die Ganzen voneinander ab; z. B.

$$4\tfrac{3}{4} - 1\tfrac{1}{4} = 4 - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 3\tfrac{1}{2};$$

$$5\tfrac{3}{4} - 3\tfrac{2}{3} = 5 - 3 + \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = 2\tfrac{1}{12};$$

$$\left(6a + \frac{b}{c}\right) - \left(5a + \frac{3b}{4c}\right) = 6a - 5a + \frac{b}{c} - \frac{3b}{4c}$$

$$= a + \frac{4b - 3b}{4c} = a + \frac{b}{4c}.$$

4)

4) Wäre aber der Bruch, von welchem abgezogen werden soll, kleiner als jener, welcher abzuziehen ist, so borge man von der ganzen Zahl eine Einheit, mache sie zum Bruche von gleichem Nenner, addire die Zähler zusammen, und verrichte die Subtraktion; z. B.

$$8\tfrac{1}{4} - 5\tfrac{3}{4} = 7\tfrac{5}{4} - 5\tfrac{3}{4} = 2\tfrac{2}{4} = 2\tfrac{1}{2};$$
$$12\tfrac{2}{3} - 3\tfrac{4}{5} = 12\tfrac{10}{15} - 3\tfrac{12}{15} = 11\tfrac{25}{15} - 3\tfrac{12}{15} = 8\tfrac{13}{15}.$$

§. 89.

Bey der Multiplikation der Brüche ist folgendes zu bemerken:

1) Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizirt werden soll, so multiplizire man nur den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner ungeändert; denn dadurch wird der Bruch so vielmal vergrößert, als die ganze Zahl Einheiten enthält (§. 77.); so ist z. B.

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\tfrac{1}{3}.$$
$$\frac{5}{6} \times 12 = \frac{60}{6} = 10.$$
$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}.$$

Auch könnte zwar ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizirt werden, wenn man den Nenner durch die ganze Zahl dividiret, weil der Bruch dadurch ebenfalls so vielmal vergrößert wird, als die Zahl Einheiten enthält (§. 78.); allein da der Nenner gar selten sich durch die ganze Zahl genau theilen läßt, so ist es besser sich der ersten Regel zu bedienen.

2) Ist eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche mit einer ganzen Zahl zu multipliziren, so multiplizire man mit der ganzen Zahl zuerst den Bruch, und hernach die

die Ganzen, ziehe aber die im ersten Produkte befindlichen Ganzen heraus, und addire selbe zum zweyten Produkte; z. B.

$$5\tfrac{3}{4} \cdot 6 = \frac{3}{4} \cdot 6 + 5 \cdot 6 = \frac{18}{4} + 5 \cdot 6$$

$$= 4 + \frac{2}{4} + 30 = 34\tfrac{1}{2}.$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \cdot d = ad + \frac{bd}{c}.$$

3) Wäre aber ein Bruch mit einem andern Bruche zu multipliziren, so **multiplizire man Zähler mit Zähler** und **Nenner mit Nenner**, so ist **dieser neue Bruch das verlangte Produkt**; nämlich $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, welches sich folgendermassen erweisen läßt.

Man setze $\frac{a}{b} = m$	$\frac{a}{b} \cdot b = m \cdot b$	$a = mb$
	so ist auch	nämlich
und $\frac{c}{d} = n$	$\frac{c}{d} \cdot d = n \cdot d$	$c = nd$

Es ist also (§. 29. Grundsatz 1.) . . . $ac = mnbd$

und (§ 39. Grunds. 1.) $\frac{ac}{bd} = \frac{mnbd}{bd}$, nämlich $m \cdot n = \frac{ac}{bd}$

Setzet man nun wieder $\frac{a}{b}$ statt m, und $\frac{c}{d}$ statt n, so ist

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Da nun jede zwey zu multiplizirende Brüche durch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ vorgestellet werden können, so ist ihr

Pro-

Produkt auch gleich dem Produkte der Zähler dividirt durch das Produkt der Nenner; z. B.

$$\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{8}{15};\ \frac{3}{4}.\ \frac{5}{6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8};\ \frac{7}{3}.\ \frac{2}{5}.\ \frac{4}{9}=\frac{56}{135}.$$

4) Sind beyde Faktoren ganze Zahlen, nebst angehängten Brüchen, so mache man selbe zu Afterbrüchen (§. 76.), und verrichte die Multiplikation; z. B.

$$5\tfrac{2}{3}\ .\ 3\tfrac{4}{5}=\frac{17}{3}.\frac{19}{5}=\frac{323}{15}=21\tfrac{8}{15};$$

Oder man multiplizire mit dem Bruche und mit den Ganzen des einen Faktors, den Bruch und auch die ganze Zahl des andern Faktors; z. B.

$$2\tfrac{3}{4}\ .\ 5\tfrac{2}{7}=\frac{2}{7}.\frac{3}{4}+\frac{2}{7}.2+5\ .\ \frac{3}{4}+5\ .\ 2$$

$$=\frac{6}{28}+\frac{4}{7}+\frac{15}{4}+10=\frac{6+16+105}{28}+10$$

$$=10+\frac{127}{28}=14\tfrac{15}{28}.$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(d+\frac{c}{a}\right)=ad+\frac{bd}{c}+\frac{ac}{a}+\frac{bc}{ac}$$

$$=ad+\frac{bd}{c}+c+\frac{b}{a}.$$

§. 90.

Bey der Division der Brüche ist folgendes zu merken:

1) Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so multiplizire man den Nenner mit der ganzen Zahl, und lasse den Zähler ungeändert; denn dadurch wird

der Bruch vermög (§. 78.) so vielmal kleiner, als die ganze Zahl Einheiten enthält. So ist z. B.

$$\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};\ \frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{15};\ \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

2) Soll aber ein Bruch durch einen Bruch dividiret werden, so kehre man den Divisor um, und multiplizire den Dividendus mit demselben nach (§. 89. N. 3.); z. B.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Denn man setze wieder $\left.\begin{matrix}\frac{a}{b} = m \\ \frac{c}{d} = n\end{matrix}\right|$ so ist auch $\left.\begin{matrix}\frac{ab}{b} = mb \\ \frac{cd}{d} = nd\end{matrix}\right|$ nämlich $\begin{matrix}a = mb \\ c = nd\end{matrix}$

Es ist also auch (§. 39. Grundsatz 1.) . . $\frac{a}{c} = \frac{mb}{nd}$

und (§. 29. Grunds. 1.) $\frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{mb}{nd} \times \frac{d}{b}$ nämlich $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$;

es ist aber $\frac{m}{n} = m : n = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$; also auch $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

3) Ist eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren, so kehre man ebenfalls den Divisor um, und verrichte die Multiplikation; denn es ist

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b};$$

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\tfrac{1}{2}.$$

4) Kommen ganze Zahlen nebst angehängten Brüchen zu dividiren vor, so verwandle man selbe in Afterbrüche, und verrichte nach obigen Regeln die Division; z. B.

$$3\tfrac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{68}{15} = 4\tfrac{8}{15};$$

$$3 : 4\tfrac{1}{2} = 3 : \frac{9}{2} = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};$$

$$2\tfrac{1}{3} : 1\tfrac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{7}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3};$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(b - \frac{a}{d}\right) = \frac{ac + b}{c} : \frac{bd - a}{d}$$

$$= \frac{ac + b}{c} \cdot \frac{d}{bd - a} = \frac{acd + bd}{bcd - ac}.$$

Anmerkung. Der Anfänger, der die Regeln von der Multiplikation und Division der Brüche nicht leicht im Gedächtnisse behalten kann, kann sich nur die zwey Regeln im (§. 89. N. 3.) und hier im (§. 90. N. 2.) merken; nämlich **wie ein Bruch mit einem Bruche multipliziret, und wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividiret wird;** kommen nun auch ganze Zahlen mit vor, so kann die ganze Zahl als ein Bruch, dessen Nenner = 1 ist, vorgestellet werden; so ist z. B.

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c};$$

a

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc};$$

$$c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{bc}{a} \text{ u. s. w.}$$

§. 91.

Ein gebrochener Bruch, oder ein Bruch eines Bruches wird genommen, wenn man die Zähler und Nenner der Brüche miteinander multipliziret; z. B. $\frac{3}{10}$ des Bruches $\frac{5}{6}$ ist $= \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 10} = \frac{15}{60}$; denn $\frac{3}{10}$ des Bruches $\frac{5}{6}$ heißt nichts anders, als daß man den Bruch $\frac{5}{6}$ in 10 gleiche Theile theilen, und 3 solche Theile davon nehmen soll; nun ist $\frac{5}{6} : 10 = \frac{5}{6 \cdot 10}$, und dieses dreymal genommen giebt $\frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 10}$.

§. 92.

Durch die Rechnungsarten mit Brüchen können nun auch benannte Zahlen einer kleinern Gattung als Brüche von jeder größern Gattung vorgestellet werden, welches bey der Multiplikation und Division der benannten Zahlen oft gute Dienste leisten kann; so ist z. B.

$$5 \text{ Fl.} + 17 \text{ Kr.} = 5\tfrac{17}{60} \text{ Fl.} = \frac{317}{60} \text{ Fl.};$$

$$4 \text{ Sch.} + 8 \text{ Zoll} = 4\tfrac{8}{12} \text{ Sch.} = 4\tfrac{2}{3} \text{ Sch.} = \frac{14}{3} \text{ Sch.}$$

$$2\text{ Kl.} + 0\text{ Sch.} + 9\text{ Z.} = 2\text{ Kl.} + \frac{9}{12}\text{ Sch.} = 2\text{ Kl.} + \frac{3}{4}\text{ S.}$$

$$= 2\tfrac{3}{24}\text{ Kl.} = 2\tfrac{1}{8}\text{ Kl.} = \frac{17}{8}\text{ Kl.}$$

$$8\text{ Pf.} + 20\text{ L.} + 3\text{ Q.} = 8\text{ Pf.} + 20\tfrac{3}{4}\text{ L.} = 8\text{ Pf.} + \frac{83}{4}\text{ L.}$$

$$= 8\tfrac{83}{128}\text{ Pf.} = \frac{1107}{128}\text{ Pf.};$$

$$3\text{ St.} + 15\text{ Minut.} + 45\text{ Sek.} = 3\text{ St.} + 15\tfrac{45}{60}\text{ Minut.}$$
$$= 3\text{ St.} + 15\tfrac{3}{4}\text{ Min.} = 3\text{ St.} + \tfrac{63}{4}\text{ Min.} = 3\tfrac{63}{240}\text{ St.}$$
$$= 3\tfrac{21}{80}\text{ St.} = \frac{261}{80}\text{ St.}$$

§. 93.

Wenn in einer Rechnung benannte Brüche vorkommen, die sich auf verschiedene Einheiten beziehen, so müssen selbe vorher auf gleiche Namen gebracht werden, und sodann können erst die bisher gegebenen Rechnungsarten angewendet werden; so ist z. B.

$$\frac{3}{4}\text{ St.} + \frac{2}{5}\text{ M.} = \frac{3}{4}\text{ St.} + \frac{2}{5\cdot 60}\text{ St.} = \frac{3\cdot 5\cdot 15}{4\cdot 5\cdot 15}\text{ St.}$$
$$+ \frac{2}{5\cdot 60}\text{ St.} = \frac{227}{300}\text{ St.}$$

oder $\frac{3}{5}\text{ St.} + \frac{2}{3}\text{ M.} = \frac{3\cdot 60}{5}\text{ M.} + \frac{2}{3}\text{ M.} = 36\tfrac{2}{3}\text{ M.}$

$$\frac{4}{5}\text{ Pf.} : \frac{3}{2}\text{ L.} = \frac{4}{5}\text{ Pf.} : \frac{3}{64}\text{ Pf.} = \frac{4}{5}\cdot\frac{64}{3}$$
$$= \frac{256}{15} = 17\tfrac{1}{15}\text{ mal}$$

oder

oder $\frac{4}{5}$ Pf. : $\frac{3}{2}$ L. = $\frac{4 \cdot 32}{5}$ L. : $\frac{3}{2}$ L. = $\frac{4 \cdot 32 \cdot 2}{5 \cdot 3}$

= $17\frac{1}{15}$mal.

§. 94.

Einige Fragen zur Anwendung der Rechnungsarten mit Brüchen.

1. Frage. Zu einer gewissen Montur wird erfordert, zum Rocke $2\frac{1}{6}$ Ellen, zur Weste $\frac{3}{4}$ Ellen, und zu den Hosen $\frac{7}{8}$ Ellen Tuch; wie viel beträgt dieß zusammen?

Antwort. $2\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = 2\frac{4}{24} + \frac{18}{24} + \frac{21}{24}$

$= 2\frac{43}{24} = 3\frac{19}{24}$ Ellen.

2. Frage. Ein massiv gegossenes Kanonenrohr wiegt $56\frac{2}{3}$ Zentner, und nach der Bohrung hatte dasselbe nur $51\frac{3}{4}$ Zentner; wie viel Metal ist herausgebohret worden?

Antwort. $56\frac{2}{3} - 51\frac{3}{4} = 56\frac{8}{12} - 51\frac{9}{12} = 55\frac{20}{12} - 51\frac{9}{12}$

$= 4\frac{11}{12}$ Zentner.

3. Frage. Wie viel muß man für einen Balken, welcher $11^{\circ} + 4^{I} + 8^{II}$ lang ist, bezahlen, wenn jede Klafter davon 5 Fl. 17 Kr. kostet?

Antwort. Da $11^{\circ} + 4^{I} + 8^{II} = \frac{106^{\circ}}{9}$, und

5 Fl. 17 Kr. = $\frac{317}{60}$ Fl. ist, so kostet der ganze Balken

$\frac{106}{9} \cdot \frac{317}{60}$ F. = $\frac{33602}{540}$ Fl. = $62\frac{61}{270}$ Fl. = 62 Fl. $13\frac{5}{9}$ Kr.

4. Frage. Wie viel Patronen können von $3\frac{1}{2}$ Zentner Pulver erzeuget werden, wenn jede Patrone mit $1\frac{3}{4}$ Pf. Pulver gefüllet wird?

Ant-

Antwort. Da $3\frac{1}{2}$ Zentner $= 350$ Pf., und $1\frac{3}{4}$ P. $= \frac{7}{4}$ Pf., so ist die gesuchte Anzahl der Patronen $= 350 : \frac{7}{4} = 200$.

5. Frage. Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß das Gold, wenn es ins Wasser ganz getaucht wird, beyläufig $\frac{2}{37}$ seines Gewichts darinnen verliere; das Silber aber verliert $\frac{2}{21}$, und das Kupfer $\frac{5}{43}$ seines Gewichtes; wie viel wird nun ein Körper, wobey sich $1\frac{1}{2}$ Pf. Gold, $3\frac{2}{3}$ Pf. Silber, und $2\frac{3}{4}$ Pf. Kupfer befinden, an seinem Gewichte im Wasser verlieren?

Antwort. $\frac{2}{37}$ von $1\frac{1}{2} = \frac{2}{37} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{37}$; $\frac{2}{21}$ von $3\frac{2}{3} = \frac{2}{21} \cdot \frac{11}{3} = \frac{22}{63}$; und $\frac{5}{53}$ von $2\frac{3}{4} = \frac{5}{43} \cdot \frac{11}{4} = \frac{55}{172}$; folglich ist der Verlust des Körpers im Wasser $= \frac{3}{37} + \frac{22}{63} + \frac{55}{172} = \frac{300721}{400932}$ Pf. $= 24$ Loth beynahe.

III. Abschnitt.

Von den Dezimalbrüchen.

§. 95.

Wenn man bey einer ganzen Zahl rechts hinter den Einheiten noch mehrere Ziffern anhängt, deren Werth nach eben dem dekadischen Gesetz, so wie die übrigen Ziffern (§. 6.) von der Linken gegen die Rechte zehnfach abnehmen soll, so werden solche keine ganze Einheiten, sondern Brüche vorstellen

len

len müssen; und zwar wird die erste neben den Einheiten Zehntel einer Einheit, die zweyte Hundertel einer Einheit, die dritte Tausendel einer Einheit, u. s. w. bedeuten. Solche Brüche werden **Dezimalbrüche** oder **zehntheilige Brüche** genennt. Und damit solche von den dabey befindlichen Ganzen unterschieden werden können, so werden sie von den ganzen Einheiten durch ein Komma (,) abgesondert, wo sodann die Ziffern links vor dem Komma ganze Einheiten bedeuten, und jene rechts werden **Dezimalstellen** oder **Dezimalziffern** genennt. So z. B. ist 35,7859 ein Dezimalbruch mit vier Dezimalstellen, und bedeutet 35 ganze Einheiten, 7 Zehntel, 8 Hundertel, 5 Tausendel, und 9 Zehntausendel einer Einheit; nämlich es ist $35{,}7859 = 35 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{10000} = 35 + \frac{7000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{9}{10000} = 35 + \frac{7859}{10000} = \frac{357859}{10000}$; imgleichen ist $4{,}09 = 4 + \frac{9}{100} = \frac{409}{100}$. Eben so heißt $0{,}43$ kein Ganzes, 4 Zehntel, und 3 Hundertel $= \frac{43}{100}$; imgleichen $0{,}005 = \frac{5}{1000}$

§. 96.

Aus diesem ist es zu ersehen, daß man im erforderlichen Falle einem Dezimalbruche leicht seinen Nenner unterschreiben kann, indem derselbe jederzeit aus einer Einheit nebst so vielen angehängten Nullen besteht, als der Bruch Dezimalstellen hat; und man kann daher auch sagen: **ein Dezimalbruch ist ein solcher Bruch, der eine blosse Einheit nebst einigen angehängten Nullen (eine dekadische Zahl) zu seinem Nenner hat.**

und

Und umgekehrt, wenn ein mit seinem Nenner versehener Dezimalbruch in seiner ächten Gestalt, das ist, ohne Nenner geschrieben werden soll, so darf man nur in dem Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern für die Dezimalstellen abschneiden, als der Nenner Nullen hat, wo der Abgang, wenn der Zähler nicht genug Ziffern enthalten sollte, links mit Nullen ergänzt werden muß. Z. B.

$$\frac{86504}{1000} = 86,504; \ \frac{56}{100} = 0,56; \ \frac{4}{10000} = 0,0004.$$

§. 97.

Auch ist hieraus zu ersehen, daß man an einen Dezimalbruch rechts so viele Nullen anhängen kann, als man will, ohne daß dadurch der Werth des Bruches geändert wird. Denn es ist z. B. $7,58 = 7,5800$. Eben so kann auch eine blosse ganze Zahl als ein Dezimalbruch vorgestellet werden, indem man nur eine beliebige Anzahl Nullen anhängt, und dieselbe durch ein Komma absondert; z. B. $12 = 12,000$.

Es ist daher sehr leicht Dezimalbrüche auf gleiche Benennung zu bringen, indem man an jene, welche weniger Dezimalstellen haben, so viele Nullen hinten anhängt, damit sodann jeder aus gleich viel Dezimalstellen bestehe.

§. 98.

Es ist öfters erforderlich einen gegebenen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln, welcher demselben entweder vollkommen, oder auch nur bis auf eine bestimmte Dezimalstelle am Werthe gleich ist; dieses geschieht auf folgende Art:

1) Ist es ein Afterbruch, so dividire man den Zähler durch den Nenner, so bekommt man die ganzen Einheiten; wäre es aber ein ächter Bruch, so muß an die Stelle der ganzen Einheiten eine Null gesetzt werden.

2) An den Rest hänge man eine Nulle, dividire dieses wieder durch den Nenner, so wird der Quotient Zehntel bedeuten; dieser wird mit dem Divisor multipliziret, und gehörig abgezogen. An den Rest hänge man wieder eine Nulle, dividire es wieder durch den Nenner, so hat man die Hundertel u. s. w.

3) Fährt man nun auf diese Art fort, und die Division geht einmal ohne Rest genau auf, so ist der gegebene Bruch dem gefundenen Dezimalbruche vollkommen gleich, welches bey allen denjenigen Brüchen statt findet, deren Nenner 2, 4, 8, 16, 32 . . . . 5, 25, 125 . . . . . oder ein Produkt von diesen Zahlen ist.

Beyspiele.

$$\frac{23}{4} = 23 : 4 = 5{,}75. \qquad \frac{76}{125} = 76 : 125 = 0{,}608.$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 760 \\ 750 \\ \hline 100 \\ 1000 \\ 1000 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{694}{32} = 694 : 32 = 21{,}6875.$$

4) Bey den übrigen Brüchen aber geht die Division zwar niemals zu Ende; doch aber darf man, auf die eben vorgeschriebene Art, die Division nur so lang fortsetzen, bis man zum zweytenmal einen nämlichen Rest erhält, wo sodann die Dezimalstellen in der schon bekannten Ordnung wiederholt ohne Ende fortgehen.

Beyspiele.

$$\frac{5}{3} = 5:3 = 1,6666\ldots;\ \frac{7}{11} = 7:11 = 0,636363\ldots$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ 66 \\ \hline 40 \\ 33 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$\frac{6}{7} = 6:7 = 0,857142857142\ldots$$

5) Von diesen Dezimalstellen können nun so viele beybehalten werden, als es nur immer die Richtigkeit einer Rechnung erfordern kann, so, daß die übrigen ohne merklichen Fehler gänzlich hinweg gelassen werden können; nur kann man, um den Fehler noch kleiner zu machen, die letzte Dezimalstelle um eins vermehren, wenn die nächstfolgende Ziffer größer ist als 5; z.B. $\frac{6}{7} = 0,85714286$ anstatt 0,85714285, weil die folgende 9te Dezimalziffer ein 7 ist.

§. 99.

Bey der Addition der Dezimalbrüche schreibe man dieselben, so wie auch die ganzen Zahlen, wenn sie dazu addirt werden sollen, dergestalt untereinander, daß die Stricheln, welche die Dezimalstellen von den ganzen Einheiten absondern, gerade untereinander zu stehen kommen, und addire übrigens wie bey den ganzen Zahlen; nur muß in der Summe das Komma ebenfalls an die vorige Stelle gesetzt werden.

Beyspiele.

3,04	23,07543	312
26,1735	0,923	25,73
7,5	6,0024	0,364
36,7135	30,00083	338,094

§. 100.

Bey der Subtraktion der Dezimalbrüche ordne man dieselben so, wie bey der Addition, und subtrahire wie gewöhnlich; nur muß man dem Dezimalbruche, von welchem ein anderer Dezimalbruch mit mehr Dezimalstellen abgezogen werden soll, so viele Nullen in Gedanken hinzufügen, damit beyde gleichviel Dezimalstellen haben.

Beyspiele.

12,3257	60,57	13
4,56	0,9856	2,346
7,7657	59,5844	10,654

Wenn ein gemeiner Bruch zu einem Dezimalbruch zu addiren, oder davon zu subtrahiren ist, so verwandle man selben in einen Dezimalbruch nach (§. 98.); z. B.

$$3{,}465 + \frac{3}{4} = 3{,}465 + 0{,}75 = 4{,}215\,;$$

$$\frac{17}{6} - 1{,}34 = 2{,}8333\,.\,. - 1{,}34 = 1{,}4933\,.\,.\,.$$

§. 101.

Hat man Dezimalbrüche untereinander, oder Dezimalbrüche mit ganzen Zahlen zu multipliziren, so verrichte man die Multiplikation als wenn es lauter ganze Zahlen wären, und schneide im Produkte von der Rechten gegen die Linke so

viele

viele Dezimalstellen ab, als beyde Faktoren deren haben, wo der Abgang, wenn nicht genug Ziffern vorhanden seyn sollten, links mit Nullen besetzt werden muß.

Beyspiele.

1,44	3,046	0,337	0,26
1,2	0,32	0,023	17
288	6092	1011	182
144	9138	674	26
1,728	0,97472	0,007751	4,42.

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens kann man sich leicht überzeugen, wenn man den zu multiplizirenden Dezimalbrüchen ihre Nenner unterschreibt, und selbe nach (§. 89. N. 3.) multipliziret.

§. 102.

Ist ein Dezimalbruch mit 10 zu multipliziren, so rücke man nur das Komma um eine Stelle weiter gegen die Rechte; denn dadurch erhält jede Ziffer einen zehnfachen Werth (§. 6.)

Ist er mit 100 zu multipliziren, so rücke man das Komma um zwey Stellen, mit 1000 um 3 Stellen u. s. w.

Beyspiele.

4,587 × 10 = 45,87; 9,307 × 100 = 930,7.
0,5386 × 1000 = 538,6.

Läßt man daher bey einem Dezimalbruch das Komma, welches die Dezimalstellen absondert, gänzlich hinweg, und betrachtet ihn als eine blosse ganze Zahl, so wird dadurch der Dezimalbruch mit 1 nebst so vielen angehängten Nullen multipliziret, als Dezimalstellen vorhanden waren.

§. 103.

Bey der Division der Dezimalbrüche, es möge ein Dezimalbruch durch eine ganze Zahl, oder durch einen Dezimalbruch, oder auch eine ganze Zahl durch einen Dezimalbruch zu dividiren seyn, beobachte man folgende Regel.

Man unterschreibe den Divisor unter den Dividendus in Gestalt eines gewöhnlichen Bruches, hänge dem Zähler, oder dem Nenner, je nachdem einer oder der andere weniger Dezimalstellen hat, so viele Nullen an, damit beyde gleichviel Dezimalstellen haben, lasse sodann das Komma, welches die Dezimalstellen absondert, gänzlich hinweg, (indem man sich einbildet, daß Zähler und Nenner mit einer nämlichen Zahl multiplizirt wird) und verwandle sodann diesen Bruch nach (§. 98.) in einen Dezimalbruch, so hat man den richtigen Quotienten.

Beyspiele.

$$3{,}045 : 15 = \frac{3{,}045}{15{,}000} = \frac{3045}{15000} = 0{,}203.$$

$$2{,}134 : 0{,}12 = \frac{2{,}134}{0{,}120} = \frac{2134}{120} = 17{,}7833.$$

$$0{,}0036 : 4{,}8 = \frac{0{,}0036}{4{,}8000} = \frac{36}{48000} = 0{,}00075$$

$$24 : 0{,}006 = \frac{24{,}000}{0{,}006} = \frac{24000}{6} = 4000.$$

Wenn ein Dezimalbruch durch eine ganze Zahl, die auch einige Dezimalstellen haben kann, zu dividiren ist; so kann die Division auch kürzer, ohne daß man selbe Bruchweise ansetzt, verrichtet werden, wie es in folgenden Beyspielen zu ersehen ist. Im Beyspiele N. 1. sagt man nämlich; 6 in 7 Ganzen geht 1mal, und bleibt 1; 6 in 13 Zehnteln geht 2mal, und bleibt 1; 6 in 15 Hunderteln geht

2mal,

2mal, bleiben 3; 6 in 36 Tausendeln geht 6mal. Eben so sagt man im Beyspiele N. 2.; 4 in 0 Ganzen geht 0mal; 4 in 0 Zehnteln geht 0mal; 4 in 6 Hunderteln geht 1mal, 43 von 65 bleiben 22 u. s. w.

Beyspiele.

N. 1.

$7{,}356 : 6 = 1{,}226$

N. 2.

$$0{,}06537 : 4{,}3 = 0{,}0152$$

```
  43
  ---
  223
  215
  ---
   87
```

Soll endlich ein Dezimalbruch durch 10, 100, 1000 2c. dividiret werden, so darf man nur das Komma, um 1, 2, 3 . . . Stellen weiter zur Linken rücken; dadurch erhält jede Ziffer einen zehn, hundert, tausendmal kleinern Werth (§. 6. u. 95.) Z. B.

$53{,}436 : 10 = 5{,}3436;$
$32{,}43 : 100 = 0{,}3243;$
$5{,}38 : 1000 = 0{,}00538.$

§. 104.

Wäre ein Dezimalbruch mit einem gemeinen Bruche zu multipliziren, oder zu dividiren, so verwandle man entweder den Bruch in einen Dezimalbruch, oder man sehe den Dezimalbruch für eine ganze Zahl an, und verrichte die Multiplikation oder die Division nach (§. 89. N. 1. und §. 90. N. 1. — 3.); nur muß das Komma jederzeit an die gehörige Stelle gesetzt werden; z. B.

$$2,04 \times \frac{3}{4} = \frac{2,04 \times 3}{4} = \frac{6,12}{4} = 1,53;$$

$$\frac{5}{6} : 0,342 = \frac{5}{6 \times 0,342} = \frac{5}{2,052} = \frac{5000}{2052} = 2,436$$

§. 105.

Der Werth eines benannten Dezimalbruches wird in Einheiten kleinerer Gattung gefunden, wenn man ihn mit der Zahl multipliziret, welche anzeiget, wie viel Einheiten kleinerer Gattung in einer Einheit, worauf sich der Dezimalbruch beziehet, enthalten sind; so z. B. findet man

4,3 Tag = 4 T. 7 St. 12 M.
24
———
7,2 Stunden
60
———
12,0 Minuten

3,41 Kl. = 3 Kl. 2 Sch. 5. Z.
6
———
2,46 Schuhe
12
———
92
46
———
5,52 Zoll
u. s. w.

§. 106.

Zuweilen sind Dezimalbrüche miteinander zu multipliziren, deren Produkt man nur mit etlichen Dezimalstellen richtig verlangt, und öfters auch nicht mehrere richtig erhalten kann. In solchen Fällen kann die Multiplikation sehr geschwind auf folgende Art verrichtet werden. Man multiplizire mit der ersten links stehenden bedeutlichen Ziffer des Multiplikators den ganzen Multiplikandus von der Rechten gegen die Linke, und schneide in diesem Partialprodukte die ganzen Einheiten von den Dezimalstellen gehörig ab; mit der zweyten links stehenden Ziffer des Multiplikators multiplizire man den ganzen Multiplikandus von der zweyten rechts stehenden Ziffer des Multiplikandus angefangen, und addire die von dem Produkte der vorhergehenden Ziffer gebliebenen Einheiten in Gedanken hinzu; eben so multiplizire man mit der dritten links stehenden Ziffer des Multiplikators den ganzen Multiplikandus von der dritten rechts stehenden Ziffer des Multiplikandus angefangen; mit der vierten links in die vierte rechts u. s. w., und schreibe diese Partialprodukte untereinander, so wird ihre Summe das gesuchte Hauptprodukt zum Vorschein bringen.

Beyspiele.

8,99875477	Multiplikandus	2,30258509
0,43429448	Multiplikator	3,9600901
3,599501908		6,90775527
269962643		207232658
35995019		13815510
1799752		20723
809887		23
35995		9,11844441
3599		
719		
3,908109522		

Die angeführte **abgekürzte Multiplikation** der Dezimalbrüche wird hauptsächlich in solchen Fällen gebraucht, wo die folgenden Dezimalziffern des einen oder des andern Faktors, oder auch in beyden nicht bekannt sind.

Eben so kann in dergleichen Fällen auch eine **abgekürzte Division** bey den Dezimalbrüchen mit Vortheil angewendet werden. Man fängt nämlich an mit dem Divisor in den Dividendus wie sonst hinein zu dividiren; es wird aber nach jedesmaliger Multiplikation des Divisors mit der gefundenen Ziffer des Quotienten immer eine Ziffer im Divisor rechts ausgestrichen, wie es in nachstehenden Beyspielen zu ersehen ist.

Divisor	Dividend.	Quot.	Divis.	Divid.	Quot.
0,58432	0,439865	0,75278	0,6437	3,07564	4,778
	409024			2 5748	
	30841			5008	
	29216			4505	
	1625			503	
	1168			450	
	457			53	
	408			51	
	49			2	
	46				
	3				

Anmerkung. Verschiedene andere nützliche Vortheile und Abkürzungen bey den Rechnungsarten sowohl mit ganzen als auch mit gebrochenen Zahlen können beym mündlichen Vortrage beygebracht werden. So z. B. kann die Multiplikation, wenn die erste oder die letzte Ziffer des kleinern Faktors ein 1 ist, auf folgende Art abgekürzet werden.

Anstatt

5,738 ;
61
5,738
34428
350,018

abgekürzet

5,738	61
34428	
350,018	

Anstatt

573,8 ;
16
3442,8
5738
9180,8

abgekürzet

573,8	16
3442,8	
9180,8	

Weil

Weil im letzten Beyspiele der Multiplikator 16 in die Faktoren 4 . 4 sich zerlegen läßt, so kann die Multiplikation auch auf nebenstehende Art verrichtet werden. Eine solche Abkürzung findet auch bey der Division statt, wenn der Divisor in schickliche Faktoren sich zerlegen läßt.

573,8	4
2295,2	4
9180,8	

Wäre eine Zahl z. B. 53897 mit 998 zu multipliziren, so findet man das Produkt 53789206 wegen 998=1000−2 auf nebenstehende Art.

53897000	2
107794	
53789206	

IV. Abschnitt.

Von zusammenhängenden Brüchen.

§. 107.

Wenn man bey einem ächten Bruche, wo der Zähler im Nenner nicht genau enthalten ist, sowohl den Zähler als den Nenner durch den Zähler dividiret, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche ist. Verfährt man nun mit dem letzt angehängten Bruche eben so, so wird dadurch der vorgelegte Bruch in einen **zusammenhängenden Bruch** verwandelt, nämlich in einen Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem Bruche ist, wovon wieder der Zähler 1 und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem eben solchen angehängten Bruche ist, und so nach diesem Gesetze weiter fort.

§. 108.

Man kann jeden ächten Bruch $\frac{m}{n}$ in einen zusammenhängenden Bruch verwandeln, wenn man beym vorgelegten Bruche $\frac{m}{n}$ (nach §. 81.) des Zählers und Nenners größtes

ge-

gemeinschaftliches Maaß suchet, und die erhaltenen Quotienten a, b, c, d anmerket; denn eben diese Quotienten sind in der Ordnung, wie sie erhalten werden, vermög der Erklärung die aufeinander folgenden Nenner des zusammenhängenden Bruches, nämlich:

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{\text{rc.}}}}}}$$

Es sey z. B. $\frac{361}{1495}$ in einen zusammenhängenden Bruch zu verwandeln,

$$\begin{array}{lcccccccccc} & & 4 & & 7 & & 12 & & 1 & & 3 \\ \text{so ist} & 1495 & : & 361 & : & 51 & : & 4 & : & 3 & : 1 \\ & \underline{1444} & & \underline{357} & & \underline{48} & & \underline{3} & & & \\ & 51 & & 4 & & 3 & & 1 & & & \end{array}$$

daher ist $$\frac{351}{1495} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

§. 109.

Wenn man von einem zusammenhängenden Bruche nur ein einziges Glied beybehält, und die übrigen Glieder völlig hinweg läßt, im letzten Beyspiele $\frac{1}{4}$; so ist der Bruch $\frac{1}{4}$ et-

etwas größer als der wahre Werth des ganzen zusammenhängenden Bruches; denn weil man dadurch den Nenner vermindert, so ist der Bruch größer vermög (§. 78.); nimmt man zwey Glieder $\frac{1}{4+\frac{1}{7}} = 1 : \frac{29}{7} = \frac{7}{29}$, so ist dieser Bruch etwas kleiner; der aus drey Gliedern abgeleitete Bruch $\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{12}}} = \frac{1}{4+1:\frac{85}{12}} = \frac{1}{4+\frac{12}{85}} = 1 : \frac{352}{85} = \frac{85}{352}$ ist wieder etwas größer; der aus vier Gliedern aber $\frac{92}{381}$ ist etwas kleiner als der wahre Werth des ganzen zusammenhängenden Bruches; und so wechselweise weiter fort, dergestalt zwar, daß der Unterschied, oder die Abweichung von dem wahren Werthe immer kleiner wird, je mehrere Glieder des zusammenhängenden Bruches genommen werden, bis endlich der wahre Werth des zusammenhängenden Bruches völlig genau erhalten wird, wenn man alle Glieder desselben beybehält. In dem angeführten Beyspiele ist der aus 3 Gliedern des zusammenhängenden Bruches abgeleitete Bruch $\frac{85}{352}$ bis auf die Hunderttausentel mit dem wahren Werthe $\frac{361}{1495}$ übereinstimmend, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man beyde diese Brüche in Dezimalbrüche verwandelt; es ist nämlich:

$$\frac{361}{1495} = 0{,}241471 \ldots$$

und $$\frac{85}{352} = 0{,}241477 \ldots$$

Differenz $= 0{,}000006$

§. 110.

§. 110.

Der Nutzen der zusammenhängenden Brüche ergiebt sich hauptsächlich bey der Abkürzung der Brüche in solchen Fällen, wo der Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind. Es ist nämlich öfters erforderlich einen Bruch, dessen Zähler und Nenner sehr grosse Primzahlen unter sich sind, in einen andern, durch kleinere Zahlen ausgedrückten Bruch, ohne merkliche Veränderung des Werths zu verwandeln.

Dieses geschieht, wenn man den vorgelegten Bruch nach (§. 108.) in einen zusammenhängenden Bruch verwandelt, und sodann die nach der Ordnung aus 1, 2, 3, 4, 5 . . . . Gliedern desselben entspringenden Brüche entwickelt. Diese abgeleiteten Brüche sind die gesuchten abgekürzten Brüche, wo jeder darauf folgende abgeleitete Bruch dem wahren Werthe des vorgelegten Bruches immer näher kömmt. Und ausser solchen abgeleiteten Brüchen sind gar keine andern möglich, welche einfacher ausgedrückt wären, und doch dem vorgelegten Bruche am Werthe näher kämen. Sehr oft ist der nur aus einigen wenigen Gliedern des zusammenhängenden Bruches abgeleitete Bruch dem vorgelegten äusserst nahe gleich; und zwar damals, wenn der nächst darauffolgende Nenner eine beträchtlich große Zahl ist.

Es sey z. B. $\frac{100000}{102764}$ ohne merkliche Veränderung des Werthes abzukürzen, so ist:

1	36	5	1	1	2	1	17	
102764 :	100000 :	2764 :	496 :	284 :	212 :	72 :	68 :	4
100000	8292	2480	284	212	144	68	68	
2764	17080	284	212	72	68	4	0	
	16584							
	496							

da-

daher ist $\frac{100000}{102764} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{36+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}}}}}}$

und die fünf ersten abgekürzten Brüche sind

$\frac{1}{1}, \frac{36}{37}, \frac{181}{186}, \frac{217}{223}, \frac{398}{409}$

wo man, wenn keine gar zu große Genauigkeit erforderlich ist, $\frac{36}{37}$ statt des vorgelegten Bruches $\frac{100000}{102764}$ nehmen kann.

§. 111.

Bey solchen Abkürzungen der Brüche können aus den einmal gefundenen Quotienten, nämlich in dem letzt angeführten Beyspiele aus 1, 36, 5, 1, 1, 2, 1, 17 die abgekürzten Brüche auf folgende Art unmittelbar abgeleitet werden, ohne daß es nothwendig sey, den zusammenhängenden Bruch ausdrücklich anzusetzen, als:

	1,	36,	5,	1,	1,	2,	1,	17
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{36}{37}$	$\frac{181}{186}$	$\frac{217}{223}$	$\frac{398}{409}$	$\frac{1013}{1041}$	$\frac{1411}{1450}$	$\frac{25000}{25691}$

Man schreibt nämlich die Quotienten in einer Linie hintereinander, zieht darunter einen Querstrich, setzt vorwärts ausserhalb eines Striches $\frac{0}{1}$ als einen Bruch an, und schreibt unter den ersten Quotienten für den ersten Bruch, eine **Einheit getheilt durch eben diesen ersten Quotienten.** Sodann wird bey jedem folgenden Quotienten der zugehörige Bruch bestimmet, wenn **man mit jedem solchen Quotienten den Zähler und Nenner des ersten vorhergehenden Bruches multipliziret, und noch dazu den Zähler und Nenner des zweyten vorhergehenden Bruches addiret,** nämlich den Zähler zum Produkte des Zählers, und den Nenner zum Produkte des Nenners in den gehörigen Quotienten.

$$\frac{1 \cdot 36 + 0}{1 \cdot 36 + 1} = \frac{36}{37}$$

$$\frac{36 \cdot 5 + 1}{37 \cdot 5 + 1} = \frac{181}{186}$$

$$\frac{181 \cdot 1 + 36}{186 \cdot 1 + 37} = \frac{217}{223}$$

$$\frac{217 \cdot 1 + 181}{223 \cdot 1 + 186} = \frac{398}{409}$$

$$\frac{398 \cdot 2 + 217}{409 \cdot 2 + 223} = \frac{1013}{1041}$$

Es sey der Bruch $\frac{10000000000}{31415926536}$ abzukürzen, so ist

	3		7		15	
31415926536	:	10000000000	:	1415926536	:	885-
30000000000		9911485752		530784056		882-
1415926536		88514248		442571240		3-
				88212816		

	1		292	
14248	:	88212816	:	301432 u. s. w. folglich
12816				
01432				

	3,	7,	15,	1,	292
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{106}{333}$	$\frac{113}{355}$	$\frac{33102}{103993}$

nämlich $\frac{1 \cdot 7 + 0}{3 \cdot 7 + 1} = \frac{7}{22}$

$$\frac{7 \cdot 15 + 1}{22 \cdot 15 + 3} = \frac{106}{333}$$

$$\frac{106 \cdot 1 + 7}{333 \cdot 1 + 22} = \frac{113}{355} \text{ u. s. w.}$$

wo der aus vier Quotienten abgeleitete Bruch $\frac{113}{355}$, weil der folgende Quotient 292 sehr groß ist, von dem vorgelegten Bruche $\frac{10000000000}{31415926536}$ kaum um 0,00000003 verschieden ist.

Denn der gegebene Bruch $\frac{10000000000}{31415926536} = 0,318309886$ . .

und der abgekürzte $\frac{113}{355}$ . . . . $= 0,318309859$ . .

folglich ist ihre Differenz $= 0,000000027$ . .

Die angeführte Regel, aus den einmal bestimmten Quotienten die abgekürzten Brüche abzuleiten, läßt sich auf folgende Art allgemein erweisen:

Wenn man bey dem zusammenhängenden Bruche die aus 1, 2, 3, 4, 5 Gliedern abgeleiteten Brüche mit f^{I}, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, f^{V} bezeichnet, und diese Brüche durch die gehörige Reduktion, wie im (§. 109.) auf einfache Nenner bringet, so ist

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{\text{w.}}}}}}}$$

$$f^{\mathrm{I}} = \frac{1}{a}$$

$$f^{\mathrm{II}} = \frac{b}{ab+1}$$

$$f^{\mathrm{III}} = \frac{bc+1}{abc+c+a}$$

$$f^{\mathrm{IV}} = \frac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1}$$

$$f^{\mathrm{V}} = \frac{bcde+de+be+bc+1}{abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a}$$

Zerlegt man nun den Zähler und Nenner des Bruches f^{V} in Faktoren, so, daß der zugehörige Quotient e für einen Faktor angenommen wird, so ist

$$f^{\mathrm{V}} = \frac{e(bcd+d+b)+bc+1}{e(abcd+cd+ad+ab+1)+abc+c+a}$$

woraus es zu ersehen ist, wie dieser Bruch f^{V} aus dem zugehörigen Quotienten e, und aus den zwey nächst vorhergehenden Brüchen f^{IV} und f^{III} entsteht; welches Gesetz auch bey jedem andern abzuleitenden Bruche gilt. Damit nun dieses Gesetz auch schon bey dem zweyten Bruche könne angewendet werden, so wird zuerst $\frac{0}{1}$ angesetzet.

§. 112.

Wäre ein Afterbruch nach der angeführten Art abzukürzen, so kann man solchen zuerst umkehren; sodann werden die abgekürzten Brüche nach (§. 111.) bestimmet, welche man zuletzt alle wieder umkehret, nämlich die Nenner für die Zähler, und die Zähler für die Nenner nimmt.

Es

Es sey z. B. $\frac{2}{1,9129312} = \frac{20000000}{19129312}$ abzukürzen,

$$\text{so ist } 20000000 \overset{1}{:} 19129312 \overset{21}{:} 870688 \overset{1}{:} 844864 \overset{32}{:} 25824$$

$$\begin{array}{rrrr}
19129312 & 1741376 & 844864 & 77472 \\
\hline
870688 & 1715552 & 25824 & 70144 \\
 & 870688 & & 51648 \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
 & 844864 & & 18496
\end{array}$$

$$\text{und nun } \begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 21 & 1 & 32 \\
\hline
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{21}{22} & \frac{22}{23} & \frac{725}{758}
\end{array}$$

daher sind die abgekürzten Brüche $\frac{1}{1}, \frac{22}{21}, \frac{23}{22}, \frac{758}{725}$.

Eine ausführliche und gründliche Abhandlung der Lehre von zusammenhängenden Brüchen findet man in H. J. Pasquich mathemat. Analysis I. Band Leipzig bey Weidmann 1790.

Dritte Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

I. Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln überhaupt.

§. 113.

Das Produkt, welches entsteht, wenn man eine nämliche Größe mehrmal mit sich selbst multiplizirет, heißt eine **Potenz** oder **Dignität** dieser Größe, wo die mit sich selbst zu multiplizirende Größe als eine unbenannte Zahl betrachtet wird. Die Größe aber, welche mehrmahl als Faktor in der Multiplikation angesetzt wird, um eine Potenz hervorzubringen, heißt die **Wurzel** der hervorgebrachten Potenz. Und die Zahl, welche mit ihren Einheiten anzeigt, wie oft die nämliche Größe als Faktor in der Multiplikation anzusetzen sey um eine Potenz hervorzubringen, heißt der **Exponent** dieser Potenz.

Insbesondere wird das Produkt, wo eine nämliche Größe zweymal als Faktor in der Multiplikation angesetzt wird, die **zweyte Potenz**, oder das **Quadrat** dieser Größe genennt; so ist z. B. 9 das Quadrat von 3; weil $3 \cdot 3 = 9$ ist; 36 ist das Quadrat von 6, und allgemein a^2 ist das Quadrat von a.

Die

Die Größe aber, welche mit sich selbst multiplizirt werden muß, um ein gegebenes Quadrat hervorzubringen, wird die **Quadratwurzel** desselben genennt; so ist z. B. 6 die Quadratwurzel von 36; 7 die Quadratwurzel von 49, und a die Quadratwurzel von a^2. **Das Quadrat einer jeden Größe wird demnach gefunden, wenn man die Größe mit sich selbst multipliziret.**

§. 114.

Wenn man das Quadrat einer Größe noch einmal mit der Wurzel multipliziret, so wird das Produkt die **dritte Potenz, oder der Kubus** (Würfel) dieser Größe genennt. So ist z. B. 8 die dritte Potenz, oder der Kubus von 2; weil $2.2.2 = 4.2 = 8$ ist; 27 ist der Kubus von 3; weil $3.3.3 = 9.3 = 27$; und a^3 ist der Kubus von a; weil $a.a.a = a^2.a = a^3$ ist. Und eben so heißt auch wieder 2 die Kubikwurzel von 8; 3 die Kubikwurzel von 27, und a die Kubikwurzel von a^3. **Der Kubus einer jeden Größe wird demnach gefunden, wenn man das Quadrat der Größe noch einmal mit der Wurzel multipliziret.**

§. 115.

Multiplizirt man ferner den Kubus einer Größe noch einmal mit der Wurzel, so erhält man die **vierte Potenz**, oder das **Biquadrat** dieser Größe; dieses wieder mit der Wurzel multipliziret, giebt die **fünfte Potenz** u. s. w.; so heißt $a^4 = a^3.a$ die vierte; $a^5 = a^4.a$ die fünfte; $a^6 = a^5.a$ die sechste, a^m die $m$te Potenz von a; so wie a die vierte Wurzel von a^4, die fünfte Wurzel von a^5, und die $m$te Wurzel von a^m genennt wird.

§. 116.

Eine gegebene Größe auf die $m$te Potenz erheben heißt demnach nichts anders, als diese Größe $m$mal durch die

Multiplikation ansetzen, wo das Produkt die *mte* Potenz dieser Größe ist; und die Zahl *m*, welche anzeigt, wie vielmal die gegebene Größe in der Multiplikation als Faktor anzusetzen sey, ist der Exponent der Potenz.

Und eben so heißt auch die *mte* Wurzel aus einer gegebenen Größe ziehen nichts anders, als die vorgegebene Größe in *m* gleiche Faktoren zerlegen, oder welches einerley ist, eine Größe finden, die *m*mal durch die Multiplikation angesetzt die gegebene Größe zum Vorschein bringet.

§. 117.

Damit man aber alsogleich wisse, welche Wurzel aus einer vorgegebenen Größe zu ziehen verlangt wird, bedient man sich des Zeichens $\sqrt{\ }$, ober welchem die Zahl gesetzt wird, welche anzeiget, in wie viel gleiche Faktoren die hinter diesem Zeichen befindliche Größe zerlegt werden soll; und diese Zahl wird hier der **Exponent des Wurzelzeichens**, oder der **Wurzelexponent** genennet. So schreibt man z. B. $\sqrt[2]{64} = 8$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{81} = 3$; und wird gelesen, die Quadratwurzel aus 64 ist gleich 8; die Kubikwurzel aus 64 ist gleich 4; die vierte Wurzel aus 81 ist gleich 3.

Bey der Quadratwurzel pflegt man zwar selten den Exponenten des Wurzelzeichens ausdrücklich anzusetzen, sondern es wird jederzeit, wenn kein Exponent ober dem Wurzelzeichen angesetzt ist, die Quadratwurzel darunter verstanden; so schreibt man z. B. $\sqrt{a^2} = a$.

Die gezogene Wurzel aus einer Größe muß demnach also beschaffen seyn, daß, wenn man sie auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt, die Größe unter dem Wurzelzeichen wieder zum Vorschein komme.

Anmerkung. Wie Potenzen zu addiren, subtrahiren, multipliziren, und zu dividiren sind, ist bereits bekannt, da für die Rechnungsarten der algebraischen Größen mit Exponenten allgemeine Regeln festgesetzet worden (§. 63. bis 67.) und

und die Potenzen nichts anders sind, als solche mit Exponenten behaftete algebraische Größen.

§. 118.

Jede Potenz einer positiven Wurzel ist positiv; denn, wie könnte wohl aus der Multiplikation einiger positiven Faktoren ein negatives Produkt entstehen? Erhebt man aber eine negative Größe z. B. $(-a)$ auf die nacheinander folgenden Potenzen, so ist $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$; $(-a)^3 = (-a)^2 \times -a = +a^2 \times -a = -a^3$; $(-a)^4 = (-a)^3 \times -a = -a^3 \times -a = +a^4$ u. s. w.; nämlich alle geraden Potenzen einer negativen Wurzel sind positiv, und alle ungeraden sind negativ. Man hat deswegen $(-a)^2$ von $-a^2$ sorgfältig zu unterscheiden; denn $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$, und $-a^2 = -a \times +a$.

§. 119.

Es folgt hieraus. I. Jede ungerade Wurzel aus einer positiven Größe ist positiv, und aus einer negativen Größe negativ; z. B. $\sqrt[3]{+a^3} = +a$, und $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

II. Hingegen kann jede gerade Wurzel aus einer positiven Größe sowohl positiv, als auch negativ seyn; z. B. $\sqrt{+a^2}$ ist sowohl $+a$, als auch $-a$, weil jedes mit sich selbst multipliziret $+a^2$ giebt. Man pflegt daher auch bey Ausziehung der geraden Wurzeln jederzeit beide Zeichen vor der Wurzel anzusetzen, wo sodann andere Umstände der Rechnungen, worinn solche vorkommen, entscheiden müssen, welches von beiden Zeichen zu nehmen sey; so schreibt man z. B. $\sqrt{a^2} = \pm a$; und zwar $\sqrt{a^2} = +a$, wenn es aus andern Umständen bekannt ist, es sey $+a$ ins Quadrat erhoben worden; hingegen ist $\sqrt{a^2} = -a$, wenn es sonst ausgemacht ist, daß eine negative Größe ins Quadrat erhoben worden sey.

III. Sollte aber aus einer negativen Größe eine gerade Wurzel gezogen werden, so läßt sich gar nicht gedenken, wie aus der Multiplikation einer geraden Anzahl negativer Faktoren ein negatives Produkt entstehen könnte, und folglich ist es unmöglich eine solche Wurzel anzugeben. Solche gerade Wurzeln aus negativen Größen werden daher unmögliche oder eingebildete Größen genennt; so sind z. B. $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-a^4}$ unmögliche Größen.

§. 120.

Ein Produkt wird auf eine Potenz erhoben, wenn man jeden Faktor insbesondere auf die verlangte Potenz erhebt, und diese Potenzen miteinander multipliziret. Denn es ist z. B. $(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = a^3b^3c^3$ vermög (§. 116.); eben so ist $(abc)^m = a^m\, b^m\, c^m$; $(72)^3 = (6 \cdot 3 \cdot 4)^3 = 6^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 = 216 \cdot 27 \cdot 64 = 373248$.

Und eben so kann auch umgekehrt aus einem Produkte eine beliebige Wurzel gezogen werden, wenn man aus jedem Faktor die Wurzel insbesondere zieht, und solche miteinander multipliziret. So ist z. B. $\sqrt[m]{a^mb^m} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b^m} = ab$; $\sqrt[3]{27a^3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^3} = 3a$; $\sqrt{576} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

§. 121.

Eine Zahl, welche am Ende Nullen hat, kann daher zum Quadrat erhoben werden, wenn man nur die bedeutlichen Ziffern ins Quadrat erhebt, und hinten doppelt so viele Nullen anhängt, als die Wurzel deren hat. So ist z. B. $(90)^2 = (9 \cdot 10)^2 = 9^2 \cdot 10^2 = 81 \cdot 100 = 8100$.

Eben so wird auch eine Zahl, die hinten Nullen hat, zum Kubus erhoben, wenn man nur die bedeut-

deutlichen Ziffern erhebt, und hinten dreymal so viele Nullen anhängt, als die Wurzel deren hat. So ist z. B. $(300)^3 = (3 \cdot 100)^3 = 27 \cdot 1000000 = 27000000$.

Und so ist auch wieder umgekehrt $\sqrt{640000} = \sqrt{64} \times \sqrt{10000} = 8 \cdot 100 = 800$; $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000} = 3 \cdot 10 = 30$.

Hieraus folgt, daß so oft man ein Quadrat mit 100 multipliziret, so oft wird dadurch die Wurzel mit 10 multipliziret; und so oft man den Kubus einer Größe mit 1000 multipliziret, so oft wird die dazu gehörige Wurzel mit 10 multipliziret.

§. 122.

Soll ein Bruch auf eine Potenz erhoben werden, so erhebe man den Zähler und Nenner auf die verlangte Potenz. So ist z. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$ vermög (§. 116.); $\left(\frac{a}{x}\right)^m = \frac{a^m}{x^m}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Es wird daher auch umgekehrt aus einem Bruche eine Wurzel gezogen, wenn man aus dem Zähler und aus dem Nenner die verlangte Wurzel ziehet. So ist z. B.

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}; \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}; \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}$$

§. 123.

Es folgt aus diesem I. daß die Potenzen eines ächten Bruches immer kleiner werden, in je höhere Potenzen man den Bruch erhebt; denn, wenn $b > a$ ist, so ist auch $\frac{a}{b} > \frac{a^2}{b^2} > \frac{a^3}{b^3}$ u. s. w.

II. Hingegen werden die Potenzen eines Bruches der > 1 ist, immer größer, in je höhere Potenzen man den Bruch erhebt; denn, wenn $b < a$, so ist auch $\frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < \frac{a^3}{b^3}$ u. s. w.

III. Wäre aber $a = b$, so ist jede Potenz, so wie auch jede Wurzel von $\frac{a}{b}$ immer $= 1$; weil ein solcher Bruch $=$ der Einheit, und sowohl jede Potenz, als auch jede Wurzel von 1 immer gleich 1 ist.

IV. Ist auch hieraus zu ersehen, daß keine Potenz weder eines eigentlichen noch uneigentlichen Bruches eine ganze Zahl werden kann; z. B. wenn $\frac{a}{b}$ ein Bruch ist, wo b in a nicht genau enthalten ist, so kann $\frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3} \ldots\ldots \frac{a^m}{b^m}$ keine ganze Zahl seyn; denn wäre z. B. $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, so müßte a durch b genau theilbar seyn, welches wider die Voraussetzung ist.

§. 124.

Sollte daher aus einer ganzen Zahl was immer für eine Wurzel gezogen werden, und es ist letztere keine ganze Zahl, so kann eben diese Wurzel auch kein Bruch seyn. Z. B. obschon $\sqrt{6} >$ seyn muß als 2, und < 3, so kann doch kein Bruch gefunden werden, welcher zu 2 addirt vollkommen genau die Quadratwurzel aus 6 giebt; denn gäbe es einen solchen Bruch, so müßte die Potenz eines uneigentlichen

chen Bruches eine ganze Zahl seyn, welches doch vermög (§. 123. IV.) nicht seyn kann. Daß man sich aber doch dem Werthe einer solchen Wurzel durch Dezimalstellen so weit nähern könne, als es nur immer die Richtigkeit einer Rechnung erfordert, wird in der Folge gezeiget werden.

§. 125.

Alle solche mit Wurzelzeichen behaftete Größen, deren Wurzeln sich nicht vollkommen genau ausziehen lassen, nämlich die Wurzeln aus unvollkommenen Potenzen werden irrationale Größen genennt; so sind z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ irrationale Größen; im Gegentheil heissen jene rationale Größen, wo sich die Wurzel genau ausziehen läßt; so sind $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{64}$ rationale Größen.

Auch die algebraischen Größen, aus denen sich die angezeigte Wurzel nicht genau ausziehen läßt, werden algebraische irrationale Größen genennt; so sind z. B. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{(a^2+x^2)}$, $\sqrt[m]{a^n b}$ in so lang irrational, bis man für die Größen unter dem Zeichen solche Zahlen annimmt, damit sich die Wurzel genau ausziehen läßt; hingegen sind $\sqrt{a^4}$, $\sqrt[3]{a^6 b^3}$, $\sqrt[m]{a^m}$ algebraisch rationale Größen, weil sich die Wurzel genau ausziehen läßt, man möge für a und b was immer setzen.

§. 126.

Jede Größe, die zu ihrem Exponenten eine Nulle hat, ist einer Einheit gleich; nämlich $a^0 = 1$.

Denn es ist $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$ vermög (§. 65. N. 3.); es ist aber auch $a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$ vermög (§. 72.); folglich auch $a^0 = 1$ vermög (§. 12. Grunds. 3.).

Da

Da nun a jede, sowohl einfache, als zusammengesetzte Größe vorstellen kann, so ist auch jede Größe mit dem Exponenten o einer Einheit gleich; so ist $\left(\frac{b}{c}\right)^0 = 1$; $(d-x)^0 = 1$.

§. 127.

Jede Größe, die einen negativen Exponenten hat, ist gleich einem Bruche dessen Zähler die Einheit, und der Nenner die nämliche Größe mit dem positiven Exponenten ist; nämlich $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Denn $a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m}$ nach (§. 65. N. 3.); und auch $a^m : a^{2m} = \frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{a^m : a^m}{a^{2m} : a^m} = \frac{1}{a^m}$ vermög (§. 79.); folglich auch $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ vermög (§. 12. Grundsatz 3.)

Und so ist auch umgekehrt $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$;

denn $\frac{1}{a^{-m}} = 1 : a^{-m} = 1 : \frac{1}{a^m} = a^m$, wo a und m wie immer beschaffen seyn können.

Dieses giebt uns ein Mittel an die Hand, jeden Bruch in Gestalt einer ganzen Zahl vorzustellen, oder auch jeden Faktor aus dem Zähler in den Nenner, und aus dem Nenner in den Zähler zu übertragen, wenn man bey den übertragenen Faktoren die Zeichen der Exponenten ändert. So ist z. B. $\frac{a}{x^2} = a \cdot \frac{1}{x^2} = ax^{-2}$; $\frac{ab^2}{cx^{-m}} = \frac{b^2x^m}{a^{-1}c}$; $\frac{x^3 - ax}{bc^3} = \frac{x(x^2-a)}{bc^3} = \frac{x^2 - a}{bc^3x^{-1}}$; $\frac{a^2x(c^2 - x^2)^m}{p} = \frac{a^2x}{p(c^2-x^2)^{-m}}$; $\frac{5}{9} = 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{3^2} = 5 \cdot 3^{-2} = 5 \cdot 9^{-1}$.

§. 128.

§. 128.

Einnamige Potenzen können wieder zu andern Potenzen erhoben werden, deren Exponenten gegeben sind, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem gegebenen Exponenten multipliziret; nämlich $(a^m)^n = a^{mn}$. Denn $(a^m)^n = a^m . a^m . a^m . a^m \ldots = a^{m+m+m+m+\ldots} = a^{mn}$.

Beyspiele.

$(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$.

$(a^m b^n)^4 = a^m b^n . a^m b^n . a^m b^n . a^m b^n = a^{4m} b^{4n}$.

$(-a^m bc^3)^2 = -a^m bc^3 \times -a^m bc^3 = + a^{2m} b^2 c^6$.

$\left(\frac{a^2}{b^n}\right)^m = \frac{a^{2m}}{b^{mn}}$; $[a^3 (a^2 + x^2)^2]^4 = a^{12} (a^2 + x^2)^8$.

Auch bey den negativen Exponenten gilt diese Regel; denn es ist z. B. $(a^{-m})^3 = \left(\frac{1}{a^m}\right)^3 = \frac{1}{a^{3m}} = a^{-3m}$ nach (§. 127);

$(a^m b^{-n})^{-n} = \frac{1}{(a^m b^{-n})^n} = \frac{1}{a^{mn} b^{-nn}} = a^{-mn} b^{nn}$;

Es ist allhier wieder zu merken, daß man bey einer negativen Größe das Zeichen − in + verwandeln müsse, wenn der gegebene Exponent wie im B. 3. eine gerade Zahl ist. Denn die Bezeichnung $(-a^m)^4$ ist vermög (§. 118.) von $-(a^m)^4$ wohl zu unterscheiden; $(-a^m)^4$ ist gleich $+ a^{4m}$, hingegen ist $-(a^m)^4 = -a^{4m}$.

§. 129.

Und umgekehrt wird aus einer einnamigen Potenz jede beliebige Wurzel gezogen, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten des Wurzelzeichens dividiret, nämlich $\sqrt[n]{p^a} = p^{\frac{a}{n}}$; so z. B. ist

$\sqrt[2]{a^2} = \pm a^{\frac{2}{2}} = \pm a$; $\sqrt[3]{b^6} = b^{\frac{6}{3}} = b^2$; $\sqrt[4]{x^8 y^{12}} =$

$\underline{+}x^{\frac{8}{4}}y^{\frac{12}{4}} = \underline{+}x^2y^3$; weil diese Wurzeln so beschaffen sind, daß, wenn man solche wieder auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt, sie die Größen unter dem Wurzelzeichen, die Potenzen nämlich, wieder zum Vorschein bringen.

§. 130.

Wenn man was immer für eine zweynamige Größe $a+b$ nach (§. 113.) ins Quadrat erhebt, so ist $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$; nämlich: **das Quadrat einer jeden zweynamigen Größe besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Theiles, 2) aus dem doppelten Produkte des ersten in den zweyten Theil, und 3) aus dem Quadrate des zweyten Theiles.** Setzet man nun $b = -x$, so ist $2ab = -2ax$ und $b^2 = (-x)^2 = +x^2$; also $(a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$.

Beyspiele.

$$(a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1;$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}.$$

$$\left(bc^2 - \frac{a}{b}\right)^2 = b^2c^4 - 2ac^2 + \frac{a^2}{b^2};$$

$$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2.$$

$(99)^2 = (90+9)^2 = 8100 + 1620 + 81 = 9801$; oder auch $(99)^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$.

§. 131.

Sollte eine dreynamige Größe $a + b + c$ ins Quadrat erhoben werden, so kann solche als eine zweynamige behandelt werden, indem man $(a + b)$ für den ersten, und

c für den andern Theil ansieht. Es ist sodann $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; nämlich das Quadrat einer jeden dreynämigen Größe besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Theiles, 2) aus dem doppelten Produkte des ersten Theiles in den zweyten; 3) aus dem Quadrate des zweyten Theiles; 4) aus dem doppelten Produkte des ersten und zweyten Theiles in den dritten; und endlich 5) aus dem Quadrate des dritten Theiles.

Beyspiele.

$$\left(a - x + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - 2ax + x^2 + ab - bx + \frac{b^2}{4};$$

$$(2a^2 - 3ax - 4x^2)^2 = 4a^4 - 12a^3x + 9a^2x^2 - 16a^2x^2 + 24ax^3 + 16x^4.$$

$$(1 - x + x^2)^2 = 1 - 2x + x^2 + 2x^2 - 2x^3 + x^4 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$

$$(999)^2 = (900 + 99)^2 = (900 + 90 + 9)^2 = 810000 + 162000 + 8100 + 16200 + 1620 + 81 = 998001.$$

§. 132.

Erhebt man auf die nämliche Art eine viernamige Größe $a + b + c + d$ ins Quadrat; so ist $[(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$; und so könnte auch eine 5, 6, 7namige Größe u. s. w. ins Quadrat erhoben werden, woraus man sieht, daß das Quadrat einer jeden mehrnamigen Größe bestehe, 1) aus dem Quadrate eines jeden Gliedes insbesondere, und 2) aus den doppelten Produkten eines jeden Gliedes in alle seine nachfolgenden Glieder.

§. 133.

Der Kubus einer jeden zweynamigen Größe $a+b$ besteht 1) aus dem Kubus des ersten Gliedes a^3; 2) aus dem dreyfachen Produkte des Quadrats vom ersten Gliede in das zweyte $3a^2b$; 3) aus dem dreyfachen Produkte des Quadrats des zweyten Gliedes in das erste $3ab^2$; und 4) endlich aus dem Kubus des zweyten Gliedes b^3. Denn es ist (§. 114.)

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Setzet man $b = -x$, so ist $3a^2b = -3a^2x$; $3ab^2 = 3a \times (-x)^2 = +3ax^2$; und $(-x)^3 = -x^3$: folglich $(a-x)^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$.

Beyspiele.

$$(2ax - x^2)^3 = 8a^3x^3 - 12a^2x^4 + 6ax^5 - x^6.$$
$$(1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$$
$$\left(3a + \frac{1}{2}\right)^3 = 27a^3 + \frac{27a^2}{2} + \frac{9a}{4} + \frac{1}{8}.$$
$$(11)^3 = (10+1)^3 = 1000 + 300 + 30 + 1$$
$$= 1000 + 331 = 1331.$$
$$(99)^3 = (90+9)^3 = 729000 + 218700 + 21870$$
$$+ 729 = 729000 + 241299 = 970299;$$

oder auch $(99)^3 = (100-1)^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299$.

§. 134.

Ist eine dreynamige Größe $a+b+c$ zum Kubus zu erheben, so ist, wenn man die ersten zwey Glieder als einnamig betrachtet, $(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b) \cdot c^2 + c^3$; nämlich der

Ku-

Kubus einer dreynamigen Größe besteht 1) aus dem Kubus des ersten Gliedes; 2) aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Gliedes, multiplizirt mit dem zweyten; 3) aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Gliedes, multiplizirt mit dem ersten; 4) aus dem Kubus des zweyten Gliedes; 5) aus dem dreyfachen Quadrate der Summe des ersten und zweyten Gliedes, multiplizirt mit dem dritten; 6) aus dem dreyfachen Quadrate des dritten Gliedes, multiplizirt mit der Summe des ersten und zweyten; und endlich 7) aus dem Kubus des dritten Gliedes.

Beyspiele.

$$(1+x-x^2)^3 = 1+3x+3x^2+x^3-3x^2-6x^3-3x^4 \\ +3x^4+3x^5-x^6 = 1+3x-5x^3+3x^5-x^6.$$

$$(999)^3 = (900+90+9)^3 = 729000000+218700000 \\ +21870000+729000+26462700+240570 \\ +729 = 997002999.$$

§. 135.

Wenn man nun auf eben diese Art eine vier, fünf, sechsnamige Größe u. s. w. zum Kubus erhebt, indem man selbe jederzeit als zweynamig betrachtet, so findet man, daß der Kubus einer jeden mehrnamigen Größe bestehe, 1) aus dem Kubus eines jeden einzelnen Gliedes insbesondere, 2) aus den dreyfachen Produkten eines jeden Gliedes in das Quadrat der Summe aller vorhergehenden Glieder, und 3) aus den dreyfachen Produkten des Quadrates eines jeden Gliedes in die Summe aller vorhergehenden Glieder.

So ist z. B. $(a+b+c+d+e+f+g+h+\ldots)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 +3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3+3(a+b+c+d)^2.e +3(a+b+c+d)e^2+e^3+\ldots$ u. s. w.

§. 136.

So wie wir allgemeine Regeln gefunden haben, nach welchen eine mehrnamige Größe zur zweyten und zur dritten Potenz erhoben werden kann; eben so lassen sich auch für die vierte, fünfte, und höhere Potenzen der mehrnamigen Größen allgemeine Regeln herleiten. Allein, da diese Regeln schon sehr weitläufig sind, und wir überdieß weiter hinten, bey der Lehre von den unendlichen Reihen, Gelegenheit haben werden, eine allgemeinere Formel für jede Potenz n einer zweynamigen Größe $(a+b)$ zu entwickeln, so können solche hier mit Stillschweigen übergangen werden. Indessen können doch die fleißigern Anfänger bereits mit ihren eigenen Kräften untersuchen, aus was für Theilen die 4te, 5te, 6te, und 7te Potenz einer zweynamigen Größe bestehe, wodurch sich sodann jede zweynamige Größe auf solche Potenzen sehr leicht und geschwind erheben läßt.

§. 137.

Grundsätze N. 1. Wenn man gleiche Größen zu gleichen Potenzen erhebt, so sind die Potenzen einander gleich; erhebt man aber ungleiche Größen zu gleichen Potenzen, so ist die Potenz der kleinern Größe auch kleiner als die andere.

Beyspiele.

Es ist $8 = 5 + 3$	Wenn $a = b$
also auch $8^2 = (5+3)^2$	so ist auch $a^m = b^m$
nämlich $64 = 25 + 30 + 9$	Ist aber $a > b$
	so ist auch $a^m > b^m$.

N. 2. Zieht man aus gleichen Größen gleiche Wurzeln, so sind auch die Wurzeln einander gleich. Wenn man hingegen aus ungleichen Größen gleiche Wurzeln zieht, so ist jene größer, die aus der größern Größe gezogen wird.

Beyspiele.

Es ist $64 = 25 + 30 + 9$ Wenn $a = b$

also auch $\sqrt{64} = \sqrt{(25 + 30 + 9)}$ so ist auch $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$

nämlich $\sqrt{64} = \sqrt{(5 + 3)^2}$ Ist aber $a > b$

und $8 = 5 + 3$ so ist auch $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$

II. Abschnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat = und Kubikwurzel aus zusammengesetzten Größen insbesondere.

§. 138.

Wie aus einer einnamigen algebraischen Größe die Quadrat = und Kubikwurzel ausgezogen werden kann, ist bereits in (§. 129.) gesagt worden.

Damit man aber auch die Quadrat = und Kubikwurzel aus einer vorgegebenen Zahl, wenn die Wurzel nur aus einer einzigen Ziffer besteht, alsogleich wissen könne, ist es erforderlich, daß man die zweyten und dritten Potenzen aller einfachen Zahlen von 1 bis 9 im Gedächtnisse behalte, wovon die erstern ohnehin schon in dem Einmaleins enthalten sind.

Zur kurzen Uebersicht kann folgende Tafel dienen:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadratzahlen	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Kubikzahlen	1	8	27	64	125	216	243	512	729	1000

Woraus schon zu ersehen ist, daß die Quadratwurzel aus einer Zahl von einer oder zwey Ziffern, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen könne, und daß solche Wurzel, wenn die gegebene Zahl nicht unter den Quadratzahlen in der Tafel enthalten ist, irrational seyn müsse (§. 125.); so ist z. B. $\sqrt{72} > 8$, und < 9, und folglich irrational. Eben so ist auch daraus zu ersehen, daß die Kubikwurzel aus einer Zahl, die nicht mehr als 3 Ziffern enthält, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen könne; so ist z. B. $\sqrt[3]{999} < 10$, weil $10^3 = 1000$; und > 9, weil $9^3 = 729$ ist; eben so ist $\sqrt[3]{81} > 4$, und < 5.

§. 139.

Wenn aus einer mehrnamigen algebraischen Größe die Quadratwurzel gezogen werden soll, so kann die Größe, wenn sie auch aus noch so vielen Gliedern besteht, als das Quadrat einer zweynamigen Wurzel angesehen werden; weil vermög (§. 132.) jede mehrnamige Größe, als zweynamig vorgestellt, ins Quadrat erhoben werden kann.

Wenn man sich nun an die Theile erinnert, aus welchen das Quadrat einer zweynamigen Größe zusammengesetzt ist, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; so ergeben sich für die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer mehrnamigen Größe (z. B. aus $a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$) folgende allgemeine Regeln.

$$\sqrt{(a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)} = a^2 + 3ab - 2b^2$$

$$\pm a^4$$

$$6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 \mid : 2a^2$$

$$\pm 6a^3b \pm 9a^2b^2$$

$$-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 \mid : (2a^2 + 6ab)$$

$$-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$$

$$+ \quad + \quad -$$

$$0$$

1) Aus dem ersten Gliede der gegebenen Größe ziehe man die Quadratwurzel (giebt a^2); dieses setze man als das erste Glied der Wurzel nach dem Gleichheitszeichen hin; erhebe es wieder ins Quadrat, und ziehe es vom ersten Gliede ab, so wird solches getilget.

2) Da nun ferner noch das doppelte Produkt aus dem ersten in das zweyte Glied, in dem Reste stecken muß; so dividire man das folgende Glied ($6a^3b$) des Restes durch den doppelten gefundenen ersten Theil ($2a^2$) der Wurzel, so giebt der Quotient ($3ab$) das zweyte Glied der gesuchten Wurzel. Mit diesem Gliede multiplizire man den Divisor, so hat man das doppelte Produkt des ersten Theiles in den zweyten ($6a^3b$); ferner multiplizire man eben dieses Glied der Wurzel noch mit sich selbsten, so hat man das Quadrat des zweyten Theiles ($9a^2b^2$); ziehet man nun beyde von der gegebenen Größe ab, so hat man das vollständige Quadrat der gefundenen zweynamigen Größe (a^2+3ab) abgezogen.

3) Bleibt noch ein Rest übrig, so ist es ein Zeichen, daß die gesuchte Wurzel mehr als zwey Glieder habe; man sehe deswegen die schon gefundenen zwey Glieder als den ersten Theil der Wurzel an; und da das Quadrat dieses Theiles schon abgezogen ist, so dividire man wieder den Rest durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (hier nämlich durch $2a^2+6ab$), so wird der Quotient ($-2b^2$) das folgende Glied der Wurzel seyn. Mit diesem neuen Gliede multiplizire man wieder den Divisor, erhebe auch eben dieses Glied ins Quadrat, ziehe das sämmtliche Produkt von dem Dividendus ab, so hat man schon bereits das Quadrat der gefundenen dreynamigen Größe ($a^2+3ab-2b^2$) von der vorgegebenen Größe abgezogen. Und so könnte man auch, wenn noch ein Rest vorhanden wäre, das vierte Glied der Wurzel finden, indem man alle bereits schon gefundenen Glieder als den ersten Theil der Wurzel betrachtet, und den

zweyten durch die Division mittelst des Doppelten aller schon gefundenen Glieder der Wurzel suchet, u. s. w.

4) Wenn nun die gegebene Größe ein vollständiges Quadrat ist, so wird diese vorgeschriebene Operation einmal ein Ende nehmen; im Gegentheile aber, wenn die vorgegebene Größe kein vollständiges Quadrat seyn sollte, so würde man auch mit diesem Verfahren nie zu Ende kommen, sondern die Glieder der Wurzel würden ohne Ende fortgehen, wie es im Beyspiele III. zu ersehen ist.

Beyspiele.

I. $\sqrt{(4-8y+4y^3+y^4)} = 2-2y-y^2$

$$\begin{array}{l}
\pm 4 \\
\hline
-8y+4y^3+y^4 \mid : 4 \\
\mp 8y \pm 4y^2 \\
\hline
-4y^2+4y^3+y^4 \mid : 4-4y \\
\mp 4y^2 \pm 4y^3 \pm y^4 \\
\hline
0
\end{array}$$

II. $\sqrt{\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)} = x-\frac{a}{2}$

$$\begin{array}{l}
\pm x^2 \\
\hline
-ax+\frac{a^2}{4} \mid : 2x \\
\mp ax \pm \frac{a^2}{4} \\
\hline
0
\end{array}$$

III.

III. $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} \cdots$

$$\pm a^2$$

$$-x^2 \;\Big|\; : 2a$$

$$\mp x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$$
$$-$$

$$-\frac{x^4}{4a^2} \;\Big|\; : 2a - \frac{x^2}{a}$$

$$\mp \frac{x^4}{4a^2} \pm \frac{x^6}{8a^4} \pm \frac{x^8}{64a^6}$$

$$-\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \;\Big|\; : 2a - \cdots$$

§. 140.

Wenn aus einer mehrnamigen algebraischen Größe die Kubikwurzel gezogen werden sollte, so fliessen aus den schon bekannten Theilen, aus welchen der Kubus einer zweynamigen Größe $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ zusammengesetzt ist (§. 133.), folgende allgemeine Regeln:

1) Aus dem ersten Gliede der gegebenen Größe ($8a^3$ im folgenden Beyspiele I.) ziehe man die Kubikwurzel ($2a$), so giebt dieses Glied den ersten Theil der gesuchten Wurzel; den Kubus hievon ziehe man von der gegebenen Größe ab.

2) Da nun in dem Reste das dreyfache Produkt aus dem Quadrate des ersten Theils, multiplizirt mit dem zweyten enthalten seyn muß (§. 133.); so dividire man solchen durch das dreyfache Quadrat des schon gefundenen ersten Theiles ($12a^2$), so giebt der Quotient ($3b$) den zweyten

Theil der gesuchten Wurzel. Mit diesem Quotienten multiplizire man den Divisor, so ist dieses ($36a^2b$) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweyten. Ferner multiplizire man das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles mit dem ersten (giebt $54ab^2$); sodann erhebe man auch noch den zweyten Theil zum Kubus (giebt $27b^3$); und da alles dieses in dem Rest enthalten seyn muß, (§. 133.) so ziehe man solches von dem Reste gehörig ab.

3) Bleibt nun noch ein Rest übrig, wie im folgenden Beyspiele II., so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr, als zwey Gliedern bestehe. Man sehe daher die schon gefundenen zwey Glieder ($2x^2 + x$) als den ersten Theil der Wurzel an, und suche, wie vorhin, den zweyten; man dividire zu dem Ende den Rest durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, so giebt der Quotient das dritte Glied der Wurzel. Mit diesem Quotienten multiplizire man den Divisor; das dreyfache Quadrat dieses Quotienten multiplizire man mit den vorhergehenden Gliedern der Wurzel; endlich erhebe man auch diesen Quotienten zum Kubus, und ziehe diese drey Produkte von dem Dividendus ab. Und so wird dieses Verfahren bey jedem nachfolgenden Reste wiederholet, indem man jederzeit die schon gefundenen Glieder der Wurzel als den ersten Theil betrachtet, und den zweyten suchet.

4) Kömmt man nun durch diese Operation einmal zu Ende, so, daß kein Rest mehr übrig bleibt, so ist die vorgegebene Größe ein vollkommener Kubus, wovon die Wurzel gefunden ist; im Gegentheile aber, wenn die vorgegebene Größe kein vollkommener Kubus seyn sollte, wie im folgenden Beyspiele III., so wird man auch mit dieser Operation nie zu Ende kommen.

Bey-

Beyspiele.

I. $$\sqrt[3]{(8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3)} = 2a + 3b$$

$$\underline{\pm 8a^3}$$

$$36a^2b + 54ab^2 + 27b^3 \mid : 12a^2$$

$$\underline{\pm 36a^2b \pm 54ab^2 \pm 27b^3}$$

$$0$$

II. $$\sqrt[3]{(8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27)}$$
$$= 2x^2 + x - 3$$

$$\underline{\pm 8x^6}$$

$$12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27 \mid : 12x^4$$

$$\underline{\pm 12x^5 \pm 6x^4 \pm x^3}$$

$$-36x^4 - 36x^3 + 45x^2 + 27x - 27$$

$$: 12x^4 + 12x^3 + 3x^2$$

$$\underline{\mp 36x^4 \mp 36x^3 \mp 9x^2 \pm 54x^2 \pm 27 \mp 27}$$

$$0$$

III. $$\sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Es ist hier noch zu erinnern, daß man bey der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel aus mehrnamigen algebraischen Größen, auch zugleich auf die Ordnung der Glieder zu sehen habe, damit nicht die Division in irgend einem unrechten Gliede geschieht, wodurch man mehrere Glieder in der Wurzel erhält, die sich zwar wieder wechselweise tilgen, die Operation hingegen doch dadurch verzögert wird. Da aber der Fall äusserst selten vorkömmt, daß aus mehrnamigen algebraischen Größen die Quadrat- oder Kubikwurzel zu ziehen wäre, sondern meistens nur aus einem vollständigen Quadrat einer zweynamigen Größe, welches ohnehin leicht zu ordnen ist, die Wurzel zu ziehen verlangt

langt wird, so wollen wir uns hiebey auch nicht länger aufhalten.

§. 141.

Um aber auch allgemeine Regeln bestimmen zu können, nach welchen aus jeder gegebenen, mit noch so viel Ziffern geschriebenen Zahl die Quadrat- und Kubikwurzel theilweise, und zwar nach ihrer dekadischen Ordnung gefunden werden kann, ist es vorher nothwendig, Untersuchungen anzustellen, wie und auf welche Art die Theile des Quadrats oder Kubus bey unserem Zahlensysteme miteinander verbunden sind, und wie weit sich nach der dekadischen Ordnung das Quadrat, oder der Kubus einer jeden einzelnen bedeutlichen Ziffer der Wurzel in dem Quadrate oder Kubus aller Ziffern erstrecke. Dieses läßt sich bestimmen, wenn man eine vorgegebene Zahl nach ihrer dekadischen Ordnung in Theile zerleget, und sodann eine solche Zahl, als eine mehrnamige Größe, zum Quadrat oder Kubus (nach §. 132. und 135.) erhebet; wie es in der Folge zu ersehen seyn wird.

§. 142.

Wenn man eine Zahl, welche aus m (z. B. aus 3) Ziffern besteht, zum Quadrat erhebt, so kann das Quadrat nicht mehr als $2m$ (als 6) und nicht weniger als $2m$ — 1 (als 5) Ziffern haben.

Denn da die Zahl nur aus m (aus 3) Ziffern besteht, so muß dieselbe, wenn sie auch aus lauter 9nern bestünde, (nämlich 999 wäre), dennoch kleiner seyn als 1 mit m angehängten Nullen ($999 < 1000$); daher ist auch ihr Quadrat kleiner als das Quadrat von 1 mit m angehängten Nullen (§. 137. Grundს. 1.). Nun aber ist das Quadrat von 1 mit m angehängten Nullen (vermög §. 121.) eine Einheit mit $2m$ angehängten Nullen (nämlich $1000^2 = 1000000$), welches die möglich kleinste Zahl ist, die mit $2m + 1$ (mit 7) Ziffern geschrieben wird; folglich kann

das

das Quadrat einer Zahl von m (von 3) Ziffern nicht aus $2m + 1$ (aus 7) Ziffern, sondern höchstens nur aus $2m$ (aus 6) Ziffern bestehen.

Ferner ist die möglich kleinste Zahl von m (von 3) Ziffern eine Einheit mit $m - 1$ (mit 2) angehängten Nullen (nämlich 100); und diese zum Quadrat erhoben giebt 1 mit $2m - 2$ (mit 4) angehängten Nullen, (nämlich $100^2 = 10000$); folglich eine Zahl mit $2m - 1$ (mit 5) Ziffern; daher muß auch das Quadrat von jeder andern Zahl von m (von 3) Ziffern wenigstens aus $2m - 1$ (aus 5) Ziffern bestehen.

§. 143.

Man kann demnach auch umgekehrt aus der Anzahl der Ziffern einer vorgegebenen Zahl alsogleich wissen, aus wie viel Ziffern die daraus zu ziehende Quadratwurzel bestehen müsse; wenn man nämlich eine gegebene Quadratzahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen von zwey Ziffern abtheilet, wo die letzte Klasse links bey einer ungeraden Anzahl der Ziffern auch nur eine einzige Ziffer enthält, so besteht die Quadratwurzel davon aus so viel Ziffern, als Klassen vorhanden sind.

§. 144.

Erhebt man ferner eine Zahl $= (\ldots 1000d + 100c + 10b + a)$, deren bedeutliche Ziffern nämlich von der Rechten gegen die Linke a, b, c, d u. s. w. seyn sollen, als eine mehrnamige Größe betrachtet, nach (§. 132.) ins Quadrat, so ist

das Quadrat der Einheiten $= a^2$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{= = Zehner} & = b^2 \,.\, 100 \\ \text{= = Hunderte} & = c^2 \,.\, 10000 \\ \text{= = Tausende} & = d^2 \,.\, 1000000 \end{array}\right\} \text{(§. 121.)}$$

Ferner ist das doppelte Produkt aus den Einheiten in alle links folgende Ziffern $= 2a\,(10b + 100c + \ldots)$;

Das

Das doppelte Produkt aus den Zehnern in alle links folgende Ziffern $= 20b\,(100c + 1000d + \ldots)$;

Das doppelte Produkt aus den Hunderten in alle links folgende Ziffern $= 200c\,(1000d + \ldots)$ u. s. w.

Wenn man nun dieses alles durch die Addition nach (§. 17.) in eine Summe bringt und gehörig ordnet, so folget daraus

1) Daß das Quadrat der Einheiten bis in die erste Ziffer der Summe auf der rechten Seite sich erstrecken müsse, weil a^2 immer einige Einheiten in sich enthält, sobald a eine bedeutliche Ziffer ist; daß das Quadrat der Zehner in der Summe sich bis in die dritte Ziffer erstrecken müsse, weil Zehner mit Zehnern multipliziret zum Produkte Hunderte geben; daß das Quadrat der Hunderte sich bis in die fünfte, und das Quadrat der Tausende sich bis in die siebente Ziffer erstrecken müsse u. s. w.

Wenn man demnach die Quadratzahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen eingetheilet, und jeder Klasse zwey Ziffern giebt, wo die letzte Klasse links auch nur eine einzige Ziffer behalten kann, so erstrecket sich das Quadrat der Einheiten bis in die rechte Ziffer der ersten Klasse; das Quadrat der Zehner bis in die rechte Ziffer der zweyten Klasse; das Quadrat der Hunderte bis zur rechten Ziffer der dritten Klasse u. s. w.; und folglich erstrecket sich das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel bis zur rechten Ziffer der letzten Klasse.

2) Was die doppelten Produkte betrift, so kann das doppelte Produkt aus den Einheiten in alle links stehende Ziffern, nur bis in die zweyte Ziffer der Summe zur Rechten, oder bis in die linke Ziffer der ersten Klasse zur Rechten reichen, weil sich keine Einheiten mehr dabey befinden können. Das doppelte Produkt aus den Zehnern in alle links folgende Ziffern, kann nur bis in die vierte Ziffer der Summe zur Rechten, oder bis in die linke Ziffer der zweyten Klasse sich erstrecken, weil Zehner mit Hunderten multipliziret

ret zum Produkte Tausende geben. Eben so kann das doppelte Produkt, aus den Hunderten in die links folgenden Ziffern, sich nur bis in die linke Ziffer der dritten Klasse erstrecken u. s. w. **Es kann daher auch das doppelte Produkt aus der letzten Ziffer der Wurzel links in die nächst vorhergehende sich nur bis in die linke Ziffer der vorletzten Klasse erstrecken**; es ist nämlich bey der Zahl $1000d + 100c + 10b + a$; wenn solche zum Quadrat erhoben wird, das doppelte Produkt aus $1000d$ in $100c$ $= 2cd.100000$, wo die bedeutlichen Ziffern von $2cd$ nur bis zur linken Ziffer der dritten Klasse reichen können.

§. 145.

Alles dieses wohl erwogen giebt für die Ausziehung der Quadratwurzel aus was immer für einer Zahl (z. B. aus 21381376) folgende allgemeine Regeln.

1) Man theile die vorgegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen von zwey Ziffern ein, nämlich 21|38|13|76, wo für die letzte Klasse links auch nur eine Ziffer übrig bleibt, wenn die vorgegebene Zahl eine ungerade Anzahl Ziffern hat; so muß die Quadratwurzel aus so vielen Ziffern bestehen, als Klassen vorhanden sind vermög (§. 143.).

2) Da nun das Quadrat von der höchsten Ziffer der Wurzel in der ersten Klasse links (21) ganz enthalten seyn muß (§. 144. N. 1.), so ziehe man aus dieser Klasse die Quadratwurzel, oder wenn es keine vollkommene Quadratzahl ist, so nehme man die nächst kleinere Quadratzahl (16) und ziehe die Wurzel daraus (4), so hat man auf diese Art die höchste Ziffer der Wurzel gefunden, welche hinter dem Gleichheitszeichen angesetzet wird. Diesen gefundenen Theil der Wurzel erhebe man wieder zum Quadrat, und ziehe solches von der ersten Klasse ab.

$\sqrt{21|38|13|76} = 4624$
16

53 : 8
48
58
36
22

538 : 86
516 6

2213 : 922
1844 2

36976 : 9244
36976 4
0

3) Da in dem Reste (5) nebst der ersten Ziffer der zweyten Klasse (3) das doppelte Produkt, aus der schon gefundenen Ziffer der Wurzel in die nächst folgende Ziffer, ganz enthalten seyn muß (§. 144. N. 2.); so setze man zu dem Reste die erste Ziffer (3) der nächstfolgenden Klasse herunter, dividire diese Zahl (53) durch das doppelte der schon gefundenen Ziffer (durch 4.2=8), so ist der Quotient (6) die zweyte gesuchte Ziffer der Wurzel, welche neben der schon gefundenen rechts angesetzet wird. Mit diesem gefundenen Quotienten (6) multiplizire man den Divisor, und ziehe das Produkt (48) vom Dividendus gehörig ab; und da ferner in dem Reste (5) nebst der zweyten Ziffer der zweyten Klasse (8) auch noch das Quadrat der zweyten gefundenen Ziffer enthalten seyn muß (§. 144. N. 1.), so hänge man an diesen Rest die zweyte Ziffer der folgenden Klasse an (58), und ziehe das Quadrat (36) der zweyten gefundenen Ziffer davon ab.

Dieses alles kann aber kürzer verrichtet werden, wenn man zum ersten Reste (5) beyde Ziffern der folgenden Klasse (38) auf einmal herunter setzet, und dieses (538) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (8) dergestalt dividiret, daß die letzte Ziffer (8) von der Division frey bleibe; sodann den Quotienten (6) an den Divisor rechts anhängt; diesen vermehrten Divisor (86) mit dem Quotienten (6) multipliziret, und das Produkt (516) von dem ganzen Dividendus (538) gehörig abziehet, wie solches in dem angeführten Beyspiele bey der Wiederholung unter dem eingeschlossenen Vierecke zu ersehen ist, so, daß bey der An-

wen-

wendung der Rechenkunst die in dem eingeschossenen Vierecke angezeigte Arbeit gänzlich ausser acht gelassen wird.

4) Besteht nun die Wurzel aus noch mehrern Ziffern, so sehe man die schon gefundenen Ziffern (46) als den ersten Theil der Wurzel an, und suche, wie vorhin, den zweyten Theil; man setze daher zu dem Rest (22) die folgende Klasse (13) herunter, und dividire dieses (2213) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (92), so, daß wieder die letzte Ziffer (3) von der Division frey bleibe; auf diese Art giebt der Quotient (2) die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel. Diesen Quotienten hänge man wieder rechts an den Divisor an, multiplizire diesen vermehrten Divisor (922) mit dem Quotienten (2), und ziehe das Produkt von dem Dividendus gehörig ab.

5) Und so wird zu jedem Reste die nächstfolgende Klasse herunter gesetzt, und durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel so dividiret, daß die letzte Ziffer frey bleibe; der Quotient wird zu den schon gefundenen Ziffern der Wurzel hinzugefüget, auch rechts an den Divisor angehängt, sodann dieser vermehrte Divisor mit der nämlichen angehängten Ziffer multipliziret, und das Produkt von dem Dividendus abgezogen.

6) Sollte irgendwo das Produkt aus dem Quotienten in den vermehrten Divisor zu groß ausfallen, und nicht von dem betreffenden Dividendus abgezogen werden können, so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden sey, und vermindert werden müsse. In dem folgenden Beyspiele N. 1., bey der ersten Division, muß man sagen 4 in 16 geht 3mal, da es doch bey der gewöhnlichen Division 4mal gienge. Es ist aber bey der Ausziehung der Quadratwurzel allzeit rathsam den Quotienten anfänglich lieber zu groß, als zu klein anzunehmen, weil man nach geschehener Subtraktion nicht so geschwind, wie bey der

gewöhnlichen Division entscheiden kann, ob der Quotient nicht zu klein angenommen worden sey.

7) Sollte irgendwo das Doppelte der schon gefundenen Wurzel in dem betreffenden Dividendus nicht enthalten seyn, so muß in der Wurzel an der Stelle des Quotienten eine Nulle gesetzt werden; sodann setze man zu dem Reste noch eine Klasse herunter, und fahre mit der Operation auf die vorgeschriebene Art fort, wie es im Beyspiele N. 2. zu ersehen ist.

8) Sind nun bereits alle Klassen herunter gesetzt, und es geht die letzte Subtraktion genau auf, so ist es ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl sey, wovon die gefundene Zahl die Wurzel ist. Bleibt aber bey der letzten Subtraktion noch ein Rest übrig, wie im Beyspiele N. 1., so ist es ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat, und folglich die Wurzel dieser Zahl eine irrationale Größe sey (§. 125.), dergestalt, daß die gesuchte Wurzel zwischen der gefundenen 238, und zwischen der um eine Einheit vermehrten Zahl 239, als zwischen zwey gefundenen Gränzen liegen müsse.

Beyspiele.

N. 1.

$\sqrt{5|68|76} = 238$
4
168 : 4 3
129 3
3976 : 46 8
3744 8
232 Rest

N. 2.

$\sqrt{65|48|04|64|00} = 80920$
64
148 : 16
14804 : 160 9
14481 9
32364 : 1618 2
32364 2
0

§. 146.

Um sich aber auch den Gränzen einer irrationalen Wurzel durch Dezimalstellen nach Belieben nähern zu können, verfahre man auf folgende Art:

$\sqrt{14|15} = 37{,}61$

9	
515 :	67
469	7
4600 :	746
4476	6
12400 :	752

1) Man hänge an die vorgegebene Zahl (im nebenstehenden Beyspiele an 1415), oder welches einerley ist, man hänge, nachdem alle vorhandene Klassen schon herunter gesetzt sind, an den letzten Rest (46) eine Klasse Nullen an, dividire dieses (4600) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (74), so ist der Quotient (6) abermal eine Ziffer der Wurzel. Da aber diese Wurzel vermög (§. 121.) zehnmal so groß ist, als die gesuchte, weil durch das Anhängen zweyer Nullen das Quadrat mit 100 multiplizirt worden ist, so dividire man diese Wurzel durch 10, nämlich man schneide von dieser Wurzel rechts eine Dezimalstelle ab, so hat man die gesuchte Wurzel bis in die Zehntel richtig gefunden.

2) Will man dieselbe genauer haben, so hänge man abermal an den Rest (124) eine Klasse Nullen an, und dividire dieses wieder durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (752), ohne auf die Dezimalstellen Acht zu geben, so wird der Quotient aus erst angeführter Ursache Hundertel bedeuten, und folglich die zweyte Dezimalstelle der gesuchten Wurzel seyn.

3) Und so könnte man sich, ohne Ende fort, der Wurzel immer mehr nähern, da man jederzeit an den Rest eine Klasse Nullen anhängt, und solchen sodann durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel dividiret, ohne jedoch jemals zu einer solchen Wurzel zu gelangen, die mit sich selbst multiplizirt, die vorgegebene Größe vollkommen zum Vorschein bringet.

Beyspiele.

$\sqrt{3\|46\|95} = 186,2$	$\sqrt{5} = 2,236$
1	4
246 : 28	100 : 42
224 8	84 2
2295 : 366	1600 : 443
2196 6	1329 3
9900 : 3722	27100 : 4466
7444 2	26796 6
2456 Rest	304 Rest

Auf diese Art ist nun im letzten Beyspiele $\sqrt{5} > 2,236$ aber auch $\sqrt{5} < 2,237$; setzet man die Ausziehung der Wurzel weiter fort, so findet man $\sqrt{5} > 2,23606797$ und $\sqrt{5} < 2,23606798$ u. s. w.

§. 147.

Wäre aus einem Dezimalbruche, oder auch aus einer ganzen Zahl, nebst einem angehängten Dezimalbruche, die Quadratwurzel zu ziehen, so beobachte man Folgendes:

1) Man hänge hinten eine Nulle an, wenn der Dezimalbruch eine ungerade Anzahl Dezimalstellen haben sollte; sodann lasse man das Komma ausser Acht, und ziehe die Quadratwurzel aus, als wenn es eine blosse ganze Zahl wäre.

2) Da aber durch die Auslassung des Komma die vorgegebene Zahl mit 1, nebst so vielen angehängten Nullen, als Dezimalstellen vorhanden sind, multiplizirt wird (§. 102.); so wird eben dadurch die Wurzel mit 1 nebst halb so viel angehängten Nullen multipliziret (§. 121.). Man schneide daher von der gefundenen Wurzel so viele Dezimalstellen ab, als in der Zahl Dezimalklassen vorhanden sind, so hat man die verlangte Wurzel.

3) Sollte man die Wurzel mit mehrern Dezimalstellen bestimmen, so hänge man an den letzten Rest eine Klasse Nullen, und verfahre übrigens wie es in (§. 146.) gesagt worden ist.

Beyspiele.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{5|94,|82|33|21} = 24{,}389 \\
4 \\
\hline
194 : 44 \\
176 \quad\; 4 \\
\hline
1882 : 483 \\
1449 \quad\;\; 3 \\
\hline
43333 : 4868 \\
38944 \quad\;\;\; 8 \\
\hline
438921 : 48769 \\
438921 \quad\;\;\;\; 9 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\sqrt{0,|94|30} = 0{,}971 \\
81 \\
\hline
1330 : 187 \\
1309 \quad\;\;\; 7 \\
\hline
2100 : 1941 \\
1941 \quad\;\;\;\; 1 \\
\hline
159 \text{ Rest}
\end{array}
$$

§. 148.

Ist endlich aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, so muß dieselbe (§. 122.) aus dem Zähler und aus dem Nenner gezogen werden. Nur kann man die Arbeit erleichtern, wenn der Nenner irrational ist, indem man den Zähler und Nenner mit dem Nenner multipliziret; dadurch wird derselbe rational; so ist z. B.

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3{,}1622}{5} = 0{,}6324.$$

Oder man verwandle den gegebenen Bruch in einen Dezimalbruch, und ziehe die Wurzel nach (§. 147.). So ist z. B.

$$\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{0{,}375} = \sqrt{0{,}3750} = 0{,}61 \ldots$$

§. 149.

Der Kubus einer Zahl, die mit m (z. B. mit 3) Ziffern geschrieben wird, kann nicht mehr als $3m$ (als 9) Ziffern, und nicht weniger, als $3m - 2$ (als 7) Ziffern haben.

Denn da die Zahl nur aus m (aus 3) Ziffern besteht, so ist sie, wenn sie auch aus lauter 9nern bestünde (nämlich 999 wäre), doch sicher kleiner als 1 mit m angehängten Nullen ($999 < 1000$); daher ist auch ihr Kubus kleiner, als der Kubus von 1 mit m angehängten Nullen (§. 137. Grunds. 1.) Nun aber ist der Kubus von 1 mit m (mit 3) angehängten Nullen eine Einheit mit $3m$ (mit 9) angehängten Nullen (nämlich $1000^3 = 1000000000$) vermög (§. 121.), welches die möglichst kleinste Zahl ist, die mit $3m + 1$ (mit 10) Ziffern geschrieben wird; folglich kann der Kubus einer Zahl von m (von 3) Ziffern, nicht aus $3m + 1$ (aus 10), sondern höchstens aus $3m$ (aus 9) Ziffern bestehen.

Ferner ist die möglichst kleinste Zahl von m (von 3) Ziffern eine Einheit mit $m - 1$ (mit 2) angehängten Nullen (nämlich 100); hievon ist der Kubus eine Einheit mit $3m - 3$ (mit 6) angehängten Nullen nämlich $100^3 = 1000000$) vermög (§. 121.), welches schon eine Zahl von $3m - 2$ (von 7) Ziffern ist; folglich muß auch jede andere Zahl von m (von 3) Ziffern wenigstens aus $3m - 2$ (aus 7) Ziffern bestehen.

Und so kann man auch wieder umgekehrt aus der gegebenen Anzahl der Ziffern einer Kubikzahl alsogleich wissen aus wie viel Ziffern die daraus gezogene Kubikwurzel bestehen müsse. **Wenn nämlich eine gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke, in Klassen von 3 Ziffern abgetheilt wird, wo die letzte Klasse links auch nur 2, oder gar nur 1 Ziffer enthalten kann, so besteht die Kubikwurzel davon aus so viel Ziffern, als Klassen vorhanden sind.**

§. 150.

§. 150.

Wenn man ferner eine Zahl = (. . 1000d + 100c + 10b + a), deren bedeutliche Ziffern nämlich von der Rechten gegen die Linke a, b, c, d u. s. w. seyn sollen, als mehrnamig betrachtet, und solche nach den Regeln (§. 135.) zum Kubus erhebt, so ist

der Kubus der Einheiten = a^3
= = Zehner = b^3. 1000
= = Hunderte = c^3. 1000000
= = Tausende = d^3. 1000000000 (§. 121.)
u. s. w.

Sodann ist das dreyfache Produkt aus den Einheiten in das Quadrat der Summe von allen links folgenden Theilen $= 3a(10b + 100c + 1000d + \ldots)^2$.

Das dreyfache Produkt aus den Zehnern in das Quadrat der Summe von allen links folgenden Theilen $= 30b(100c + 1000d + \ldots)^2$.

Das dreyfache Produkt aus den Hunderten in das Quadrat der Summe von allen links folgenden Theilen $= 300c\,(1000d + \ldots)^2$ u. s. w.

Ferner ist das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der Einheiten in alle links folgende Theile $= 3a^2(10b + 100c + 1000d + \ldots)$

Das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der Zehner in alle links folgende Theile $= 300b^2(100c + 1000d + \ldots)$

Das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der Hunderte in alle links folgende Theile $= 30000c^2(1000d + \ldots)$ u. s. w.

Wird nun alles dieses nach der gewöhnlichen Addition in eine Summe gebracht, so lassen sich wieder folgende Schlüsse daraus ableiten:

1) Der Kubus der Einheiten muß in der Summe sich bis in die erste Ziffer rechts erstrecken, weil a^3 immer einige Einheiten in sich enthalten muß, wenn a eine bedeutliche Ziffer ist. Der Kubus von der bedeutlichen Ziffer der Zehner b, kann sich nur bis in die vierte Ziffer der Summe

rechts erſtrecken, weil Zehner zum Kubus erhoben Tauſende geben. Eben ſo kann der Kubus der Hunderte in der Summe nur bis in die ſiebente, und der Kubus der Tauſende nur bis in die zehnte Ziffer, von der rechten Seite gezählet, ſich erſtrecken u. ſ. w.

Theilt man daher die Kubikzahl von der Rechten gegen die Linke in Klaſſen ein, und giebt jeder Klaſſe drey Ziffern, wo die letzte Klaſſe links auch nur eine, oder zwey Ziffern haben kann, ſo erſtrecket ſich der Kubus der Einheiten bis in die rechte Ziffer der erſten Klaſſe; der Kubus der Zehner bis in die rechte Ziffer der zweyten Klaſſe; der Kubus der Hunderte bis in die rechte Ziffer der dritten Klaſſe u. ſ. w.; und **folglich erſtrecket ſich der Kubus der höchſten Ziffer der Wurzel bis in die rechte Ziffer oder Stelle der letzten Klaſſe.**

2) Das dreyfache Produkt aus den Einheiten in das Quadrat der Summe aller links folgenden Ziffern kann ſich in der Hauptſumme nur bis in die dritte Ziffer, oder bis in die linke Ziffer der erſten Klaſſe erſtrecken; weil in dieſem Quadrate das kleinſte Glied ſchon Hunderte anzeiget. Das dreyfache Produkt aus den Zehnern in das Quadrat der Summe aller links folgenden Ziffern kann ſich nur bis in die ſechste Ziffer, oder bis in die linke Ziffer der zweyten Klaſſe erſtrecken; weil in dieſem Quadrate das kleinſte Glied Zehntauſende bedeutet, und Zehntauſende mit Zehnern multipliziret zum Produkte Hunderttauſende geben. Eben ſo kann das dreyfache Produkt aus den Hunderten in das Quadrat der Summe aller folgenden Ziffern ſich nur bis in die linke Ziffer der dritten Klaſſe erſtrecken u. ſ. w.; **folglich kann ſich auch das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der höchſten Ziffer der Wurzel in die nächſt vorhergehende Ziffer, nur bis in die linke Ziffer der vorletzten Klaſſe erſtrecken.**

3) Ferner kann das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der Einheiten in alle links folgende Ziffern ſich nur bis

in die zweyte Ziffer rechts, oder bis in die mittlere Ziffer der ersten Klasse erstrecken; weil Einheiten mit Zehnern multipliziret zum Produkt Zehner geben. Das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der Zehner in alle links folgende Ziffern kann sich nur bis in die fünfte Ziffer, oder bis in die mittlere Ziffer der zweyten Klasse erstrecken; weil Zehner ins Quadrat erhoben Hunderte geben, und diese wieder mit Hunderten multipliziret zum Produkte Zehntausende geben. Und eben so kann sich das dreyfache Produkt aus dem Quadrat der Hunderte in die folgenden Ziffern nur bis in die mittlere Ziffer der dritten Klasse erstrecken u. s. w. **Daher kann auch das dreyfache Produkt, aus der höchsten Ziffer der Wurzel in das Quadrat der vorhergehenden Ziffer, sich nur bis in die mittlere Ziffer der vorletzten Klasse erstrecken.**

§. 151.

Alles dieses in Betrachtung gezogen, giebt für die Ausziehung der Kubikwurzel, aus jeder mit noch so vielen Ziffern geschriebenen Zahl (z. B. aus 92959677), folgende Regeln:

1) Man theile die vorgegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen ein, und gebe jeder Klasse drey Ziffern, wo die letzte Klasse links auch nur eine, oder zwey Ziffern behalten kann; so wird die Wurzel aus so vielen Ziffern bestehen müssen, als Klassen vorhanden sind.

2) Da nun der Kubus der höchsten Ziffer der Wurzel in der ersten Klasse links (in 92) enthalten seyn muß (§. 150. N. 1.), so ziehe man aus dieser Klasse die Kubikwurzel; oder wenn sie keine vollkommene Kubikzahl ist, so nehme man die nächst kleinere Kubikzahl (64), ziehe die Wurzel daraus (4), so giebt dieses die erste Ziffer der gesuchten Wurzel; den Kubus hievon ziehe man von der ersten Klasse ab; (64 von 92 bleiben 28).

3) Da in dem Reste (28) nebst der linken Ziffer der folgenden Klasse (9) das dreyfache Produkt, aus dem Quadrate der gefundenen Ziffer in die nächst folgende Ziffer enthalten seyn muß (§. 150. N. 2.); so setze man zu dem Reste die erste Ziffer der folgenden Klasse herunter (289), und dividire dieses durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel (48), so ist der Quotient (5) die zweyte Ziffer der gesuchten Wurzel; mit diesem Quotienten wird der Divisor multipliziret, und das Produkt von dem Dividendus abgezogen (240 von 289 bleiben 49). Da ferner in dem Reste (49) nebst der mittlern Ziffer der folgenden Klasse (5) auch noch das dreyfache Produkt, aus dem Quadrate der zweyten gefundenen Ziffer in die erste, enthalten seyn muß (§. 150. N. 3.); so setze man zu dem Reste die zweyte Ziffer der folgenden Klasse herunter (495), und ziehe das Produkt ($5^2 \cdot 3 \cdot 4 = 300$) davon ab (300 von 495 bleiben 195). Endlich da in diesem Reste (195) nebst der rechten Ziffer der zweyten Klasse (9) auch noch der Kubus der zweyten gefundenen Ziffer enthalten seyn muß (§. 150. N. 1.), so setze man zu diesem Reste die letzte noch übrige Ziffer (9) dieser Klasse herunter (1959), und ziehe den Kubus der zweyten gefundenen Ziffer (125) davon ab.

$\sqrt[3]{92|959.677} = 453$
64

289 : 48
240
495
300
1959
125
1834

28959 : 48
240
300
125
27125
1834677 : 6075
18225
1215
27
1834677
0

Alles dieses, wie es hier in dem nebenstehenden Beyspiele in einem Viereck eingeschlossen ist, kann wieder kürzer

ver-

verrichtet werden, wenn man zu dem ersten Reste (28) alle drey Ziffern der folgenden Klasse auf einmal herunter setzet; dieses (28959) durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Ziffer ($4^2 . 3 = 48$) dergestalt dividiret, daß die letzten zwey Ziffern (59) von der Division frey bleiben; sodann multiplizire man mit dem Quotienten (5) den Divisor ($5.48 = 240$) ferner multiplizire man das dreyfache Quadrat des Quotienten mit dem schon gefundenen ersten Theil ($5^2 . 3 . 4 = 300$); endlich erhebe man auch den Quotienten (5) zum Kubus (125), setze diese drey Produkte so untereinander, daß immer das folgende um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt wird, addire solche zusammen, und ziehe die Summe von dem Dividendus ab (27125 von 28959 bleiben 1834) wie es im nebenstehenden Beyspiele bey der Wiederholung unterhalb des Vierecks zu ersehen ist; so, daß bey der Anwendung die in dem Vierecke angezeigte Arbeit gänzlich ausser Acht gelassen wird.

4) Zu dem Reste (1834) setze man die nächstfolgende Klasse (677) herunter, sehe die schon gefundenen Ziffern (45) als den ersten Theil der Wurzel an, und suche wie vorhin den zweyten Theil; zu diesem Ende dividire man diesen Rest (1834677) durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel ($45^2 . 3 = 6075$), so, daß wieder die letzten zwey Ziffern (77) von der Division frey bleiben, so ist der Quotient (3) die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel; mit diesem Quotienten wird der Divisor multipliziret ($3.6075 = 18225$); sodann multiplizire man auch das dreyfache Quadrat desselben mit den vorigen schon gefundenen Ziffern der Wurzel ($3^2 . 3 . 45 = 1215$); endlich erhebe man auch den Quotienten zum Kubus ($3^3 = 27$); addire diese drey Produkte, wie vorhin zusammen, und ziehe ihre Summe von dem Dividendus ab u. s. w.

5) Sollte irgendwo die Summe von den drey Produkten zu groß ausfallen, und von dem Dividendus nicht abgezogen werden können, so ist es ein Zeichen, daß der

Quotient zu groß angenommen worden sey, und daher vermindert werden müsse.

Wäre aber irgendwo der Divisor in dem betreffenden Dividendus gar nicht enthalten, so muß in der Wurzel an der Stelle des Quotienten eine Nulle gesetzet werden; sodann setze man noch eine Klasse herunter, und verrichte die Division nach der erst vorgeschriebenen Art, wie es im folgenden Beyspiel N. 1. zu ersehen ist.

6) Sind nun auf diese Art alle Klassen schon herunter gesetzt, und es geht die letzte Subtraktion ohne Rest genau auf, so ist die vorgegebene Zahl eine vollkommene Kubikzahl; bleibt aber bey der letzten Subtraktion noch ein Rest übrig, wie im Beyspiel N. 2., so ist die vorgegebene Zahl eine unvollkommene Kubikzahl, und die gesuchte Kubikwurzel daher eine irrationale Größe, welche zwischen der gefundenen Zahl (620), und der um eine Einheit vermehrten (621), als zwischen zwey Gränzen liegen muß.

Beyspiele.

N. 1.

$\sqrt[3]{131|096|512} = 508$
125 = = = = $(=5^3)$
6096 : 75 = $(=5^2 \cdot 3)$
6096512 : 7500 $(=50^2 \cdot 3)$
60000 = $(=7500 \cdot 8)$
9600 = $(=8^2 \cdot 3 \cdot 50)$
512 = = $(=8^3)$
6096512 = = Summe.
0

N. 2.

$\sqrt[3]{238|368|596} = 620$
216
22368 : 108
216
72
8
22328
40596 : 11532
40596 Rest

§. 152.

Will man sich einer irrationalen Kubikwurzel durch Dezimalstellen nähern, so hänge man an die vorgegebene Zahl, oder welches einerley ist, an den letzten Rest eine Klasse

Nul-

Nullen, und suche auf die vorgeschriebene Art noch eine Ziffer der Wurzel. Da aber durch das Anhängen einer Klasse Nullen die Zahl mit 1000 multiplizirt, und folglich dadurch die Kubikwurzel daraus zehnmal so groß wird, als die gesuchte (§. 121.), so dividire man die gefundene Wurzel durch 10; das ist, man schneide rechts eine Dezimalstelle ab, so ist die Wurzel bis in die Zehntel richtig gefunden. Und so können nach Belieben noch mehrere Dezimalstellen der Wurzel gefunden werden, da man jedesmal an den Rest eine Klasse Nullen anhängt, und die folgende Dezimalstelle suchet.

Beyspiele.

$\sqrt[3]{4\|827} = 16,9$	$\sqrt[3]{10} = 2,15$	
1	8	
3827 : 3	2000 : 12	
18	12	
108	6	
216	1	
3096	1261	
731000 : 768	739000 : 1323	
6912	6615	6615
3888	1575	157
729	125	1
730309	677375	
191	61625 Rest	

§. 153.

Ist aus einem Dezimalbruche, oder aus einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Dezimalbruche die Kubikwurzel zu ziehen, so hänge man an den Dezimalbruch hinten eine oder zwey Nullen an, dergestalt, daß immer die Anzahl der Dezimalstellen durch 3 theilbar sey; sodann ziehe man die Kubikwurzel aus, als wenn es eine blosse ganze Zahl wäre, und

schnei-

schneide in der Wurzel so viele Dezimalziffern ab, als Dezimalklassen vorhanden sind, so ist dieses die verlangte Wurzel. Denn durch die Auslassung des Komma wird die Zahl so oft mit 1000 multiplizirt, als Dezimalklassen vorhanden sind; folglich ist die Kubikwurzel eben so oft mit 10 multiplizirt worden (§. 121.); daher muß selbe auch wieder so vielmal durch 10 dividirt werden, welches durch die Absonderung so vieler Dezimalziffern, als Klassen vorhanden sind, bewerkstelliget wird.

Uebrigens, wenn die Wurzel mit mehrern Dezimalstellen verlangt werden sollte, so kann man solche nach Belieben bestimmen, indem man an den Rest jedesmal eine Klasse Nullen anhängt, und die folgende Dezimalziffer nach (§. 152.) suchet.

Beyspiele.

$\sqrt[3]{70,\lvert 957 \lvert 944} = 4,14$	$\sqrt[3]{0,\lvert 584 \lvert 600} = 0,834$
64	512
6957 : 48	72600 : 192
48	576
12	216
1	27
4921	59787
2036944 : 5043	12813000 : 20667
20172	82668
1968	3984
64	64
2036944	8306704
0	4506296 Rest

§. 154.

Wenn aus einem Bruche, dessen Nenner ein unvollkommener Kubus ist, die Kubikwurzel gezogen werden soll, so so kann der Nenner rational gemacht werden, wenn man Zähler und Nenner mit dem Quadrate des Nenners multipliziret. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 16}{4 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{80}{64}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{4} = \frac{4{,}3088}{4} = 1{,}0772.$$

Oder man verwandle den Bruch vorher in einen Dezimalbruch, und ziehe die Kubikwurzel aus nach (§. 153.)

1. Anmerkung. Wenn man eine Tafel der Quadrat- und Kubikzahlen bey Handen hat, so kann die Ausziehung der Quadrat-und Kubikwurzel um vieles erleichtert werden. Denn da dergleichen Tafeln gemeiniglich die Quadrat = und Kubikzahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000 enthalten, so findet man in denselben jedesmal die drey ersten Ziffern von der verlangten Wurzel, es möge die vorgelegte Zahl aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, aus was immer für einer Anzahl Ziffern bestehen, und mag entweder eine blosse ganze Zahl seyn, oder kann auch Dezimalstellen bey sich führen. Z. B. wenn aus 34,6853 die Kubikwurzel zu ziehen ist, so hänge man hinten so viele Nullen an, damit die Dezimalstellen sich genau in Klassen eintheilen lassen (§. 153.), und sehe es für eine blosse ganze Zahl an, nämlich 34685300. Nun findet man in den Tafeln die nächst kleinere Kubikzahl 34645976, und ihre Wurzel 326; daher sind die drey erstern Ziffern der gesuchten Wurzel = 3,26; subtrahirt man nun diese Kubikzahl 34645976 von 34685300, so ist der Rest 39324. Will man nun diese Wurzel mit mehreren Dezimalstellen haben, so dividire man diesen mit 3 angehängten Nullen vermehrten Rest, durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, und verfahre überhaupt nach (§. 151. u. 153.),

2. Anmerkung. So wie wir für die Ausziehung der Quadrat-und Kubikwurzel aus zusammengesetzten Größen allgemeine Regeln festgesetzt haben; eben so könnte man auch

aus den bekannten Theilen der vierten, fünften, und höhern Potenzen einer zweynamigen Größe, für die Ausziehung solcher Wurzeln allgemeine Regeln ableiten. Da aber diese Regeln schon zu weitläufig würden, und wir ohnehin weiter hinten sehen werden, wie durch Hilfe der logarithmischen Tafeln jede Wurzel aus einer gegebenen Zahl sehr leicht ausgezogen werden kann, so wollen wir uns hiebey nicht aufhalten.

III. Abschnitt.

Von den Wurzelgrößen, und ihren Rechnungsarten.

§. 155.

Alle diejenigen Größen, welche mit Wurzelzeichen behaftet sind, werden insgesamt **Wurzelgrößen** genennt; und es werden hier vorzüglich jene darunter verstanden, wo sich die Wurzel nicht genau ausziehen läßt, z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[4]{5c}$ u. d. gl.

Wurzelgrößen, bey denen das Wurzelzeichen den nämlichen Exponenten hat, werden Wurzelgrößen von der *nämlichen Benennung* genennt; im Gegentheil sind sie Wurzelgrößen von verschiedener Benennung. So sind z. B. $\sqrt{5}$, $\sqrt{ab^3}$, $\sqrt{7y}$ Wurzelgrößen von gleicher Benennung; hingegen sind $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{a}$ von verschiedener Benennung.

§. 156.

Jede **Wurzelgröße** kann, im erforderlichen Fall, ohne Wurzelzeichen, als eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten geschrieben werden, wenn man dem Exponenten der Größe unter dem Zeichen, den Wurzelexponenten als Nenner unterschreibt. Denn es ist

(S.

(§. 129.) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, wo m und n was immer für Zahlen vorstellen können; eben so ist

$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{ab^3} = a^{\frac{1}{3}}b$; $\sqrt[4]{(a^2 - x^3)} = (a^2 - x^3)^{\frac{1}{4}}$.

$\sqrt[3]{\frac{a}{a^2 - x^2}} = \sqrt[3]{a(a^2 - x^2)^{-1}} = a^{\frac{1}{3}}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

Und so kann auch wieder umgekehrt jede Größe, die zum Exponenten einen Bruch hat, mit dem Wurzelzeichen geschrieben werden, wenn man den Nenner als Exponent des Wurzelzeichens, und den Zähler als Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen ansetzet. So ist z. B.

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{b^2c}$; $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$;

$(a^2 - x^2)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(a^2 - x^2)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(a^2 - x^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(a^2 - x^2)^2}}$.

§. 157.

Wenn man bey einer Wurzelgröße sowohl den Exponenten des Wurzelzeichens, als auch den Exponenten der Potenz unter dem Zeichen mit einer nämlichen Größe multipliziret, oder dividiret, so bleibt die Größe ungeändert; nämlich $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. Denn $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ vermög (§. 156.); oder wenn

$p = \frac{1}{x}$, so ist $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{x}]{a^{\frac{m}{x}}}$; eben so ist $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$;

$\sqrt[\frac{2}{3}]{ab^3} = \sqrt{a^{\frac{1}{3}}b}$; $\sqrt[4]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{a}}$;

$\sqrt[6]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$.

Man

Man kann daher auch aus einer gegebenen Zahl die 4te Potenzwurzel ziehen, wenn man zuerst die Quadratwurzel, und aus dieser noch einmal die Quadratwurzel ziehet. Und eben so kann die 6te Potenzwurzel ausgezogen werden, indem man aus der Quadratwurzel die Kubikwurzel, oder aus der Kubikwurzel die Quadratwurzel ziehet u. s. w.

§. 158.

Wurzelgrößen, bey denen die Größe unter dem Zeichen sich in solche Faktoren zerlegen läßt, daß einer oder mehrere davon vollkommene Potenzen von dem Wurzelexponenten sind, können zum Theil rational gemacht werden; wenn man aus den Faktoren, die vollkommene Potenzen sind, die Wurzeln ziehet, und selbe als Faktoren ausser dem Zeichen ansetzet; nämlich $\sqrt[m]{a^m b c^{2m}} = ac^2\sqrt[m]{b}$. Denn $\sqrt[m]{a^m b c^{2m}} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}} c^{\frac{2m}{m}} = ac^2 b^{\frac{1}{m}}$ vermög (§. 120.), und $b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{b}$ nach (§. 156.); folglich $\sqrt[m]{a^m b c^{2m}} = ac^2\sqrt[m]{b}$.

Beyspiele.

I. $\sqrt[3]{16a^4b} = \sqrt[3]{2.8.a^3a.b} = 2a\sqrt[3]{2ab}$;

II. $3\sqrt{8a^3b^5} = 3\sqrt{2.4.a^2.a.b^4.b} = 6ab^2\sqrt{2ab}$;

III. $2\sqrt{(a^2x^2-x^4)} = 2\sqrt{x^2(a^2-x^2)} = 2x\sqrt{(a^2-x^2)}$;

IV. $\sqrt{(3a^2c+6abc+3b^2c)} = \sqrt{3c(a^2+2ab+b^2)}$
$= (a+b)\sqrt{3c}$.

Durch diese Abkürzung können zuweilen verschiedene irrationale Glieder gleichartig gemacht, das ist dergestalt verwandelt werden, damit selbe unter dem Zeichen vollkommen gleiche, und vor dem Zeichen gleichnamige Größen enthalten. So z. B. scheinen die Glieder $3\sqrt{8a^2b}$ und $4\sqrt{18a^2b}$

un-

ungleichartig zu seyn; zerlegt man aber die Größen unter dem Zeichen in Faktoren, und ziehet aus den rationalen Faktoren die Wurzel aus, so ist $3\sqrt{8a^2b} = 3\sqrt{2 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot b} = 6a\sqrt{2b}$; und $4\sqrt{18a^2b} = 4\sqrt{2 \cdot 9 \cdot a^2 \cdot b} = 12a\sqrt{2b}$; folglich sind nun $6a\sqrt{2b}$ und $12a\sqrt{2b}$ gleichartige Glieder, so, daß sie in ein Glied zusammen addiret werden können; $3\sqrt{8a^2b} + 4\sqrt{18a^2b} = 18a\sqrt{2b}$.

§. 159.

Und umgekehrt können die Größen ausser dem Wurzelzeichen unter das Zeichen gebracht werden, wenn man die Größen ausser dem Zeichen auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt, und sodann die Größen unter dem Zeichen damit multipliziret; es ist nämlich

$$a\sqrt[m]{b} = a^{\frac{m}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^m b}; \; 3a\sqrt{2a} = \sqrt{18a^3}; \; 2\sqrt[3]{(a^2 - x^2)}$$
$$= \sqrt[3]{(8a^2 - 8x^2)}; \; (a-x)\sqrt{(a+x)} = \sqrt{(a-x)^2(a+x)}$$
$$= \sqrt{(a^2 - x^2)(a-x)}.$$

Hierdurch läßt sich entscheiden, welche von zweyen Wurzelgrößen der nämlichen Benennung, die vor und unter dem Zeichen verschiedene Größen haben, die größte sey; so ist z. B. $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$; weil $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$, und $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ ist.

§. 160.

Wurzelgrößen von verschiedener Benennung können ohne Veränderung ihres Werthes auf gleiche Benennung gebracht werden, wenn man sie als Potenzen mit gebrochenen Exponenten vorstellet (§. 156.), sodann diese gebrochenen Exponenten auf gleiche Benennung bringet, und endlich solche wieder als Wurzelgrößen anschreibet.

Beyspiele.

I. $\begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \end{cases}$

II. $\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401} \end{cases}$

III. $\begin{cases} \sqrt[n]{ab} = a^{\frac{1}{n}}\, b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{3m}{3mn}}\, b^{\frac{3m}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{3m}\, b^{3m}} \\ \sqrt[3]{a^n\, c} = a^{\frac{n}{3}}\, c^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{nnm}{3mn}}\, c^{\frac{mn}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{nnm} c^{mn}} \\ \sqrt[m]{a^3} = a^{\frac{3}{m}} = a^{\frac{9n}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{9n}} \end{cases}$

Durch diese Reduktion der Wurzelgrößen läßt sich auch entscheiden, welche von zwey Wurzelgrößen verschiedener Benennung größer sey. So ist z. B. $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{11}$; weil $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$, und $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$.

§. 161.

Wurzelgrößen werden addirt, und subtrahirt, wenn man solche durch die gewöhnlichen Additions- und Subtraktionszeichen mit einander verbindet, und die etwa vorhandenen gleichartigen Glieder nach (§ 61.) reduziret; zuweilen werden aber erst gleichartige Glieder erhalten, wenn man die Wurzelgrößen von gleicher Benennung zuerst nach (§. 158.) abkürzet.

Beyspiele.

I. $7\sqrt{8} + 5\sqrt{8} = 12\sqrt{8} = 24\sqrt{2}$.
II. $\sqrt{50} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

III.

III. $\sqrt[3]{16a^3b} + \sqrt{4a^2b} - \sqrt{a^2b} - \sqrt[3]{54a^3b} = 2a\sqrt[3]{2b}$
$+ 2a\sqrt{b} - a\sqrt{b} - 3a\sqrt[3]{2b} = a\sqrt{b} - a\sqrt[3]{2b}$.

IV. $2\sqrt{(16\sqrt{18})} - \sqrt{(12\sqrt{2})} = 2\sqrt{(16 \cdot 3\sqrt{2})}$
$- \sqrt{(4 \cdot 3\sqrt{2})} = 8\sqrt{(3\sqrt{2})} - 2\sqrt{(3\sqrt{2})}$
$= 6\sqrt{(3\sqrt{2})} = 6\sqrt{\sqrt{18}} = 6\sqrt[4]{18}$.

V. $3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})} = 3\sqrt[3]{8(1+2\sqrt{5})}$
$- 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{4 \cdot 5})} = 6\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})}$
$- 2\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})} = 4\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})}$.

§. 162.

Sind Wurzelgrößen mit einander zu multiplizieren, so müssen sie zuerst auf gleiche Benennung gebracht werden; sodann multiplizire man sowohl die Größen unter dem Zeichen, als auch die Faktoren vor dem Zeichen mit einander; es ist nämlich

$$a\sqrt[m]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ab^{\frac{1}{m}} \cdot cd^{\frac{1}{n}} = acb^{\frac{n}{mn}}d^{\frac{m}{mn}} = ac\sqrt[mn]{b^n} \cdot \sqrt[mn]{d^m}$$
$$= ac\sqrt[mn]{b^n d^m}.$$

Beyspiele.

I. $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{12} = 24\sqrt{3}$.

II. $5\sqrt[3]{3} \times \sqrt{6} = 5\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{216} = 5\sqrt[6]{1944}$.

III. $\sqrt[4]{20} \times 6\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{20}} \cdot 6\sqrt{3} = \sqrt{(2\sqrt{5})} \cdot 6\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{(6\sqrt{5})}$.

IV. $3\sqrt{(2\sqrt[3]{10})} \times 2\sqrt{(5\sqrt[3]{100})} = 6\sqrt{(10\sqrt[3]{1000})}$
$= 6\sqrt{10 \cdot 10} = 60$.

Dieses Verfahren gilt auch, wenn einer oder beyde Faktoren mehrnamig seyn sollten.

V. $2\sqrt{3} \times (6 - \sqrt{7}) = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{21}$.

VI. $a\sqrt{bc} \times (3\sqrt{ab} - \sqrt{c}) = 3a\sqrt{ab^2c} - a\sqrt{bc^2}$
$= 3ab\sqrt{ac} - ac\sqrt{b}$.

VII. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \times (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{ab}$
$+ \sqrt{ab} - \sqrt{b^2} = a - b.$

VIII. $5\sqrt{2} \times 3\sqrt{(4+6\sqrt{2})} = 15\sqrt{(8+12\sqrt{2})}$
$= 30\sqrt{(2+3\sqrt{2})}.$

IX. $3\sqrt{(2+4\sqrt[3]{3})} \times 4\sqrt{(6+2\sqrt[3]{9})} = 12\sqrt{(12}$
$+ 4\sqrt[3]{9} + 24\sqrt[3]{3} + 8\sqrt[3]{27}) = 12\sqrt{(36}$
$+ 4\sqrt[3]{9} + 24\sqrt[3]{3}) = 12\sqrt{(9 \cdot 4 + 4\sqrt[3]{9}}$
$+ 6 \cdot 4\sqrt[3]{3}) = 24\sqrt{[9 + (6+\sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3}]}.$

§. 163.

Bey der Division der Wurzelgrößen bringe man solche ebenfalls auf gleiche Benennung, schreibe sodann den Divisor unter den Dividendus in Gestalt eines Bruches, und kürze solchen ab.

Beyspiele.

I. $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$

II. $(\sqrt{72} - \sqrt{32}) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$

$= \sqrt{\frac{72}{8}} - \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1.$

III. $2\sqrt[3]{6} : 3\sqrt[3]{9} = \frac{2\sqrt[6]{216}}{3\sqrt[6]{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{216}{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8}{3}}.$

IV. $\sqrt{(a^2-x^2)} : (a+x) = \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a+x)^2}} = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}$

$= \sqrt{\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)^2}} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \frac{\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}}.$

V. $9 : \sqrt[3]{6} = \frac{9}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{729}{6}} = \sqrt[3]{\frac{243}{2}}$

$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{36}.$

Be-

Besteht der Nenner aus zwey Gliedern, und es erscheinen blosse Quadratwurzeln darinn, wie sich der Fall in der Geometrie öfters ereignen wird; so kann derselbe rational gemacht werden, wenn man das Zeichen eines Gliedes bey dem Nenner ändert, und mit diesem geänderten Nenner sowohl den Zähler als Nenner des Bruches multiplizirt; so ist

VI. $\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} = \frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})} = \frac{b\sqrt{a}-b\sqrt{x}}{a-x}$.

VII. $\frac{3+\sqrt{7}}{4-\sqrt{6}} = \frac{(3+\sqrt{7})(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})}$

$= \frac{12+3\sqrt{6}+4\sqrt{7}+\sqrt{42}}{10}$

VIII. $\frac{8}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} = \frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{3-\sqrt{5}}$

$= \frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})} \times (3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

$= \frac{24\sqrt{(3-\sqrt{5})} + 8\sqrt{(15-5\sqrt{5})}}{9-5}$

$= 6\sqrt{(3-\sqrt{5})} + 2\sqrt{(15-5\sqrt{5})}$.

Wäre der Nenner dreynamig, so ändere man die Zeichen von zwey Gliedern des Nenners, und multiplizire mit diesem geänderten Nenner sowohl den Zähler, als Nenner des Bruches; so erhält man dadurch einen zweynamigen Nenner, den man wieder wie vorhin rational machen kann. Z. B.

$\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$= \frac{12\sqrt{3}+18\sqrt{5}-9\sqrt{2}+\sqrt{30}}{10+2\sqrt{15}}$

$= \frac{(12\sqrt{3}+18\sqrt{5}-9\sqrt{2}+\sqrt{30})(10-2\sqrt{15})}{(10+2\sqrt{15})(10-2\sqrt{15})}$

$= \frac{7\sqrt{30}+27\sqrt{5}-15\sqrt{3}-30\sqrt{2}}{10}$

Und

Und auf eine ähnliche Art könnte man auch verfahren, wenn der Nenner mehrere Glieder haben sollte.

§. 164.

Die Multiplikation und Division der eingebildeten, oder unmöglichen Größen geschieht zwar nach eben den Regeln, wie bey den übrigen Wurzelgrößen, nur aber pflegt man gemeiniglich die Multiplikation der Größen unter dem Wurzelzeichen nicht wirklich zu verrichten, sondern nur anzudeuten, damit man jederzeit vor Augen habe, daß die Wurzel aus dem Produkt negativ genommen werden muß. So ist z. B. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a \times -a)} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Würde man aber die Multiplikation wirklich verrichten, so wäre $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{+a^2} = +a$, wo doch augenscheinlich allhier $+a$ nicht angenommen werden darf, weil die Wurzel hieraus $\sqrt{+a}$, und nicht $\sqrt{-a}$ giebt, wie es doch seyn sollte. Eben so ist auch $a\sqrt{-b} \times c\sqrt{-d} = ac\sqrt{(-b \times -d)} = ac \times -\sqrt{bd} = -ac\sqrt{bd}$, wo die Quadratwurzel aus bd wieder negativ zu nehmen ist, weil das Produkt aus zwey negativen Faktoren entstanden ist. Ueberhaupt ist es nur damals willkührlich, die Wurzel eines geraden Exponenten aus einer Größe positiv, oder negativ zu nehmen (§. 119. II), wenn es noch unbestimmt ist, aus welchen Faktoren, positiven, oder negativen, das Produkt entstanden sey. Ist es hingegen bestimmt, daß das Produkt aus zwey negativen Faktoren entstanden sey, wie bey $\sqrt{(-b \times -d)}$ der Fall ist, so muß auch die Wurzel negativ genommen werden, nämlich $\sqrt{(-b \times -d)} = -\sqrt{bd}$; und so müßte auch umgekehrt die Wurzel, $+\sqrt{bd}$, positiv genommen werden, wenn es bekannt wäre, daß das Produkt bd bey $\sqrt{(+b \times +d)}$ aus positiven Faktoren entstanden sey.

Beyspiele.

I. $a\sqrt{-bd} \times c\sqrt{-d} = ac\sqrt{b(-d)^2} = -acd\sqrt{b}$.

II. $a\sqrt{bd} \times c\sqrt{-d} = acd\sqrt{-b}$.

III.

III. $(4+\sqrt{-3})(4-\sqrt{-3})=16+4\sqrt{-3}$
$-4\sqrt{-3}+3=19.$

IV. $(\sqrt{2}+\sqrt{-2})(3+\sqrt{-6})=3\sqrt{2}+3\sqrt{-2}$
$+\sqrt{-12}-\sqrt{12}.$

V. $\sqrt{-ab}:\sqrt{a}=\sqrt{-\frac{ab}{a}}=\sqrt{-b}.$

VI. $\sqrt{-ab}:\sqrt{-b}=\sqrt{\frac{-ab}{-b}}=\sqrt{a}.$

VII. $\frac{-3+\sqrt{-5}}{3+\sqrt{-5}}=\frac{(-3+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})}{(3+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})}=\frac{-4+6\sqrt{-5}}{14}$
$=\frac{-2+3\sqrt{-5}}{7}.$

VIII. $(-1+\sqrt{-3})\times(-1-\sqrt{-3})=1-\sqrt{-3}$
$+\sqrt{-3}+3=4.$

IX. $(-1+\sqrt{-3})^3=-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}-3=8.$

X. $(-1-\sqrt{-3})^3=-1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3}-3=8.$

Anmerkung. Um allen Irrthum zu vermeiden pflegt man auch sonst die Multiplikacion und Division der unmöglichen Größen gemeiniglich nur anzuzeigen, und nicht gänzlich zu verrichten; Z. B. $3\sqrt{-a}\times4a\sqrt{-b}=12a\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}.$ Nur wenn eine unmögliche Größe auf die Potenz des Wurzelexponenten zu erheben ist, wird das Wurzelzeichen ausgelassen; z. B. $(\sqrt[4]{-a})^4=-a$; hingegen $(\sqrt[4]{-a})^2=\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-a}$, oder abgekürzt $=\sqrt{-a}$. Wenn man diese Erinnerung ausser Acht liesse, so könnte man jede negative Größe in eine positive verwandeln, als $-a=(-a)^1=(-a)^{\frac{2}{2}}=\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=a$; oder man könnte gar jede unmögliche Größe möglich machen; nämlich $\sqrt{-a}=(-a)^{\frac{1}{2}}=(-a)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{+a^2}=a^{\frac{2}{4}}=\pm\sqrt{a}$, wo bey $\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-a}$ die Multiplikation nicht

nicht anders verrichtet werden darf, als $(-a)^{\frac{1}{4}} \times (-a)^{\frac{1}{4}} = (-a)^{\frac{2}{4}} = (-a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-a}$. Man vergleiche Hrn. A. Bürja selbstlern. Algeb. I. B. S. 193.

§. 165.

Wurzelgrößen werden zu Potenzen erhoben, deren Exponenten gegeben sind, wenn man die Größen ausser und unter dem Zeichen auf die Potenz des gegebenen Exponenten erhebet; nämlich $(a\sqrt[m]{b})^n = a^n \sqrt[m]{b^n}$.

Denn $(a\sqrt[m]{b})^n = (ab^{\frac{1}{m}})^n$ vermög (§. 129.) $= a^n b^{\frac{n}{m}}$ vermög (§. 128.) $= a^n \sqrt[m]{b^n}$ vermög (§. 156.). So z. B. ist

$$(3\sqrt[3]{2b})^2 = 9\sqrt[3]{4b^2}; \; (\sqrt{3a^2})^3 = \sqrt{27a^6};$$
$$(3\sqrt{(a^2-x^2)})^3 = 27\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$
$$= 27\sqrt{(a^2-x^2)^2 \cdot (a^2-x^2)} = 27 \cdot (a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

Wäre nun eine Wurzelgröße auf die Potenz des Wurzelexponenten zu erheben, so erhebe man nur die Größe ausser dem Zeichen, und multiplizire dieses mit der Größe unter dem Zeichen. So ist z. B.

$$(a\sqrt[m]{b})^m = a^m \sqrt[m]{b^m} = a^m \cdot b = a^m b.$$
$$(4\sqrt[3]{2})^3 = 64 \cdot 2 = 128; \; (a\sqrt{b})^2 = a^2 b.$$
$$(3\sqrt{-3})^2 = -27; \; (-3\sqrt{-3})^2 = -27.$$
$$(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 1+\sqrt{5}+\frac{5}{4} = \frac{9}{4}+\sqrt{5}.$$
$$(2-\sqrt{2})^3 = 8-12\sqrt{2}+12-\sqrt{8} = 20-14\sqrt{2}.$$
$$(\sqrt[3]{x}-\sqrt{y})^2 = \sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[6]{x^2y^3}+y.$$

§. 166.

Und umgekehrt wird aus einer Wurzelgröße wieder eine andere Wurzel gezogen, wenn man aus der Größe vor dem Zeichen, und aus der Größe unter dem Zeichen die verlangte Wurzel zieht; welches aber kürzer geschehen kann, wenn man vorher die Größe vor dem Zeichen nach (§. 159.) unter das Zeichen wirft, und sodann den Exponenten des Wurzelzeichens der gegebenen Größe, mit dem Exponenten der gesuchten Wurzel multipliziret. So ist z. B.

$$\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{b})} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n b}} = \sqrt[m]{a^{\frac{n}{n}} b^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{n}{mn}} b^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n b}.$$

$$\sqrt[3]{(2\sqrt{120})} = \sqrt{\sqrt[3]{960}} = \sqrt[6]{960} = \sqrt[6]{64 . 15} = 2\sqrt[6]{15}$$
$$= 2\sqrt{\sqrt[3]{15}}.$$

§. 167.

Da die Größen mit gebrochenen Exponenten als Wurzelgrößen vorgestellet werden können (§. 156.), so sind die gefundenen Regeln für die Rechnungsarten mit Wurzelgrößen, auch für die Größen mit gebrochenen Exponenten anwendbar; nämlich es ist

$$\text{I. } p^{\frac{a}{n}} . p^{\frac{v}{m}} = \sqrt[n]{p^a} . \sqrt[m]{p^v} = \sqrt[nm]{p^{am}} . \sqrt[nm]{p^{nv}} = \sqrt[mn]{p^{am} . p^{nv}}$$
$$= \sqrt[nm]{p^{am+nv}} = p^{\frac{am+nv}{nm}} = p^{\frac{a}{n}+\frac{v}{m}};$$

$$p^{\frac{a}{n}} : p^{\frac{v}{m}} = \frac{\sqrt{p^a}}{\sqrt[m]{p^v}} = \sqrt[nm]{\frac{p^{am}}{p^{nv}}} = \sqrt[nm]{p^{am-nv}} = p^{\frac{a}{n}-\frac{v}{m}}$$

Woraus es zu ersehen ist, daß die gegebenen allgemeinen Regeln (§. 63. N. 5.) für die Multiplikation, und (§. 65. N. 3.) für die Division, auch für die Größen mit gebrochenen Exponenten statt finden.

$$\text{II. } \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{pm}{q}}} = a^{\frac{pm}{qn}};$$

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[m]{a^{\frac{pn}{q}}} = a^{\frac{pn}{qm}} = a^{\frac{p}{q}:\frac{m}{n}}.$$

Woraus wieder die im (§. 128. u. 129.) gegebenen Regeln für die Erhebung zu Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln auch für die gebrochenen Exponenten bestätiget werden.

Einige Beyspiele zur Uebung.

$$2a^{\frac{1}{2}}(ab-3a^{\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{3}{2}}b - 6a^{\frac{7}{6}}.$$

$$(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + 3a^{-\frac{1}{2}}b)(2a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$$
$$+ 6b - 3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}.$$

$$(ax^2 - x^{-\frac{2}{3}}) : x^{\frac{1}{2}} = ax^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{7}{6}}.$$

$$(2ax^{-3} - bx^{-\frac{3}{2}}) : ax^{-\frac{2}{3}} = 2x^{-\frac{7}{3}} - a^{-1}bx^{-\frac{5}{6}}$$

$$(a^{\frac{1}{2}}x^{-1} - 3x^{\frac{2}{3}})^2 = ax^{-2} - 6a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}} + 9x^{\frac{4}{3}}.$$

§. 168.

Es wird in der Folge sehr oft nothwendig seyn, bey einer zusammengesetzten Potenz, eine Größe aus einem Gliede unter dem Zeichen (inner den Klammern), hinweg zu schaffen; z. B. es wird bey der Größe $(a^m + bx^n)^p$ verlangt, die Größe x^n aus dem zweyten Gliede hinweg zu schaffen, welches auf folgende Art geschehen kann. **Man dividire alle Glieder unter dem Zeichen durch diejenige Größe, welche man aus einem Gliede hinweg schaffen will, und setze eben diese Größe auf die Potenz des gemeinschaftlichen Exponenten erhoben, als Faktor ausser dem Zeichen;** nämlich $(a^m + bx^n)^p = x^{np}.\left(\frac{a^m + bx^n}{x^n}\right)^p$ $= x^{np}(a^m x^{-n} + b)^p$.

Denn

Denn $(a^m+bx^n)^p = \dfrac{(a^m+bx^n)^p}{(x^n)^p} \cdot (x^n)^p = \left(\dfrac{a^m+bx^n}{x^n}\right)^p \cdot (x^n)^p$

$= x^{np}(a^m x^{-n}+b)^p.$

Eben so ist $x(a^3x-ax^2)^{\frac{3}{2}} = x \cdot (x^2)^{\frac{3}{2}}(a^3x^{-1}-a)^{\frac{3}{2}}$

$= x^4(a^3x^{-1}-a)^{\frac{3}{2}}.$

Imgleichen $(ay^{\frac{3}{2}}+a^3y)^{-\frac{2}{3}} = (ay^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}(1+a^2y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}$

$= a^{-\frac{2}{3}}y^{-1}(1+a^2y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}.$

§. 169.

Und umgekehrt kann bey einer durch Klammern angezeigten Potenz einer zusammengesetzten Größe, jeder ausser dem Zeichen (ausser den Klammern) befindliche Faktor hineingeschafft werden, wenn man den Exponenten dieses Faktors durch den gemeinschaftlichen Exponenten dividiret, und mit diesem geänderten Faktor jedes Glied unter dem Zeichen multipliziret. So ist z. B.

$y^p(a^m+bx^n)^q = (y^{\frac{p}{q}})^q \cdot (a^m+bx^n)^q = \left(y^{\frac{p}{q}} \cdot (a^m+bx^n)\right)^q$

$= (a^m y^{\frac{p}{q}} + bx^n y^{\frac{p}{q}})^q$

$x^{-\frac{2}{3}}(ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{-\frac{4}{3}} \cdot (ax-x^2)\right)^{\frac{1}{2}} = (ax^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$ax^{-\frac{1}{2}}(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} \cdot (a^2+x^2)\right)^{-\frac{3}{2}}$

$= (a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}})^{-\frac{3}{2}}.$

Vierte

Vierte Vorlesung.

Von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf verschiedene Rechnungsfragen.

I. Abschnitt.

Von den Verhältnissen.

§. 170.

Die Vergleichung zweyer gleichnamigen Größen gegen einander nennt man ein **Verhältniß**; und insbesondere heißt die Vergleichung, in welcher untersucht wird, um wie viel die eine Größe die andere übersteige, ein **arithmetisches Verhältniß**: die Vergleichung zweyer Größen hingegen, wo man untersuchet, wie vielmal, oder wie oft die eine Größe in der andern enthalten sey, wird ein **geometrisches Verhältniß** genennt. Um wie viel die eine Größe die andere übersteige, ergiebt sich, wenn man ihre Differenz durch die Subtraktion bestimmet; hingegen findet man, wie oft die eine Größe in der andern enthalten sey, wenn man die eine durch die andere dividiret, das ist, wenn man ihren Quotienten aufsuchet. Die Differenz bey einem arithmetischen Verhältnisse heißt sonst auch der **Namen des Verhältnisses**; und der Quotient bey einem geometrischen Verhältnisse, der **Exponent des Verhältnisses**.

Das

Das arithmetische Verhältniß zweyer Größen, z. B. a und b, 39 und 13, kann durch $a \div b$, $39 \div 13$, und das geometrische Verhältniß eben dieser zwey Größen durch $a : b$, $39 : 13$ bezeichnet werden; es wird ausgesprochen, a **verhält** sich zu b, oder auch abgekürzt, a zu b. Die zuerst angesetzte Größe heißt das **erste**, oder **Vorderglied**, und die folgende Größe das **zweyte**, oder **Hinterglied** des Verhältnisses. Ist das zweyte Glied eines Verhältnisses größer als das erste, so kann das Verhältniß steigend heissen; im Gegentheil ist es ein **fallendes Verhältniß**, wenn das zweyte Glied kleiner ist, als das erste. Bey einem steigenden Verhältnisse ergiebt sich die Differenz, wenn man vom zweyten Gliede das erste abzieht, und so auch der Quotient, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividiret. Bey fallenden Verhältnissen ist es umgekehrt; jedoch ist es erlaubt, auch bey jedem fallenden Verhältnisse die Differenz, und den Quotienten so zu bestimmen, daß man immer vom zweyten Gliede das erste abziehe, und so auch immer nur das zweyte durch das erste dividire, wo aber in einem solchen Fall die Differenz negativ, und der Quotient ein ächter Bruch seyn muß. **Die Differenz eines arithmetischen Verhältnisses wird daher immer in der Folge durch die Subtraktion des ersten Gliedes vom zweyten, und der Quotient eines geometrischen Verhältnisses mittelst der Division des zweyten Gliedes durch das erste bestimmet werden.** So sind bey den arithmetischen Verhältnissen $13 \div 39$, $14 \div 15$, $20 \div 12$ die Differenzen 26, 1, -8; und bey den geometrischen Verhältnissen $12 : 36$, $14 : 21$, $18 : 8$ sind die Quotienten 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{9}$.

§. 171.

Gleiche arithmetische Verhältnisse sind solche, welche gleiche Differenzen, und **gleiche** geometrische Verhältnisse sind jene,

jene, welche gleiche Quotienten in der angeführten Bedeutung (§. 170.) genommen haben; so sind $15 \div 8$, $10 \div 3$, $8 \div 1$ gleiche arithmetische Verhältnisse, wegen der gleichen Differenz -7; eben so sind $8 : 1$, $80 : 10$, $24 : 3$ gleiche geometrische Verhältnisse, wegen des gleichen Quotienten $\frac{1}{8}$; hingegen $8 : 3$, und $9 : 24$ sind keinesweges gleiche Verhältnisse, weil der Quotient im ersten Falle $= \frac{3}{8}$, und im zweyten $= \frac{8}{3}$ ist.

Es wird nämlich bey der Bestimmung der Größe eines Verhältnisses nur blos allein bey einem arithmetischen auf die Differenz, und bey einem geometrischen Verhältnisse auf den Quotienten gesehen, die Glieder mögen sonst wie immer beschaffen seyn. Wenn man daher bey zweyen, oder mehreren Verhältnissen darthun kann, daß sie entweder gleiche Differenzen, oder gleiche Quotienten haben, so sind solche gleiche Verhältnisse; im ersten Fall gleiche arithmetische, im zweyten gleiche geometrische Verhältnisse. **Auch ist es einleuchtend, daß zwey Verhältnisse einander gleich seyn müssen, wenn jedes einem nämlichen dritten Verhältnisse gleich ist.**

§. 172.

Jedes arithmetische Verhältniß kann durch $a \div (a+d)$ vorgestellet werden.

Denn jedes erste Glied eines arithmetischen Verhältnisses kann durch a, und die Differenz, sie möge positiv, oder negativ seyn, durch d ausgedrücket werden; da nun diese Differenz zum Vorschein kömmt, wenn man das erste Glied von dem zweyten subtrahiret, so muß auch das zweyte Glied zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied zu der Differenz addiret; es muß also das zweyte Glied des

arith-

arithmetischen Verhältnisses $= (a + d)$, und folglich das Verhältniß selbst $a \div (a + d)$ seyn, wenn man für das erste Glied a, und für die Differenz d annimmt.

§. 173.

Und jedes geometrische Verhältniß kann durch $a : aq$ vorgestellet werden.

Denn das erste Glied kann man durch a, und den Quotienten eines jeden geometrischen Verhältnisses, es möge solcher eine ganze, oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahle seyn, durch q ausdrücken; nun muß der Quotient zum Vorschein kommen, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividiret; es muß also auch das zweyte Glied zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied mit dem Quotienten multipliziret (§. 36.); folglich muß das zweyte Glied des geometrischen Verhältnisses aq, und das Verhältniß selbst $a : aq$ seyn, wenn man für das erste Glied a, und für den Quotienten q annimmt.

§. 174.

Ein geometrisches Verhältniß bleibt ungeändert, wenn man das erste und zweyte Glied, beyde mit einer nämlichen Größe multipliziret, oder auch beyde dividiret.

Denn aus $a : aq$, wird $am : amq$ durch die Multiplikation mit m; und $\frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$ durch die Division mit n; und es ist $a : aq = am : amq$, wie auch $a : aq = \frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$, weil bey jedem dieser drey Verhältnisse der nämliche Quotient q statt findet, und aus der Gleichheit der Quotienten auch die Gleichheit der Verhältnisse sich ergiebt (§. 171.).

Eben so bleibt ein arithmetisches Verhältniß ungeändert, wenn man von beyden Gliedern Gleiches abzieht, oder zu beyden Gleiches hinzu addiret; denn wenn man in der allgemeinen Formel $a \div (a + d)$ zu beyden Gliedern p hinzu addiret, so hat man $(a + p) \div (a + d + p)$; oder wenn man von beyden p abziehet, so hat man $(a-p) \div (a + d - p)$, wo jedes wieder die nämliche Differenz d hat; und daher ist $a \div (a+d) = (a+p) \div (a+d+p) = (a-p) \div (a+d-p)$.

Es kann daher öfters ein geometrisches Verhältniß, dessen Glieder große Zahlen sind, viel kürzer dargestellet werden, wenn man beyde Glieder durch eine nämliche Zahl dividiret. Z. B. statt des Verhältnisses $18 : 63$ kann man schreiben $2 : 7$.

Eben so kann auch ein geometrisches Verhältniß, worin ein Glied, oder auch beyde Glieder Brüche sind, viel deutlicher durch ganze Zahlen dargestellet werden, wenn man mit jedem Nenner das andere Glied des Verhältnisses multipliziret. Z. B. statt des Verhältnisses $\frac{2}{3} : 5$ kann man schreiben $2 : 15$, und statt $\frac{2}{3} : \frac{5}{4}$ kann man schreiben $8 : 15$.

Ueberhaupt finden alle Veränderungen, welche mit den Brüchen vorgenommen werden können, auch bey den geometrischen Verhältnissen statt, weil ein jedes geometrisches Verhältniß als ein Bruch angesehen werden kann, wovon das zweyte Glied der Zähler, und das erste Glied der Nenner ist.

§. 175.

Das Verhältniß der Produkte aus den ersten Gliedern zum Produkte aus den zweyten Gliedern mehrerer geometrischer Verhältnisse heißt ein zusammengesetztes Verhältniß; so so ist z. B. $3 \cdot 7 : 12 \cdot 21$, nämlich $21 : 252$ aus den Verhältnissen $3 : 12$, und $7 : 21$ zusammengesetzt.

Eben so ist auch $abc : abcmnq$ ein zusammmengesetztes Verhältniß.

Es folgt daraus, das der Quotient des zusammengesetzten Verhältnisses dem Produkte aus den Quotienten der einfachen zusammensetzenden Verhältnisse gleich sey.

$$\begin{array}{l} a : aq \\ b : bm \\ c : cn \\ \hline abc : abcmnq \end{array}$$

§. 176.

Sind nun die einfachen zusammensetzenden Verhältnisse alle einander gleich, so ist der Quotient des zusammengesetzten Verhältnisses jederzeit eine Potenz des Quotienten von einem der einfachen Verhältnisse, und zwar das Quadrat desselben, wenn zwey gleiche Verhältnisse, der Kubus, wenn drey gleiche Verhältnisse zusammengesetzt werden u. s. w.

$$\begin{array}{l} a : aq \\ b : bq \\ c : cq \\ d : dq \\ \hline abcd : abcdq^4 \end{array}$$

Daher ist das aus mehrern gleichen Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß demjenigen Verhältnisse gleich, welches man erhält, wenn man beyde Glieder eines der einfachen Verhältnisse auf die Potenz des Exponenten von der Anzahl der zusammensetzenden Verhältnisse erhebt. So ist im obigen Beyspiele $abcd : abcdq^4$ dem Verhältnisse $a^4 : a^4 q^4$ gleich, weil jedes den Quotienten q^4 hat (§. 171.) Man pflegt deswegen auch die aus zwey, drey, oder vier gleichen Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse, **quadratische**, **kubische**, **biquadratische** Verhältnisse zu nennen.

II. Abschnitt.

Von den Proportionen.

§. 177.

Eine Proportion ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse; und insbesondere wird die Gleichheit zweyer arithmetischen Verhältnisse eine **arithmetische**, und die Gleichheit zweyer geometrischen Verhältnisse eine **geometrische Proportion** genennet. Die zwey gleichen Verhältnisse werden durch das Gleichheitszeichen verbunden; so stellt $3 \div 7 = 11 \div 15$ eine arithmetische, und $4 : 12 = 7 : 21$ eine geometrische Proportion vor; beyde werden ausgesprochen: 3 **verhält sich zu 7, gleichwie sich 11 zu 15 verhält; 4 verhalt sich zu 12, wie sich 7 zu 21 verhält; oder auch abgekürzt, 3 zu 7 wie 11 zu 15; 4 zu 12 wie 7 zu 21.** Die vier Glieder in einer Proportion heissen insgesamt **Proportionalglieder**, und insbesondere werden das erste und vierte Glied der Proportion zusammen die **äussern**, das zweyte und dritte aber die **mittlern Glieder** genennet.

Wenn in einer Proportion die zwey mittlern Glieder einander gleich sind, so wird selbe eine **stetige** oder **zusammenhängende** Proportion genennt. So ist z. B. $4 \div 7 = 7 \div 10$ eine stetige arithmetische, und $4 : 8 = 8 : 16$ eine stetige geometrische Proportion.

Bey einer stetigen Proportion wird das vierte Glied die **dritte Proportionalgröße** genennt, weil eigentlich nur drey verschiedene Glieder in der Proportion vorhanden sind; eben deßwegen wird auch das zweyte und dritte Glied, die **mittlere Proportionalgröße** genennet.

Anmerkung. Einige Schriftsteller pflegen die Proportionen auf mancherley Art vorzustellen: so bezeichnen einige die arithmetischen Proportionen mit $3 . 7 \ddot{\div} 11 . 15$, oder auch $3 - 7 = 11 - 15$, und die geometrischen Proportionen mit $4 : 12 :: 7 : 21$; oder auch $4 . 12 :: 7 . 21$;

die stetigen arithmetischen mit $\div$ 4 . 7 . 11, und die stetigen geometrischen mit :: 4 . 8 . 16, oder auch 4 : 8 : 16. Wir werden aber in der Folge, um allen Irthum zu vermeiden, uns jederzeit der oberwähnten Bezeichnung bedienen.

§. 178.

Durch die Formel $a \div a + d = b \div b + d$ kann jede arithmetische Proportion vorgestellet werden.

Denn jede zwey gleiche arithmetische Verhältnisse, welche zu einer arithmetischen Proportion erforderlich sind, können durch $a \div a + d$, und $b \div b + d$ vorgestellet werden; daher kann $a \div a + d = b \div b + d$ jede arithmetische Proportion vorstellen.

Soll nun die arithmetische Proportion stetig seyn, so muß daß dritte Glied b mit dem zweyten $a + d$ einerley seyn; woraus das vierte Glied $a + 2d$ folget, wenn man vermög (§. 172.) zu $a + d$ die Differenz d addiret; so, daß daher jede stetige arithmetische Proportion insbesondere auch durch die Formel $a \div a + d = a + d \div a + 2d$ vorgestellet werden könne.

§. 179.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder der Summe der mittlern Glieder gleich.

Denn es ist in der allgemeinen Formel $a \div (a + d) = b \div (b + d)$ offenbar die Summe der äussern Glieder der Summe der mittlern Glieder gleich; weil jede Summe $= a + b + d$ ist; folglich ist auch in jeder arithmetischen Proportion die Summe der äussern Glieder der Summe der mittlern gleich. So z. B. in der Proportion $3 \div 7 = 11 \div 15$, ist $3 + 15 = 7 + 11$; imgleichen in der Proportion $5 \div 2 = 13 \div 10$ ist $5 + 10 = 13 + 2$. Bey einer stetigen arithmetischen Proportion ist daher die Summe der äussern Glieder dem doppelten mittlern Gliede

 gleich;

gleich; denn in der allgemeinen Formel $a \div (a+d) = (a+d) \div (a+2d)$, iſt $a+(a+2d) = (a+d)+(a+d) = 2(a+d)$

§. 180.

Es kann daher ſehr leicht zu drey gegebenen Größen einer arithmetiſchen Proportion ein viertes Proportionalglied gefunden werden, wenn man die zwey mittlern Glieder zuſammen addiret, und das erſte davon abziehet. Denn es ſey das gegebene erſte Glied $= a$, das zweyte $= b$, das dritte $= c$, und das vierte welches geſucht werden ſoll $= x$, ſo iſt $a \div b = c \div x$; folglich iſt nach (§. 179.) $a + x = b + c$; daher auch $x = b + c - a$, wenn man beyderſeits a ſubtrahiret (§. 22. Grundſ. 1.) Z. B. es ſollte zu den Gliedern 5, $7\frac{1}{3}$, $12\frac{1}{2}$ das vierte arithmetiſche Proportionalglied gefunden werden, ſo iſt ſolches $= 7\frac{1}{3} + 12\frac{1}{2} - 5 = 19\frac{5}{6} - 5 = 14\frac{5}{6}$, und die Proportion iſt $5 \div 7\frac{1}{3} = 12\frac{1}{2} \div 14\frac{5}{6}$.

Sollte zu zwey gegebenen Größen die dritte arithmetiſche Proportionalgröße gefunden werden, ſo ſubtrahire man das erſte Glied von dem doppelten mittlern Gliede, und dieſe Differenz iſt das geſuchte dritte Proportionalglied. Denn es ſey a das gegebene erſte, b das mittlere, und x das zu findende dritte Proportionalglied, ſo iſt $a \div b = b \div x$; daher $2b = a + x$, und $x = 2b - a$.

Wäre endlich zwiſchen zwey gegebenen Gliedern das mittlere arithmetiſche Proportionalglied zu finden, ſo addire man die zwey gegebenen äuſſern Glieder, und dividire dieſe Summe durch 2. Denn es ſey das gegebene erſte Glied $= a$, das gegebene dritte Glied $= b$, und das zu findende mittlere Proportionalglied $= x$, ſo iſt $a \div x = x \div b$; daher iſt $a + b = 2x$, und $x = \frac{a+b}{2}$, wenn man beyderſeits durch 2 dividiret (§. 39. Grundſ. 1.) Z. B. es

ſoll

soll zwischen 3 und 8 die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden werden, so ist selbe $= \frac{3 + 8}{2} = 5\frac{1}{2}$, und die Proportion ist $3 \div 5\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \div 8$.

Anmerkung. So wie man hier zwischen zwey gegebene Größen die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden hat, so pflegt man auch auf eine ähnliche Art, bey den Versuchen, Beobachtungen, Finanzrechnungen und sonst im gemeinen Leben zwischen mehrern bekannten Zahlen, wo keine Ursache vorhanden ist, eine der andern vorzuziehen, das arithmetische Mittel, oder den sogenannten Durchschnitt zu bestimmen. Man addiret nämlich alle die bekannten Größen zusammen, und dividiret die Summe durch die Anzahl der Größen; wodurch man in einigen Fällen von der Wahrheit am wenigsten abweicht. Z. B. man hat bey einem Versuche mit einem Bombenpöller, unter einerley Umständen, 5 Probwürfe gemacht; mit dem ersten hat man 2260, mit dem zweyten 2510, mit dem dritten, 2365, mit dem vierten 2475, und mit dem fünften 2380 Schritte erreicht; hieraus ist das arithmetische Mittel 2398, welches unter diesen Umständen für die erreichte mittlere Wurfweite ohne merklichen Fehler angenommen werden kann.

Da die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen ausser der Bestimmung des arithmetischen Mittels sonst von keinem sonderlichen Nutzen sind, so wollen wir uns auch nicht länger dabey aufhalten, sondern alsogleich zu den geometrischen Proportionen übergehen, welche in der Mathematik eine sehr große Anwendung haben. Auch wird in der Folge bey den geometrischen Verhältnissen und Proportionen das Beywort geometrisch nicht mehr ausdrücklich angesetzt, sondern immer stillschweigend dabey verstanden werden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich angesetzt ist.

§. 181.

Jede Proportion kann durch die Formel $a : aq = b : bq$ vorgestellet werden.

Denn durch $a : aq$ und $b : bq$ können jede zwey gleiche Verhältnisse ausgedrücket werden; nun aber stellen zwey gleiche Verhältnisse eine Proportion vor: es kann demnach durch $a : aq = b : bq$ jede Proportion vorgestellet werden. Setzen wir nun $b = aq$, so ist $bq = aq \cdot q = aq^2$; es kann demnach jede zusammenhängende Proportion durch $a : aq = aq : aq^2$ angezeiget werden.

§. 182.

In jeder Proportion ist das Produkt der äussern dem Produkte der mittlern Glieder gleich.

Denn es ist in der allgemeinen Formel $a : aq = b : bq$ sowohl das Produkt der äussern, als auch das Produkt der mittlern Glieder $= abq$; daher muß auch in jeder Proportion das Produkt der äussern Glieder dem Produkte der mittlern Glieder gleich seyn. So z. B. in der Proportion $4 : 12 = 7 : 21$, ist $4 \cdot 21 = 7 \cdot 12$; in der Proportion $9 : 6 = 12 : 8$, ist $9 \cdot 8 = 6 \cdot 12$.

In einer stetigen Proportion ist daher das Quadrat des mittleren Gliedes gleich dem Produkte der beyden äussern Glieder; denn in der Formel $a : aq = aq : aq^2$, ist $aq \cdot aq = a \cdot aq^2$.

§. 183.

Und nun sind wir auch im Stande zu jeden drey gegebenen Größen das vierte Proportionalglied zu bestimmen, wenn wir das Produkt der zwey mittlern Glieder durch das erste dividiren.

Denn es sey das gegebene erste Glied $= a$, das zweyte $= b$, das dritte $= c$ und das zu findende vierte Glied $= x$; so muß $a : b = c : x$ seyn, daher $ax = bc$ (§. 182.)

folg-

folglich $x = \frac{bc}{a}$ (§. 139. Grundſ. 1.); und die Proportion iſt demnach $a : b = c : \frac{bc}{a}$. Z. B. wenn zu 3, 5 und 12 das vierte Proportionalglied gefunden werden ſoll, ſo iſt $3 : 5 = 12 : x$, nämlich $x = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$.

Zu zwey gegebenen Größen wird daher das dritte Proportionalglied gefunden, wenn man das Quadrat des mittlern Gliedes durch das erſte dividiret; denn wenn a das erſte, b das mittlere und x das zu findende dritte Proportionalglied iſt, ſo iſt $a : b = b : x$, und $b^2 = ax$; folglich $x = \frac{b^2}{a}$.

Anmerkung. Eigentlich iſt es nicht nothwendig, daß die drey erſten Glieder der Proportion gegeben ſeyn müſſen, um ſodann jenes, welches an die vierte Stelle gehöret, finden zu können, ſondern es mögen was immer für drey Glieder der Proportion gegeben ſeyn, ſo läßt ſich jederzeit das abgängige finden. Z. B. es ſey $a = 4$ das erſte, $b = 6$ das zweyte, und $c = 21$ das vierte Glied einer Proportion, man ſoll das dritte x finden; ſo iſt $a : b = x : c$, und $ac = bx$ (§. 182.); folglich $x = \frac{ac}{b} = \frac{4 \cdot 21}{6} = 2 \cdot 7 = 14$; und die Proportion iſt $4 : 6 = 14 : 21$.

§. 184.

Sollte endlich zwiſchen zwey gegebenen Größen die mittlere Proportionale gefunden werden, ſo ziehe man aus dem Produkte der äuſſern Glieder die Quadratwurzel aus, welche das mittlere Glied ſeyn wird. Denn es ſey a das erſte, b das dritte, und x das zu ſuchende mittlere Glied; ſo iſt $a : x = x : b$, folglich $x^2 = ab$ (§. 182.), und $x = \sqrt{ab}$ (§. 137. Grundſ. 2.) Z. B. es ſollte zwiſchen

4 und 9 das mittlere Proportionalglied x gefunden werden, so ist $4 : x = x : 9$, nämlich $x^2 = 36$, und $x = 6$; imgleichen in $2 : x = x : 12$ ist $x^2 = 24$, und $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$; die mittlere Proportionale zwischen 2 und 12 ist demnach irrational (§. 125.)

§. 185.

Wenn zwey Produkte einander gleich sind, so stehen ihre Faktoren, verkehrt genommen, in einer Proportion, so nämlich, daß die zwey Faktoren des einen Produkts die beyden äussern, und die zwey Faktoren des andern Produktes die beyden innern Glieder der Proportion formiren.

Denn es sey $ab = cd$, so ist auch $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$, wenn man beyderseits durch ad dividiret (§. 39. Grundſ. 1.); daher haben $\frac{b}{d}$, und $\frac{c}{a}$ gleiche Quotienten; folglich sind die Verhältnisse $a : c$ und $d : b$ einander gleich, und $a : c = d : b$ ist eine richtige Proportion. Eben so ist auch $b : c = d : a$ eine richtige Proportion; denn die Quotienten $\frac{c}{b}$ und $\frac{a}{d}$ sind einander gleich, welche man erhält, wenn man die vorausgesetzten gleichen Produkte $ab = cd$ durch bd dividiret.

Es ist aus diesem auch zu ersehen, daß man auch aus der Gleichheit der Produkte der äussern und mittlern Glieder bey vier in Gestalt einer Proportion angesetzten Größen auf die Richtigkeit der Proportion schliessen könne.

Beyspiele.

Wenn $ax = bcy$, so ist $a : bc = y : x$
" $abc = x^2$, so ist $ab : x = x : c$
" $a = yx$, so ist $1 : y = x : a$
" $a^2 + ab = ax - x^2$, so ist $a : x = (a - x) : (a + b)$ u. s. w.

§. 186.

§. 186.

Wenn $x=ab$ und $y=cd$, so ist auch $x:y=ab:cd$; denn auch hier sind die Quotienten $\frac{y}{x}$ und $\frac{cd}{ab}$ einander gleich, wenn man $y=cd$ durch $x=ab$ dividiret (§. 39. Gr. 1.)

Wir haben also zwey Kennzeichen, aus denen wir auf die Richtigkeit einer Proportion schliessen können;

1tens Aus der Gleichheit der Verhältnisse, das ist, aus der Gleichheit der Quotienten.

2tens Aus der Gleichheit der Produkte der äussern und mittlern Glieder.

Sobald eines dieser Kennzeichen von 4 Größen in der Folge erwiesen wird, so können wir versichert seyn, daß solche in einer Proportion stehen.

§. 187.

Mit den 4 Gliedern einer Proportion können nun verschiedene Verwandlungen vorgenommen werden, so, daß die Proportion doch noch richtig verbleibt; und zwar, da

$a : aq = b : bq$, z. B. $3 : 5 = 6 : 10$, so ist

I. Durch die Verwechslung der mittlern Glieder.

$a : b = aq : bq$; $3 : 6 = 5 : 10$;

II Durch die Umkehrung der Glieder.

$aq : a = bq : b$; $5 : 3 = 10 : 6$;

III. Durch übereinstimmende Addition der Glieder.

$a + aq : aq = b + bq : bq$; $8 : 5 = 16 : 10$;

oder $a : aq + a = b : bq + b$; $3 : 8 = 6 : 16$;

IV. Durch übereinstimmende Subtraktion,

$a : aq - a = b : bq - b$; $3 : 2 = 6 : 4$,

$a - aq : a = b - bq : b$; $2 : 3 = -4 : 6$;

$aq - a : aq = bq - b : bq$; $2 : 5 = 4 : 10$

V. **Wenn man ein äusseres, und ein mittleres Glied mit einer nämlichen Größe multipliziret.**

$$am : amq = b : bq \;;\; 9 : 15 = 6 : 10$$
$$am : aq = bm : bq \;;\; 9 : 5 = 18 : 10$$
$$a : amq = b : bmq \;;\; 3 : 15 = 6 : 30$$
$$ap : amq = bp : bmq \;;\; 12 : 15 = 24 : 30$$

VI. **Wenn man ein äusseres, und ein mittleres Glied durch eine nämliche Größe dividiret.**

$$\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = b : bq \;;\; 1 : \frac{5}{3} = 6 : 10$$
$$\frac{a}{m} : aq = \frac{b}{m} : bq \;;\; 1 : 5 = 2 : 10$$
$$a : \frac{aq}{p} = b : \frac{bq}{p} \;;\; 3 : 1 = 6 : 2$$
$$\frac{a}{m} : \frac{aq}{n} = \frac{b}{m} : \frac{bq}{n} \;;\; 1 : \frac{5}{2} = 2 : 5$$

VII. **Wenn man alle 4 Glieder zu gleichen Potenzen erhebt, oder aus selben gleiche Wurzeln ziehet.**

$$a^2 : a^2q^2 = b^2 : b^2q^2 \;;\; 9 : 25 = 36 : 100$$
$$a^m : a^mq^m = b^m : b^mq^m \;;\; 3^m : 5^m = 6^m : 10^m$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{aq} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bq} \;;\; \sqrt[n]{3} : \sqrt[n]{5} = \sqrt[n]{6} : \sqrt[n]{10}.$$

Die Richtigkeit aller dieser Proportionen erhellet aus der Gleichheit der Produkte der mittlern und äussern Glieder, oder auch aus der Gleichheit der Quotienten der Verhältnisse.

§. 188.

Die Vortheile, welche alle diese Verwandlungen in der Ausübung öfters verschaffen können, sind folgende:

1)

1) Durch I. und II. kann jedes Glied einer Proportion an jede beliebige Stelle gebracht werden; z. B. wenn man in der Proportion $a : b = c : d$ das Glied a an die vierte Stelle haben wollte, so kann man setzen $d : c = b : a$.

2) Durch III. kann in einer Proportion, worin ein äusseres, und ein mittleres Glied unbekannt, ihre Summe aber bekannt ist, jedes Glied insbesondere gefunden werden. Z. B. es sey in der Proportion $6 : x = 9 : y$ sowohl x als y unbekannt, ihre Summe aber sey $= 25$, nämlich $x + y = 25$, so kann x und y jedes insbesondere gefunden werden. Denn da $6 : x = 9 : y$, so ist (nach I.) $6 : 9 = x : y$, und (nach III.) $(6 + 9) : 9 = (x + y) : y$, und $(6 + 9) : 6 = (x + y) : x$, nämlich $15 : 9 = 25 : y$, und $15 : 6 = 25 : x$; woraus man nach (§. 183.) findet $y = \frac{9 \cdot 25}{15} = 15$, und $x = \frac{6 \cdot 25}{15} = 10$.

3) Eben so kann durch IV. ein äusseres und ein mittleres Glied in einer Proportion gefunden werden, wenn ihre Differenz bekannt ist.

4) Durch V. kann man die in einer Proportion vorkommenden Brüche hinwegschaffen. Z. B. in der Proportion $8 : 13\frac{1}{3} = 3 : 5$ wird der Bruch hinweggeschafft, wenn man dieses Glied, und dabey auch ein äusseres mit 3 multipliziret; nämlich $8 : 40 = 3 : 15$, oder $24 : 40 = 3 : 5$.

5) Durch VI. kann öfters eine Proportion, deren Glieder große Zahlen sind, in kleinen Gliedern dargestellet werden, wenn man ein äusseres und ein mittleres Glied durch einen gemeinschaftlichen Faktor dividiret. Z. B. es sollte zu den drey Zahlen 320, 256, 480 eine vierte Proportionale gefunden werden, so ist $320 : 256 = 480 : x$, und $2 : 256 = 3 : x$, wenn man das 1te und 3te Glied durch 160 dividiret; und ferner $1 : 128 = 3 : x$; daher ist $x = 384$.

6)

6) Durch VII. können die in einer Proportion vorkommenden irrationalen Glieder hinweggeschafft werden, wenn man alle Glieder der Proportion auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebet. Z. B. wenn $a : b = c : \sqrt{d}$ ist, so ist auch $a^2 : b^2 = c^2 : d$; imgleichen wenn $a : b = \sqrt[3]{c} : \sqrt{d}$, so ist $a^2 : b^2 = \sqrt[3]{c^2} : d$, und $a^6 : b^6 = c^2 : d^3$.

Alle diese Vortheile sollen künftig bey der Anwendung deutlicher gezeigt werden.

§. 189.

Wenn man die Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen nach der Ordnung miteinander multipliziret, so hat auch die daraus entstehende zusammengesetzte Proportion ihre Richtigkeit; nämlich

$$\begin{array}{ll} a : aq = b : bq & 3 : 5 = 6 : 10 \\ c : cm = d : dm & 2 : 4 = 7 : 14 \\ e : en = f : fn & 8 : 9 = 16 : 18 \\ \hline ace : acemnq = bdf : bdfmnq; & 48 : 180 = 672 : 2520; \end{array}$$

weil die Quotienten der zwey zusammengesetzten Verhältnisse, oder auch die Produkte der äussern, und mittlern Glieder einander gleich sind.

§. 190.

Haben daher zwey Proportionen einige Glieder gleich, so kann die aus ihnen zusammengesetzte Proportion nach (§. 187. VI.) abgekürzt werden; nämlich

I. Wenn ein äusseres, und ein inneres Glied von einer Proportion einem äussern, und einem innern Gliede der andern Proportion wechselweise gleich sind; so stehen die übrigen Glieder ordentlich genommen in Proportion. Als

$$\begin{array}{ll} \text{wenn } a : b = c : d & 3 : 6 = 5 : 10 \\ \text{und } c : d = e : f & 5 : 10 = 7 : 14 \\ \hline \text{so ist auch } a : b = e : f & 3 : 6 = 7 : 14 \end{array}$$

oder

oder wenn $a : b = c : d$	$3 : 6 = 5 : 10$
und $b : e = d : f$	$6 : 9 = 10 : 15$
so ist auch $a : e = c : f$	$3 : 9 = 5 : 15$
oder wenn $a : b = c : d$	$3 : 6 = 5 : 10$
und $e : b = f : d$	$12 : 6 = 20 : 10$
so ist auch $a : e = c : f$	$3 : 12 = 5 : 20$

wenn man allhier im letzten Beyspiele in der 2ten Proportion nach (§. 187. II) die Glieder umkehret, und sodann die Glieder beyder Proportionen miteinander multipliziret.

II Wenn die beyden äussern Glieder der einen Proportion den beyden äussern Gliedern der andern Proportion, oder beyde innere Glieder der einen Proportion den beyden innern Gliedern der andern Proportion, oder auch beyde äussere Glieder der einen Proportion den beyden innern Glieder der andern Proportion gleich sind; so stehen die übrigen Glieder verkehrt genommen in Proportion. Als

wenn $a : b = c : d$	$3 : 6 = 5 : 10$
und $a : e = f : d$	$3 : 2 = 15 : 10$
so ist auch $e : b = c : f$	$2 : 6 = 5 : 15$

wenn man die zweyte Proportion wie vorhin umkehret.

Oder wenn $a : b = c : d$	$3 : 6 = 5 : 10$
und $e : b = c : f$	$15 : 6 = 5 : 2$
so ist auch $a : e = f : d$	$3 : 15 = 2 : 10$

wenn man ebenfalls die zweyte Proportion umkehret.

Oder wenn $a : b = c : d$	$3 : 6 = 5 : 10$
und $e : a = d : f$	$15 : 3 = 10 : 2$
so ist auch $e : b = c : f$	$15 : 6 = 5 : 2$

III. Wenn das letzte Glied einer Proportion dem dritten Gliede der andern Proportion gleich ist; z. B.

wenn

wenn	$a : b = c : d$	$3 : 6 = 5 : 10$
und	$e : f = d : g$	$4 : 8 = 10 : 20$
so ist auch	$ae : bf = c : g$	$12 : 48 = 5 : 20$

IV. Eben so, wenn mehrere Proportionen zusammengesetzt werden, wo immer das vierte Glied der vorhergehenden Proportion dem dritten Gliede der folgenden gleich ist; z. B.

wenn	$a : b = c : d$	$3 : 6 = 5 : 10$
und	$e : f = d : g$	$2 : 4 = 10 : 20$
und	$h : i = g : h$	$5 : 7 = 20 : 28$
und	$l : m = h : n$	$6 : 9 = 28 : 42$
so ist	$aehl : bfim = c : n$	$180 : 1512 = 5 : 42$

§. 191.

Bey mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweyten, gleichwie sich jedes erste Glied insbesondere zu seinem zweyten verhält.

Denn mehrere gleiche Verhältnisse können durch $a : aq$; $b : bq$; $c : cq$; $d : dq$ u. s. w. vorgestellet werden. Nun ist aber $(a+b+c+d) : (aq+bq+cq+dq) = a : aq$; eben so auch $(a+b+c+d) : (aq+bq+cq+dq) = b : bq$ u. s. w. weil das Produkt der mittlern Glieder dem Produkte der äussern Glieder gleich ist; folglich steht das Verhältniß aus der Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweyten Glieder mit jedem einzeln Verhältnisse in Proportion.

III. Abschnitt.

Von der einfachen Regel Detri.

§. 192.

Die Lehre von den Proportionen wird von einigen Mathematikern mit Recht die Seele der Mathematik genennet, weil ihr Nutzen so allgemein über alle Theile derselben ausgebreitet ist. Auch im gemeinen Leben ist die Anwendung der Proportionen sehr nützlich; die meisten Dinge, die im menschlichen Umgange in Rechnungen vorkommen, sind durch geometrische Verhältnisse mit einander verbunden; als z. B. die Waaren von einerley Gattung, und ihre Preise; die Arbeit, und die Zeit, u. d. gl.; wer zweymal so viel Waare kauft, muß auch zweymal so viel bezahlen; der dreymal so viel kauft, zahlt dreymal so viel; zu einer 6fachen Arbeit braucht man auch 6mal so viel Zeit, oder man muß 6mal so viel Arbeiter dazu anstellen u. s. w.

§. 193.

Im (§. 170.) ist zwar gesagt worden, ein Verhältniß (ein geometrisches) sey die Vergleichung zweyer gleichnamigen Größen gegen einander, durch die Bestimmung, wie oft die eine in der andern enthalten sey; so, daß daher das Wort Verhältniß in dieser Bedeutung nur bey gleichnamigen Dingen anzuwenden sey. Jedoch pflegt man im gemeinen Leben das Wort **Verhältniß** auch bey ungleichnamigen Dingen zu gebrauchen. Der Redegebrauch: **zwey auch ungleichnamige Dinge** a **und** b **stehen im geraden Verhältnisse**, oder das Verhältniß von a zu b ist ein **gerades Verhältniß**; hat die Bedeutung, **diese zwey Dinge** a **und** b **haben einen solchen Bezug auf einander, daß beyde zugleich wachsen, oder beyde zugleich abnehmen, und zwar dergestalt, daß sich** a **zu einem Vielfa=**

fachen von a **verhalte**, wie b **zu einem eben solchen Vielfachen von** b, **nämlich** $a : aq = b : bq$. So steht die Menge der Waare mit ihrem Preise im geraden Verhältnisse, weil der Preis mit der Waare auf einerley Art zugleich wächst, oder zugleich abnimmt; z. B. wenn es bekannt ist, daß 2 Ellen von einem gewissen Tuche 7 Fl. kosten, so müssen 6 Ellen als das Dreyfache von 2 Ellen auch gewiß 21 Fl. als das Dreyfache von 7 Fl. kosten; und die Verhältnisse 2 Ellen : 6 Ellen; und 7 Fl. : 21 Fl. sind einander gleich, und machen also eine richtige Proportion aus; nämlich 2 Ellen : 6 Ell. = 7 Fl. : 21 Fl.

Wenn hingegen zwey Dinge a und b einen solchen Bezug aufeinander haben, daß das eine eben so abnimmt, als das andere zunimmt, nämlich, daß a sich in $\frac{a}{n}$ verwandelt, wenn b in bn übergeht; so sagt man, diese zwey Dinge a und b stehen miteinander im **verkehrten Verhältnisse**. So steht die Zeit, welche man braucht, um eine gewisse Arbeit zu vollenden, mit der Anzahl der Arbeiter, die zu dieser Arbeit angestellet werden, im verkehrten Verhältnisse; denn so vielmal mehr Arbeiter man anstellet, eine eben so vielmal kürzere Zeit wird man zur Vollendung dieser Arbeit brauchen; z. B. wenn es bekannt ist, daß 3 Mann eine Wiese in 8 Tägen abmähen, so werden 6 Mann nur 4 Täge zu dieser Arbeit brauchen, und die Verhältnisse 3 M. : 6 M., und 8 T. : 4 T. werden dann erst eine richtige Proportion ausmachen, wenn man die Glieder des einen Verhältnisses umkehret; nämlich 6 M. : 3 M. = 8 T. : 4 T.

Ueberhaupt, wo a und b im **geraden Verhältnisse** stehen, kann man sagen, **jemehr** a, **destomehr** b; **jegrößer** a, **destogrößer** b; **jelänger** a, **destolänger** b; oder auch jeweniger a, destoweniger b; jekleiner a, desto kleiner b u. s. w., in der angeführten Bedeutung genommen; z. B. jemehr Waare, destogrößer der Werth; jeweniger Arbeiter angestellet werden, destoweniger Arbeit werden sie verfertigen u. d. gl.

Hin-

Hingegen wo a und b im **verkehrten Verhältnisse** stehen, kann man sagen **jemehr** a, **destoweniger** b; **jegrößer** a, **destokleiner** b; **jelänger** a, **destokürzer** b; oder auch jeweniger a, destomehr b; jekleiner a, destogrößer b, u. s. w. ebenfalls in der angeführten Bedeutung genommen; z. B. jemehr Arbeiter man zu einer Arbeit anstellet, destoweniger Zeit wird man dazu brauchen; je schmäler ein Tuch ist, destomehr Ellen wird man hievon zu einem Kleid brauchen u. d. gl.

§. 194.

Wären nun in einer solchen Proportion nur 3 Glieder bekannt, so läßt sich nach (§. 183.) auch das 4te finden; z. B. es wäre die Frage, wenn 3 Ellen Tuch 10 Fl. kosten, wieviel kosten 9 Ellen von diesem Tuche? so bezeichne man die noch unbekannte Anzahl Gulden, welche 9 Ellen kosten müssen, mit x; und es findet sodann die Proportion statt, 3 Ellen : 9 Ellen = 10 Fl. : x, wo man nach

(§. 183.) findet $x = \dfrac{9 \cdot 10}{3} = 30$ Fl.

Die Anwedung der Regel, nach welcher man bey einer Rechnungsfrage zu drey gegebenen Gliedern das vierte Proportionalglied findet, wird in der Ausübung auf die benannten Zahlen von den Rechenmeistern die **Regel Detri** genennet; und zwar heißt sie die **gerade** Regel Detri, wenn die zwey ungleichnamigen Größen, welche in der Rechnungsfrage vorkommen, nach (§. 193.) im geraden Verhältnisse stehen; im Gegentheile aber, wenn diese zwey Größen im verkehrten Verhältnisse stehen, so heißt sie die **verkehrte** Regel Detri.

§. 195.

Zur Regel Detri gehören zwey Verhältnisse, wo in dem einen beyde Glieder, in dem andern aber nur ein Glied bekannt, und das zweyte noch unbekannt ist. Dasjenige Glied in dem ersten Verhältnisse, welches sich unmittelbar auf die im andern Verhältnisse noch unbekannte Zahl bezieht, nennt man die **Fragezahl**. So ist im obigen Beyspiele 9 El-

Ellen die Fragezahl; weil eigentlich nach der Anzahl Gulden, welche diese 9 Ellen kosten müssen, gefragt wird.

Uebrigens muß es bey einer Rechnungsfrage, welche durch die Anwendung der Regel Detri beantwortet wird, aus der Beschaffenheit der Sache bekannt seyn, daß die zwey ungleichnamigen Größen in einem richtigen, entweder geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen, in der Bedeutung des (§. 193.); sonst läßt sich die Regel Detri nicht anwenden. Z. B. wenn es bekannt wäre, daß in zwey Minuten durch ein im Boden eines Fasses gebohrtes Loch 5 Eymer Wein ausfliessen, so könnte man keineswegs sagen, daß in 4 Minuten 10 Eymer Wein aus diesem Loche fliessen werden; die Proportion 2 M. : 4 M. = 5 Eymer : 10 Eymer ist nicht richtig, weil der Wein immer mit einer kleinen Geschwindigkeit herausgiesset; in jeder folgenden Minute fließt demnach weniger heraus, als in der vorhergehenden. Man kann daher die Menge des Weines, welche in 4 Minuten aus diesem Loche fließt, durch die Regel Detri nicht finden, obwohlen es bekannt ist, daß in 2 Minuten 5 Eymer ausfliessen.

§. 196.

Um nun bey den Rechnungsfragen, wo eine Proportion wirklich statt findet, sowohl die gerade, als auch die verkehrte Regel Detri jederzeit richtig anzuwenden, verfahre man folgendermassen:

1) Man untersuche, ob die zwey ungleichnamigen Größen in der Rechnungsfrage (die Fragezahl, und die unbekannte Größe) nach (§. 193.) im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen, nämlich ob es eine gerade, oder verkehrte Regel Detri sey.

2) Das Verhältniß (in der Bedeutung §. 170.), in welchem beyde Glieder bekannt sind, wird zuerst vor das Gleichheitszeichen gesetzt; und zwar, wenn es eine gerade Regel Detri ist (§. 194.), so setze man die Fragezahl an die 2te Stelle, und die mit ihr gleichnamige an die erste Stelle; ist es aber eine verkehrte Regel Detri, so kömmt die Frage-

zahl

zahl an die erste, und die mit ihr gleichnamige Zahl an die zweyte Stelle zu stehen.

3) Das andere Verhältniß (in der Bedeutung §. 170.), in welchem sich die noch unbekannte Zahl befindet, kömmt hinter das Gleichheitszeichen zu stehen, und zwar so, daß jederzeit die noch unbekannte Zahl an der vierten, und die mit ihr gleichnamige an der dritten Stelle stehe.

4) Sodann multiplizire man in einem, wie im andern Falle die zwey mittlern Glieder miteinander, und dividire das Produkt durch das erste Glied, so hat man die unbekannte Zahl gefunden.

5) Sollte irgendwo ein oder mehrere Glieder, Zahlen von verschiedener Benennung enthalten, z. B. Gulden und Kreuzer, oder Pfunde, Lothe, u, d. gl. so müssen solche vorher auf gleichen Namen gebracht werden, und zwar so, daß das erste und zweyte Glied vollkommen gleiche Namen haben. Und eben so wird auch das vierte Glied in eben solchen Einheiten gefunden werden, auf welche das dritte Glied gebracht worden ist.

Man verfährt hier öfters am kürzesten, wenn man die Größen kleinerer Gattung als Brüche von der größern Gattung nach (§. 92.) vorstellet, wie in folgenden Beyspielen zu ersehen ist.

Beyspiele.

1. Frage. Wenn $3\frac{1}{2}$ Ellen Tuch 16 Fl. kosten; wie viel Ellen von diesem Tuch bekommt man für 100 Fl.?

Antwort. 16 Fl. : 100 Fl. = $3\frac{1}{2}$ Ellen : x Ellen;

$$\text{Folglich } x = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 100}{16} = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 25}{4} = \frac{7 \cdot 25}{2 \cdot 4} = 21\tfrac{7}{8} \text{ Ellen.}$$

Denn jemehr Gulden, desto mehr Ellen; nämlich es ist hier eine gerade Regel Detri anzuwenden, vermög (§. 193. und 194.).

2. Frage. Eine gewisse Anzahl Patronen wird in 8 Tagen von 150 Mann verfertigt; man will aber diese Mu-

nition in 6 Tagen fertig haben; wie viel Mannschaft muß hiezu angestellet werden?

Antwort. 6 Tage : 8 Tage = 150 M. : x M.;

Folglich $x = \frac{8 \cdot 150}{6} = 4 \cdot 50 = 200$ Mann. Denn jemehr Tage, destoweniger Mannschaft; folglich ist hier eine verkehrte Regel Detri anzuwenden, vermög (§. 193. und 194.).

3. Frage. Wie viel kosten 9 Pf. 24 Loth von einer Waare, wenn man für 5 Pf. 1 Fl. 30 Kr. zahlen muß?

Antwort. 5 Pf. : $9\frac{3}{4}$ Pf. = $1\frac{1}{2}$ Fl. : x Fl.;

Folglich $x = \frac{9\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2}}{5} = \frac{39}{4} \cdot \frac{3}{2} : 5 = \frac{117}{40}$ Fl. $= 2$ Fl. $55\frac{1}{2}$ Kr.

Oder 5 Pf. : $9\frac{3}{4}$ Pf. = 90 Kr. : x Kr.

Folglich $x = 9\frac{3}{4} \cdot \frac{90}{5} = 9\frac{3}{4} \cdot 18 = 175\frac{1}{2}$ Kr. $= 2$ Fl. $55\frac{1}{2}$ Kr., wie vorhin.

4. Frage. Wenn 100 Mann in einer Nacht eine Transchee von 160 Klafter verfertigen können; wie viel Mannschaft muß angestellt werden, wenn in der nämlichen Zeit eine Transchee von 400 Klaftern verfertiget werden soll?

Antwort. 160 Kl. : 400 Kl. = 100 M. : x M.;

Folglich $x = \frac{400 \cdot 100}{160} = \frac{10 \cdot 100}{4} = 10 \cdot 25 = 250$ Mann.

5. Frage. Wenn der jährliche Liedlohn eines Dienstbothen 36 Fl. beträgt, wie viel gebührt ihm für 8 Monate und 12 Tage?

Antwort. 25 Fl. 12 Kr.

6. Frage. Wenn hundert Gulden Kapital jährlich $3\frac{1}{2}$ Fl. Interesse bringen; wie groß muß das Kapital seyn, wovon man jährlich 1000 Fl. Interesse haben kann?

Antwort. $28571\frac{3}{7}$ Fl.

7.

7. **Frage.** Eine Rikoschetbatterie in einer Transchee ist dermassen mit Patronen versehen, daß sie durch 24 Stunden, jede Stunde 20 Schüsse geben kann; man hat aber 32 Stunden lang keine frische Munition zu hoffen, und hat daher die vorhandenen Patronen für diese Zeit einzutheilen; wie viel Schüsse können in jeder Stunde gemacht werden?

Antwort. 15 Schüsse.

8. **Frage.** Wenn man zu einem Luftballon 2360 Ellen von einem Taffet braucht, welcher eine Elle breit ist; wie viel braucht man zu eben diesem Ballon Ellen von einem Taffet, welche $1\frac{1}{4}$ Ellen breit ist?

Antwort. 1888 Ellen.

9. **Frage.** Es befinden sich in einer Festung 6000 Mann Besatzung, welche für 2 Monate mit Proviant versehen sind; nun wird die Festung mit einer Blokade bedrohet; der Kommandant erhält Ordre sich durch 3 Monat und 10 Tage zu halten; es ist die Frage, wie viel er von der Mannschaft aus der Festung fortschicken muß?

Antwort. $3\frac{1}{3}$ Monat : 2 Monat = 6000 M. : x M.;

Folglich $x = 6000 . 2 : \frac{10}{3} = \frac{6000 . 2 . 3}{10} = 600 . 6$ = 3600 Mann, welche in der Festung verbleiben können; mithin müssen 6000 − 3600 = 2400 Mann fortgeschaft werden.

10. **Frage.** Nun setze man den Fall, die ganze Mannschaft müßte in der Festung bleiben; und da entsteht die Frage, wie viel Zwieback einem jeden Mann täglich zu geben sey, wenn sie für 2 Monate dergestalt mit Proviant versehen sind, daß jeder Mann täglich 2 Pf. Zwieback erhalten könnte.

Antwort $3\frac{1}{3}$ Monat : 2 Monat = 2 Pf. : x Pf.;

Folglich $x = 4 : \frac{10}{3} = \frac{4 . 3}{10} = \frac{2 . 3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ Pf. $= 1$ Pf. $\frac{32}{5}$ Loth = 1 Pf. $6\frac{2}{5}$ Loth.

Man

Man sieht aus diesem Verfahren, daß es bey der Anwendung der Regel Detri besser ist, wenn man die Multiplikation der mittlern Glieder nicht alsogleich verrichtet, sondern selbe nur andeutet, weil sich öfters vortheilhafte Abkürzungen anbringen lassen, welche aus der Lehre von den Brüchen entspringen.

Anmerkung. Man kann bey der Anwendung der geraden und verkehrten Regel Detri die Glieder auch folgendermassen ordnen: Die Zahl, welche mit der Fragezahl gleichnamig ist, setze man an die erste, und die Fragezahl selbst an die dritte Stelle; die noch unbekannte Zahl an die vierte, und die mit ihr gleichnamige an die zweyte Stelle. Um sodann die noch unbekannte Zahl zu finden, multiplizire man bey der geraden Regel Detri die zwey mittlern Glieder miteinander, und dividire das Produkt durch das erste Glied; bey der verkehrten Regel Detri aber multiplizire man das erste und zweyte Glied miteinander, und dividire das Produkt durch das dritte Glied. Das obige Beyspiel N. 1. würde demnach also stehen: 16 Fl. : $3\frac{1}{2}$ Ellen = 100 Fl. : x Ellen = $3\frac{1}{2} \cdot 100 : 16 = 21\frac{7}{8}$ Ellen.

Obwohlen nun dawider eingewendet werden kann, daß in diesem Beyspiele 16 Fl. : $3\frac{1}{2}$ Ellen kein Verhältniß in der Bedeutung (§. 170.) seyn kann, da diese zwey Glieder ungleichnamig sind, so sieht man doch wohl ein, daß die Proportion dennoch richtig ist, wenn man die Glieder derselben als unbenannte Zahlen betrachtet. Und muß man denn dieses nicht auch bey dem vorigen Ansatz 16 Fl. : 100 Fl. = $3\frac{1}{2}$ Ellen : x Ellen thun, wenn man die zwey mittlern Glieder 100 Fl. und $3\frac{1}{2}$ Ellen miteinander multipliziret? Freylich könnte man hier auch diesem Vorwurfe ausweichen, wenn man, um das vierte Glied zu finden, zuvor das zweyte Glied 100 Fl. durch das erste 16 Fl. dividiret, und mit diesem unbenannten Quotienten

$\frac{100}{16} = \frac{25}{4}$ das dritte Glied $3\frac{1}{2}$ Ellen multiplziret. Da man aber nach dieser strengen Theorie eben das nämliche Resultat, wie vorhin erhält, so kann die im gemeinen Leben schon einmal so eingeführte praktische Ordnung der Glieder, und Auflösung der Regel Detri auch beybehalten werden.

§. 197.

Die Regel Detri findet auch vorzüglich ihre Anwendung bey der Verwandlung (Reduktion) der Gewichte und Maße eines Ortes, in jene eines andern Ortes, wenn das Verhältniß, welches solche gegeneinander haben, bekannt ist. Z. B. wenn es bekannt ist, daß ein köllner Pfund sich zu einem pariser Pfunde verhält, wie 43 zu 45, nämlich daß 45 köllner Pfunde 43 pariser Pfunde ausmachen, und es würde gefragt, wie viel 94 pariser Pfunde nach dem Köllner Gewichte betragen; so findet folgende Regel Detri statt: 43 par. : 94 par. = 45 kölln. : x kölln. Pfund, folglich $x = \frac{94 \cdot 45}{43} = 98\frac{16}{43}$ pariser Pfund = 98 Pf. $11\frac{39}{43}$ L.

Eben so, wenn es bekannt ist, daß sich eine prager Elle zu einer wiener Elle verhalte wie 16 zu 21, oder das 16 wiener Ellen 21 prager Ellen ausmachen; und es wird gefragt, wie viel 30 wiener Ellen in prager Ellen verwandelt betragen, so ist 16 wiener Ellen : 30 wiener Ellen = 21 pr. Ell. : x pr. Ell.; also $x = \frac{30 \cdot 21}{16} = 39\frac{3}{8}$ pr. Ell.

Imgleichen, wenn die Frage wäre; wie viel beträgt eine Länge von 100 wiener Fuß nach dem pariser Fuß gemessen, wenn es bekannt ist, daß 1440 wiener Fuß 1401 pariser ausmachen; so ist 1440 wien. F. : 100 wien. F. = 1401 par. F. : x par. F.; folglich $x = \frac{1401 \cdot 100}{1440} = \frac{467 \cdot 10}{48} = 97\frac{7}{24}$ par. Fuß.

§. 198.

§. 198.

Es ist aber bey der Reduktion der Gewichte und Maße nicht nur das Verhältniß, welches die Gewichte und Maße verschiedener Oerter gegeneinander haben, zu wissen nöthig, sondern man muß auch von den, an verschiedenen Oertern gebräuchlichen Eintheilungen derselben unterrichtet seyn. Insbesondere kömmt hier in Absicht des Gewichts zu bemerken, daß an einem nämlichen Orte öfters verschiedene Gewichte im Gebrauch sind; besonders ist in den meisten Oertern das Gewicht, womit Silber, Gold und Edelgesteine gewogen werden, von dem Kramer- oder Handelsgewicht verschieden; so ist auch gemeiniglich ein Apothekerpfund von einem Handelspfunde verschieden.

Hier in Wien sind, vermög Protokoll des k. k. Zimmentirungsamtes, fünferley Gewichte im Gebrauch, nämlich:

1) Das **Mark- oder Münzgewicht** (auch **Valvationsgewicht** genannt), dessen man sich beym Münzwesen, beym Abwägen des Silbers, und der davon verfertigten Dinge bedienet.

2) Das **Kommerzial- oder Handelsgewicht**, welches im gewöhnlichen Handel gebraucht wird.

3) Das **Dukatengewicht**, welches beym Abwägen des Goldes, und der aus Gold verfertigten Sachen gebraucht wird.

4) Das **Juwelengewicht**, womit Perlen und Edelgesteine gewogen werden.

5) Das **Apothekergewicht**.

Eine wiener Mark beträgt vermög der Einrichtung des hiesigen k. k. Münzamtes **vollkommen genau** $\frac{6}{5}$ der **wahren köllnischen Mark**, der man sich an vielen Orten Deutschlands bedienet; und es wird die wiener Mark eben so wie die köllnische in 16 Lothe, das Loth in 4 Quintl, das Quintl in 4 Pfennige, der Pfennig in 2 Heller, und der Heller

in

in 128 Richtpfennige eingetheilet, so daß die Mark aus 65536 Richtpfennigen bestehet; mithin ist ein Richtpfennig des wiener Markgewichts ebenfalls $\frac{6}{5}$ eines Richtpfennigs einer köllnischen Mark; und ein kölln. Richtpfennig $= \frac{5}{6}$ wien. Richtpfennig.

Ein wiener Handelspfund wird in 32 Lothe, ein Loth in 4 Quintl, und ein Quintl in 4 Pfennige, zuweilen auch noch ein Pfennig in 15 Grane eingetheilet. Es ist aber das wiener **Handelsgewicht** um etwas weniges leichter als das wiener Markgewicht, so daß ein halbes wiener Handelspfund vollkommen genau nur aus 65387 solchen Richtpfennigen bestehet, deren eine wiener Mark 65536 hat.

Das Gewicht eines gesetzmässigen kaiserlichen Dukatens, deren 67 auf eine köllnische Mark, und $80\frac{2}{5}$ auf eine wiener Mark gehen, ist die Einheit des in N. 3. angeführten **Dukatengewichts**, und wird allhier in 60 gleiche Theile getheilet, die man **Dukatengrane** nennet. Eine Unze des wiener Markgewichts enthält demnach 603 Dukatengrane.

Das Gewicht der Juwelen wird durch Karate bestimmet; ein Karat des **wiener Juwelengewichts** wiegt $48\frac{4}{5}$ Richtpfennige des wiener Markgewichts; ein Karat wird noch in 4 **Juwelengrane** eingetheilet.

Ein **wiener Apothekerpfund** hat, wie es sonst überall gebräuchlich ist, 12 Unzen, und eine solche Unze bestehet allhier aus 2 **genau eben so schweren Lothen**, als das Handelspfund deren 32 hat. Eine Unze wird eingetheilt in 8 **Drachmen**, oder Quintl; ein Drachma in 3 **Skrupel**, und ein Skrupel in 20 **Apothekergrane**.

Bey den Gold- und Silberprobirwagen bedient man sich allhier, so wie in ganz Deutschland eines kleinen Gewichts (gemeiniglich eines Pfennigs des Markgewichts,) wel-

welches eine **verjüngte** oder **symbolische Mark** genennet wird; beym Silber theilt man diese verjüngte Mark in 16 Lothe, und ein solches verjüngtes Loth in 18 **Silbergräne**; oder auch ein Loth in 4 **Quintl**, und ein Quintl in 4 **Pfennige**. Beym Gold aber wird die verjüngte Mark in 24 Goldkarate, und ein solcher Karat in 12 Goldgräne eingetheilet.

Anmerkung In Frankreich, Holland, und England wird die verjüngte Mark Silber in 12 Haupttheile (Deniers, Pfennige, oder Unzen), und ein solcher Haupttheil in Frankreich und Holland in 24 Grains, in England aber in 20 Dwts eingetheilet. Ein Goldkarat aber der verjüngten Mark wird in Frankreich in 32, in Holland in 12, und in England in 4 Grains zertheilet, wo in England ein solcher Grain noch in 4 Quarters zerfället wird.

§. 199.

Wir wollen bey dieser Gelegenheit nur die zuverlässigsten Vergleichungen der Gewichte, und Längenmaße einiger Oerter hieher setzen.

I. Vergleichung einiger Gewichte nach Richtpfennigen der köllnischen Mark, und Asen des holländischen Troys-Gewichts.

Wenn man eine **köllnische Mark** (als das Gewicht von 67 neugeprägten kais. königl. Dukaten) durch blosse Halbirungen in 65536 Richtpfennige eintheilet, nämlich, die Mark in 8 Unzen, die Unze in 2 Lothe, 1 Loth in 4 Quentchen, 1 Quentchen in 4 Pfennige, einen Pfennig in 256 Richtpfennige (zuweilen wird auch ein Pfennig in 17 Eßchen, wie auch in 15 Grane zertheilet) so enthält, vermög einer sorgfältigen Untersuchung,

1)

	Richtpfennig der kölln. Mark.	Verm. in Asen holl. Tr.
1) In Amsterdam und ganz Holland ein Apothekerpfund des holländischen Troys-Gewichts von 12 Unzen.	103400	7680
Es sind nämlich 135 Unzen holl. Troys = 142 köllnisch, und 71 Unzen der wien. Mark = 81 Unzen holl. Tr.		
8 Solche Unzen holl. Tr. sind eine holl. Mark, = = =	68933	5120
wo eine Unze in 20 Engels, und ein Engel in 32 Asen zertheilet wird, so daß eine Mark holl. Troys 5120 Asen enthalte. 41 Asen holl. Tr. sind daher äusserst nahe = 552 Richtpfng. der kölln. Mark = 460 Richtpfng. der wien. Mark, weil vermög (§. 198.) genau 5 wien. Mark = 6 kölln. Mark sind. Denn vermög eigener Untersuchung hat ein neuer messingener Einsatz von 4 holl. Mark im hiesigen k. k. Münzamt gewogen 229780 $\pm$ 4 wien. Richtpfng.; und ein anderer von 1 holl. Mark 57444 $\pm$ 1 wien. Richtpfng.		
19 Unzen holl. Troys sind daher nicht genau = 20 Unzen köllnisch; und die köllnische Mark enthält nicht 4864, wie es sonst allenthalben in den Büchern angetroffen wird, sondern $4867\frac{2}{3}$ Asen holl. Troys; welches in der Folge noch mehr bestätiget wird.		
Ein Handelspfund in Holland von 16 Unzen, oder 32 Loth, ist etwas schwerer als 2 holl. Mark; es enthält =	138410	10280
Es sind nämlich 256 Unzen holl. Handelsgewicht = 257 holl. Troys,		

	Richtpfennig der köll. Mark	Verw. in Asen holl. Tr.

und 125 Unzen holl. Handelsgewicht = 132 Unzen köllnisch; wie auch 161 Pfunde holl. Handelsgewicht = 142 Pfunden wien. Handelsgewicht.

Denn ein neuer messingener ganzer Zentner von 100 Pfund amsterdamer Handelsgewicht im hiesigen, nun zwar aufgehobenen k. k. Zimmentirungsamt, mit einem Zeugnisse seiner Richtigkeit versehen, hat gewogen 88 Pfund $6\frac{3}{8}$ Loth wien. Handelsgew. oder 11534164 wien. Richtpfn. Ein anderer messingener Einsatz von 32 Loth holl. Handelsgew. im hiesigen Münzamt hat gewogen 115308 ± 2 wien. Richtpfng.

2) In London und ganz England ein Apothekerpfund des englischen Troy-Gewichts (nicht Troys-Gewichts) von

	Richtpfennig der köll. Mark	Verw. in Asen holl. Tr.
12 Unzen - - - -	104560	7766

Es sind nämlich 90 Unzen holl. Troys = 89 Unzen engl. Troy.

Die Unze des englischen Apothekerpfundes wird, wie es sonst gewöhnlich ist in 8 Drachmen, ein Drachma in 3 Skrupel, und ein Skrupel in 20 Grane zertheilet. 12 solche Unzen heissen auch eine **englische Mark Troy**, wo aber eine Unze in 20 Pennys, ein Penny in 24 Gräns und ein Grän in 20 Mits zertheilet wird.

In England ist auch das sogenannte Avoir du poids Gewicht gebräuchlich, wo ein Pfund in 16 Unzen, und eine Unze in 16 Drachmen zertheilet

wird,

	Richtpfennig der kölln. Mark	Verw. in Asen holl. Tr.
wird, und es sind 31 Unzen engl. Troy = 34 Unz. Av. d. p.; daher 1 Pf. Avoir du poids = =	127112	9441
Und endlich ist in England auch noch ein Pfund Königsgewicht von 16 Unzen = $1\frac{1}{2}$ Pf. Av. d. p. = =	190668	14162
3) In Paris und ganz Frankreich ein Apothekerpfund des französischen Gewichts von 12 Unzen (Poids de France oder auch Poids de marc, welches zuweilen in Deutschland unrichtig Poids de Troyes genannt wird) enthält = = = =	102876	7641
Es sind nämlich 43 Unzen franz. = 45 Unzen kölln.		
8 solche Unzen sind eine franz. Mark.	68584	5094
Und 16 Unzen ein franz. Handelspfund = = = =	137168	10188

Die Unze wird in 8 Gros oder Drachmen, ein Gros in 3 Deniers, und ein Denier in 24 Gräns zertheilet.

Diese angeführte Bestimmung des pariser Gewichts in kölln. Richtpfennigen, und in Asen holl. Troys stimmet vollkommen überein sowohl mit H. Krusens Angabe im hamb. Kontoristen (1 par. Mark = 5094 Asen holl. Troy vermög einer wirklichen in Amsterdam vorgenommenen Untersuchung) als auch mit H. Eisenschmieds Untersuchung in Disquis. de pond. & mens. (1 kölln. Unze = $550\frac{1}{4}$ paris. Grains); hingegen die fernere Vergleichung des H. Kruse (21 par. Mark

=

= 22 kölln. Mark) muß unrichtig seyn, weil solche mittelst des unrichtigen Satzes (19 Asen holl. Tr. = 256 kölln. Richtpfng. abgeleitet wurde.

4) In Wien und in allen österreichischen Staaten

	Richtpfennig der kölln. Mark.	Verw. in Asen holl. Tr.
1 wien. Apothekerpfund von 12 Unzen.	$117696\frac{3}{5}$	8742
1 wien. Handelspfund von 32 Lothen, oder 16 Unzen = = =	$156928\frac{4}{5}$	11656
1 wien. Mark von 16 Lothen oder 8 Unzen = = = =	$78643\frac{1}{5}$	5841
1 Dukaten von 60 Gran =	$978\frac{10}{67}$	
1 Karat des wien. Juwelengewichts.	$57\frac{3}{4}$	

Es ist auch sonst überall 1 Juw. Karat = 57 bis 58 kölln. Richtpfng.

Es sind daher 47 Unzen Poids de France oder pariser Poids de marc = 41 Unzen wien. Mark-Gewicht.

Und 183 franz. Pfunde sind gleich 160 Pfunden wien. Handelsgewicht.

	Richtpfennig der kölln. Mark.	Verw. in Asen holl. Tr.
5) In Kölln und in mehr andern Städten Deutschlands ein Handelspf. von 32 Loth = 2 Mark des wahrhaften kölln. Gewichts = =	131072	$9735\frac{1}{3}$

Ein gut aufbewahrter messingener Einsatz von 1 Mark kölln. vom Jahr 1716 mit dem Stempel von Kölln versehen im hiesigen Münzamt hat gewogen 54610 ± 1 wien. Richtpfng.; und ein anderer solcher Einsatz ohne Jahrzahl, und nicht so fleißig ausgearbeitet 54644 ± 1 wien. Richtpfng.

	Richtpfennig der kölln. Mark.	Verw. in Asen holl Tr.
6) In Venedig ein großes Handelspfund von 16 Unzen (libra grossa), oder 2 Mark Münzgewicht = = =	133802	9938
Es sind nämlich 48 Unzen der venet. libra gr. = 49 Unzen köllnisch.		
Ein venetianisches kleines Handelspfund von 12 Unzen (libra sottile) =	84633	6286
Es sind nämlich 83 Unzen lib. sott. = 70 Unzen lib. gr.		
Auch ist in Venedig ein eigenes Fleisch- und Viktualgewicht (großes oder schweres Gewicht peso grosso genannt) gebräuchlich; 19 Unzen dieses Gewichts sind beynahe = 30 Unz. lib. sott. folglich 1 Pf. p. gr. von 12 Unz.	133631	9744
Und endlich giebt es in Venedig auch noch eine oncia sottile, welche bey dem Apothekergewicht, und in verschiedenen andern Fällen gebraucht wird; 25 solche Unzen des venetianischen Apothekergew. sind gleich 21 Unzen des venet. Markgew. und folglich enthält ein venet. Apothekerpfund von 12 Unzen = = = =	84295	6261

Denn vermög eigener Untersuchung hat ein neuer messingener Einsatz von 2 Mark oder 1 Pfund lib gr, gewogen 111502 ± 2; ein anderer von ½ Mark 27876 ± ½; ein Pfund lib. sott. 70528 ± 1; eine Unze Fleischgewicht im Durchschnitt 9280, und eine Unze Apothekergewicht 5857 wien. Richtpfng.

Diese angeführten Gewichte waren mit Zeugnissen ihrer Aechtheit versehen,

	Richtpfennig der költn. Mark.	Verw. in Asen holl. Tr.
welche weiter unten folgen werden. Hingegen hat ein anderer zwar gestempelter, aber mit keinem Zeugnisse versehener messingener Einsatz von 1 venet. Mark im hiesigen Münzamt gewogen 55698 $\pm$ 1 wien. Richtpfng.		
7) Zu Breslau, in Lemberg und ganz Gallizien, ein Pfund von 32 Loth des **breslauer Gewichts**, wie solches allhier nach einem breslauer Original verfertiget wird, wiegt 23 Loth, 0 Quintl, $1\frac{5}{16}$ Pfng. wien. Markgewicht = 94544 wien. Richtpfng.		
Ein breslauer Handelspfund ist daher	113453	$8426\frac{1}{4}$
Und es sind 119 bresl. Pf. = 103 költn. Pf. wie auch 65 bresl. = 47 wien. Handelspf.		
Eine einzelne ganz von Messing sauber ausgearbeitete breslauer Mark im hiesigen Münzamt hat gewogen 45994 $\pm$ 1 wien. Richtpfng.; und eben daselbst ein messingener Einsatz von 1 bresl. Mark 45986 $\pm$ 1 wien. Richtpfng.		
Es ist daher eine breslauer Mark =	55193	$4099\frac{1}{2}$
Und es sind sehr nahe 57 bresl. Mark = 40 wien. Mark = 48 költn. Mark.		
8) Ein prager Pfund von 2 Mark im hiesigen Münzamt hat gewogen 119440 $\pm$ 2 wien. Richtpfng.; daher ist		—
Eine prager Mark von 8 Unzen =	71664	5323
Und es sind 107 prager Mark = 117 Mark költn. wie auch 124 prager Mark = 113 wien. Mark.		

9)

	Richtpfennig der kölln. Mark.	Verw. in Asen holl. Tr.
9) Ein messingener Einsatz von 1 nürnb. Mark im hiesigen Münzamt hat gewogen 55684 ± 1 wien. Richtpfng. enthält daher = = =	66821	4963
Und vermög dieser Untersuchung wären 51 nürnb. Unzen = 52 kölln. Unzen.		
10) Ein gut aufbewahrter messing. Einsatz mit der Aufschrift, Augspurg 1 Pfund von 2 Mark, im hiesigen Münzamt hat gewogen 110176 + 2 wien. Richtpfng.		
Es ist daher 1 augspurg. Mark von 8 Unzen = = = =	66105	4910
Und 461 Unz. augsp. = 465 Unz. kölln.		
11) Ein sauber ausgefertigter mess. Einsatz von 1 Pfund zu 2 Mark, wo 1 Loth mit 12 *d*, ½ Loth mit 6 *d*, ¼ Loth mit 3 *d*, und endlich 1 *d* mit 1 . . 12 bezeichnet war, im hiesigen Münzamt hat gewogen 114690 ± 2 wien. Richtpfng.		
Das Futteral hatte die deutsche Aufschrift: **Niederländer Gewicht**; die erste Hülse war am Boden, aussen mit 1 marc, und inwendig mit 16 bezeichnet.		
Dieses Pfund enthält daher =	137628	10222
Und es sind 20 solche Pf. = 21 Pf. kölln.		
Bey diesem, und dem vorigen Einsatz war der eine Stempel (vermuthlich des Meisters mit den Buchstaben G. S.) einerley; die zwey andern Stempel aber waren verschieden; diese Merkmale, und Krusens Angabe lassen vermuthen, daß dieser Einsatz Regenspurg. Markgew. sey.		

Ferner soll nach Hrn. Krusens Angabe im hamb. Kontoristen an Asen holl. Troysgew. enthalten:

1 Handelspfund von 16 Unzen oder 32 Loth in Antwerpen und ganz Niederland 9790, eine Mark aber von 8 Unzen 5120; Augspurg schweres 10220, leichtes 9836; Berlin von 2 Mark 9750; Bern 10825; Braunschweig von 2 Mark, Dresden und Leipzig 9716; Constantinopel 1 Oka 26396; Coppenhagen und ganz Dännemark 10388, eine Mark aber von 8 Unzen 4888; Danzig 9062; Genf großes 11462, kleines 9552; Hamburg 10080; Hannover von $1\frac{1}{3}$ Apothekerpfund 10127; Lissabon und ganz Portugal von 2 Mark 9552; Madrit und ganz Spanien von 2 Mark 9592; Marseille 8359; München und Regenspurg 11671, eine Mark aber in Regenspurg 5111; Petersburg und ganz Rußland 8512; Stockholm und ganz Schweden 8848, eine Mark aber von 8 Unzen 4384; Warschau 7863.

Ferner 1 Pfund von 12 Unzen in Corsika 7166; Florenz 7273; Genua schweres 7140, leichtes 6720; Livorno 7131; Mantua 6854; Mayland 6822; Neapel 6677; Padua 6952; Parma 7056; Rom 7345; Turin von $1\frac{1}{2}$ Mark holl. Troys 7680. Apothekergewicht in Deutschland (mit Ausnahme der österreichischen Monarchie und Hannover) 7444.

Da nun vermög obangeführten, 41 Asen = 552 kölln. Richtpfng. sind, so ist es leicht diese angeführten Gewichte, aus dem für bekannt angenommenen Gewichte von 67 kais. Dukaten abzuleiten, um eine bestimmte Kenntniß davon zu erlangen, wie viel solche nach dem wahren kölln. Gewichte betragen. Nur dürften diese Angaben des Hrn. Kruse bis auf die Einheiten der Asen nicht allenthalben richtig seyn, weil diese Verhältnißzahlen an mehrern Orten mittelst der unrichtigen Angabe (1 kölln. Mark = 4864 Asen holl. Troys) abgeleitet wurden. Daß diese Angabe unrichtig seyn müsse, erhellet auch schon daher, weil 70 neugeprägte Dukaten

159 Engels holl. Tr. und 67 solche eine köllnische Mark wiegen müssen. Auch sind die Gewichtseinsätze einer nämlichen Gattung, die von verschiedenen Künstlern verfertiget werden, öfters bey 10000 Äsen um 1 oder 2, zuweilen auch um mehr Äsen verschieden. Ueber dieses sind die Gewichtseinsätze in ihrer Zertheilung öfters nicht genau abgeglichen, so, daß die Schlußfolge aus der abgeführten Untersuchung eines Theiles des Gewichteinsatzes auf das ganze Gewicht unrichtig ausfallen muß, wie es aus folgendem erhellet.

Die Richtigkeit des obangeführten venetianischen Gewichtes, welches auch in Triest gebraucht wird, war mit folgenden in italienischer Sprache abgefaßten Zeugnissen versehen; nur der Anfang und das Ende bey dem ersten war lateinisch.

Im Nam. des Barmh. Gottes Amen. Im Jahre v. d. Menschw. uns. H. J. Chr. 1787 am Don. d. 5ten Apr.

H. J. B. Nicoletti, Wag- und Gewichtsaufseher im hiesigen Münzhause ist in meiner, des öffentl. Notars, und der unten gesetzten Zeugen Gegenw. erschienen, und hat mittelst eines freywill. aus Liebe zur Wahrheit, in meine Hände abgeleg. Eides erkläret: daß die zwey Gewichtseinsätze, der eine von 1 kleinen, der andere von 1 großen venet. Pfunde, wo zugleich der größere Einsatz 2 Mark Goldarb. Gew. beträgt (dichiara, che si due Marchi, uno a peso di libra sottile veneta, e l'altro a peso di libra alla grossa veneta, qual Marca alla grossa forma il peso di Marche duo peso da orefice &c.), welche derselbe an H. V. Porta verkaufet, wahre und ächte Gewichte von einem kleinen und von einem großen Pfunde sind, wie solche in der Hauptstadt (nella dominante) üblich sind; und welche hiemit mit dem Stempel des heil. Markus bezeichnet werden. So viel bez. ꝛc. Venedig ꝛc.

Bey der Prüfung enthielt wien. Richtpfennige vom großen Pfunde der ganze Einsatz von 16 Unzen 111502; 8 Unz. 55748; 4 Unz. 27864; 2 Unz. 13950; 1 Unz. 6970

6970; der Ueberrest von 1 Unz. 6964. Vom kleinen Pfunde der ganze Einsatz von 12 Unz. 70528; 6 Unz. 35264; 3 Unz. 17624; 2 Unz. 11768; der Ueberrest von 1 Unze 5862.

Ferner wurden später eingeschickte, mit nachstehendem Zeugnisse versehene venet. Gewichte untersuchet:

Venedig den 14ten Aug. 1789. Ich End. unterz. öffentl. Waag- und Gewichtsaufseher im Münzhause bezeuge hiemit, daß diese überschickten Gew. ächte, und richtige venet. Gew. sind. Als, ein Einsatz von 4 Unz. des Goldarb. Gew. ꝛc. Sodann 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ Unz. 1, $\frac{1}{2}$ Drachm. 1, $\frac{1}{2}$ Skr. des geringen Gewichts für die Apotheker (Oncia detta sottila da 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; Drama & mezza; Scrupolo & mezzo ad uzzo di spicialli & marceri da cetta &c.) Ferner 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ Unze des sogenannten schweren Gewichts für die Lebensmittel ꝛc. (mit Beybehaltung der Schreibart; Piu oncia 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ dette pesso groso ad uzzo de comestibelli carnami cazarolli, & frutarolli il tutto di peso Giustisimo). Und endlich einige Karate und Grane ꝛc. J. B. Nicoletti &c.

Es enthielt wien. Richtpfng. $\frac{1}{2}$ Mark 27876, war aber in der Zertheilung eben so unrichtig als die vorigen; vom Apothekergew. 1 Unze 5857; $\frac{1}{2}$ Unze 2928; $\frac{1}{4}$ Unze 1463$\frac{1}{2}$; 1 Drama 726; $\frac{1}{2}$ Drama 362$\frac{1}{2}$; 1 Scropolo 140; vom Viktualiengewichte eine Unze 9276; $\frac{1}{2}$ Unze 4640, und $\frac{1}{4}$ Unze 2321$\frac{1}{2}$ wien. Richtpfng. Ein Karat war im Durchschnitte beynahe eben so schwer als ein wien. Juwelenkarat; und so auch 1 Gran beynahe = 1 wien. Dukatengran.

Ein zierlich ausgearbeiteter englischer Gewichtseinsatz eines seyn sollenden Av. d. p. Gewichts von 4 Pfunden bey einer künstlichen **Ramsdenschen Waage** in der hiesigen Med. Chyrurg. Akademie, womit ein jeder das Gewicht seines eigenen Körpers selbst finden kann, und wobey mittelst jeder Unze ein Gewicht von 7 Pfunden angegeben wird, wurde bey der Untersuchung folgendermassen befunden:

Die

Die äussere Hülse mit der Aufschrift 32 O. 16 Ston. 224 Pf. wog wien. Richtpfung. 212264; der Ueberrest von 32 Ounc. 213124; ferner 16 Unz. 106306; 8 Unz. 53168; 4 Unz. 26576; 2 Unz. 13448; 1 Unz. 6760; und der noch ferner zertheilte Ueberrest von 1 Unz. 6864. Wer sollte wohl aus London so was unrichtiges erwarten? So grobe Fehler in der Zertheilung waren doch bey keinem der angeführten im Deutschlande verfertigten Gewichtseinsätze anzutreffen. Nur schade, daß keine Gelegenheit vorhanden war, auch einen französ. Gewichtseinsatz in seiner Zertheilung zu prüfen.

Die bey den angeführten Untersuchungen gebrauchte sogenannte **Valvationswaage**, und Gewichtszertheilung **wien. Valvationsgewicht** (dem Hrn. Joh. **Edlezeit**, Waag- Gewicht- und Maaßenfabrikanten allhier gehörig, welchem zugleich für seine dießfalls bezeigte gefällige Bereitwilligkeit hiemit gedanket wird), war mit äusserster Genauigkeit verfertiget. Ueberhaupt hat sich bey dieser Untersuchung gezeiget, daß die Gewichte, Waagen, und Maße sowohl zum allgemeinen, als auch zum besondern Gebrauche im Durchschnitte genommen, vielleicht nirgends in der ganzen Welt mit einer so genauen Richtigkeit, Gleichförmigkeit und Uebereinstimmung, sowohl im Ganzen als auch in ihrer Zertheilung verfertiget werden, als allhier in Wien, welches man vorzüglich der Einrichtung des vorher bestandenen eigenen Zimmentirungs-Amtes zu verdanken hat. Nun aber, da dieses eigene Zimmentirungs-Amt im Jahre 1787 aufgehoben worden, so ist mit Grunde zu befürchten, daß zum großen Nachtheile des allgemeinen Besten in der Zukunft die dießfällige Unrichtigkeit, und Ungleichförmigkeit sich auch allhier nach und nach einschleichen werde; nicht zwar bey der Erzeugung der Gewichte, Waagen, und Maße, weil auf deren Richtigkeit dießfalls nun der wien. Stadtmagistrat die Aufsicht hat, sondern bey deren so vielfältigem Gebrauche in der Handlung, und andern Geschäften.

Anmerkung. Eben noch zu rechter Zeit, da dieser Bogen gesetzt wird, ergiebt sich die Gelegenheit aus den paris. Mem. des sciences 1767 nachstehende auf Veranlassung der pariser Akademie d. Wiss. durch Hrn. Tillet abgeführte Untersuchungen einiger von den franz. Gesandschaften eingeschickten Gewichte einzurücken, um verschiedene Angaben sowohl in Krusens hamb. Kontoristen, als auch in vielen andern Büchern, welche dergleichen Krusens Angaben enthalten, prüfen und berichtigen zu können, als:

Namen der Oerter.	Benennung des Gewichts.	enth Unz.	wiegt P. de Fr. M	O.	G.	gr.	Verm. par. Gr.
Paris	Poids de Marc 1 Liv. = 2 Marc = 16 Onc. = 128 Gros = 9216 grains	16	2	0	0	0	9216
Berlin	½ Pf., oder 1 Mark von 16 Loth	8	0	7	5	16	4408
Bern	1 Pf. Handelsgew. von 32 Loth	16	2	1	0½	6	9834
	1 Mark von 16 Loth - - -	8	1	0	0½	4	4648
	8 Unz oder 16 Loth Apothekergew.	8	0	7	5½	26	4454
Bonn	½ Pf. oder 1 kölln. Mark von 16 L.	8	0	7	5	6¾	4398¾
Brüssel	P. de Troyes 1 M. = 8 Onc. = 160 Esterl. = 5120 As. - - -	8	1	0	0	21	4629
Cölln	1 kölln. Mark von 16 Loth -	8	0	7	5	11	4303
Constantinopel	1 Oka oder Cheky von 100 Drachm = 1600 Kara = 6400 Gr. -	.	1	2	3	28	6004
Coppenhagen	1 Mark von 16 Loth - - -	8	0	7	5½	10⅓	4438⅓
	½ Pf. Handelsgew. von 16 Loth	8	1	0	1	22½	4702½
Danzig und Dresden	1 feyn sollende kölln. M. v. 16. L.	8	0	7	5	3½	4395½
Florenz	1 Pfund von 12 Unzen - - -	12	1	3	0½	20	6392
Genua	1 kleines Pf. oder 1 Mark v. 12 Unz.	12	1	2	2½	30	5970
	1 großes Pf. v. 12 Unz. = ⅝ Rotolo	12	1	2	3	5	5981
Hamb.	1 kölln. Mark von 16 Loth - -	8	0	7	5	7¾	4399¾
	½ Pf. Handelsgew. von 16 Loth	8	0	7	7	23	4559
Lüttich	1 Mark von 8 Unzen - - -	8	1	0	0	24	4632

Namen der Oerter.	Benennung des Gewichts.	enth. Unz.	wiegt P. de Fr. M.	O.	G.	gr.	Verw. par. Gr.
Lissabon	½ Pf. oder 1 Mark von 8 Unzen	8	0	7	3½	34	4318
London	1 Pfund Troy von 12 Unzen -	12	1	4	1½	1	7021
	1 Pfund Av. d. p. v. 16 Unz. -	16	1	6	6½	6	8538
Lucca	1 kleines Pf. von 12 Unzen - -	12	1	3	0	23¾	6359¼
Madrit	1 Mark von 8 Unzen - - -	8	0	7	4	8	4328
Malta	1 Pf. von 12 Unzen = ⅔ Rotolo	12	1	2	2½	21	5961
Manheim	1 kölln. Mark von 16 Loth -	8	0	7	5	10¼	4402¼
Mayland	1 Mark von 8 Unzen - - -	8	0	7	5	33	4425
	1 kleines Pfund von 12 Unzen -	12	1	2	5½	0	6156
	1 großes Pfund von 28 Unzen -	28	3	0	7½	0	14364
München	1 kölln. Mark von 16 Loth - -	8	0	7	5	11½	4403½
Neapel	1 Pf. von 12 Unz. = 9/25 Rotolo	12	1	2	3½	27	6039
Padua	1 großes Pf. von 12 Unzen -	12	1	7	7½	5	9185
	1 kleines Pf. von 12 Unzen -	12	1	2	1	14	5846
Regensp.	1 Mark von 8 Unzen - - -	8	1	0	0	24	4632
	1 Pf. Handelsgew. von 16 Unz.	16	2	2	4½	6	10698
	Dukatengew. von 64 Duk. - -	.	0	7	2	32	4208
	Kronengew. von 64 Kronen - -	.	0	7	0	12	4044
Rom	1 Pfund von 12 Unzen - - -	12	1	3	0½	14	6386
Stockholm	1 Pf. Viktualgew. v. 32 L. = 2 M.	16	1	5	7	8	8000
Stuttgard	1 kölln. Mark von 16 Loth - -	8	0	7	5	11¾	4403¾
Turin	1 Mark = ⅔ Pf. Hand. = ⅘ Ap. Pf.	8	1	0	0	22¼	4630¼
Venedig	1 Mark von 8 Unzen - - -	8	0	7	6	32½	4526½
	Libra grossa von 12 Unzen -	12	1	7	4½	25½	8989½
	Peso sottile von 12 Unzen -	12	1	1	6½	24	5676
	ein anderes Pf. von 12 Unzen -	12	1	2	5	18¼	6138¼
Warschau	ein polnisches Pfund - - - -	.	1	5	2	12	7644
Wien	½ Pf. Handelsgew. von 16 Loth	8	1	1	1	16	5272
	1 Mark von 16 Loth - - -	8	1	1	1	26	5282
	⅝ wien. Mark = 1 kölln. Mark.	.	0	7	5	9⅔	4401⅔

Aus dieser Untersuchung, mit der vorigen verbunden, ist es zu ersehen, daß die in verschiedenen Städten Deutschlands eingeführte köllnische Mark von 65536 Richtpfennigen nicht überall einerley sey, wo inzwischen diejenige köllnische Mark, welche bey der Einrichtung des wien. Münzamtes (§. 198.) zum Grunde geleget wurde, sehr genau zwischen allen das Mittel hält. So scheint auch das niederländische Troys- oder Troyes-Gewicht verschieden zu seyn; eine Mark Troys-Gewicht in den vereinigten Niederlanden von 5120 Asen scheint mit einer Mark Troyes-Gewicht in den österreichischen Niederlanden ebenfalls von 5120 Asen nicht einerley zu seyn; diese wiegt 4629, und jene $4631\frac{1}{7}$ paris. Gräns, weil die paris. Mark in Holland 5094 Asen holl. Tr. soll gewogen haben. Und diese Verschiedenheiten sind die Hauptursachen der so vielfältigen Abweichungen in den Angaben der Gewichtsvergleichungen von den wirklich vorgenommenen Prüfungen. Diese Abweichungen werden auch nicht eher gehoben, als bis man sich entschließt die zuverlässigsten Gewichtsvergleichungen künftig nicht mehr in Asen, und auch nicht mehr in köllnischen Gewichtstheilen, sondern in einem andern bekannten, sich immer gleichförmig bleibenden, und leicht zu habenden Gewichte anzugeben. Da nun die Gewichte allhier in Wien allgemein mit einer ausserordentlichen Genauigkeit, Gleichförmigkeit, und Uebereinstimmung sowohl im Ganzen als auch in ihrer Zertheilung verfertiget werden, dabey auch um einen geringen Preis zu haben sind (ein zertheiltes wien. Apothekergew. in einem saubern Kästchen von 12, 6, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ Unzen, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ Drachma, 4, 3, 2, 1 Skrupel, und 10 bis 1 Gran, wo 16 solche Unzen ein wien. Handelspf. von 32 Loth sind, kostet bey dem obgenannten Hrn. Edlezeit auf dem St. Stephanskirchhofe 4 Gulden), so dürfte es für Deutschland rathsam seyn, künftig anzustellende Gewichtsuntersuchungen in Granen des wien. Apothekergew. anzugeben. Noch besser wäre es freylich

lich dergleichen Prüfungen der Gewichte mit dem bis in die Richtpfennige zertheilten wien. Mark- oder Münzgewichte (mit dem eigentlichen **wiener Valvationsgewichte**, wo $80\frac{?}{?}$ neugeprägte kais. königl. Dukaten auf 1 Mark gehen) vorzunehmen; ein solches wien. Valvationsgewicht kostet ebendaselbst $14\frac{1}{2}$, und eine dazugehörige Valvationswaage $15\frac{1}{2}$ Gulden.

Es ist dermalen keine Zeit mehr übrig zu den beyden obigen Untersuchungen mehrere kritische Bemerkungen hinzuzusetzen; wie viel nun ein berliner, dresdner, hamburger, pariser, turiner, wiener Pfund ꝛc., sowohl in Asen holl. Troys, als auch in Asen niederl. Troyes Gew. enthalte, wenn diese zwey Gewichte doch wirklich verschieden seyn sollten, wird ein jeder selbst leicht finden können.

II. Zuverläßige Vergleichung einiger Fußmaße, und Ellen mit dem königl. paris. Fuß.

Wenn man einen königl. paris. Fuß (welcher so beschaffen ist, daß ein pariser Kubikfuß Regenwasser 70 paris. Pfunde wiegt) in 1440 gleiche Theile theilet, (nämlich den Fuß in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 10 Skrupeln); so enthält an solchen Skrupeln

1 Fuß in Bayern 1282; Dännemark $1391\frac{1}{3}$; England 1351; Frankreich 1440; Spanien 1253; Rußland 2386; Schweden 1316; Amsterdam 1255; Augsburg 1313; Berlin 1373; Braunschweig 1260; Gotha 1275; Hamburg 1270; Hanover 1295; Kölln 1220; Leipzig 1253; Nürnberg Werkfuß 1347, und Artilleriefuß $1298\frac{1}{3}$; Rom 1 Palmo 990; Turin (piede di liprando) 2277; Venedig 1540; Wien 1401; der rheinländische Fuß $1391\frac{1}{3}$. 6 Fuß heissen gemeiniglich 1 Klafter, und 12 Fuß 1 Ruthe.

Vollkommen genau verhält sich der wiener Fuß zum Pariser wie 100000 zu 102764. Und 1 nürnb. Artilleriezoll allhier $= \frac{1601}{1728}$ wien. Zoll.

Eine Elle in Amsterdam 3060; Brüssel große 3078, kleine 3034; Dännemark von 2 rh. Fuß $2782\frac{2}{3}$; Dresden 2509; Hamburg 2540; Hanover 2590; Leipzig 2506; Lemberg und ganz Gallizien vermöge eigener Untersuchung eine breslauer Elle von 2 breslauer Fuß 2634; London 4053; Nürnberg 2924; Paris 5268; Rußland 1 Arschine 3154; Schweden 2632; Wien 3454.

III. **Angabe und Vergleichung einiger andern in den österreichischen Staaten gebräuchlichen Maße nach dem Protokoll des k. k. Zimmentirungsamtes.**

Eine wiener Elle ist genau = 2,465 wien. Fuß, und daher auch = 3454 pariser Skrupeln.

Ein wiener Metzen = 1,9471 wien. Kubikfuß; und 1 wien. Eymer von 40 Maaß oder 160 Seitel oder 320 Pfiff ist = 1,792 wien. Kubikfuß; 3 Pfiff machen 1 Groß-Seitel.

100000	böhmische	Pfunde	=	91847	wien. Pfund.
	schlesische			94612	
	tyrolische			100516	
6000	böhmische	Klafter	=	5626	wien. Klafter.
	schlesische			5493	
	mährische			5617	
	tyrolische			6342	
2465	böhmische	Ellen	=	1879	wien. Ellen.
	schlesische			1830	
	mährische			2501	
	tyrolische			2544	
10000	böhmische Strich		=	15220	wien. Metzen
	schlesische Scheffel			12419	
	mährische Metzen			11482	
	tyrolische Staar			4972	
	gallizische Korschetz			20000	

$$1000 \left\{\begin{array}{l}\text{böhmische Pinten}\\ \text{schlesische Quart}\\ \text{mährische Maaß}\\ \text{tyrolische Maaß}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r}1350\\ 496\\ 756\\ 573\end{array}\right\} \text{wien. Maaß}$$

Mittelst der angeführten Vergleichungszahlen der Gewichte und Längenmaße verschiedener Oerter, ist es nun leicht eine gegebene Anzahl Pfunde, wie auch Klaftern und Füsse eines Orts in eine gleichgültige Anzahl eines andern Ortes zu verwandeln; z. B. da der Londner Fuß 1351, und der wiener 1401 pariser Skrupeln enthält; so ist der wiener Fuß länger, als der londner; und zwar dergestalt, daß ein wiener Fuß zu einem londner Fuß sich verhält, wie 1401 zu 1351; eben so verhält sich auch der wiener Zoll zum londner Zoll, nach der zwölftheiligen Eintheilung; es sind daher 1351 wiener Fuß oder Zoll = 1401 londner Fuß oder Zoll vermög (§. 182.); welches man den Reduktionssatz für das wiener und londner Fußmaß zu nennen pflegt.; und man findet aus den in I. und II. angeführten Vergleichungen für jede zwey Orte den Reduktionssatz sehr leicht, wenn man die danebenstehenden Zahlen verkehrt nimmt. Wäre nun eine gewisse Länge, welche im londner Fußmaße ausgedrückt gegeben ist, in das wiener Fußmaß zu verwandeln; so muß man die gegebene Zahl mit dem Bruch $\frac{1351}{1401}$ multipliziren. Wäre hingegen ein gegebenes wiener Fußmaß in das londner zu verwandeln, so muß man die gegebene Zahl mit $\frac{1401}{1351}$ multipliziren. Wenn mehrere gegebene Längenmaße mit einem Bruch zu multipliziren wären, so kann man einen solchen Bruch, oder ein solches Verhältniß $\frac{1401}{1351}$ nach (§. 111.) in einen einfachen Ausdruck, ohne merkliche Veränderung des Werthes verwandeln. Auf diese Art findet man, daß

1401

$\frac{1401}{1351}$ äusserst nahe $= \frac{28}{27}$ sey; denn, wenn man 1351 mit $\frac{28}{27}$ multiplizirt, so ist das Produkt $1401\frac{1}{27}$, so daß die letzte Ziffer mit der eigentlichen Verhältnißzahl 1401 völlig genau übereinstimmet, wo ohnehin bey dergleichen Verhältnißzahlen die letzte Ziffer selten völlig genau richtig ist. **Es sind daher auch 27 wiener Fuß = 28 londner Fuß.**

Die Lehre von der Abkürzung der Brüche nach (§. 111.) findet vorzüglich ihre Anwendung auf die Abkürzung solcher Verhängnißzahlen, oder Reduktionssätze bey den Maßen und Gewichten; so wie auch in verschiedenen andern Fällen, z. B. in unserer Artillerie ist es festgesetzt, daß sich der Durchmesser der Kugel zum Durchmesser der Bohrung verhalte, wie sich der Durchmesser einer 7pfündigen zum Durchmesser einer 8pfündigen Kugel verhält. Nun ist der Durchmesser einer 7pfündigen eisernen Kugel $= 3{,}902''$ und der Durchmesser einer 8pfündigen Kugel $= 4{,}08''$ nach dem nürnberger Artilleriefuß; folglich ist das Verhältniß des Durchmessers der Kugel zum Durchmesser der Bohrung $= 3{,}902 : 4{,}08 = 3902 : 4080$, und endlich $= 22 : 23$, wenn man das Verhältniß $3902 : 4080$ nach (§. 111.) abkürzet.

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & & 1 & & 21 & & 1 & & 11 & \\
\text{Denn} & 4080 & : & 3902 & : & 178 & : & 164 & : & 14 \\
 & \underline{3902} & & \underline{356} & & \underline{164} & & \underline{14} & & \\
 & 178 & & 342 & & 14 & & 24 & & \\
 & & & \underline{178} & & & & \underline{14} & & \\
 & & & 164 & & & & 10 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc}
 & & 1, & 21, & 1 \\
\hline
\text{folglich} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{21}{22} & \frac{22}{23}
\end{array}$$

nämlich $\frac{3902}{4080} = \frac{22}{23}$ sehr nahe.

Und

Und wirklich wenn man 3902 mit $\frac{23}{22}$ multiplizirет, so ist das Produkt $= 4079\frac{4}{11}$. Es ist demnach das Verhältniß des Durchmessers der Kugel zum Durchmesser der Bohrung bey unsern Kanonen dem Verhältnisse der zwey unbenannten oder Absolutzahlen 22 zu 23 gleich; nämlich wenn man den Durchmesser der Kugel bey was immer für einer Kanone in 22 gleiche Theile theilet, so ist der Durchmesser der Bohrung um einen solchen Theil größer, so daß daher der Unterschied zwischen dem Durchmesser der Kugel und der Bohrung (der Spielraum) $= \frac{1}{22}$ des Kugeldurchmessers ist. Da aber gewöhnlich in der Artilleriezeichnung der Durchmesser der Kugel in 32 gleiche Theile getheilet wird, so kann man, ohne einen Fehler zu besorgen, bey der Zeichnung der Kanonen für den Spielraum $\frac{1\frac{1}{2}}{32}$ des Kugeldurchmessers annehmen, weil $\frac{1\frac{1}{2}}{32}$ von $\frac{1}{22}$ nur um $\frac{1}{704}$ des Kugeldurchmessers verschieden ist, welches bey unserer größten Kugel, nämlich bey der 24 Pfündigen, beynahe nur $\frac{1}{12}$ Linie beträgt, welches auf einem verjüngten Maßstabe mit der Zirkelspitze nicht mehr unterschieden werden kann.

Eben so findet man den Spielraum bey unsern Pöllern $= \frac{1}{21}$ des Bombendurchmessers, und folglich für die Zeichnung $\frac{3}{64}$ Durchmesser; weil es festgesetzt ist, daß bey den Pöllern der Durchmesser der Bombe sich zum Durchmesser des Flugs verhalte, wie der Durchmesser einer 20pfündigen zum Durchmesser einer 23pfündigen Bombe $= \sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{23}$.

IV.

IV. Abschnitt.

Von der zusammengesetzten Regel Detri.

§. 200.

Die Rechnungsfragen, welche wir bisher durch die Regel Detri aufgelöset haben, waren alle so beschaffen, daß in denselben jederzeit nur zwey eigentliche Verhältnisse in Betrachtung gezogen wurden, weil alle übrigen Umstände vollkommen einerley waren. Es kommen aber sehr oft Rechnungsfragen vor, wo mehr als zwey Verhältnisse in Erwägung gezogen werden müssen. Z. B. es würde gefragt; **wenn 100 Fl. Kapital in 12 Monaten 5 Fl. Zins bringen, wie viel Gulden Zins bringt ein Kapital von 836 Fl. in der Zeit von 16 Monaten?** Hier sieht man wohl ein, daß in dieser Frage drey verschiedene Verhältnisse vorkommen, nämlich das Verhältniß der Zeit, des Kapitals, und des Zinses. Imgleichen wenn gefragt würde; **wenn 5 Mann in 6 Tägen 600 Faschinen verfertigen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Faschinen werden 150 Mann in 3 Tägen verfertigen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten?** so kommen in dieser Frage vier Verhältnisse vor, nämlich das Verhältniß der Mannschaft, der Täge, der täglichen Arbeitsstunden, und der Anzahl Faschinen.

Die Auflösung solcher Rechnungsfragen, worinn mehr als zwey Verhältnisse vorkommen, pflegt man die **zusammengesetzte Regel Detri** zu nennen, so wie jene, worinn blos zwey Verhältnisse vorkommen, die **einfache Regel Detri** genennet wird.

Jede zusammengesetzte Regel Detri besteht aus zwey Theilen, wovon jener, worinn alle Glieder bekannt sind, der **bekannte Fall**, und der andere, worinn sich die noch unbekannte Zahl befindet, der **unbekannte Fall** genennet wird.

wird. So ist im ersten gegebenen Beyspiele der bekannte Fall, daß 100 Fl. Kapital in 12 Monaten 5 Fl. Zins bringen; und im zweyten Beyspiele ist der bekannte Fall, daß 5 Mann in 6 Tägen 600 Faschinen verfertigen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten.

Anmerkung. Die praktischen Rechenmeister pflegen insbesondere jene zusammengesetzte Regel Detri, worinn drey Verhältnisse vorkommen, die Regula quinque zu nennen, weil eigentlich 5 Zahlen gegeben sind, wozu die sechste gefunden werden soll. Aus gleichem Grunde nennen sie die aus vier Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri die Regula septem, jene mit fünf Verhältnissen, Regula novem u. s. w.

§. 201.

Jede zusammengesetzte Regel Detri kann durch eine wiederholte einfache Regel Detri aufgelöset werden, indem man jedesmal nur zwey verschiedene Verhältnisse in die Rechnung nimmt, und alle übrige Umstände für vollkommen einerley ansieht. Z. B. die oberwähnte Frage, wenn 100 Fl. Kapital in 12 Monaten 5 Fl. Zins bringen, wie viel Fl. Zins bringt ein Kapital von 836 Fl. in 16 Monaten, kann folgendermassen aufgelöset werden: Man suche zuerst durch die einfache Regel Detri, wie viel dieses Kapital von 836 Fl. in eben der Zeit von 12 Monaten Zins bringt, das ist, man lasse die Zeit gänzlich ausser Acht, und ziehe nur das Verhältniß des Kapitals, und der Zinsen in Betrachtung; so ist 100 Fl. K.: 836 Fl. K. = 5 Fl. Z.: x Fl. Z. $= \frac{5 \cdot 836}{100} = \frac{836}{20} = 41\frac{4}{5}$ Fl. Z. Da es nun bekannt ist, wie viel dieses Kapital 836 Fl. in Zeit von 12 Monat Zins bringt, so läßt sich wieder durch die Regel Detri finden, wie viel solches in der gegebenen Zeit von 16 Monaten Zins trägt, nämlich 12 M.: 16 M. = $41\frac{4}{5}$ Fl. Z.: x Fl. Z. $= \frac{41\frac{4}{5} \cdot 16}{12} = 55\frac{11}{15}$.

Eben

Eben so kann auch das zweyte oberwähnte Beyspiel mit vier Verhältnissen durch die dreymal wiederholte einfache Regel Detri aufgelöset werden, indem man jedesmal nur zwey Verhältnisse in Erwägung zieht, und die übrigen ausser Acht läßt; nämlich man suche zuerst die Anzahl der Faschinen, welche die 150 Mann in eben der Zeit verfertigen werden, in welcher 5 Mann 600 Faschinen zu Stand bringen; so ist 5 M. : 150 M. = 600 F. : x F. = $\frac{150 . 600}{5}$ = 30 . 600 = 18000.

Da es nun bekannt ist, wie viel Faschinen diese Mannschaft in 6 Tägen verfertiget, so läßt sich auch finden, wie viel Faschinen eben diese Mannschaft in den gegebenen 3 Tägen verfertigen werde, wenn man die täglichen Arbeitsstunden noch ausser Acht läßt, nämlich 6 T. : 3 T. = 18000 F. : x F. = $\frac{3 . 18000}{6}$ = 9000 F. Endlich ziehe man nun auch noch die täglichen Arbeitsstunden mit in die Rechnung; so ist 8 St. : 12 St. = 9000 F. : x F. = $\frac{12 . 9000}{8}$ = 1125 . 12 = 13500 Faschinen, welche 150 Mann in 3 Tägen verfertigen werden, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten.

Und eben auf diese Art könnte jede aus noch so viel Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri aufgelöset werden.

§. 202.

Um aber auch zu zeigen, wie jede zusammengesetzte Regel Detri kürzer, als durch die wiederholte einfache Regel Detri aufgelöset werden könne, wollen wir die erste oberwähnte Frage also stellen: **Wenn k Fl. Kapital in m Monaten z Fl. Zins bringen** (als der bekannte Fall); wie viel Zins bringet ein Kapital K Fl. in M Monaten (als der unbekannte Fall)?

Wir

Wir setzen nämlich, um die Auflösung allgemeiner zu machen, 100 Fl. Kapital $= k$, 12 Monate $= m$, 5 Fl. Zins $= z$, 836 Fl. Kapital $= K$, 16 Monate $= M$; ferner wollen wir die Anzahl Gulden Zins, welche diese 836 Fl. in der Zeit von 12 Monaten bringen, mit $\mathfrak{Z}$, und die Zinsen, die dieses Kapital in 16 Monaten bringt, mit Z benennen; so ist, wie oben

$k : K = z : \mathfrak{Z}$, wenn die Zeit einerley, und das Kapital verschieden ist;

$m : M = \mathfrak{Z} : Z$, wenn das Kapital einerley, und die Zeit verschieden ist:

folglich auch $mk : KM = z : Z$, vermög (§. 190. III.) Nämlich, wenn das Kapital, und die Zeit verschieden ist, so verhalten sich die betreffenden Zinsen wie die Produkte aus den Kapitalien in die Zeiten; oder wie man zu sagen pflegt, der Zins steht mit dem Kapital, und mit der Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse. Setzen wir nun wieder statt der Buchstaben ihre angenommenen Werthe, so ist

$$100 \cdot 12 : 836 \cdot 16 = 5 : z; \text{ daher } z = \frac{5 \cdot 16 \cdot 836}{12 \cdot 100}$$

$$= \frac{4 \cdot 836}{3 \cdot 20} = \frac{836}{3 \cdot 5} = 55\tfrac{11}{15} \text{ Fl. wie vorher.}$$

Eben so wollen wir bey dem zweyten obangeführten Beyspiele im bekannten Falle 100 Mann $= m$, 6 Tage $= t$, 8 tägliche Arbeitsstunden $= s$, 600 Faschinen $= f$; und im unbekannten Falle 150 Mann $= M$, 3 Tage $= T$, 13 tägliche Arbeitsstunden $= S$ setzen; über dies wollen wir die Anzahl der Faschinen, welche diese M Mann verfertigen würden, wenn sie ebenfalls t Täge, und täglich s Stunden arbeiten mit $\mathfrak{f}$, die Anzahl der Faschinen, die sie verfertigen würden, wenn sie T Täge, und täglich s Stunden arbeiten mit $\mathfrak{F}$, endlich die Anzahl der Faschinen, welche diese M Mann in T Tägen, da sie täglich S Stunden arbeiten, mit F benennen, so ist wieder wie oben

$m : M = f : \mathfrak{f}$, denn jemehr Mann, destomehr Faschinen
und $t : T = \mathfrak{f} : \mathfrak{F}$, denn jemehr Täge, destomehr Faschinen
und $s : S = \mathfrak{F} : F$, denn jemehr Arbeitsstunden, destomehr Faschinen;
folglich auch $mts : MTS = f : F$, vermög (§. 190. IV.)

Nämlich die Zahlen der verfertigten Faschinen verhalten sich gegen einander wie die Produkte aus der Anzahl der Mannschaft, in die Arbeitstäge, und in die täglichen Arbeitsstunden; oder die Anzahl der Faschinen steht mit der Anzahl der Mannschaft, der Arbeitstäge, und der täglichen Arbeitsstunden im zusammengesetzten Verhältnisse.

§. 203.

Wenn daher die Bestimmung der gesuchten Größe in einer Rechnungsfrage von mehreren Größen dergestalt abhängt, daß die gesuchte Größe einzeln betrachtet, mit jeder der übrigen im geraden Verhältniße stehet, so steht eben diese gesuchte Größe mit allen übrigen Größen im zusammengesetzten Verhältnisse. So steht z. B. die Menge der Arbeit mit der Anzahl der Arbeiter und mit der dazu erforderlichen Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse, weil die Menge der Arbeit mit der Anzahl der Arbeiter allein im geraden, und mit der Zeit allein ebenfalls im geraden Verhältnisse steht. Wir wollen diesen Satz noch auf ein paar Beyspiele anwenden.

1. **Frage.** Wenn man einem Fuhrmann, um 50 Zentner 30 Meilen weit zu führen 80 Fl. bezahlen muß, wie viel muß man bezahlen, um 60 Zentner 45 Meilen weit zu führen?

Antwort. Der Fuhrlohn steht mit der Fracht im geraden Verhältnisse, denn jemehr Fracht, destomehr Fuhrlohn (§. 193.); und der Fuhrlohn steht auch mit dem Wege im geraden Verhältniß, denn je größer der Weg, desto größer der Fuhrlohn; folglich stehet der Fuhrlohn mit der Fracht, und mit dem Wege im zusammengesetzten Verhältnisse.

Nun

Nun ist das Verhältniß der Fracht $50 : 60$
des Weges $30 : 45$
folglich $50 \cdot 30 : 60 \cdot 45 = 80$ Fl. : x Fl.;

daher $x = \dfrac{80 \cdot 60 \cdot 45}{50 \cdot 30} = \dfrac{8 \cdot 6 \cdot 45}{5 \cdot 3} = 8 \cdot 2 \cdot 9$
$= 144$ Fl. Fuhrlohn.

2. Frage. Zu einer Mauer, welche 6 Klafter lang, 8 Schuhe hoch, und $1\frac{1}{2}$ Schuh dick ist, braucht man 5184 Ziegelsteine; wie viel braucht man von diesen Ziegelsteinen zu einer Mauer, die $8\frac{1}{3}$ Klafter lang, 2 Schuhe dick, und 6 Schuhe hoch ist?

Antwort. Die Anzahl der Ziegelsteine steht mit der Länge, mit der Höhe, und mit der Dicke der Mauer, mit jedem insbesondere im geraden Verhältnisse; denn je länger die Mauer desto mehr Ziegeln, je dicker die Mauer desto mehr Ziegeln, und je höher die Mauer desto mehr Ziegeln (§. 193.); folglich steht die Anzahl der Ziegeln mit der Länge, Höhe, und Dicke der Mauer im zusammengesetzten Verhältnisse.

Nun ist das Verhältniß der Längen der Mauer $6 : 8\frac{1}{3}$
= = Höhen $8 : 6$
= = Dicken $1\frac{1}{2} : 2$

folglich $6 \cdot 8 \cdot 1\frac{1}{2} : 8\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 5184$ Ziegeln : x Ziegeln,

und $x = \dfrac{8\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 5184}{8 \cdot 1\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{25}{3} \cdot 2 \cdot 5184}{8 \cdot \frac{3}{2}} = \dfrac{25 \cdot 2 \cdot 5184 \cdot 2}{8 \cdot 3 \cdot 3}$
$= 25 \cdot 288 = 7200$ Ziegeln.

§. 204.

Kommen aber in einer Rechnungsfrage Verhältnisse vor, welche mit dem Verhältniß, worinn sich die noch unbekannte Zahl befindet, einzeln betrachtet, nicht in gerader, sondern in verkehrter Proportion stehen, so kann der eben erwähnte Satz erst angewendet werden, wenn man diese Verhältnisse zuvor umkehret. Z. B. es wäre die Frage: Wenn 100 Mann $= m$, in 5 Tägen $= t$, 250 Klaftern

$= k$, von einer Schanze verfertigen; wie viel Mannschaft müßte angestellet werden, wenn man die ganze Länge der Schanze von 1000 Klaftern $= K$, in 2 Tägen $= T$ verfertigt haben will?

Benennet man nun die Anzahl der Mannschaft, welche diese K Klaftern in t Tägen zu Stand bringen würde mit $\mathfrak{M}$, und die Anzahl der Mannschaft, welche diese Arbeit in T Tägen verfertigt, mit M, so ist

$k : K = m : \mathfrak{M}$, denn je mehr Klafter, desto mehr Mann, und $T : t = \mathfrak{M} : M$, denn je mehr Täge, desto weniger Mann, folglich $kT : Kt = m : M$ (§. 190. III.)

und $M = \frac{mKt}{kT} = \frac{1000 . 100 . 5}{2 . 250} = 1000$ Mann.

Nämlich das Verhältniß der Mannschaft ist dann erst dem zusammengesetzten Verhältnisse aus der Anzahl der Klaftern und der Anzahl der Täge gleich, wenn man vorher das Verhältniß der Täge umkehret.

Imgleichen eine Festung ist dergestalt mit Proviant versehen, daß solche 6000 Mann $= m$, durch 90 Täge $= t$, jedem Mann täglich 2 Pfund Brod $= p$ geben könne: nun aber werden 1000 Mann fortgeschickt, uud die übrigen 5000 Mann $= M$ müssen durch 130 Täge $= T$ ernähret werden; wie viel Brod kann jedem Mann täglich verabreicht werden?

Benennen wir die Anzahl der Pfunde, die jedem Mann gegeben werden könnten, wenn sie mit dem Proviant nur t Tage auskommen dürften, mit $\mathfrak{P}$, und die Anzahl der Pfunde, so man jedem Mann nur geben kann, da sie T Täge auskommen müssen, mit P, so ist

$M : m = p : \mathfrak{P}$, denn je mehr Mannschaft, desto weniger Brod, und $T : t = \mathfrak{P} : P$, denn je mehr Täge, desto weniger Brod; folglich $MT : mt = p : P$ vermög (§. 190. III.)

und $P = \frac{pmt}{MT} = \frac{2 . 6000 . 90}{5000 . 130} = \frac{2 . 6 . 9}{5 . 13} = 1\frac{43}{65}$ Pf. $= 1$ Pf. 22 Loth beynahe.

Näm-

Nämlich die Menge des Brodes steht hier umgekehrt im zusammengesetzten Verhältnisse mit der Anzahl der Mannschaft, und mit der Zeit.

§. 205.

Und nun läßt sich eine allgemeine Regel geben, wie jede, aus noch so viel geraden, und verkehrten Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri, ganz einfach aufgelöset werden kann, und zwar auf folgende Art: Man schreibe alle Glieder des bekannten Falles nach was immer für einer Ordnung in einer Linie dahin; die Glieder des unbekannten Falles aber schreibe man so unter die vorigen, daß die gleichnamigen Glieder untereinander zu stehen kommen, und dort, wo die gesuchte Zahl hintrift, setze man das Zeichen x. Sodann prüfe man das Verhältniß der gesuchten Zahl x zu jeder ungleichnamigen Größe des einen Falles insbesondere nach (§. 193.), ob das Verhätniß gerade, oder verkehrt sey; und schreibe die gleichnamigen Größen paarweise so untereinander, daß bey den geraden Verhältnissen die Zahlen des bekannten Falles vorne, bey den verkehrten Verhältnissen aber hinten rechts zu stehen kommen; auf diese Art verhält sich sodann das Produkt aller ersten Glieder zum Produkte aller zweyten, wie die zur gesuchten gleichnamige Zahl sich zu x verhält; und weil in jeder Proportion das Produkt der äussern dem Produkte der mittlern Glieder gleich ist, so kann man die unbekannte x, und ihre gleichnamige Zahl gleich anfänglich so ansetzen, daß x vorne zu stehen kömmt; auf diese Art muß das Produkt der vordern Glieder dem Produkte der hintern Glieder gleich seyn, woraus sich dann die unbekannte Zahl x durch die Division (§. 39. Grunds. 1.) finden läßt. Die Glieder der Verhältnisse können hier durch einen stehenden Strich voneinander abgesöndert werden, wo sodann öfters große Abkürzungen angebracht werden können, wenn man die Glieder rechts des Stri-

Striches als Faktoren des Zählers, und die Glieder links des Striches als Faktoren des Nenners eines Bruches ansieht.

Beyspiele.

1) Wenn 100 Mann in 3 Tägen einen Transcheegraben von 250 Klafter lang, 7 Schuh breit, und 3 Schuh tief verfertigen; in wie viel Tägen werden 300 Mann eine Transchee von 600 Klaftern lang, 8 Schuh breit, und 4 Schuh tief verfertigen?

Mann	Täge	Kl. lang	Sch. breit	Sch. tief
100,	3,	250,	7,	3
300,	x,	600,	8,	4

x	3	
300	100	je mehr Mann desto weniger Täge,
250	600	je länger der Graben desto mehr Täge,
7	8	je breiter der Graben desto mehr Täge,
3	4	je tiefer der Graben desto mehr Täge,
x		
5	12	folglich $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x = 12 \cdot 8 \cdot 4$
7	8	nämlich $35x = 128$
3	4	und $x = \frac{128}{35} = 3\frac{23}{35}$ Täge.

2) Wenn 20 Weber in 8 Wochen, da sie wöchentlich 5 Täge, und täglich 10 Stunden arbeiten, 100 Stück Leinwand verfertigen, wo jedes Stück 30 Ellen lang, und $1\frac{1}{4}$ Ellen breit ist; wie viel Stück Leinwand werden 80 Weber in 15 Wochen, da sie wöchentlich 6 Täge, und täglich 12 Stunden arbeiten, verfertigen, wenn jedes Stück 40 Ellen lang, und 1 Elle breit seyn soll?

Web.

Web.	Wochen	Täge	Stund.	Stück	Ell. l.	Ell. b.
20,	8,	5,	10,	100,	30,	$1\frac{1}{4}$
80,	15,	6,	12,	x,	40,	1

x	100	
20	80	je mehr Weber desto mehr Stücke,
8	15	je mehr Wochen desto mehr Stücke,
5	6	je mehr Täge desto mehr Stücke,
10	12	je mehr Stunden desto mehr Stücke,
40	30	je mehr Ellen im Stück desto weniger Stücke,
1	$1\frac{1}{4}$	je breiter die Leinwand desto weniger Stücke,

x	100
	4
8	3
	3
5	12
4	3
4	5

ferner; folglich

x	100
2	3
	3
	3
4	3

$2 \cdot 4 \cdot x = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 100$

nämlich $8x = 8100$

und $x = \frac{8100}{8} = 1012\frac{1}{2}$ Stück.

Anmerkung. Diese gegebene Auflösung der zusammengesetzten Regel Detri, wodurch nun alle von (§. 200. bis 204.) vorgelegte Rechnungsfragen sehr geschwind und leicht zu beantworten sind, ist dem wesentlichen nach die sogenannte Reesische Regel, welche in manchen Büchern auf verschiedene Arten vorgetragen wird.

§. 206.

Die zusammengesetzte Regel Detri findet auch ihre Anwendung, wenn das Verhältniß zweyer Größen nicht unmittelbar bekannt, sondern erst durch bekannte Zwischenverhältnisse bestimmet werden muß. Z. B. es würde gefragt, wie verhält sich der Wiener Fuß zum Berliner, wenn es bekannt ist, daß sich der Wiener zum Pariser Fuß wie 1401 : 1440; der Pariser zum Turiner wie 720 : 1139; der

der Turiner zum Londner wie 2277 : 1351; und der Londner zum Berliner wie 6756 : 6866 verhält?

Benennen wir einen Wiener Fuß mit W, einen Pariser mit P, einen Turiner mit T, einen Londner mit L, und einen Berliner mit B

so ist $W : P = 1401 : 1440$; nämlich $1440\,W = 1401\,P$
= $P : T = 720 : 1139$ = $1139\,P = 720\,T$
= $T : L = 2277 : 1351$ = $1351\,T = 2277\,L$
= $L : B = 6756 : 6866$ = $6866\,L = 6756\,B$

folglich auch vermög (§. 29. Grundf. I)

$1440\,W . 1139\,P . 1351\,T . 6866\,L = 1401\,P . 720\,T . 2277\,L . 6756\,B$

oder $1139 . 1351 . 3433\,W = 1401 . 2277 . 1689\,B.$

und $W : B = 1401 . 2277 . 1689 = 1139 . 1351 . 3433$

endlich $W : B = 51 : 50$; wenn man das Verhältniß nach (§. 111.) abkürzet.

Dieses ist eigentlich der Grund der so berühmten **Kettenregel**, der sich die Kaufleute bey der Vergleichung der Gewichte, Maße, und Münzen, wie auch bey Wechselreduktionen u. d. gl., mit Vortheil bedienen. Wir wollen den Gebrauch derselben gleich durch ein Beyspiel erläutern.

Wenn ein Stück holländisches Tuch von 30 brabanter Ellen 260 holländische Gulden kostet, und ein holländischer Gulden = 20 Stüver, 104 Stüver = 1 holländer Dukaten, 1 holländer Dukat. = 4 Fl. 28 Kr. wiener Kourent ist; wie viel kostet eine wiener Elle von diesem Tuch, da 89 wiener Ellen = 100 brabanter Ellen sind?

x Fl. w. Kour.	1 w. Elle	x	
89 w. Ellen	100 brab. Ellen	89	100
		3	26
30 brab. Ellen	260 holl. Fl.	26	5
1 holl. Fl.	20 Stüver	60	268
104 Stüver	1 holl. Dukat.	x	
1 holl. Dukat.	$4\frac{28}{60}$ w. Kour.	89	100
		3	
		12	268

ferner $89 \cdot 3 \cdot 3x = 67 \cdot 100$, nämlich $801x = 6700$; und endlich $x = 6700 : 801 = 8$ Fl $21\frac{3}{4}$ Kr.

Der Ansatz ist folgender: Man fängt bey der unbekannten Zahl an, und setzt solche oben an, und neben ihr rechts setzt man die Fragezahl; sodann kömmt links diejenige Zahl, welche mit der Fragezahl gleichen Namen hat, und rechts neben ihr setzt man die Zahl, welche in der Angabe mit ihr einerley Werth hat; ferner wird wieder zur linken jene Zahl gesetzt, die mit der letztgeschriebenen gleichnamig ist, und neben ihr zur rechten jene, welche mit ihr einerley Werth hat; und so weiter, bis man endlich rechts eine Zahl erhält, die mit der unbekannten einerley Namen führet. Uebrigens wird wie bey der Reesischen Regel im (§. 205.) verfahren.

V. Abschnitt.

Von der Gesellschaftsrechnung.

§. 207.

Wenn ein Ganzes in mehrere ungleiche Theile getheilt werden soll, die ein bestimmtes Verhältniß untereinander haben müssen, so wird die Art, wie dieses geschieht, die Gesellschaftsrechnung genennet; vermuthlich, weil sie auch bey Handlungsgesellschaften angewendet wird, um den Gewinn, und Verlust der einzelnen Personen nach einem bestimmten Verhältnisse zu berechnen. Z. B. Drey Kaufleute treten in eine Handlungskompagnie; der erste legt zur Handlung 4000 Fl., der zweyte 6400, der dritte 5600; sie gewinnen mit dieser ganzen Einlage 12000 Fl.; wie viel gebührt nun einem jeden?

Hier ist es klar, daß der ganze Gewinn verhältnißmässig nach den Einlagen getheilt werden muß, nämlich, daß sich die Einlage eines jeden eben so verhalten muß zu seinem Gewinn, wie die Einlage eines andern sich zu seinem Gewinn verhält.

Benennen wir daher der Kürze halber, 4000 Fl. mit a, 6400 mit b, 5600 mit c, und den ganzen Gewinn mit g; und überdies den noch unbekannten Gewinn des ersten mit x, den Gewinn des zweyten mit y, und den Gewinn des dritten mit z, so ist

$a : x = b : y = c : z$, und daher nach (§. 191.)

$$(a+b+c) : (x+y+z) = a : x = b : y = c : z.$$

Es ist aber $a + b + c$ die sämmtliche Einlage, und $x+y+z$ der sämmtliche Gewinn $= g$, (weil alle drey Gewinnste zusammen den ganzen Gewinn ausmachen müssen); **folglich verhält sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinn, gleichwie eines jeden seine einzelne Einlage sich zu seinem einzelnen Gewinn verhält.**

Setzen wir nun wieder statt der Buchstaben a, b, c, g ihre Werthe, so ist

16000 : 12000 $= 4000 : x = 3000$ Fl. der Gew. d. 1ten
" : " $= 6400 : y = 4800$ Fl. der Gew. d. 2ten
" : " $= 5600 : z = 4200$ Fl. der Gew. d. 3ten

Und eben so könnte man verfahren, wenn mehrere Personen in der Gesellschaft wären.

Diese nämliche Auflösung kann auch angewendet werden, wenn eine Mischung von verschiedenen Ingredienzen gemacht werden soll, wo die Verhältnisse der Ingredienzen gegeneinander bekannt sind. Z. B. zu einem guten Schießpulver gehören 16 Theile Salpeter, 2 Theile Schwefel, und 3 Theile Kohlen; und es sollen 600 Zentner von diesem Pulver verfertigt werden; wie viel soll nun von jedem insbesondere genommen werden?

Weil

Weil nun bey jeder Menge Pulver die Menge Salpeter, die Menge Schwefel, und die Menge Kohlen sich gegen einander verhalten müssen wie $16:2:3$, so ist auch hier

$(16+2+3) : 600 = 16 : x = 457\frac{1}{7}$ Zent. Salpeter;
$\;\;\;\;\;$ = $\;\;$: = $= 2 : x = 57\frac{1}{7}$ Zent. Schwefel;
$\;\;\;\;\;$ = $\;\;$: = $= 3 : x = 85\frac{5}{7}$ Zent. Kohlen.

Imgleichen: zu einem Feuerballensatz nimmt man 1 Pf. Wachs, 24 Pf. Salpeter, 9 Pf. Schwefel, 4 Pf. Spießglaß, 4 Pf. Sägspäne, und 1 Pf. Pulver. Nun sollen 4000 Pf. von diesem Satz verfertigt werden: wie viel muß von jedem genommen werden?

43	: 4000	$= 1$	: x	$=$	$93\frac{1}{43}$	Pf. Wachs
=	: =	$= 24$	: x	$=$	$2232\frac{24}{43}$	Pf. Salpeter
=	: =	$= 9$	: x	$=$	$837\frac{9}{43}$	Pf. Schwefel
=	: =	$= 4$	: x	$=$	$372\frac{4}{43}$	Pf. Spießglas
=	: =	$= 4$	: x	$=$	$372\frac{4}{43}$	Pf. Sägspäne
=	: =	$= 1$	: x	$=$	$93\frac{1}{43}$	Pf. Pulver

§. 208.

Es können bey einer Gesellschaftsrechnung nicht nur die Einlagen, sondern auch die Zeiten, durch welche jeder sein Geld in der Handlung liegen läßt, verschieden seyn. Z. B. zwey Personen treten in eine Handlung; der erste legt 6500 Fl. $= E$, und läßt dieses Geld durch 6 Monate $= Z$ in der Handlung liegen; der andere aber legt 5400 Fl. $= e$, und läßt dieses Geld durch 5 Monate $= z$ in der Handlung liegen; und sie gewinnen damit 12000 Fl. $= a$. Wie viel soll nun jeder bekommen?

Hier müssen sich die Gewinnste so gegeneinander verhalten, wie die Produkte aus den Einlagen in die Zeiten; nämlich der Gewinn steht mit der Einlage und Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse (§. 203.); weil der Gewinn mit der Einlage insbesondere im geraden, und mit der Zeit ins=

insbesondere ebenfalls im geraden Verhältnisse steht. Benennen wir daher den Gewinn des ersten mit G, und den Gewinn des andern mit g, so ist $G : g = E . Z : e . z$;

$$\left.\begin{array}{ll}\text{daher} & (EZ+ez) : EZ = (G+g) : G \\ \text{und} & (EZ+ez) : ez = (G+g) : g\end{array}\right\} \text{§. 187. III.}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{oder} & (EZ+ez) : (G+g) = EZ : G \\ & \quad = \quad : \quad = \quad = ez : g\end{array}\right\} \text{§. 187. I.}$$

Es ist aber $G+g = a$ der sämmtliche Gewinn; folglich **verhält sich hier die Summe der Produkte aus den Einlagen in die Zeiten zum ganzen Gewinn, gleichwie jedes einzelne Produkt zum betreffenden Gewinn.**

Setzen wir in unserm Beyspiele statt E, e, Z, z ihre Werthe, so ist

$$6.6500+5.5400 : 12000 = 6.6500 : G = 7090\tfrac{10}{11} \text{ Fl.}$$
$$= \quad = \quad + = \quad = \quad : \quad = \quad = 5.5400 : g = 4909\tfrac{1}{11} \text{ Fl.}$$

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß dieses auch statt findet, wenn mehrere Personen unter diesen Umständen in Gesellschaft wären.

Anmerkung. Wir übergehen hier mit Stillschweigen alle noch übrige, in den praktischen Rechenbüchern vorfindige Rechnungsregeln, als Regula Alligationis, Falsi, Cœci u. d. gl., weil dergleichen Rechnungsfragen durch die Analysis ungemein faßlicher und kürzer, als hier noch geschehen kann, aufgelöset werden können, wie es in der Folge zu ersehen seyn wird.

Fünfte

Fünfte Vorlesung.

Von den Gleichungen des ersten und zweyten Grades, nebst deren Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

I. Abschnitt.

Von den Gleichungen und ihrer Auflösung.

§. 209.

Eine jede algebraische Größe kann auf eine mannigfaltige Art ausgedrückt, oder vorgestellt werden; z. B. die Größe $6a$ kann durch $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a$, oder durch $4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$ u. s. w. vorgestellt werden; und es ist $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a = 4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$. Eben so ist $6ab + \frac{20}{4} - \frac{14ab}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{28ab}{3} - \frac{40}{7} - 4ab + \frac{180}{7}\right)$ weil jedes nach vorgenommener Reduktion die Größe $5 + \frac{4ab}{3}$ zum Vorschein bringt. Eine solche Bezeichnung, wodurch eine nämliche Größe auf eine doppelte Art ausgedruckt wird, z. B. $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a = 4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$, nennt

man

man eine **Gleichung**. Die Größen, zwischen welchen das Gleichheitszeichen stehet, nennt man **Theile der Gleichung**; und jene Größen, die auf einer oder der andern Seite des Gleichheitszeichens mit den Zeichen + oder − verbunden sind, heissen **Glieder der Gleichung**. Im letzt angeführten Beyspiele besteht der eine Theil der Gleichung aus 3, und der andere aus 2 Gliedern.

§. 210.

Solche Gleichungen, deren Richtigkeit durch einen blossen Anblick, oder durch die Reduktion der Glieder gleich in die Augen fällt, ohne in Erwögung zu ziehen, was für Werthe die darinnen vorkommenden Buchstaben haben, oder wie solche voneinander abhängen müssen, werden **identische Gleichungen** genennt. Zuweilen aber ist es aus andern Umständen bekannt, daß zwey algebraische Ausdrücke einander gleich seyn müssen, ohne daß beyde die nämlichen Buchstaben führen, wo sodann die Gleichheit der zwey algebraischen Ausdrücke auch keineswegs durch eine blosse Reduktion der Glieder, ohne auf ihren Werth zu sehen, offenbar werden kann. Z. B. das Gewicht einer Kugelpatrone sey a Pf.; die dazu gehörige Kugel wiege b Pf.; das Pulver hiezu sey c Pf., und der Sack samt Bindfaden wiege d Pf.; so ist offenbar, daß $a = b + c + d$ seyn muß, welches nicht durch einen blossen Anblick der Gleichung, sondern erst aus der Bedeutung der Buchstaben a, b, c, und d folget. **Eine solche Bezeichnung, wo zwey auf verschiedene Art ausgedrückte algebraische Größen einander gleich sind, insofern man den darinnen vorkommenden Buchstaben gewisse Werthe beylegt, heißt eine wirkliche algebraische Gleichung.** So ist bey den angeführten Umständen $a = b + c + d$ eine wirkliche algebraische Gleichung.

Eben so könnte auch $5a - \frac{4c}{5} = a + b + c$ eine wirklich algebraische Gleichung seyn, in so fern man aus gewis-

sen

sen Umständen wüßte, daß die Größen a, b, c so voneinander abhängen, daß diese Gleichung statt haben muß.

§. 211.

Die vorzüglichsten Eigenschaften der Gleichungen sind folgende:

1) **In jeder Gleichung kann man jedes Glied aus einem Theile der Gleichung hinwegschaffen, wenn man solches in den andern Theil der Gleichung mit veränderten Zeichen $\pm$ überträgt.** Z. B. in der Gleichung $4a - 5b = m + c$ kann das Glied $- 5b$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens geschafft werden, da man setzt $4a = m + c + 5b$, und so auch $4a - m = c + 5b$; vermög (§. 16. u. 22. Grundf. 1.).

2) Wenn man alle Glieder der Gleichung mit einer nämlichen Größe multipliziret oder dividiret, so bleibt die Gleichung noch richtig, vermög (§. 29. u. 39. Grundf. 1.). **Man kann demnach in einer Gleichung jeden beliebigen Nenner eines Gliedes hinwegschaffen, wenn man alle Glieder der Gleichung mit diesem Nenner multipliziret. Und auch kann man was immer für ein Glied von seinem Koeffizienten befreyen, wenn man alle Glieder der Gleichung durch diesen Koeffizienten dividiret.** Es sey z. B. $\frac{5ab}{c} - bc = a + 3c$ eine Gleichung; man soll darinn das erste Glied $\frac{5ab}{c}$ vom Nenner c, und von dem numerischen Koeffizienten 5 befreyen, so ist $ab - \frac{bc^2}{5} = \frac{ac + 3c^2}{5}$; indem man alle Glieder mit c multipliziret, und durch 5 dividiret.

Aus diesem erhellet auch, daß eine Gleichung noch richtig verbleibe, wenn man die Zeichen aller Glieder verändert, weil man sich vorstellen kann, man habe die ganze

Glei-

Gleichung mit -1 multipliziret; wenn also $ab-bc=c+d$ ist, so ist auch $bc-ab=-c-d$.

3) Eben so bleibt die Gleichung auch noch richtig, wenn man beyde Theile zur gleichen Potenz erhebet, oder aus beyden Theilen gleiche Wurzeln ziehet, vermög (§. 137. Grundsatz 1. u. 2.). Dadurch sind wir im Stande jedes Glied in einer Gleichung von seinem Exponenten, oder von einem Wurzelzeichen zu befreyen. Z. B. in der Gleichung $a+\frac{5b^3}{4}=c$ soll b vom Koeffizienten, Nenner und Exponenten befreyet werden; so ist $\frac{5b^3}{4}=c-a$ nach N. 1.; und $5b^3=4c-4a$, und auch $b^3=\frac{4c-4a}{5}$ verm. N. 2.; und endlich $b=\sqrt[3]{\frac{4c-4a}{5}}$.

Eben so soll in der Gleichung $\frac{a}{2}-\sqrt{bc}=c$ das Glied $\sqrt{bc}$ vom Wurzelzeichen befreyet werden; so ist $-\sqrt{bc}=c-\frac{a}{2}$, und $(-\sqrt{bc})^2=\left(c-\frac{a}{2}\right)^2$; nämlich $bc=c^2-ac+\frac{a^2}{4}$.

§. 212.

Eine Größe aus einer vorgelegten Gleichung finden, oder vielmehr den Werth einer Größe aus einer vorgelegten Gleichung bestimmen, heißt diese Größe durch die andern in der Gleichung vorkommenden Größen so ausdrücken, daß, wenn man diesen gefundenen Ausdruck, statt der Größe in der vorgelegten Gleichung substituiret, eine identische Gleichung zum Vorschein komme. Z. B. aus der Gleichung $a+\frac{4b}{3}=ac-5$ den Werth von b finden, heißt b durch a

und c so ausdrücken, daß, wenn man den gefundenen Werth von b in dieser Gleichung substituiret, eine identische Gleichung zum Vorschein komme.

Dieser Werth ist $b = \frac{3ac - 15 - 3a}{4}$; man erhält ihn, wenn man nach (§. 211.) trachtet b ganz allein auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und zwar positiv zu erhalten, und es vom Koeffizienten, vom Nenner, und von dem etwa noch vorfindigen Exponenten befreyet, welches sich allzeit thun läßt, wenn nur b nicht in der Gleichung mit zwey verschiedenen Exponenten erscheinet, wie es weiter folgen wird. Wäre nun in der vorgelegten Gleichung a und c in Zahlen bekannt, z. B. $a = 7$, $c = 4$, und von b wüßte man nur aus gewissen Umständen, b hänge von a und c so ab, daß die angeführte Gleichung $a + \frac{4b}{3} = ac - 5$ statt finden müsse, ohne noch eigentlich zu wissen, was b in Zahlen gelte, so ist durch diese Operation auch b in Zahlen bestimmt, wenn man in dem gefundenen Werthe von $b = \frac{3ac - 15 - 3a}{4}$ statt a und c ihre Werthe 7, und 4 substituiret; es ist alsdenn $b = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4 - 15 - 3 \cdot 7}{4} = 12$. In solchen Fällen wird b die unbekannte Größe genennet, und die Operation, selbe zu finden, heißt die Gleichung auflösen.

§. 213.

Wenn die Größe, welche aus einer Gleichung bestimmet werden soll, nur in der ersten Potenz erscheinet, so wird die Gleichung eine **einfache**, oder eine Gleichung vom ersten Grade genennet; befindet sich aber die zu bestimmende Größe in einer höhern Potenz, so heißt die Gleichung eine **höhere Gleichung**, und zwar eine **quadratische**, oder eine

Gleichung vom 2ten Grade, wenn der höchste Exponent der zu bestimmenden Größe = 2 ist; eine **kubische**, oder eine Gleichung vom dritten Grade, wenn der höchste Exponent der zu bestimmenden Größe = 3; eine Gleichung vom 4ten, 5ten, 6ten Grade, wenn der höchste Exponent der zu bestimmenden Größe = 4, 5, 6 ist u. s. w. So ist die Gleichung $3a^2b - c^3 = 4b + ac^3 + c$ eine Gleichung vom ersten Grad, wenn b daraus zu bestimmen wäre; eine quadratische Gleichung, wenn a, und eine kubische Gleichung, wenn c daraus zu bestimmen wäre.

Eine höhere Gleichung heißt **rein**, oder eine **reine höhere Gleichung**, wenn die zu bestimmende Größe nur in einer einzigen Potenz in der Gleichung erscheinet. Befindet sich aber die zu bestimmende Größe in der Gleichung zu verschiedenen Potenzen erhoben, so ist solche eine **verwickelte höhere** Gleichung. So ist die Gleichung $a^3b - a^3 = 4b^2$ eine reine kubische Gleichung, wenn a daraus zu bestimmen ist; wäre hingegen b daraus zu suchen, so ist solche eine verwickelte quadratische Gleichung; weil a, obwohlen in zwey Gliedern, doch nur in eben derselben Potenz, b hingegen in der zweyten und ersten Potenz, in der Gleichung erscheinet.

§. 214.

Wie aus einer einfachen, oder auch aus einer reinen höhern Gleichung die unbekannte Größe gefunden wird, ist bereits in (§. 212.) gesagt worden; nur kömmt noch zu erinnern, daß, wenn die zu bestimmende Größe in mehrern Gliedern erscheint, alle Glieder, worinn sich solche befindet, auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und die übrigen auf die andere Seite geschaft werden müssen, nach (§. 211.); sodann zerlege man sie in Faktoren, und befreye endlich die zu suchende Größe von ihrem zusammengesetzten Faktor nach (§. 39. Grundſ. 1.) Z. B.

Aus der Gleich. $2ab = b - ac + d$ soll a gefunden werden;
so ist $2ab + ac = b + d$ nach (§. 211. N. 1.)
und $a(2b + c) = b + d$ durch Zerlegung in Faktoren,
und endlich $a = \frac{b + d}{2b + c}$. (§. 211. N. 2.)

Noch einige Beyspiele zur Uebung.

Aus der Gleich. $a^2bc - cd + 5 = d - 2c$ soll c gefund. werden;
so ist $a^2bc - cd + 2c = d - 5$ durch Uebertrag. der Glieder,
und $c(a^2b - d + 2) = d - 5$ durch Zerleg. in Faktoren,
endlich $c = \frac{d - 5}{a^2b - d + 2}$ durch die Division.

Aus $ax + bc = dc + x$ soll x gefunden werden;
so ist $ax - x = dc - bc$ durch Uebertrag. der Glieder,
und $x(a - 1) = c(d - b)$ durch Zerleg. in Faktoren,
endlich $x = \frac{c(d - b)}{a - 1}$ durch die Division.

Aus $\frac{ab}{y} = bc + d + \frac{1}{y}$ soll y gefunden werden;
so ist $ab = bcy + dy + 1$ durch die Multipl. mit y,
und $ab - 1 = y(bc + d)$ durch die Zerleg. in Faktoren,
endlich $y = \frac{ab - 1}{bc + d}$ durch die Division.

Aus $a^2 - x^2 = \frac{ab + bx}{c}$ ist x zu suchen;
so ist $(a + x).(a - x) = \frac{b(a + x)}{c}$ durch Zerl. in Fakt.
und $a - x = \frac{b}{c}$ durch die Division mit $(a + x)$
endlich $x = a - \frac{b}{c}$ durch Uebertrag. der Glieder.

Aus $az^2 - bc + 1 = 35 + bz^2$ ist z zu suchen;
so ist $az^2 - bz^2 = 35 + bc - 1$ durch Uebertrag. der Glied.
und $z^2(a-b) = 34 + bc$ durch Zerleg. in Faktoren,

sodann $z^2 = \dfrac{34 + bc}{a - b}$ durch die Division,

endlich $z = \sqrt{\dfrac{34 + bc}{a - b}}$ durch Ausziehung der Wurzeln.

Aus $ax^m + b = bx^m + 18 - x^m$ soll x gefunden werden;
so ist $ax^m - bx^m + x^m = 18 - b$ durch Uebertr. der Glied.
sodann $x^m(a - b + 1) = 18 - b$ durch Zerleg. in Fakt.

ferner $x^m = \dfrac{18 - b}{a - b + 1}$ durch die Division,

endlich $x = \sqrt[m]{\dfrac{18 - b}{a - b + 1}}$ durch Ausziehung der Wurzeln.

§. 215.

Wäre aber aus einer verwickelten quadratischen Gleichung die unbekannte Größe zu finden, so ordne man die Gleichung so, daß die unbekannte Größe der zweyten Potenz mit dem positiven Zeichen, ohne Nenner und Koeffizienten, und neben ihr die unbekannte Größe in der ersten Potenz (die was immer für Zeichen, Koeffizienten, und Nenner haben kann) auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und alle übrige Glieder, worinn sich die unbekannte Größe nicht mehr befindet, auf die andere Seite zu stehen kommen. Z. B. wenn aus der Gleichung $ab - bx = d - ax^2$ die Größe x zu suchen wäre, so kann die Gleichung nach (§. 211. N. 1. und 2.) also geordnet werden: $x^2 - \dfrac{bx}{a} = \dfrac{d - ab}{a}$.
Eben so kann die Gleichung $bx - ax^2 + d = cx - dx^2 + b$, wenn x daraus bestimmet werden solle, also geordnet werden:

dx^2

$dx^2 - ax^2 + bx - cx = b - d$
und $x^2(d - a) + (b - c) . x = b - d$
endlich $x^2 + \left(\frac{b - c}{d - a}\right) . x = \frac{b - d}{d - a}.$

Man sieht aus diesem, daß jede verwickelte quadratische Gleichung sich auf diese Formel bringen lasse: $x^2 + Ax = B$; wo x die zu suchende Größe, A und B aber jede zusammengesetzte positive oder negative Größe vorstellen könne, worinnen sich x nicht mehr befindet. Betrachtet man nun diese Formel, so sieht man alsogleich, daß der 1te Theil der Gleichung ein vollkommenes Quadrat von $(x + \frac{1}{2}A)$ wäre, wenn er noch das Quadrat dieses 2ten Gliedes $(\frac{1}{2}A)^2$ enthielte, und daß man sodann durch Ausziehung der Quadratwurzel die Gleichung auf eine einfache reduziren könnte. **Man addire demnach bey einer nach der angeführten Art geordneten verwickelten quadratischen Gleichung das Quadrat des halben Koeffizienten der unbekannten Größe in der ersten Potenz, zu beyden Theilen der Gleichung, und ziehe sodann beyderseits die Quadratwurzel**, so ist die Gleichung auf eine einfache gebracht, wo sich sodann die gesuchte Größe finden läßt. Die allgemeine Formel für jede geordnete quadratische Gleichung

ist $x^2 + Ax = B$
addirt $(\frac{1}{2}A)^2 = \frac{1}{4}A^2$
also $x^2 + Ax + (\frac{1}{2}A)^2 = \frac{1}{4}A^2 + B$
und $\sqrt{[x^2 + Ax + (\frac{1}{2}A)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + B)}$
nämlich $x + \frac{1}{2}A = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + B)}$
endlich $x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + B)}$.

Daß das Zeichen $\pm$ gesetzt werden müsse, erhellet daraus, weil sowohl eine positive, als negative Wurzel ein positives Quadrat giebt. Welches Zeichen von beyden aber bey der Entwicklung genommen werden solle, müssen andere Umstände entscheiden, wie es weiterhin bey der Auflösung der Aufgaben gezeigt werden wird.

Beyspiele.

Aus der Gleichung $3x^2 - 144 = 6x$ soll x gefunden werden;
so ist $3x^2 - 6x = 144$ nach (§. 211. N. 1.)

$x^2 - 2x = 48$ durch die Division,

$x^2 - 2x + 1 = 48 + 1$ wenn man das Quad. ergänzt,

$x - 1 = \sqrt{(48+1)} = 7$ wenn man beyders. die Wurz zieht,

$x = 1 + 7 = 8$.

Aus der Gleich. $4ax - bx^2 = bx - c$ soll x gefunden werden;
so ist $-bx^2 + 4ax - bx = -c$ durch Uebertr. der Glieder,

$bx^2 + bx - 4ax = c$ durch die Multipl. mit -1

$bx^2 + (b-4a)\,x = c$ durch Zerleg. in Faktoren,

$x^2 + \left(\frac{b-4a}{b}\right) x = \frac{c}{b}$ durch die Division mit b

$x^2 + \left(\frac{b-4a}{b}\right)x + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2 = \frac{c}{b} + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2$ Erg. des Q.

$x + \frac{b-4a}{2b} = \pm\sqrt{\left[\frac{c}{b} + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2\right]}$ durch Ausz. der W.

$x = \frac{4a-b}{2b} \pm \sqrt{\left[\frac{c}{b} + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2\right]}$ durch Uebertr. d. Glied.

Aus der Gleichung $ay^2 - by - c = cy^2 - ay$ soll y gef. werd.
so ist $ay^2 - cy^2 + ay - by = c$ durch Uebertr. der Glieder

$y^2(a-c) + y\,(a-b) = c$ durch Zerleg. in Faktoren

$y^2 + y\left(\frac{a-b}{a-c}\right) = \frac{c}{a-c}$ durch die Division,

$y^2 + y\left(\frac{a-b}{a-c}\right) + \left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 + \frac{c}{a-c}$ Erg. d. Q.

$y + \frac{a-b}{2a-2c} = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 + \frac{c}{a-c}\right]}$ Ausz. d. Wurz.

$y = \frac{b-a}{2a-2c} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 + \frac{c}{a-c}\right]}$ Uebertr. der Glied.

Es

Es sey endlich aus der Gleichung $ax^{2m} = a^2b - cx^m$ die Größe x zu finden;

so ist $ax^{2m} + cx^m = a^2b$ durch Uebertrag. der Glieder

$$x^{2m} + \frac{c}{a} x^m = ab \text{ durch die Division mit } a$$

$$x^{2m} + \frac{c}{a} x^m + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 = ab + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 \text{ Erg. des Quad.}$$

$$x^m + \frac{c}{2a} = \pm \sqrt{\left(ab + \frac{c^2}{4a^2}\right)}, \text{ Ausz. der Quadr. Wurz.}$$

$$x^m = -\frac{c}{2a} \pm \sqrt{\left(ab + \frac{c^2}{4a^2}\right)}, \text{ Uebert. der Glieder}$$

$$x = \sqrt[m]{\left[-\frac{c}{2a} \pm \sqrt{\left(ab + \frac{c^2}{4a^2}\right)}\right]} \text{ Ausz. d. } m\text{ten Wurzel.}$$

Man sieht aus diesem letzten Beyspiele, daß alle höhere Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe nur in zwey Potenzen erscheinet, und zwar so, **daß der eine Exponent der Hälfte des andern gleich ist**, als quadratische Gleichungen behandelt werden können.

Wie aus den übrigen verwickelten höheren Gleichungen die unbekannten Größen gefunden werden können, wird weiter unten in der 7ten Vorles. gezeiget werden.

II. Abschnitt.

Von den algebraischen Aufgaben, und ihrer Auflösung.

§. 216.

Eine algebraische Aufgabe ist das Verlangen aus einigen schon bekannten Größen, andere unbekannte, die unter gewissen Bedingungen von jenen abhängen müssen, durch die Rechnung zu finden. Z. B. das Verlangen, **eine Zahl zu finden, die um ihre eigene Hälfte vermehrt, die**

Zahl 12 zum Vorschein bringt, ist eine Aufgabe, worinn die Zahl 12 bekannt, und die andere von der verlangten Eigenschaft erst gesucht werden muß. Imgleichen, zwey Zahlen zu finden, die zusammen addiret die Summe 17, und voneinander abgezogen, die Differenz 7 zum Vorschein bringen, ist eine Aufgabe, worinn zwey Zahlen 17 und 7 bekannt sind, und die andern zwey gefunden werden sollen. Erstere heißt eine Aufgabe mit einer unbekannten Größe, weil nur nach einer Größe gefragt wird; die andere aber ist eine Aufgabe mit 2 unbekannten Größen, weil zwey Zahlen gefunden werden sollen. Ueberhaupt heißt es eine Aufgabe mit 1, 2, 3, 4 . . unbekannten Größen, wenn in der Aufgabe nach 1, 2, 3, 4 .. unbekannten Größen, die in keinem deutlichen Zusammenhang miteinander stehen, gefraget wird.

§. 217.

Eine Aufgabe heißt bestimmt, wenn nur ein einziger Werth für jede zu suchende Größe gefunden werden kann, welcher den Bedingungen der Aufgabe ein Genügen leistet; können aber deren mehrere gefunden werden, welche die verlangte Eigenschaften haben, so ist es eine unbestimmte Aufgabe. So z. B. sind beyde obangeführte Aufgaben bestimmt: denn in der ersten kann die gesuchte Zahl nur 8 seyn; und in der andern sind die Werthe der gesuchten Größe nur 12 und 5, weil ausser diesen keine andere von der verlangten Eigenschaft gefunden werden können. Hingegen ist folgende Aufgabe: Zwey Zahlen zu finden, die miteinander multiplizirt das Produkt 12 zum Vorschein bringen, eine unbestimmte Aufgabe, weil verschiedene Zahlen diese Eigenschaft haben, als 3.4, 2.6, 1.12, $24.\frac{1}{2}$, und so unendlich viele Brüche. Eine Aufgabe hingegen, wo gar kein möglicher Werth gefunden werden kann, welcher der Aufgabe ein Genüge leistet, heißt eine unmögliche Aufgabe.

§. 218.

Um eine algebraische Aufgabe aufzulösen, pflegt man die Größen, die noch unbekannt sind, mit den letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x. . . und öfters auch, um die Auflösung allgemein zu machen, die schon bekannten Zahlen mit a, b, c, d zu bezeichnen; sodann ist es nothwendig, daß man die Bedingungen, wie die unbekannten Größen von den bekannten abhängen müssen, wohl überlege, und selbe durch Gleichungen auszudrücken suche, wo hernach die unbekannten Größen aus den Gleichungen leicht nach vorhergehenden §phen zu entwickeln sind. Wie aber aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe, oder aus dem Zusammenhange, den die bekannten und unbekannten Größen untereinander haben müssen, die Gleichungen zu formiren sind, läßt sich gar keine allgemeine Regel geben; es wird hiezu ein gewisser Grad von Scharfsinn erfordert, den man durch eine fleissige Uebung sehr verbessern kann. Es wird aber sehr dienlich seyn, die Auflösung verschiedener Arten von Aufgaben hier auseinander zu setzen, wodurch ein fleissiger Anfänger in den Stand gesetzet wird, verschiedene dergleichen, und auch andere vorkommende Aufgaben geschickt aufzulösen.

Auflösung der Aufgaben mit einer unbekannten Größe.

§. 219.

1. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die mit ihrer eigenen Hälfte vermehrt, 12 zur Summe bringt.

Auflösung. Die gesuchte Zahl sey $= x$

so ist die Hälfte $= \frac{x}{2}$

also muß $x + \frac{x}{2} = 12$ seyn, laut Beding.

woraus $x = 8$ folgt (§. 212.).

2. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, daß man, wenn man selbe durch 3 dividiret, eben so viel erhalte, als wenn man 30 von ihr abgezogen hätte.

Auflösung. Die Zahl sey $= x$

diese durch 3 dividirt giebt $\frac{x}{3}$;

ziehet man aber von ihr 30 ab, giebt $x - 30$;

also ist $\frac{x}{3} = x - 30$ laut Bedingung;

daraus findet man $x = 45$ nach (§. 212.).

3. Aufgabe. Es wurde Jemand um seine monatliche Einnahme befragt, und er antwortete: Die Hälfte, das Drittel, und das Viertel zusammengenommen, übersteigt die Einnahme selbst um 2 Fl. Wie viel hatte er monatliche Einnahme?

Auflösung. Die monatliche Einnahme sey $= x$ Fl.,

so ist die Hälfte $\frac{x}{2}$, das Drittel $\frac{x}{3}$, und das Viertel $\frac{x}{4}$,

zusammen giebt $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$;

Da dieses um 2 Fl. größer seyn soll, als die ganze Einnahme x, so ziehe man 2 davon ab, so wird der Rest der ganzen Einnahme gleich seyn müssen; also ist

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 2 = x \text{ laut Beding:}$$

woraus $x = 24$ folget (§. 212.)

4. Aufgabe. Es wurde Jemand gefragt, wie alt er sey? Und er antwortete: Wäre ich noch einmal so alt, als ich wirklich bin, so hätte ich eben so viel über 100 Jahre, als mir jetzt noch hievon abgehen. Wie alt war dieser Mann?

Auf-

Auflösung. Die Anzahl seiner Jahre sey $= x$;
also gehen ihm von hundert noch ab $100 - x$;
wäre er noch einmal so alt, so hätte er $2x$;
dann hätte er über 100 Jahre $2x - 100$;
also ist $100 - x = 2x - 100$,
woraus man findet $x = 66\frac{2}{3}$ Jahre.

5. Aufgabe. Ein Vater war bestürzt, daß er schon dreymal so alt sey, als sein Sohn; doch tröstet er sich damit, daß er nach 20 Jahren nur noch einmal so alt als sein Sohn seyn werde. Wie alt war ein jeder von beyden?

Auflösung. Des Sohnes Alter sey $= x$ Jahre,
so ist der Vater $3x$ Jahre alt;
in 20 Jahren wird der Sohn $x + 20$,
und der Vater $3x + 20$ alt seyn;
da aber der Vater alsdann noch einmal so alt als der Sohn seyn soll, so ist $3x + 20 = 2(x + 20)$, woraus $x = 20$ folgt; es ist daher der Sohn 20, und der Vater 60 Jahre alt.

6. Aufgabe. Ein Frauenzimmer wurde um ihr Alter befragt, und sie antwortete: Meine Mutter hat mich im 40sten Jahre ihres Alters gebohren: wenn man nun meine Jahre mit den Jahren meiner Mutter multipliziret, so kommen die Jahre Mathusalems zum Vorschein, der 969 Jahre gelebt hat. Wie alt war jede?

Auflösung. Die Tochter sey x Jahre alt;
so ist die Mutter $x + 40$;
folglich ist $x . (x + 40) = 969$;
woraus $x = -20 + \sqrt{1369} = 17$ nach (§. 215.) gefunden wird.

7. Aufgabe. Es wurde Jemand von etlichen armen Leuten um ein Allmosen gebeten: er wollte jedem 5 Kr. geben, hatte aber um 3 Kr. zu wenig in seinem Beutel; darauf gab er jedem nur 4 Kr. und da blieben ihm 2 Kr.

übrig.

übrig. Wie viel waren der armen Leute, und wie viel Kreuzer hatte der Mann?

Auflösung. Die Anzahl der Armen sey $= x$; hätte jeder 5 Kr. bekommen, so würde er $5x$ Kr. ausgetheilet haben; da ihm aber 3 Kr. davon fehlten, so war sein Geld $5x - 3$;
ferner hat er jedem 4 Kr. gegeben; also hat er ausgetheilet $4x$ Kr., und es bleiben ihm 2 Kr. übrig;
folglich war sein Geld auch $= 4x + 2$.
Es ist demnach $5x - 3 = 4x + 2$; daraus folgt $x = 5 =$ der Anzahl der Armen, und $5x - 3 = 22 =$ seinem gehabten Gelde in Kreuzern.

8. Aufgabe. Es hat Jemand einen Bedienten gedungen, mit diesem Akkord, daß er ihm jährlich eine Livrai nebst 150 Fl. geben will: der Bediente blieb nur 8 Monate im Dienst, und der Herr gab ihm, nebst der Livrai, noch 86 Fl. Wie theuer ist die Livrai gerechnet worden?

Auflösung. Die Livrai koste x Fl. so gebührte dem Bedienten auf ein ganzes Jahr 150 Fl. $+ x$ Fl. laut Akkord, und auf 8 Monat $(150 + x) . \frac{8}{12}$; denn 12 M. : 8 M. $= (150 + x) : (150 + x) \times \frac{8}{12}$; und da er ihm nebst der Livrai nur 86 Fl. gab, so muß $x + 86 = (150 + x) . \frac{8}{12}$; woraus $x = 42$ Fl. folget.

9. Aufgabe. Einem Kourier, der vor 3 Tagen fort ist, und täglich 10 Meilen macht, wird ein anderer nachgeschickt, der täglich 12 Meilen macht. In wie viel Tägen wird er den ersten einholen?

Auflösung. Um diese Aufgabe allgemeiner zu machen; sey die Anzahl der Tage, die der 1te Kourier voraus hat $= a$,
die Anzahl der Meilen, die er täglich macht $= b$,
die Anzahl der Meilen, die der zweyte macht $= c$,
die Anzahl der Täge, nach denen er den ersten einholet $= x$;
so hat der erste schon voraus $a \times b$ Meilen, und während

den

den x Tägen, macht er noch $b \times x$ Meilen; also ist sein ganzer Weg, bis ihn der zweyte einholet $= ab + bx$; der zweyte aber macht in x Tagen cx Meilen; und weil er den ersten eingeholt haben soll, so ist $ab + bx = cx$, woraus $x = \frac{ab}{c-b}$ ist.

In unserm Beyspiele ist $a = 3$, $b = 10$, $c = 12$, also $x = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ Täge.*

Nach dieser Formel können verschiedene Aufgaben aufgelöset werden. Z. B. es wurde Jemand gefragt, wie viel es Uhr sey; und er antwortete: Ich kann die Abtheilungen der Minuten nicht mehr genau unterscheid.n; nur so viel sehe ich, daß der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 7 und 8 Uhr decke. Wie viel Uhr war es wohl?

Hier ist in unserer Formel $a = 7$; weil um 7 Uhr der Stundenzeiger sich schon 7 Stunden lang von 12 hinweg bewegt hat, der Minutenzeiger aber um 7 Uhr genau auf 12 Uhr wies; $b = 1$, weil der Stundenzeiger in einer Stunde nur eine Stundenabtheilung zurücklegt; $c = 12$, weil der Minutenzeiger in jeder Stunde ganz herum lauft; also ist $x = \frac{7}{11}$ Stunden. Es war demnach $7\frac{7}{11}$ Uhr $=$ 7 Uhr 38 $\frac{2}{11}$ Minuten.

Imgleichen, ein feindliches Corps ist vor 2 Tägen aufgebrochen, und macht täglich 3 Meilen: man will demselben nachsetzen, um es in 6 Tägen einzuholen; wie viel Meilen müssen täglich gemacht werden?

Hier ist in der Formel $a = 2$, $b = 3$, $x = 6$, woraus man findet $c = \frac{b(a+x)}{x} = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4$ Meilen.

10. Aufgabe. Zwey Regimenter, welche $a = 80$ Meilen voneinander entfernt sind, brechen zugleich auf, und

mar-

marschiren gegeneinander, um ihre Garnisonen zu verwechseln: das 1te macht täglich $b=4$ und das 2te täglich $c=3$ Meilen; in wie viel Tägen werden sie einander begegnen?

Auflösung. Die Anzahl der Täge sey $=x$; in dieser Zeit macht das 1te Regiment bx Meilen, und das 2te cx Meilen. Da sie aber einander begegnen, so haben beyde zusammen den ganzen Weg gemacht, folglich ist $bx+cx=a$, woraus $x=\frac{a}{b+c}=\frac{80}{7}=11\frac{3}{7}$ folget. Sie werden also einander den 12ten Tag begegnen.

11. Aufgabe. Vormals mußte jeder Hauseigenthümer in der Stadt Wien jährlich das 7tel seines Zinserträgnisses als Zinssteuer kontribuiren; da er aber jetzt das 6tel hievon jährlich zahlen muß, wie viel muß er seine Inwohner steigern, damit er sein voriges Einkommen beybehalte?

Auflösung. Es sey der jährliche Ertrag eines Hauses $=a$ Fl. gewesen: hiervon hat er Zinssteuer entrrichtet $\frac{a}{7}$ Fl.; folglich ist ihm verblieben $\frac{6a}{7}$ Fl. Er steigere nun seine Inwohner um x Fl.; so ist der Ertrag $a+x$: hievon die Zinssteuer $\frac{a+x}{6}$; so verbleibt ihm $\frac{5a+5x}{6}$; und da er das nämliche Einkommen behalten soll, so ist $\frac{6a}{7}=\frac{5a+5x}{6}$, woraus $x=\frac{a}{35}$ folgt. Er muß also jeden Einwohner um den 35ten Theil des vorigen Zinses steigern.

12. Aufgabe. Ein Vater stirbt und hinterläßt ein Vermögen $a=70000$ Fl. und eine gewisse Anzahl Kinder: gleich nach des Vaters Tod starben 2 Kinder davon, und

durch diesen Umstand bekam jedes Kind um 4000 Fl. mehr, als es bekommen hätte, wenn keines gestorben wäre. Wie viel waren anfänglich Kinder vorhanden?

Auflösung. Ihre Anzahl sey gewesen $= x$; und da 2 davon gestorben, so verblieben noch $x - 2$;

Im ersten Falle hätte jedes bekommen $\frac{a}{x}$ Fl.

und da 2 gestorben, bekommt jedes $\frac{a}{x-2}$;

da aber letzteres um 4000 Fl. mehr seyn soll als das erste,

so ist $\frac{a}{x-2} - 4000 = \frac{a}{x}$, eine verwickelte quadratische Gleichung, woraus nach (§. 215.) gefunden wird

$$x = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2000} + 1\right)} = 1 + \sqrt{36} = 7.$$

13. Aufgabe. Zwey Kompagnien werden zu einer Arbeit angestellt: man weiß, daß die erste Kompagnie allein in $a = 26$ Tägen, und die zweyte allein in $b = 16$ Tägen mit dieser Arbeit fertig würde: Wie viel Täge werden beyde zusammen damit zu thun haben?

Auflösung. Da die erste Kompagnie in $a = 26$ Tägen mit der Arbeit allein fertig würde, so macht sie täglich den Bruch $\frac{1}{a} = \frac{1}{26}$ von der ganzen Arbeit; und die zweyte aus der nämlichen Ursache $\frac{1}{b} = \frac{1}{16}$ der ganzen Arbeit. Die Anzahl der Täge, so sie brauchen, wenn sie beyde zusammen arbeiten, sey $= x$, so macht die erste Kompagnie in x Tägen den Theil $\frac{x}{a}$, und die zweyte den Theil $\frac{x}{b}$ von der ganzen Arbeit; beyde Theile müssen aber die ganze Arbeit aus-

ausmachen: folglich ist $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, woraus $x = \frac{ab}{a+b}$ folgt: nämlich $x = \frac{26 \,.\, 16}{26+16} = 9\frac{19}{21}$ Täge.

Auf die nämliche Art findet man, daß drey Wasserröhren ein Behältniß, welches die erste Röhre allein in a, die zweyte allein in b, und die dritte allein in c Stunden anfüllen würde, wenn sie alle drey zusammenfliessen, in $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ Stunden anfüllen können.

14. Aufgabe. Zwey Bombardier werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben: der erste hatte schon 50 Würfe gemacht, bis der zweyte zu werfen anfängt, und macht 7 Würfe, bis der zweyte deren 5 macht; hingegen braucht der zweyte zu 2 Würfen so viel Pulver als der erste zu 3. Die Frage ist, wie viel Würfe wird der zweyte machen, bis er so viel Pulver verbraucht hat, als der erste?

Auflösung. Die Anzahl der Würfe, so der zweyte machen wird, sey $= x$, so macht der erste während dieser Zeit $\frac{7x}{5}$ Würfe, wegen $5 : 7 = x : \frac{7x}{5}$; also hat der erste in allem $50 + \frac{7x}{5}$ Würfe. Das Pulver, so der zweyte zu einem Wurfe braucht, sey $= a$, so braucht der erste zu jedem Wurfe $\frac{2a}{3}$. Das ganze verwendete Pulver des ersten ist demnach $\left(50 + \frac{7x}{5}\right)\frac{2a}{3}$, und des zweyten ax. Weil sie aber gleichviel Pulver verwendet haben sollen, so ist $\left(50 + \frac{7x}{5}\right)\frac{2a}{3} = ax$; woraus $x = 500$ folget.

15.

15. Aufgabe. Unter $a = 100$ Maß Wein, dessen jede Maß $b = 36$ Kr. werth ist, soll ein anderer Wein, dessen jede Maß $c = 16$ Kr. werth ist, gemenget werden, damit jede Maß von der Vermischung $d = 24$ Kr. werth wird. Wie viel soll wohl darunter geschüttet werden?

Auflösung. Die Anzahl der Maßen, die vom c Kr. Wein darunter geschüttet werden müssen, sey $= x$, so wird die ganze Vermischung seyn $a + x$ Maß. Und da jede Maß d Kr. werth seyn soll, so ist der ganze Werth der Vermischung $(a+x) \cdot d$ Kr. Da aber vor der Vermischung der Werth des guten Weins $= a \cdot b$, und des schlechtern $x \cdot c$ Kr. war, so muß $ab + cx = (a + x) \cdot d$ seyn; woraus folget $x = \frac{a(b-d)}{d-c} = 150$.

Sollte ein Wein mit Wasser gemischt werden, z. B. unter 40 Maß 24 Kr. Wein soll so viel Wasser geschüttet werden, damit ein 16 Kr. Wein entstehe, so ist $a = 40$, $b = 24$, $c = 0$, weil das Wasser keinen Werth hat, und $d = 16$; also $x = 20$.

Wäre aber auch noch a unbekannt, z. B. die Aufgabe wäre also: Man will von zweyerley Weinen, von einem 36, und 16 Kr. Wein einen mittlern gemischten Wein zu 24 Kr., und zwar 250 Maß zubereiten: wie viel soll von jedem genommen werden?

Hier ist zwar in unserer Formel, a und x, die Anzahl der Maßen, des 36 Kr., und des 24 Kr. Weins unbekannt; doch aber ist ihre Summe $a + x = 250$ Maß bekannt, weil beyde zusammen $= 250$ Maß seyn müssen. Man könnte demnach beyde a und x aus der angeführten Formel auf folgende Art finden:

Weil $x = \frac{a(b-d)}{d-c}$, so ist $d-c : b-d = a : x$

also auch $(d-c)+(b-d) : d-c = a+x : a$
und auch $(d-c)+(b-d) : b-d = a+x : x$ } (§. 187. III.)

nämlich $b - c : d - c = a + x : a$

$$36 - 16 : 24 - 16 = 250 : a = 100$$

und $b - c : b - d = a + x : x$

$$36 - 16 : 36 - 24 = 250 : x = 150.$$

Dieses pflegen die praktischen Rechenmeister nach der sogenannten Alligationsregel auf nebenstehende Art anzusetzen:

36	8	100
24	20	
16	12	150

20 : 250 = 8 : 100
" : " = 12 : 150

Man könnte aber auch letztere Aufgabe durch folgende Benennung auflösen: Es sey der Werth des bessern Weines $36 = b$, der Werth des schlechtern $16 = c$, der Werth einer jeden Maß der Vermischung $24 = d$; die Anzahl der Maßen, so die Vermischung haben soll $= a$, und die Anzahl der Maßen, die man vom bessern Wein hiezu nehmen muß $= x$; so müssen vom schlechtern genommen werden $(a - x)$ Maß, weil beyde zusammen $= a$ seyn müssen. Nun ist vor der Vermischung der Werth des bessern Weines $b \cdot x$, und der Werth des schlechtern $c \cdot (a - x)$, also zusammen $bx + c(a-x)$; und nach der Vermischung ist der ganze Werth des gemischten Weines $a \cdot d$, weil jede Maß d Kr., also a Maß ad Kr. kosten müssen; folglich ist $bx + c(a - x) = ad$, woraus $x = \frac{a(d-c)}{b-c}$ Maß des bessern Weines folget, und die Anzahl der Maßen $a - x$ des schlechtern Weines ist sodann $= \frac{a(b-d)}{b-c}$. In unserm Beyspiele müssen demnach 100 Maß vom bessern, und 150 vom schlechtern Wein genommen werden.

Diese Auflösung kann auch bey Vermischung der Metalle, Pulver, Feuerwerkssätze, und bey andern chemischen Operationen zuweilen gut angewendet werden. Z. B. ein Silberarbeiter hat zweyerley Silber, ein 15löthiges, und

und ein 10löthiges: er soll ein 5 Mark, oder 2 Pf. 16 Loth schweres Gefäß machen, welches 13löthiges Silber enthält; (man versteht hier unter dem Worte 13löthiges Silber, daß bey einer Mark von 16 Loth nur 13 Loth reines Silber, und im übrigen 3 Loth Zusatz an Kupfer sich befinden; und so ist es auch unter 15löthig, 10löthig ꝛc. zu verstehen). **Wie viel muß von jedem genommen werden?**

Obige Formel auf dieses Beyspiel angewendet, giebt $a = 2$ Pf. 16 Loth $= 80$ Loth, $b = 15$, $c = 10$, $d = 13$, und daher $x = 48$ Loth vom bessern Silber, vom schlechtern aber $80 - 48 = 32$ Loth, zusammen 80 Loth.

Eben so: **Man hat zweyerley Brandröhrensätze: der erste in eine Brandröhre von bestimmter Länge geschlagen, brennt durch $45 = b$ Sekunden, und der andere, in eben diese Brandröhre geschlagen, brennt nur durch $20 = c$ Sekunden. Man will von diesen zweyen Sätzen $12 = a$ Pf. Satz mischen, wovon eben diese Brandröhre verfertigt durch $30 = d$ Sekunden brennt. Wie viel muß von jedem genommen werden?**

Um sich zu überzeugen, daß auch hier obige Auflösung angewendet werden könne, so bilde man sich ein, daß von 1 Pf. Satz m Brandröhren geschlagen werden können. Die Anzahl Pf., die man vom bessern Satz nehmen muß, sey wieder $= x$; also vom schlechtern $a - x$ Pf. Erstere geben mx Brandröhren, wo jede durch b Sek., also alle durch mxb Sekund. brennen würden, wenn sie nacheinander angezündet würden; und letztere geben $(a - x) m$ Brandröhren, wo jede durch c Sek. brennet, also alle diese durch $(a - x) mc$ Sekunden. Von der Vermischung aber erhält man am Brandröhren, wo jede durch d Sek. brennen soll; also alle durch amd Sek.; folglich ist $mxb + (a - x) mc = amd$, woraus wieder $x = \frac{a(d-c)}{b-c}$ folget. Man müßte demnach $4\frac{4}{5}$ Pf. vom bessern, und $7\frac{1}{5}$ Pf. vom schlechtern Satz nehmen.

16. Aufgabe. Ein Oberfeuerwerksmeister hat unter seinem Kommando 20 Unteroffizier, theils Oberfeuerwerker, theils Feuerwerker: er gab jeder Parthey 24 Feuerballen zu schnüren; und es ereignete sich, daß jeder Oberfeuerwerker um einen Feuerballen mehr, als ein Feuerwerker schnüren mußte. Wie viel waren Oberfeuerwerker, und wie viel Feuerwerker?

Auflösung. Die Anzahl der Oberfeuerwerker sey $= x$, so ist die Anzahl der Feuerwerker $= 20 - x$. Ein jeder Oberfeuerwerker mußte demnach $\frac{24}{x}$ Feuerballen, und jeder Feuerwerker $\frac{24}{20-x}$ Feuerballen schnüren; weil aber die erste Anzahl der Feuerballen um 1 größer seyn soll als die 2te, so ist $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$; hieraus folgt $x = 34 \pm \sqrt{676}$ $= 34 \pm 26 = 8$ Oberfeuerwerker.

Hier sieht man leicht ein, daß das Zeichen $-$ genommen werden müsse: denn würde man das Zeichen $+$ nehmen; so wäre $x = 34 + 26 = 60$, da doch in allem nur 20 Unteroffiziere waren. Man muß deßwegen bey algebraischen Rechnungen das doppelte Zeichen $\pm$ vor den Wurzeln (§. 119. II.) bis zu Ende der Rechnung beybehalten, wo sich dann erst entscheiden läßt, welches von beyden genommen werden kann, um nicht auf falsche Rechnungen geführt zu werden. Folgendes Beyspiel könnte noch zur Warnung dienen.

Man setze die Zahl $1000 = a$, $1 = b$, $1001 = c$

so ist $a + b = c$, (§. 12. Grunds. 1.)

$a = c - b$

$a - c = - b$

also auch $a^2 - ac = b^2 - bc$, (§. 29. Grunds. 1.)

$a^2 - ac + \frac{c^2}{4} = b^2 - bc + \frac{c^2}{4}$, (§. 16. N. 1.)

und

und $a - \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2}$, (§. 137. N. 2.)

folglich $a = b$, nämlich $1000 = 1$.

Der Fehler liegt darinn, daß die Wurzeln aus beyden Theilen der Gleichung positiv genommen wurden, da doch der zweyte Theil hätte negativ genommen werden sollen, weil das Quadrat von b aus $-b \times -b$ entstanden ist. Es wäre sodann $a - \frac{c}{2} = -\left(b - \frac{c}{2}\right)$, nämlich $a - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} - b$ woraus wieder $a + b = c$ ist, wie vorhin.

17. Aufgabe. Ein sterbender Vater vermacht die Verlassenschaft seinen Söhnen auf folgende Art: Der erstgebohrne soll zuerst 1000 Fl., dann den 6ten Theil des Ueberrestes bekommen; von diesem, was der erste überläßt, soll der 2te Sohn 2000 Fl. nebst dem 6ten Theile des Ueberrestes nehmen; von dem Reste soll der dritte 3000 Fl. nebst dem 6ten Theile des Ueberrestes nehmen; und so soll die Theilung fort geschehen, bis die Verlassenschaft erschöpfet ist. Es fügte sich aber, daß in dieser Theilung jeder Sohn einen gleich großen Theil bekam: wie viel waren es Söhne? wie viel erhielt jeder? und wie stark war die Verlassenschaft?

Auflösung. Die Verlassenschaft sey $= x$ Fl.

so bekömmt der 1te $1000 + \frac{x - 1000}{6} = \frac{5000 + x}{6}$;

also ließ er übrig $x - \frac{5000 + x}{6} = \frac{5x - 5000}{6}$;

hievon nahm der 2te $2000 + \left(\frac{5x - 5000}{6} - 2000\right) : 6$

$= \frac{55000 + 5x}{36}$. Da aber beyde gleichviel haben sollen,

so ist $\frac{5000 + x}{6} = \frac{55000 + 5x}{36}$; woraus $x = 25000$ Fl.

 fol-

folget. Es waren demnach 5 Söhne, und jeder erhielt durch die vorgeschriebene Theilung 5000 Fl.

18. Aufgabe. Eine Weibsperson gieng mit Eyern in der Stadt hausiren: im ersten Hause verkaufte sie die Hälfte ihrer Eyer und noch $\frac{1}{2}$ Ey darüber; von dem Reste verkaufte sie im 2ten Hause wieder die Hälfte mehr $\frac{1}{2}$ Ey, und eben so im 3ten Hause; da sie aber aus dem 3ten Haus heraus gieng, öfnete sie ihren Korb, und fand selben ganz leer; wie viel Eyer hatte sie anfänglich?

Auflösung. Die Anzahl der Eyer, so sie gehabt, sey $= x$, so hat sie im ersten Hause verkauft $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, folglich blieben ihr noch $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$; hievon verkaufte sie im 2ten Hause $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$, und es verblieben ihr noch $\frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{4} = \frac{x-3}{4}$; hievon verkaufte sie im 3ten Hause $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$; also war ihr Rest $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8}$ $= \frac{x-7}{8}$. Da sie aber nun gar nichts mehr im Korbe hatte, so ist $\frac{x-7}{8} = 0$, nämlich $x - 7 = 0$, und $x = 7$.

19. Aufgabe. Ein Bombardierhauptmann wird gefragt, wie viel er bey seiner Kompagnie Oberfeuerwerker, Feuerwerker, und Bombardiers habe, und wie viel jeder tägliche Löhnung erhalte? Er sagte: Ich habe dreymal so

viel

viel Bombardier, und $\frac{2}{3}$mal so viel Oberfeuerwerker, als Feuerwerker; jeder Oberfeuerwerker hat täglich so viele Kreuzer als es Feuerwerker, jeder Feuerwerker um 4 Kr. mehr, als es Oberfeuerwerker, und jeder Bombardier nur den dritten Theil so viel Kr., als es Feuerwerker sind; und die tägliche Löhnung aller dieser Leute beträgt 52 Fl. 48 Kr. Wie viel Oberfeuerwerker, Feuerwerker, und Bombardier hatte dieser Hauptmann, und wie viel Löhnung hatte jeder täglich?

Die Anzahl der Feuerwerker sey $= x$,

so ist die Zahl der Oberfeuerwerker $= \frac{2x}{3}$,

und der Bombardier $= 3x$;

folglich haben alle Oberfeuerwerker täglich $\frac{2x}{3} \times x = \frac{2x^2}{3}$

alle Feuerwerker $x \times \left(\frac{2x}{3} + 4\right) = \frac{2x^2}{3} + 4x$

und alle Bombardier $3x \times \frac{x}{3} = x^2$.

Es ist demnach $\frac{2x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} + 4x + x^2 = 52 \,.\, 60 + 48$;

daraus folgt $x = -\frac{6}{7} + \sqrt{\left(\frac{9504}{7} + \frac{36}{49}\right)}$ (§. 215.)

endlich $x = 36$. Er hatte demnach 36 Feuerwerker, 24 Oberfeuerwerker, und 108 Bombardier; jeder Oberfeuerwerker erhielt täglich 36, jeder Feuerwerker 28, und jeder Bombardier 12 Kr.

20. **Aufgabe.** Zwey legen zusammen in eine Handlung a Fl. $= 2000$; der erste ließ sein Geld durch $m = 17$ Monate liegen, und erhielt Einlage samt Gewinn $b = 1710$ Fl.;

und der andere ließ sein Geld durch $n = 12$ Monate liegen, und erhielt Einlage samt Gewinn $c = 1040$ Fl. Wie groß war eines jeden seine Einlage?

Auflösung. Es sey die Einlage des ersten $= x$ Fl.; also ist die Einlage des zweyten $= a - x$; ihr gesammter Gewinn aber ist $= b + c - a$; folglich ist nach (§. 208.)

$$[mx + n(a-x)] : [b + c - a] = mx : \frac{mx(b+c-a)}{mx + an - nx}$$

= dem Gewinn des ersten. Es ist demnach $\frac{mx(b+c-a)}{mx+an-nx} + x = b$, weil der erste an Einlage samt Gewinn b Fl. erhalten hat. Diese Gleichung gehörig nach (§. 215.) aufgelöset, giebt $x = 1200$.

21. Aufgabe. Ein Vater stirbt, und hinterläßt ein Kapital von 1100 Fl. nebst 4 Söhnen: nach 10 Monaten wurde das Testament erst eröfnet, und die Kinder hatten in dieser Zeit das Kapital samt den betreffenden Interessen gänzlich verzehret. Auf eben diese Art haben 3 Kinder ein Kapital von 1200 Fl. in 15 Monaten aufgezehret. Die Frage ist, wie lange werden auf diese Art 6 Kinder mit einem Kapital von 1650 Fl. auskommen?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Gulden, so 100 Fl. in einem Monate Zins tragen $= x$, so ist von 1100 Fl. in 10 Monaten das Interesse $110x$; mithin haben im ersten Falle die 4 Söhne in 10 Monaten verzehret $1100 + 110x$ Fl. und jeder hat in einem Monate verzehrt $\frac{1100 + 110x}{10.4}$ Fl. Im zweyten Falle haben alle 3 Söhne in 15 Monaten $1200 + 12x . 15$ Fl., und folglich hat jeder in einem Monate $\frac{1200 + 12x . 15}{3 . 15}$ Fl. verzehrt. Da sie aber auf gleiche Art gelebt haben sollen, so ist $\frac{1100 + 110x}{40} = \frac{1200 + 12 . 15x}{45}$

wor-

woraus $x = \frac{2}{3}$ gefunden wird; folglich hat in jedem Falle ein Kind in einem Monate $29\frac{1}{3}$ Fl. verzehret. Nun sey die Anzahl der Monate, so die 6 Kinder mit 1650 Fl. auskommen $= y$; dieses Kapital trägt monatlich $16\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 11$ Fl. Zins, also in y Monaten $11y$ Fl.; daher ist das Kapital samt Interessen $= 1650 + 11y$ Fl. Da aber jedes Kind monatlich $29\frac{1}{3}$ Fl. verzehret, so brauchen 6 Kinder in y Monaten $176y$ Fl.; und da das Kapital samt Interessen verzehrt seyn soll, so ist $176y = 1650 + 11y$, woraus $y = 10$ folget.

22. Aufgabe. Es ist Jemand 1000 Fl. $= a$ schuldig, die er aber erst nach verflossenen 18 Monaten $= m$ ohne Interesse zu zahlen verbunden ist; der Gläubiger wünschet aber alsogleich bezahlt zu werden; wie viel kann der Schuldner wohl jetzt für diese Schuld geben, wenn der Gläubiger, so wie der Schuldner mit 100 Fl. jährlich 8 Fl. $= c$ gewinnen kann?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Gulden die für diese Schuld jetzt bezahlt werden können $= x$,
so könnte der Gläubiger mit diesen x Fl. in 12 Monaten gewinnen $\frac{8x}{100}$ Fl.; denn $100 : 8 = x : \frac{8x}{100}$;
und in 18 Monaten gewinnt er $\frac{12x}{100}$,
denn $12 M. : 18 M. = \frac{8x}{100} : \frac{18 \cdot 8x}{1200} = \frac{12x}{100}$; er hat so-
dann $x + \frac{12x}{100}$, welches 1000 Fl. betragen soll;
folglich ist $x + \frac{12x}{100} = 1000$; hieraus folget $x = 892\frac{6}{7}$ Fl.

23. Aufgabe. Ein Kaufmann ist in drey Terminen folgende Zahlungen zu leisten schuldig, nämlich nach verflossenen m Monaten a Fl., nach n Monaten b Fl., und nach

r Monaten c Fl.; der Gläubiger aber wünschet die ganze Summe $a + b + c$ auf einmal zu erhalten; nach wie viel Monaten muß die Zahlung geschehen?

Auflösung. Man setze das Geld, so der Kaufmann in einem Monate mit 100 Fl. gewinnen kann $= p$, so kann er mit a Fl. in m Monaten $\frac{amp}{100}$, mit b Fl. in n Monaten $\frac{bnp}{100}$, und mit c Fl. in r Monaten $\frac{crp}{100}$ gewinnen; mithin ist der ganze Nutzen, den der Kaufmann noch von diesem ganzen Gelde ziehen kann $= \frac{amp + bnp + crp}{100}$.

Es sey nun die Zeit, nach welcher die Zahlung der ganzen Summe $a + b + c$ auf einmal geschehen kann $= x$ Monaten, so ist der Nutzen den der Kaufmann noch in dieser Zeit davon ziehen kann $= \frac{(a+b+c)px}{100}$; und weil er in einem wie in dem andern Falle gleichen Nutzen haben soll, so ist $\frac{amp + bnp + crp}{100} = \frac{(a+b+c)px}{100}$, und $am + bn + cr = (a+b+c)x$, endlich $x = \frac{am + bn + cr}{a+b+c}$; nämlich man multiplizire jede einzelne Summe mit der Zeit, in welcher solche zahlbar ist, und dividire die Summe der Produkte durch die ganze Schuld, so hat man die Zeit, nach welcher alle Zahlungen auf einmal geschehen können.

Auflösung der Aufgaben mit mehrern unbekannten Größen.

§. 220.

Wenn in einer Aufgabe nach zweyen oder mehrern Größen gefragt wird, die in keinem sehr deutlichen Zusammenhange untereinander stehen, so bezeichne man jede unbe-

kann-

kannte Größe mit einem besondern Buchstaben, und suche sodann wieder die Bedingungen der Aufgabe durch Gleichungen auszudrücken. Kann man nun aus den Bedingungen der Aufgabe eben so viele Gleichungen ableiten, als man unbekannte Größen angenommen hat, so ist es ein Zeichen, daß die Aufgabe **bestimmt** sey; reichen hingegen die Bedingungen der Aufgaben nicht zu, so viele Gleichungen ansetzen zu können, als man unbekannte Größen angenommen hat, so ist sodann die Aufgabe **unbestimmt**. So kann in der unbestimmten Aufgabe (§. 217.), **zwey Zahlen zu finden, die miteinander multipliziret das Produkt** $a = 12$ **zum Vorschein bringen**, wenn man eine gesuchte Zahl mit x, und die andere mit y benennet, nur folgende Gleichung angesetzt werden, $xy = a$; weiter läßt sich keine Gleichung aus dieser Bedingung mehr ansetzen. Füget man hingegen zu obiger Bedingung noch diese hinzu: daß die zwey gesuchten Zahlen voneinander abgezogen die Differenz $d = 4$ zum Vorschein bringen müssen, so findet noch folgende Gleichung statt, $x - y = d$; wo x die größere, und y die kleinere gesuchte Zahl vorstellt; und die Aufgabe ist sodann bestimmt.

§. 221.

Hat man nun aus den Bedingungen der Aufgabe so viele Gleichungen abgeleitet, als unbekannte Größen vorhanden sind, so muß man trachten mit den Gleichungen solche Veränderungen vorzunehmen, und dieselben so untereinander zu verbinden, damit man zuletzt eine Gleichung erhalte, worinn sich nur eine einzige unbekannte Größe befindet, die man daraus finden, und durch die Substitution in den vorigen Gleichungen eine unbekannte Größe nach der andern entwickeln kann.

Die Art aber, wie dieses geschehen könne, ist mannigfaltig, und es wird am besten seyn, wenn eine Art nach der andern in wirklichen Beyspielen gezeigt wird, weil es

ohne-

ohnehin nur auf die Gestalt der Gleichungen selbst ankömmt, welche Art zu wählen ist, damit der Zweck am kürzesten erreicht wird. Aus obigen Gleichungen $xy = a$, und $x - y = d$ können die unbekannten Größen x, und y auf folgende Art entwickelt werden:

Man suche aus jeder Gleichung den Werth von einer nämlichen unbekannten Größe, z. B. von x, als wenn y schon bekannt wäre: aus der ersten folgt $x = \frac{a}{y}$, und aus der 2ten $x = d + y$; es ist also auch (§. 12. N. 3.) $\frac{a}{y} = d + y$, woraus $y = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(a + \frac{d^2}{4}\right)}$ folgt; oder wenn man die für a und d oben angenommenen Werthe setzt, so ist $y = 2$. Diesen Werth substituire man nun in einer der vorhergehenden Gleichungen, so findet man $x = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(a + \frac{d^2}{4}\right)} = 6$.

Auf die nämliche Art kann man bey der Auflösung der Aufgaben mit mehrern unbekannten Größen verfahren. Z. B. Unter 3 Regimenter, die sich in einem Treffen tapfer hielten, sind $a = 1326$ Fl. dergestalt zu theilen, daß von dem Regimente, welches sich am vorzüglichsten auszeichnete, jeder Mann einen Gulden erhalten, und der Ueberrest unter die Mannschaft der zwey übrigen Regimenter gleich zertheilet werden solle. Wird nun dieser Gulden dem ersten Regimente zuerkennt, so erhält ein jeder Mann der zwey übrigen Regimenter $\frac{1}{2}$ Fl.; giebt man diesen Gulden dem zweyten Regimente, so erhält jeder Mann von den zwey andern Regimentern nur $\frac{1}{3}$ Fl.; fällt endlich dieser Gulden dem dritten Regimente zu, so bekömmt ein jeder von der übrigen Mannschaft gar nur $\frac{1}{4}$ Fl. Wie stark ist jedes dieser drey Regimenter?

Es

Es sey die Anzahl der Mannschaft des 1ten Regiments $= x$, des 2ten $= y$, und des 3ten $= z$, so erhält im ersten Falle die gesammte Mannschaft des 1ten Regiments x Fl., weil jeder Mann einen Gulden erhält; und die sämmtliche übrige Mannschaft der zwey andern Regimenter bekommt $\frac{y+z}{2}$ Fl.; im zweyten Fall bekömmt das zweyte Regiment y Fl., und die übrigen beyden zusammen $\frac{x+z}{3}$ Fl.; und im dritten Fall bekömmt das 3te Regiment z Fl. und die sämmtliche übrige Mannschaft $\frac{x+y}{4}$ Fl.; also ist

$$\left.\begin{array}{l} x+\frac{y+z}{2} = a \;.\;.\;.\; A \\ y+\frac{x+z}{3} = a \;.\;.\;.\; B \\ z+\frac{x+y}{4} = a \;.\;.\;.\; C \end{array}\right\}$$

Weil jedesmal die ganze Summe $a = 1326$ Fl. genau aufgehen muß.

Aus der Gleichung A folgt $x = a - \frac{y-z}{2}$

Aus der Gleichung B ist $x = 3a - 3y - z$

Und aus der Gleichung C ist $x = 4a - 4z - y$

also auch $a - \frac{y-z}{2} = 3a - 3y - z \;.\;.\;.\;.\; D$

und $3a - 3y - z = 4a - 4z - y \;.\;.\;.\;.\; E.$

Aus der Gleichung D ist $y = \frac{4a-z}{5}$

und aus der Gleichung E ist $y = \frac{3z-a}{2}$

also

also auch $\frac{4a-z}{5} = \frac{3z-a}{2}$; daraus folgt $z = \frac{13a}{17}$ $= \frac{13 \cdot 1326}{17} = 13 \cdot 78 = 1014$.

Diesen gefundenen Werth von z substituire man in der Gleichung E, so ist $y = \frac{3 \cdot 1014 - 1326}{2} = 858$. Diese beyden Werthe von y und z in der Gleichung A substituirt, geben $x = 1326 - \left(\frac{858 + 1014}{2}\right) = 390$. Das 1te Regiment hatte daher 390, das 2te 858, und das 3te 1014 Mann.

Aus den drey Fundamentalgleichungen bey der vorgelegten Aufgabe können die drey unbekannten Größen auch auf folgenne Art entwickelt werden.

$$x + \frac{y+z}{2} = a$$
$$y + \frac{x+z}{3} = a$$
$$z + \frac{x+y}{4} = a$$

Man suche den Werth von der einen unbekannten Größe, z. B. von x aus der ersten Gleichung $\left(\text{es ist } x = \frac{2a-y-z}{2}\right)$, und substituire diesen Werth für x in allen übrigen Gleichungen, $5y + z = 4a$, und $7z + y = 6a$; auf diese Art ist die eine unbekannte Größe x hinweggeschaffet, und die Anzahl der Hauptgleichungen um 1 vermindert worden.

Sodann suche man wieder aus einer von diesen letztern Gleichungen den Werth für die eine unbekannte Größe (im gegebenen Beyspiele folgt aus der letzten Gleichung $y = 6a - 7z$), und substituire diesen Werth in allen übrigen von diesen letztern Gleichungen statt der nämlichen unbekannten Größe (näm-

(nämlich $30a - 35z + z = 4a$, woraus $z = \frac{13a}{17}$ folget) so wird auf diese Art auch die zweyte unbekannte Größe hinweggeschaffet, und die Anzahl der Hauptgleichungen um 1 vermindert werden. Wenn man auf diese Art fortfährt, daß man nämlich wieder aus einer von diesen letztern Gleichungen, wenn deren noch mehrere vorhanden wären, den Werth der einen unbekannten Größe suchet, und solchen in allen übrigen dieser letztern Gleichungen statt der nämlichen unbekannten Größe substituiret, so wird man endlich zu einer Gleichung gelangen, in der sich eine einzige unbekannte Größe befindet; man wird demnach den Werth dieser unbekannten Größe finden können, so wie im angeführten Beyspiele wirklich $z = \frac{13a}{17}$ gefunden wurde.

Wenn einmal eine unbekannte Größe gefunden ist, so werden die übrigen leicht entwickelt, wenn man den Rückweg geht, das ist, wenn man den gefundenen Werth in einer der vorhergehenden Gleichungen substituiret; nämlich, wenn man in der Gleichung $y = 6a - 7z$ den gefundenen Werth $\frac{13a}{17}$ für z setzet, so ist $y = \frac{11a}{17}$.

Substituiret man endlich diese beyden Werthe für y und z in einer der vorhergehenden Gleichungen $\left(\text{in } x = \frac{2a - y - z}{2}\right)$, so wird auch x gefunden, nämlich $x = \frac{5a}{17}$. Da nun $a = 1326$ bedeutet, so ist $x = 390$, $y = 858$, und $z = 1014$, wie vorher.

§. 222.

Diese letzte Auflösung der Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen ist die allgemeinste; doch wird sie gemeiniglich

nur

nur damals angewendet, wenn die unbekannten Größen entweder untereinander multipliziret, oder wenn solche in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben sind. Sollten hingegen die unbekannten Größen weder miteinander multipliziret noch in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben seyn, so können solche durch die blosse Addition und Subtraktion entwickelt werden. Auch bedienet man sich zuweilen noch anderer Kunstgriffe, theils um etwas geschwinder zum Ziele zu kommen, bisweilen auch, um verwickelten höheren Gleichungen auszuweichen, wie man aus folgenden Auflösungen einiger Aufgaben ersehen wird.

1. **Aufgabe.** Zwey Zahlen zu finden, die zusammen addirt die Summe $s = 17$, und voneinander abgezogen die Differenz $d = 7$ zum Vorschein bringen.

Auflösung. Es sey die größere gesuchte Zahl $= x$
und die kleinere $= y$
so ist $x + y = s$
und $x - y = d$ } laut Beding.

Um hier die unbekannten Größen etwas geschwinder zu finden, addire man beyde Gleichungen zusammen, so erhält man $2x = s + d$; also $x = \frac{s + d}{2} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$; sodann ziehe man die untere von der obern ab, so erhält man $2y = s - d$, also $y = \frac{s - d}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$. Wenn also zwey Zahlen durch ihre Summe, und durch ihre Differenz bestimmt werden sollen, so ist die größere Zahl gleich der halben Summe mehr der halben Differenz, und die kleinere ist gleich der halben Summe weniger der halben Differenz.

In unserem Beyspiele ist $x = \frac{17}{2} + \frac{7}{2} = 12$, und $y = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = 5$.

2.

2. Aufgabe. Ein Wirth wird gefragt, was er für Weine habe? Er antwortet: 2 Maß von der 1ten, 2 Maß von der 2ten, und 1 Maß von der 3ten Gattung kosten zusammen 1 Fl.; 2 Maß von der 1ten, 3 Maß von der 2ten, und 4 Maß von der 3ten Gattung kosten 2 Fl.; 10 Maß von der 1ten, 4 Maß von der 2ten und 2 Maß von der 3ten Gattung kosten 3 Fl. Was kostet wohl eine Maß von jeder Gattung?

Auflösung. Es sey der Preis einer Maß von der 1ten Gattung $= x$, von der 2ten $= y$, und von der 3ten $= z$ Kr., so ist laut Beding.

$$2x + 2y + z = 60 \quad - \quad - \quad - \quad A$$
$$2x + 3y + 4z = 120 \quad - \quad - \quad - \quad B$$
$$10x + 4y + 2z = 180 \quad - \quad - \quad - \quad C$$

Um die vorhergehende Auflösung mittelst der Subtraktion auch hier anwenden zu können, muß man trachten, eine, oder die andere Gleichung so zu verändern, damit durch die Addition oder Subtraktion der Gleichungen eine unbekannte Größe nach der andern weggeschafft werde. Dieses könnte hier unter andern auch auf folgende Art geschehen: Man ziehe die Gleichung A von der Gleichung B ab, so verschwindet x; ferner multiplizire man die Gleichung A mit 5, damit x in selber den nämlichen Koeffizienten, wie in der Gleichung C erhalte; so ist

$y + 3z = 60$ - - D durch Subtrakt. A von B
$6y + 3z = 120$ - - E durch Subtrakt. C von $5A$

Weil hier z schon in beyden Gleichungen den nämlichen Koeffizienten hat, so ziehe man D von E ab, so erhält man, $5y = 60$; also $y = 12$. Dieser Werth von y in der Gleichung D substituirt, giebt $z = 16$; und beyde Werthe in A substituirt geben $x = 10$.

3. Aufgabe. Der algebraische Ausdruck $n^4x + n^3y + n^2z + nu$, als eine Funktion von n nach (§. 57.) soll so beschaffen seyn, daß, wenn $n = 1$ gesetzt wird, der ganze Ausdruck ebenfalls $= 1$ sey, setzet man hingegen $n = 2$, so soll 9, für $n = 3$ soll 36, für $n = 4$ soll 100 zum Vorschein kommen. Was müssen wohl die Größen x, y, z, u für Werthe haben?

Auflösung. Man setze in dem gegebenen Ausdruck einmal $n = 1$, dann $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, so erhält man folgende 4 Gleichungen

$$\begin{array}{rl}
x + y + z + u = 1 & \text{- - -}\ A \\
16x + 8y + 4z + 2u = 9 & \text{- - -}\ B \\
81x + 27y + 9z + 3u = 36 & \text{- - -}\ C \\
256x + 64y + 16z + 4u = 100 & \text{- - -}\ D
\end{array}$$

Die unbekannten Größen können wieder auf die vorige Art durch Subtraktion am leichtesten entwickelt werden; denn es ist

$$\begin{array}{rll}
x + y + z + u = 1 & \text{-}\ A & \\
15x + 7y + 3z + u = 8 & \text{-}\ E & \text{durch Subtr. } A \text{ von } B \\
65x + 19y + 5z + u = 27 & \text{-}\ F & \text{durch Subtr. } B \text{ von } C \\
175x + 37y + 7z + u = 64 & \text{-}\ G & \text{durch Subtr. } C \text{ von } D \\
\hline
14x + 6y + 2z = 7 & \text{-}\ H & \text{durch Subtr. } A \text{ von } E \\
50x + 12y + 2z = 19 & \text{-}\ I & \text{- - } E \text{ von } F \\
100x + 18y + 2z = 37 & \text{-}\ K & \text{- - } F \text{ von } G \\
\hline
36x + 6y = 12 & \text{- -}\ L & \text{durch Subtr. } H \text{ von } I \\
60x + 6y = 18 & \text{- -}\ M & \text{- - } I \text{ von } K \\
\hline
\text{endlich } 24x = 6 & \text{- -} & \text{durch Subtr. } L \text{ von } M
\end{array}$$

woraus $x = \frac{1}{4}$ folget.

Dieser Werth in L substituirt giebt $y = \frac{1}{2}$; beyde Werthe für x und y in H substituirt, geben $z = \frac{1}{4}$; und endlich alle drey Werthe in A substituirt, geben $u = 0$. Es ist demnach die gesuchte Funktion $= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$.

4.

4. Aufgabe. Peter klagte dem Paul, daß er so wenig Geld habe: Du hast nicht Ursache zu klagen, erwiderte Paul; denn wenn du mir einen Gulden gäbest, so hätten wir erst gleichviel; würde ich dir hingegen einen Gulden geben, dann hättest du noch einmal so viel Geld als ich. Wie viel Gulden hatte jeder Geld?

Auflösung. Die Anzahl der Gulden des Peters sey $= x$, und des Pauls $= y$. Würde nun Peter dem Paul einen Gulden geben, so hätte Peter $x - 1$, und Paul $y + 1$; und da alsdann beyde gleichviel haben sollen, so ist $x - 1 = y + 1$. Würde hingegen Paul dem Peter 1 Fl. geben, so hätte Peter $x + 1$, und Paul $y - 1$; und weil alsdann Peter noch einmal so viel, als Paul haben soll, so ist $x + 1 = 2(y - 1)$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = y + 2$; substituirt man diesen Werth von x in der zweyten Gleichung, so ist $y + 2 + 1 = 2(y - 1)$; woraus $y = 5$ folget; also ist $x = 5 + 2 = 7$.

5. Aufgabe. Zwey Kanonier haben zusammen 1000 Patronen gefüllet, und gleichviel Pulver verwendet: der erste spricht zum zweyten: Hätte ich so viel Patronen, als wie du, gefüllet, so hätte ich 18 Zentner Pulver verarbeitet; und der zweyte antwortet: Hätte ich nur so viel Patronen wie du gefüllet, so würde ich nur 8 Zentner Pulver verarbeitet haben. Wie viel Patronen hatte jeder gefüllet, und mit wie viel Pulver?

Auflösung. Die Anzahl der Patronen des ersten sey $= x$, und des zweyten $= y$; so ist das verwendete Pulver des ersten nach seiner Aussage $\frac{18x}{y}$ Zentner, wegen y Patr. : 18 Z. $= x$ Patr. : $\frac{18x}{y}$ Zentner; und das verwendete Pulver des zweyten ist nach seiner Aussage $\frac{8y}{x}$, wegen x Patr. : 8 Zent.

 =

$= y$ Patr. : $\frac{8y}{x}$ Zent. Da aber beyde gleichviel verwendet haben sollen, so ist $\frac{18x}{y} = \frac{8y}{x}$. Ferner ist $x + y = 1000$, weil beyde miteinander 1000 Patronen angefüllt haben sollen. Aus der ersten Gleichung ist $18x^2 = 8y^2$, nämlich $x = \frac{2y}{3}$; substituirt man diesen Werth in der andern Gleichung, so ist $\frac{2y}{3} + y = 1000$, woraus $y = 600$ folget. Also $x = 1000 - 600 = 400$, und das von jedem verwendete Pulver ist $\frac{18x}{y} = \frac{8y}{x} = 12$ Zentner.

Wäre aber die Bedingung der Aufgabe folgendermassen gestellet: Der erste spricht zum zweyten: Hätte ich jede Patrone mit so viel Pulver gefüllet, wie du die deinigen, so würde ich nur $a = 562\frac{1}{2}$ Pf. Pulver verwendet haben; und der zweyte sagt: Hätte ich meine Patronen mit so viel Pulver gefüllet, wie du die deinigen, so hätte ich $b = 1562\frac{1}{2}$ Pf. verwendet; so wäre wieder, wenn man die Anzahl der Patronen des ersten mit x, und die des zweyten mit y benennet, $x + y = 1000$.

Ferner ist das Pulver, welches der zweyte zu einer Patrone verwendet hat $= \frac{a}{x}$ Pf.; denn es ist nach Aussage des ersten x Patr. : a Pf. $= 1$ Patr. : $\frac{a}{x}$ Pf.; und nach Aussage des zweyten ist y Patr. : b Pf. $= 1$ Patr. : $\frac{b}{y}$ Pf. $=$ dem Pulver, welches der erste zu einer Patrone verwendet hat; folglich hat der erste zu allen Patronen $\frac{bx}{y}$ Pf., und der zweyte

$\frac{ay}{x}$ Pf. verwendet; es ist demnach $\frac{bx}{y} = \frac{ay}{x}$, weil beyde gleichviel Pulver verwendet haben sollen. Aus der zweyten Gleichung ist $x = y\sqrt{\frac{a}{b}} = y\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}y$, wenn man für a und b ihre Werthe setzet. Dieser Werth in der ersten Gleichung substituirt giebt $\frac{3}{5}y + y = 1000$, woraus $y = 625$ folgt; also ist $x = 1000 - 625 = 375$.

6. Aufgabe. Zwey Wasserröhren haben ein Gefäß von $a = 21$ Eymer mit Wasser angefüllet, indem die erste $b = 2$ Stunden, und die zweyte $c = 3$ Stunden geflossen ist. Ein andersmal haben eben diese 2 Röhren ein Behältniß von $d = 51$ Eymer angefüllet, da die erste $f = 7$, und die andere $g = 6$ Stunden geflossen ist. Wie viel Stunden werden beyde miteinander fliessen müssen, damit selbe ein Behältniß von $h = 100$ Eymer anfüllen?

Hier sieht man leicht ein, daß es nur auf die Menge des Wassers ankömmt, so jede Röhre in einer Stunde giebt. Es sey darum die Menge des Wassers, so die erste Röhre in einer Stunde giebt $= x$ Eymer, so giebt sie in b Stunden bx, und in f Stunden fx Eymer. Die Menge des Wassers, so die zweyte Röhre in einer Stunde giebt sey $= y$, so giebt sie in c Stunden cy, und in g Stunden gy Eymer. Es ist demnach $bx + cy = a$, und $fx + gy = d$. Aus der ersten Gleichung ist $x = \frac{a - cy}{b}$, und aus der zweyten ist $x = \frac{d - gy}{f}$; also auch $\frac{a - cy}{b} = \frac{d - gy}{f}$, woraus $y = \frac{af - bd}{cf - bg} = \frac{21 . 7 - 2 . 51}{3 . 7 - 2 . 6} = 5$ Eymer, und $x = \frac{21 - 3 . 5}{2} = 3$ Eymer. Beyde Röhren zusammen geben also $5+3=8$ Eymer in einer Stunde; folglich brauchen sie, um 100 Eymer zu füllen $\frac{100}{8} = 12\frac{1}{2}$ Stunden.

7. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe von der Summe ihrer Quadrate abgezogen die Differenz $78 = a$, und deren Summe zu ihrem Produkte addiret die Zahl $39 = \frac{a}{2}$ zum Vorschein bringet.

Auflösung. Es sey die größere Zahl $= x$, und die kleinere $= y$; so ist laut Bedingung

$$x^2 + y^2 - x - y = a \quad \text{- - - - -} \quad A$$

$$xy + x + y = \frac{a}{2} \quad \text{- - - - -} \quad B$$

Wenn man hier, so wie bisher gezeigt worden, arbeiten wollte, so würde man in eine verwickelte Gleichung vom 4ten Grade gerathen; jedoch lassen sich aus diesen Gleichungen die unbekannten Größen auf folgende Art bestimmen:

Man multiplizire die Gleichung B mit 2, addire sie sodann einmal zur Gleichung A, und ziehe sie auch von solcher ab, so erhält man durch die Addition

$$x^2 + y^2 - x - y + 2xy + 2x + 2y = 2a$$

nämlich $(x+y)^2 + (x+y) = 2a$ - - - C

und durch die Sutraktion erhält man

$$x^2 + y^2 - x - y - 2xy - 2x - 2y = 0$$

nämlich $(x-y)^2 - 3(x+y) = 0$

oder $(x-y)^2 = 3(x+y)$ - - - - - D

Nun sehe man $(x+y)$ in der Gleichung C für eine einnamige Größe an, und ergänze das Quadrat, so ist

$(x+y)^2 + (x+y) + (\frac{1}{2})^2 = 2a + \frac{1}{4}$, woraus $(x+y) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(2a + \frac{1}{4})} = 12$ ist. Diesen Werth substituire man in der Gleichung D, so ist $(x-y)^2 = 3 \cdot 12$; also $(x-y) = \sqrt{36} = 6$.

Da

Da nun $x + y = 12$
und $x - y = 6$
so ist $x = 9$, und $y = 3$, vermög (§. 222. Aufg. 1.)

Oder auch, man benenne die halbe Summe der zwey gesuchten Zahlen mit x, und die halbe Differenz dieser Zahlen mit y; so ist vermög (§. 222. Aufg. 1.)
die größere gesuchte Zahl $= x + y$
und die kleinere $= x - y$
folglich ist laut Bedingung der Aufgabe
$(x + y)^2 + (x - y)^2 - 2x = a$
nämlich $2x^2 + 2y^2 - 2x = a$ - - - A
und $(x + y)(x - y) + 2x = \frac{1}{2}a$
nämlich $x^2 - y^2 + 2x = \frac{1}{2}a$ - - - B
Multipliziret man nun die Gleichung B mit 2, und addiret selbe zu der Gleichung A, so erhält man
$4x^2 + 2x = 2a$,
woraus man durch die Ergänzung des Quadrats findet

$$x = \frac{-1 + \sqrt{(8a + 1)}}{4} = \frac{-1 + 25}{4} = 6$$

Substituiret man ferner diesen gefundenen Werth in der Gleichung B, so ergiebt sich $y = 3$; folglich ist die größere gesuchte Zahl $x + y = 6 + 3 = 9$, und die kleinere $x - y = 6 - 3 = 3$ wie vorhin.

8. Aufgabe. Es sind drey Klumpen Metall, jeder aus Gold, Silber, und Kupfer zusammengeschmolzen:

im 1ten sind	2 Loth Gold,	4 L. Silber,	8 L. Kupfer
im 2ten -	3 - -	9 - -	6 - -
im 3ten -	10 - -	5 - -	15 - -

Wie viel Lothe müssen von jedem Klumpen genommen werden, damit man einen 4ten Klumpen erhalte, worinn 4 Loth Gold, 6 Loth Silber, und 9 Loth Kupfer enthalten sind?

Auflösung. Man nehme vom 1ten Klumpen x Loth, vom 2ten y Loth, und vom 3ten z Loth;

so ist beym 1ten $\frac{2x}{14}$ L. Gold, $\frac{4x}{14}$ L. Silber, und $\frac{8x}{14}$ L. Kupfer,

beym 2ten $\frac{3y}{18}$ = $\frac{9y}{18}$ = $\frac{6y}{18}$ =

und beym 3ten $\frac{10z}{30}$ = $\frac{5z}{30}$ = $\frac{15z}{30}$ =

Es ist demnach laut Beding $\frac{2x}{14}+\frac{3y}{18}+\frac{10z}{30}=4$ = = A

$$\frac{4x}{14}+\frac{9y}{18}+\frac{5z}{30}=6 \quad = \quad = \quad B$$

$$\frac{8x}{14}+\frac{6y}{18}+\frac{15z}{30}=9 \quad = \quad = \quad C$$

woraus $x=7$, $y=6$, und $z=6$ gefunden wird.

9. Aufgabe. Drey spielten miteinander Pharo: im ersten Spiele hatte der 1te die Bank; die zwey übrigen setzten jeder die Hälfte ihres Geldes, und sie gewonnen; im zweyten Spiele hielte der 2te die Bank; beyde übrigen setzten die Hälfte ihres Geldes, und gewonnen ebenfalls; hiemit übernimmt der 3te die Bank; die zwey übrigen setzten wieder die Hälfte ihres Geldes, und auch hier verlohr der Banquier. Am Ende des dritten Spieles zählten sie ihr Geld, und fanden, daß jeder 27 Dukaten hatte. Wie viel hatte wohl jeder im Anfange?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Dukaten, so der 1te beym Anfange des ersten Spieles hatte $=x$, jene des 2ten $=y$, und des 3ten $=z$; so hat am End des ersten Spieles

der 1te $x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=\frac{2x-y-z}{2}$ Dukaten.

der 2te $y+\frac{y}{2}=\frac{3y}{2}$ Duk.

der 3te $z+\frac{z}{2}=\frac{3z}{2}$ Duk.

Am

Am Ende des zweyten Spieles hat

der 1te $\frac{2x-y-z}{2} + \frac{2x-y-z}{4} = \frac{6x-3y-3z}{4}$

der 2te $\frac{3y}{2} - \frac{2x+y+z}{4} - \frac{3z}{4} = \frac{7y-2x-2z}{4}$

und der 3te $\frac{3z}{2} + \frac{3z}{4} = \frac{9z}{4}$

Und am Ende des dritten Spieles hat

der 1te $\frac{6x-3y-3z}{4} + \frac{6x-3y-3z}{8} = \frac{18x-9y-9z}{8}$

der 2te $\frac{7y-2x-2z}{4} + \frac{7y-2x-2z}{8} = \frac{21y-6x-6z}{8}$

und der 3te $\frac{9z}{4} - \frac{6x+3y+3z}{8} - \frac{7y+2x+2z}{8} = \frac{23z-4x-4y}{8}$

Es ist demnach $\frac{18x-9y-9z}{8} = 27$: : : A

$$\frac{21y-6x-6z}{8} = 27 \quad : : : \quad B$$

$$\frac{23z-4x-4y}{8} = 27 \quad : : : \quad C$$

Wenn man die Gleichung B mit 3 multiplizirt, und zu A addirt, so erhält man

$$\frac{54y-27z}{8} = 4 \cdot 27 \quad : : : : : \quad E$$

Wenn man ferner die Gleichung B mit 2, die Gleichung C aber mit 3 multiplizirt, und B von C abziehet, so ist

$$\frac{81z-54y}{8} = 27 \quad : : : : : : : \quad D$$

Endlich E und D zusammen addirt giebt

$\frac{54z}{8} = 5 \cdot 27$; woraus $z = 20$ folget.

Die-

Dieser Werth für z in D substituirt giebt $y = 26$; und beyde Werthe in A substituiret geben $x = 35$. Es hatte demnach im Anfange der 1te 35, der 2te 26, und der 3te 20 Dukaten.

10. Aufgabe. Drey Regimenter werden zu einer gewissen Arbeit angestellet: das 1te und 2te Regiment hat eine eben solche Arbeit gemeinschaftlich in $a = 70$ Tägen, das 1te und 3te in $b = 84$ Tägen, und das 2te und 3te in $c = 140$ Tägen vollendet. Nun ist die Frage, in wie viel Tagen alle 3 Regimenter miteinander diese Arbeit verfertigen werden, und wie viel Täge ein jedes insbesondere dazu verwenden würde?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Täge, so das 1te Regiment allein zu dieser Arbeit verwenden würde $= x$, des 2ten Regiments $= y$, und des 3ten $= z$;

So wird vermög (§. 219. Aufgabe 13.) das 1te und 2te Regiment zusammen zu dieser Arbeit $\frac{xy}{x+y}$ Täge, das 1te und 3te zusammen $\frac{xz}{x+z}$, und das 2te und 3te zusammen $\frac{yz}{y+z}$ Täge brauchen. Es ist demnach $\frac{xy}{x+y} = a$; $\frac{xz}{x+z} = b$; und $\frac{yz}{y+z} = c$; woraus $z = \frac{2abc}{ab+ac-bc} = 420$, $y = \frac{2abc}{ab+bc-ac} = 210$, und $x = \frac{2abc}{bc+ac-ab} = 105$ gefunden wird; und folglich brauchen alle 3 Regimenter zusammen $\frac{105 \cdot 210 \cdot 420}{105 \cdot 210 + 105 \cdot 420 + 210 \cdot 420} = 60$ Täge vermög (§. 219. Aufg. 13.).

11. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die aus 3 Ziffern von solcher Beschaffenheit besteht, daß die Summe der

Qua-

Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Rang zu sehen = 104, das Quadrat aber der mittlern Ziffer um 4 größer sey, als das doppelte Produkt der beyden äussern; ferner, wenn man von der gesuchten Zahl die Zahl 594 abzieht, so sollen die gesuchten 3 Ziffern, aus welchen die Zahl besteht, in verkehrter Ordnung zum Vorschein kommen. Die Frage ist nach der Zahl?

Auflösung. Es sey die 1te Ziffer links = x, die mittlere = y, und die letzte = z, so ist laut Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 104 \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \quad A$$

$$y^2 = 2xz + 4 \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \quad B$$

$$100x + 10y + z - 594 = 100z + 10y + x \quad - \; - \quad C$$

vermög (§. 6.).

Aus C findet man $x = \frac{99z + 594}{99} = z + 6$

Dieser Werth in A und B substituirt, giebt

$$z^2 + 12z + 36 + y^2 + z^2 = 104 \quad - \; - \; - \quad D$$

$$y^2 = 2z^2 + 12z + 4 \quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \quad E$$

Diese Gleichung E von D abgezogen, giebt

$2z^2 + 12z + 36 = 104 - 2z^2 - 12z - 4$, woraus $z = -3 + \sqrt{25} = 2$ folgt. Dieser Werth in der Gleichung E und C substituirt, giebt $y = 6$, und $x = 8$. Es ist demnach die gesuchte Zahl 862.

Folgende Beyspiele wird ein fleissiger Anfänger nunmehr selbst leicht ausarbeiten können.

I. Pythagoras wurde gefragt, wie viel er Schüler habe? er antwortete: die Hälfte studirt die Philosophie, der dritte Theil die Mathematik, und die übrigen, welche sich noch im Stillschweigen üben, samt den drey Schülern, welche ich eben jetzt angenommen habe, machen den vierten Theil meiner vorgehabten Schüler aus.

II. Eine Heidinn gieng in den Tempel Jupiters, und bat, er möchte ihr Geld, das sie bey sich hatte, verdoppeln;

Ju-

Jupiter that es, und sie opferte zur Dankbarkeit 2 Fl. Mit dem Uiberreste gieng sie in den Tempel des Apollo, bat ein gleiches, und opferte abermal zur Dankbarkeit für die Verdopplung ihres bey sich habenden Geldes 2 Fl.; darauf verfügte sie sich nach Haus, zählte ihr Geld, und fand mit Verwunderung, daß sie der Verdoppelung ungeachtet, nur 1 Fl. habe. Nun ist die Frage, wie viel sie im Anfang Geld gehabt habe?

III. Ein Sterbender hinterließ eine schwangere Frau, und ein reines Vermögen = a (z. B. 9000 Fl.). Sein letzter Wille war dieser: gebährst du einen Sohn, so soll derselbe von der Verlassenschaft $m$mal so viel als du (z. B. 3mal so viel) haben; gebährst du hingegen eine Tochter, so nimm du $n$mal so viel wie sie (z. B. 2mal so viel). Nun fügte es sich, daß die Frau einen Sohn und eine Tochter gebahr. Wie soll nun das Vermögen getheilet werden?

IV. Ein Meister dingt einen Gesellen also auf: für jeden Tag, den du für mich arbeitest, zahle ich dir 7 Groschen: und für jeden Tag den du für deine Geschäfte anwendest, zahlst du mir für die Kost 3 Groschen. Nach 50 Tägen trat der Gesell aus diesem Dienste, er machte mit seinem Herrn die Abrechnung, und es fügte sich, daß der Gesell vom Meister zwey Gulden zu fodern hatte. Nun ist die Frage, durch wie viel Tage dieser Gesell für seinen Herrn, und durch wie viel Tage er für sich gearbeitet hat?

V. Zwey Bauern säeten miteinander 24 Metzen aus; der erste spricht zum zweyten: wenn mir jeder Metzen so viel wieder bringet, als du gesäet hast, so werde ich 135 Metzen bekommen. Wie viel hatte jeder gesäet?

VI. Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil; nimmt aber am Ende eines jeden Jahres 1000 Fl. zur Erhaltung seiner Familie hinweg; und wird doch dabey am Ende des dritten Jahres doppelt

so

so reich, als er im Anfange des ersten Jahres war. Wie reich war dieser Kaufmann?

VII. Es hatte Jemand zwey Goldstuffen zu verkaufen; er begehrte für jedes Loth des ersten Stückes halb so viel Gulden als das zweyte Stück Lothe wiegt, und die Anzahl dieser Gulden beträgt eben so viel, als beyde Stücke zusammen Lothe haben. Der Käufer nimmt beyde Stücke, und zahlt für jedes Loth eines jeden Stückes eben so viele Gulden, als Lothe in dem Stücke enthalten sind; und nach diesem Vergleiche beträgt die ganze Zahlung 45 Fl. Wie viele Lothe wiegt ein jedes Stück?

VIII. Acht Pferde haben in sieben Wochen eine Wiese von 400 Quadratklafter dergestalt abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches im Anfang schon bereits da stand, als auch jenes verzehrten, welches während dieser Zeit hervorwuchs. Auf die nämliche Art haben 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 500 Quadratklaftern abgeweidet. Wie viel Pferde werden auf eben diese Art durch 12 Wochen auf einer Wiese von 600 Quadratklaftern sich ernähren können?

IX. Zwey Größen zu finden, deren Summe, Produkt, und Differenz der Quadrate einander gleich sind.

§. 223.

Bey den verwickelten quadratischen Gleichungen von der Gestalt $x^4 + Ax^2 = B$, und auch in verschiedenen andern Fällen kömmt der Ausdruck $x = \sqrt{(a + \sqrt{b})}$ zum Vorschein; dieser Ausdruck läßt sich noch abkürzen, wenn $(a^2 - b)$ ein vollkommenes Quadrat seyn sollte; es ist nämlich

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{[\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}]} \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}]}.$$

Um dieses einzusehen setze man

$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, so ist

$a \pm \sqrt{b} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2 = y \pm 2\sqrt{yz} + z$

nun

nun setze man die irrationalen Glieder des ersten Theils dieser Gleichung, den irrationalen Gliedern des zweyten Theils gleich, und folglich auch die rationalen Glieder den rationalen gleich, so ist $\sqrt{b} = 2\sqrt{yz}$, und $a = y + z$; aus diesen Gleichungen findet man $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}$, und $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}$; es ist demnach

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}\right]} \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}\right]}$$

z. B. $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt{(3 + \sqrt{8})} = 1 + \sqrt{2}$

$\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})} = \sqrt{(7 + \sqrt{48})} = 2 + \sqrt{3}$

$\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})} = \sqrt{(11 - \sqrt{72})} = 3 - \sqrt{2}$.

Von der Auflösung der unbestimmten Aufgaben.

§. 224.

Wenn aus den Bedingungen einer Aufgabe nicht so viele Gleichungen abgeleitet werden können, als unbekannte Größen vorhanden sind, so ist es ein Zeichen, daß die vorgelegte Aufgabe unbestimmt sey; und es können für jede unbekannte Größe mehrere, ja zuweilen unendlich viele Werthe gefunden werden, die theils positiv, theils negativ, ganz, oder gebrochen sind, und die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Art, wie solche gefunden werden, ist folgende: Man schaffe nach (§. 221.) durch Verminderung der Gleichungen so viele unbekannte Größen weg, als möglich ist, so wird man zuletzt eine Gleichung erhalten, in welcher sich noch eine unbekannte Größe mehr befindet, als anfangs Gleichungen zu wenig waren. In dieser letzten Gleichung sehe man nur eine einzige Größe für unbekannt an, für die übrigen unbekannten Größen aber nehme man beliebige Werthe an, und bestimme erstere dadurch; diese Werthe substituire man in den vorhergehenden Gleichungen wie (§. 221.), so werden auch die übrigen weggeschafften unbekannten Größen gefunden. Als z. B.

1) Drey Zahlen zu finden, deren Summe $= 15$, die Summe der ersten und dritten aber der Differenz gleich sey, wenn man die erste von der zweyten abziehet.

Auflösung. Benennet man die 1te Zahl mit x, die 2te mit y, und die 3te mit z, so ist laut Beding.

$x + y + z = 15$ ⸗ ⸗ ⸗ A
und $x + z = y - x$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ B

Aus der Gleichung A ist $x = 15 - y - z$, und aus

B ist $x = \frac{y-z}{2}$; also auch

$$15 - y - z = \frac{y-z}{2} \quad ⸗ \; ⸗ \; ⸗ \quad C$$

woraus $y = 10 - \frac{1}{3}z$, eine Gleichung, worinn noch 2 unbekannte Gräßen sind; weil aus den Bedingungen der Aufgabe nm eine Gleichung zu wenig abgeleitet werden konnte. Man nehme demnach in der Gleichung C für z einen beliebigen positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Werth an, bestimme dadurch y, und substituire beyde Werthe in der Gleichung A, so läßt sich auch x finden.

Es sey $z = 1, 2, 3, 4, 5,$ ⸗ ⸗ ⸗ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ⸗
so ist $y = 9\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}, 9, 8\frac{2}{3}, 8\frac{1}{3}$ ⸗ ⸗ ⸗ $9\frac{5}{6}, 9\frac{8}{9}$ ⸗
und $x = 4\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 3, 2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3},$ ⸗ ⸗ ⸗ $4\frac{2}{3}, 4\frac{7}{9}$ ⸗

2) Vier Zahlen zu finden, deren Summe $= 18$ ist, und wenn man zu der ersten das 2fache der 2ten, das 3fache der 3ten, und das 4fache der 4ten addirt, so solle 50 zum Vorschein kommen.

Auflösung. Es sey die 1te Zahl $= x$, die zweyte $= y$, die 3te $= z$, und die vierte $= u$, so ist laut Beding.

$x + y + z + u = 18$ ⸗ ⸗ ⸗ A
und $x + 2y + 3z + 4u = 50$ ⸗ ⸗ B

Aus

Aus der Gleichung A ist $x = 18 - y - z - u$; und aus B ist $x = 50 - 2y - 3z - 4u$; also auch

$$18 - y - z - u = 50 - 2y - 3z - 4u \quad \text{=} \quad C$$

woraus folgt $y = 32 - 2z - 3u$, eine Gleichung, die noch 3 unbekannte Größen enthält, weil aus den Bedingungen der Aufgabe um 2 Gleichungen zu wenig abgeleitet werden konnten. Man nehme demnach in der Gleichung C für z und u willkührliche Werthe an, bestimme daraus y, und substituire diese Werthe in A, so läßt sich auch x finden. Es sey nun z. B.

$z =$	1,	2,	3,	4,	5,	6	= = =	-1 = =
und $u =$	2,	3,	4,	5,	6,	7	= = =	-7 = =
so ist $y =$	24,	19,	14,	9,	4,	-1	= = =	$+9$ = =
und $x =$	-9,	-6,	-3,	0,	3,	6	= = =	$+1$ = =

Und so könnte für z und u jeder beliebige andere Werth angenommen werden, wo sich sodann y und x bestimmen läßt. Man sieht aus diesem, daß eine Aufgabe um so unbestimmter ist, jemehr unbekannte Größen in der letzten Gleichung übrig bleiben.

3) Ein Kaufmann ist 100 Fl. schuldig: sein Gläubiger begehrt zweyerley Tuch dafür; die Elle vom 1sten kostet 9 Fl., und vom 2ten 7 Fl. Wie viel soll er ihm von jeder Gattung geben?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Ellen von der ersten Gattung $= x$, und von der zweyten $= y$, so muß $9x + 7y = 100$ seyn, woraus $y = \dfrac{100 - 9x}{7}$ folget; und da keine Gleichung mehr vorhanden ist, so muß wieder für x ein beliebiger Werth angenommen werden. Weil aber hier in dieser Aufgabe keine unbekannte Größe negativ erscheinen darf, so kann x nur so groß angenommen werden, damit $9x < 100$, oder

x

$x < \frac{100}{9}$ ist, weil sonst y negativ ausfallen müßte; setzt man demnach $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$ so ist $y = 13, \frac{82}{7}, \frac{73}{7}, \frac{64}{7}, \frac{55}{7}, \frac{46}{7}, \frac{37}{7}, 4, \frac{19}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{7},$ Und so könnten auch für x was immer für Brüche angenommen werden, wenn sie nur $\frac{100}{9}$ nicht übersteigen.

4) Es hat Jemand dreyerley Weine: vom ersten kostet die Maß 36 Kr., vom zweyten 24 Kr., und vom dritten 16 Kr.; er will hievon einen Eymer mischen, dessen Maß 20 Kr. werth ist. Wie viel kann von jedem genommen werden?

Auflösung. Die Anzahl der Maßen vom ersten sey $= x$, vom 2ten $= y$, und vom 3ten $= z$, so ist

$$x + y + z = 40 \quad \text{= = =} \quad A$$
und
$$36x + 24y + 16z = 40 \,.\, 20 \quad \text{=} \quad B$$

Aus der Gleichung A ist $x = 40 - y - z$, und aus B ist $x = \frac{40 . 20 - 24y - 16z}{36} = \frac{200 - 4z - 6y}{9}$; also auch $40 - y - z = \frac{200 - 4z - 6y}{9}$, woraus $y = \frac{160 - 5z}{3}$, und $x = \frac{2z - 40}{3}$, folget. Weil nun hier ebenfalls keine negativen Größen zugelassen werden können, so muß $5z < 160$ oder $z < 32$ angenommen werden, sonst wäre $y = 0$, oder negativ; es muß aber auch $z > 20$, sonst ist $x = 0$, oder negativ. Man setze demnach

	$z = 21,$	$22,$	$23,$	24	= = =		$30,$	31
so ist	$y = 18\frac{1}{3},$	$16\frac{2}{3},$	$15,$	$13\frac{1}{3}$	= = =		$3\frac{1}{3},$	$1\frac{2}{3}$
und	$x = \frac{2}{3},$	$1\frac{1}{3},$	$2,$	$2\frac{2}{3}$	= = =		$6\frac{2}{3},$	$7\frac{1}{3}$

§. 225.

Es ist aus dem Vorhergehenden zu ersehen, daß bey den unbestimmten Aufgaben unendlich viele Werthe für die unbekannten Größen gefunden werden können, wodurch die Bedingungen der Aufgabe erfüllet werden. Allein bey den meisten Aufgaben wird die Anzahl dieser Werthe ungemein dadurch eingeschränket, daß die gesuchten Größen nicht nur positiv, sondern auch ganze Zahlen seyn müssen. Hiedurch ereignet sich oft der Fall, daß nur einige wenige, ja zuweilen gar keine Werthe für die unbekannten Größen gefunden werden können, die den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge leisten. Die Art, unter solchen Bedingungen alle mögliche Werthe der unbekannten Größen zu finden, zeigen folgende Beyspiele:

1) Es sollen aus 12 Zentner Pulver 1000 Stuckpatronen, und zwar die 3pfündigen mit 1, die 6pfündigen mit 2, und die 12pfündigen mit 3 Pfund Pulver gefüllet werden. Wie viel kann wohl von jeder Gattung erzeugt werden?

Auflösung. Es sey die Anzahl der 3pfündigen $= x$, der 6pfündigen $= y$, und der 12pfündigen $= z$, so ist

$$x + y + z = 1000 \quad - \quad - \quad - \quad A$$

und $$x + 2y + 3z = 1200 \quad - \quad - \quad - \quad B$$

Zieht man die Gleichung A von B ab, so ist $y + 2z = 200$; also $y = 200 - 2z$. Man sieht aus dieser Gleichung, daß, wenn man für z eine ganze Zahl annimmt, auch y, und folglich auch x eine ganze Zahl seyn müsse.

Es sey also $z = 1, \ 2, \ 3, \ 4 \ - \ 99$
so ist $y = 198, \ 196, \ 194, \ 192 \ - \ 2$
und $x = 801, \ 802, \ 803, \ 804 \ - \ 899$

2) Es sind in einem Gießhause zweyerley Kanonenröhre gegossen worden: von der 1ten Gattung wiegt jedes 16,

und

und von der 2ten 25 Zentner; und doch hat man zur zweyten Gattung um einen Zentner Metall weniger verbraucht, als zur ersten. Wie viel waren von jeder Gattung?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Kanonen von der ersten Gattung $= x$, und von der zweyten $= y$, so ist

$$16x - 1 = 25y; \text{ also } x = \frac{25y + 1}{16} = y + \frac{9y + 1}{16}.$$

Weil nun x eine ganze Zahl seyn muß, so kann hier für y nicht jede beliebige Zahl, sondern nur eine solche angenommen werden, damit $\frac{9y + 1}{16}$ eine ganze Zahl wird. Man setze demnach $\frac{9y + 1}{16} = A$, so ist $y = \frac{16A - 1}{9}$

$$= A + \frac{7A - 1}{9} \quad \text{. . . . .} \quad \mathfrak{A}$$

Da nun y auch eine ganze Zahl seyn muß, so muß auch $\frac{7A - 1}{9}$ eine ganze Zahl seyn. Es sey darum $\frac{7A - 1}{9} = B$,

$$\text{so ist } A = \frac{9B + 1}{7} = B + \frac{2B + 1}{7} \quad \text{. .} \quad \mathfrak{B}$$

Ferner sey, weil A eine ganze Zahl seyn soll, $\frac{2B + 1}{7} = C$,

$$\text{so ist } B = \frac{7C - 1}{2} = 3C + \frac{C - 1}{2} \quad \text{. .} \quad \mathfrak{C}$$

Und da auch B eine ganze Zahl seyn soll, so sey $\frac{C - 1}{2} = D$,

so ist $C = 2D + 1$. Da nun kein Bruch mehr übrig ist, so substituire man diesen Werth von C in der Gleichung $\mathfrak{C}$, so ist $B = 7D + 3$; dieser Werth von B in der Gleichung $\mathfrak{B}$ substituirt giebt $A = 9D + 4$; und endlich dieser Werth

 von

von A in der Gleichung A substituirt, giebt $y = 16D + 7$,
und ferner = = = = $x = 25D + 11$,
wo für D jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden darf.
Setzet man darum

$$\left.\begin{array}{lllllll} D = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \\ \text{so ist } y = & 7, & 23, & 39, & 55, & 71, & 87 \ldots \\ \text{und } x = & 11, & 36, & 61, & 86, & 111, & 136 \ldots \end{array}\right\} \text{ins unendliche.}$$

3) Es soll eine gewisse Anzahl von Gulden und Kreuzern, z. B. 4 Fl. 15 Kr. in lauter Siebnern, und Siebenzehnern ausgezahlt werden: wie viel Stücke müssen von jeder Gattung gegeben werden?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Siebner $= x$, und der Siebenzehner $= y$; so ist $7x + 17y$ Kr. $= 4 . 60 + 15$ Kr.; nämlich $7x + 17y = 255$; daraus folgt

$$x = \frac{255 - 17y}{7} = 36 - 2y + \frac{3 - 3y}{7}.$$

Es sey $\frac{3 - 3y}{7} = A$, so ist $y = \frac{3 - 7A}{3} = 1 - 2A - \frac{A}{3}$ = A.

Es sey $-\frac{A}{3} = B$, so ist $A = -3B$. Dieser Werth von A in der Gleichung A substituirt, giebt $y = 7B + 1$,
und ferner = = = = $x = 34 - 17B$.

$$\begin{array}{llll} \text{Es sey nun } B = & 0, & 1, & 2 \\ \text{so ist } \quad y = & 1, & 8, & 15 \\ \text{und } \quad x = & 34, & 17, & 0 \end{array}$$

Die Zahlung kann demnach nur auf zweyerley Art geschehen; entweder mit 34 Siebnern, und 1 Siebenzehner; oder mit 17 Siebnern, und 8 Siebenzehnern.

4) Peter ist dem Paul 12 Kr. schuldig; sie haben keine anderen Münzen, als Siebner und Siebenzehner. Wie soll Peter den Paul bezahlen?

Auf-

Auflösung. Der Peter gebe dem Paul x Siebner, dagegen gebe Paul dem Peter y Siebenzehner zurück; da nun die Schuld getilget seyn soll, so ist $7x = 17y + 12$.

Hieraus ist $x = \frac{17y+12}{7} = 2y + 1 + \frac{3y+5}{7}$.

Es sey $\frac{3y+5}{7} = A$, so ist $y = \frac{7A-5}{3} = 2A - 1 + \frac{A-2}{3} = A$.

Es sey $\frac{A-2}{3} = B$, so ist $A = 3B + 2$. Dieser Werth

von A substituirt giebt $y = 7B + 3$

und ferner = = $x = 17B + 9$

Es sey nun $B = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ = $-1, -2, -3$

so ist $y = 3,\ 10,\ 17,\ 24$ = $-4, -11, -18$

und $x = 9,\ 26,\ 43,\ 60$ = $-8, -25, -42$

Die negativen Zeichen zeigen an, daß die Zahlung verkehrtermassen geschehen könne, indem z. B. Peter dem Paul 4 Siebenzehner giebt, und von selbem 8 Siebner zurück erhält. Die Zahlungen können in beyden Fällen auf unendlich viele Arten geschehen.

Da ein Siebner und ein Siebenzehner zusammen 24 Kr. betragen, und jede gerade Anzahl der Gulden in Kreuzern ausgedrückt sich durch 24 Kr. genau theilen läßt; so kann jede gerade Anzahl der Gulden in gleichviel Siebnern und Siebenzehnern ausgezahlt werden. Denn es sey a eine gerade Zahl der Gulden, so ist $\frac{a.60}{24} = \frac{a.6.10}{6.4} = \frac{a.10}{4}$ = einer ganzen Zahl; woraus die Regel fließt: daß man an die Zahl der Gulden, welche in 7nern und 17nern auszuzahlen ist, eine Null anhängen, und hernach durch 4 dividiren soll, so wird der Quotient die Anzahl der 7ner und 17ner anzeigen. Wenn z. B. 6 Fl. auszuzahlen wären, so ist $\frac{60}{4} = 15$ Siebner, und eben so viel Siebenzehner. Wäre aber eine ungerade Anzahl der Gulden in Siebnern und Siebenzehnern auszuzahlen, so kann solches zwar auf die nämliche Art erhalten werden; weil aber die Division mit 4 da nicht genau aufgeht, sondern allzeit ein halbes von 24 Kreuzern noch zu zahlen übrig bleibt, so muß solches nach voriger Aufgabe durch die Umtauschung geschehen. Z. B. Es wären 7 Fl. auf diese Art zu bezahlen, so ist $\frac{70}{4} = 17\frac{1}{2}$; wegen dieses Restes ziehe man von dem Quotienten 17 einmal 3 ab, so hat man 14 Siebenzehner, und sodann addire man 9 hinzu, so hat man 26 Siebner; oder man vermehre den Quotienten um 4, so erhält man die Siebenzehner, und vermindere denselben um 8, so hat man die Siebner.

5) Eine Zahl zu finden, welche durch 2 dividirt 1, durch 3 dividirt 2, und durch 4 dividirt 3 übrig läßt.

Auflösung. Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so müssen die drey Ausdrücke $\frac{x-1}{2}$, $\frac{x-2}{3}$, $\frac{x-3}{4}$ ganze Zahlen seyn. Man setze demnach den ersten Ausdruck $\frac{x-1}{2} = A$, so ist $x = 2A + 1$ - - - - - A

Diesen Werth substituire man in dem zweyten Ausdruck statt x, so muß $\frac{2A+1-2}{3}$ eine ganze Zahl seyn. Es sey $\frac{2A-1}{3} = B$, so ist $A = \frac{3B+1}{2} = B + \frac{B+1}{2}$ - B

Es sey $\frac{B+1}{2} = C$, so ist $B = 2C - 1$.

Dieser Werth in der Gleichung B substituirt giebt $A = 3C - 1$; und dieser Werth in der Gleichung A substituirt giebt $x = 6C - 1$ - - - - - C

Die-

Diesen Werth für x substituire man in dem dritten Ausdruck $\frac{x-3}{4}$, so muß $\frac{6C-1-3}{4} = \frac{6C-4}{4} = C-1+\frac{C}{2}$ eine ganze Zahl seyn; man setze $\frac{C}{2} = D$, so ist $C = 2D$. Setzet man nun diesen Werth für C in der Gleichung C, so ist endlich $x = 12D - 1$.

Setzet man nun $D = 1, 2, 3$: :
so ist $x = 11, 23, 35$: :

Es ist aus diesem hinlänglich zu ersehen, wie man in dergleichen Fällen zu verfahren habe; nur ist noch zu erinnern, daß, wenn in einer solchen Gleichung die Koeffizienten von x und y einen gemeinschaftlichen Faktor haben, welchen das übrige Glied in der Gleichung nicht mit gemein hat, und folglich die Gleichung sich nicht mehr abkürzen läßt, sich die unbekannten Größen x und y in ganzen Zahlen nicht finden lassen. Denn es sey in der allgemeinen Gleichung $Ax + B = Cy$, wo A, B, C ganze Zahlen vorstellen, A und C durch a theilbar, nämlich $\frac{A}{a} = D$, und $\frac{C}{a} = E$; B aber sey durch a nicht theilbar, so ist $Dx + \frac{B}{a} = Ey$, und $\frac{B}{a} = Ey - Dx$. Wären nun x und y ganze Zahlen, so sind auch Dx, und Ey ganze Zahlen, und folglich auch ihre Differenz eine ganze Zahl, welches aber hier nicht ist, da B durch a nicht theilbar ist. So z. B. lassen sich aus der Gleichung $9x = 15y - 4$ die unbekannten Größen x und y nicht in ganzen Zahlen bestimmen, weil man zuletzt den Ausdruck erhält $A = \frac{6B-4}{3} = 2B - \frac{4}{3}$. Wohl aber lassen sich aus der Gleichung $9x = 15y - 6$ die Größen x und y in ganzen Zahlen finden, weil die Gleichung

 durch

durch 3 abgekürzt $3x = 5y - 2$ giebt, wo die Koeffizienten von x und y keinen gemeinschaftlichen Faktor mehr haben.

6) Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder ein vollkommenes Quadrat ist.

Auflösung. Es sollen die Zahlen x^2, y^2, und $x^2 + y^2 = z^2$ seyn. Es sey nun $z = A + y$, so ist $x^2 + y^2 = A^2 + 2Ay + y^2$ nämlich $x^2 = A^2 + 2Ay$, woraus $y = \frac{x^2 - A^2}{2A}$ ist, und also $z = \frac{x^2 + A^2}{2A}$.

Nun kann für x und A jeder beliebige Werth angenommen werden, wodurch sich y und z bestimmen lassen; nur muß, wenn die drey Quadrate lauter ganze Zahlen seyn sollen, x ein vielfaches von A, und $x + A$ eine gerade Zahl seyn. Es sey z. B.

	$A =$	1,	1,	1	=	2,	2	=	3,	3	=
und	$x =$	3,	5,	7	=	4,	6	=	9,	15	=
so ist	$y =$	4,	12,	24	=	3,	8	=	12,	36	=
und	$z =$	5,	13,	25	=	5,	10	=	15,	39	=

7) Drey Zahlen von solcher Eigenschaft zu finden, daß sowohl die Summe von allen dreyen, als auch von jeden zweyen zusammengenommen eine vollkommene Quadratzahl sey.

Auflösung. Setzet man die drey gesuchten Zahlen $= x, y, z$, und die Wurzeln der vier Quadratzahlen u, r, s, t, so hat man

$$\begin{aligned} x + y + z &= u^2 \\ x + y &= r^2 \\ x + z &= s^2 \\ y + z &= t^2 \end{aligned}$$

vier Gleichungen, und sieben unbekannte Größen, wodurch sich in diesem Falle nichts bestimmen läßt.

Da nun diese Aufgabe so sehr unbestimmt ist, so setze man noch einige willkührliche Bedingungen hinzu, aber doch so, daß die Aufgabe noch immer unbestimmt verbleibe.

Man

Man setze z. B., daß die Wurzel r um 1 kleiner als u, und s um 1 kleiner als r sey; so erhält man folgende Gleichungen:

$$x + y + z = u^2 \quad \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} \quad A$$
$$x + y = (u - 1)^2 = u^2 - 2u + 1 \quad \text{-} \quad B$$
$$x + z = (u - 2)^2 = u^2 - 4u + 4 \quad \text{-} \quad C$$
$$y + z = t^2$$

daraus folgt $z = 2u - 1$

$$y = 4u - 4$$
$$x = u^2 - 6u + 5 = (u - 2)^2 - (2u - 1)$$
$$t = \sqrt{(6u - 5)}$$

Und nun muß man suchen eine solche Zahl für u anzunehmen, daß $\sqrt{(6u - 5)}$ eine vollkommene Quadratzahl wird. Setzet man $u = 5$, so ist auch $t = 5$, und daher $z = 9$, $y = 16$, und $x = 0$; setzet man aber $u = 9$, so ist $t = 7$, $z = 17$, $y = 32$, und auch $x = 32$; setzet man ferner $u = 21$, so ist $t = 11$, $z = 41$, $y = 80$, und $x = 320$. Man kann auch für u gebrochene Zahlen setzen; z. B. $u = \frac{3}{2}$, so ist $t = 2$, $z = 2$, $y = 2$, und $x = -\frac{7}{4}$, u. s. w.

8) Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Differenz der Würfel der Differenz der Wurzeln gleich sey.

Auflösung. Es sey die eine Zahl $= x$, und die andere $= y$, so ist vermög Bedingung $x^3 - y^3 = x - y$; daraus folgt durch die Division $x^2 + xy + y^2 = 1$, und durch fernere Reduktion $y = \frac{-x + \sqrt{(4 - 3x^2)}}{2}$ - A

Um diesen Ausdruck rational zu machen, setze man $\sqrt{(4 - 3x^2)} = nx - 2$; so ist $4 - 3x^2 = n^2x^2 - 4nx + 4$; daraus folgt $x = \frac{4n}{n^2 + 3}$.

Setzt man ferner diesen Werth für x in A, so ist $y = \frac{n^2 - 2n - 3}{n^2 + 3}$. Und nun kann man für n jeden beliebigen Werth annehmen, z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... und dadurch x und y bestimmen; für $n = 6$ ist $x = \frac{8}{13}$, und $y = \frac{7}{13}$.

Mehrere hieher gehörige analytische Untersuchungen findet man in Hrn. L. Eulers vollständ. Anleit. zur Algebra II. Th.

§. 226.

Es giebt Aufgaben, welche bestimmt zu seyn scheinen, und doch wirklich unbestimmt sind; z. B. drey Zahlen zu finden, wo die Summe der ersten und zweyten $= 40$, die Summe der zweyten und dritten $= 100$, und die Differenz der dritten und ersten $= 60$ sey. Benennet man die drey Zahlen mit x, y, z so ist laut Beding.

$$x + y = 40$$
$$y + z = 100$$
und $$z - x = 60$$

wo es scheinet, daß die Aufgabe bestimmt sey, weil eben so viele Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind. Allein die letzte Bedingung zeiget keine neue Eigenschaft der unbekannten Größen an, sondern wiederholt nur dasjenige, was die zwey ersten Bedingungen ausgedrückt haben; denn man darf nur die erste Gleichung von der zweyten abziehen, so hat man die dritte; folglich ist diese Aufgabe unbestimmt, und man findet nach (§. 224.) die Werthe der unbekannten Größen

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \quad \text{-} \quad \text{-} \quad 39$$
$$y = 39,\ 38,\ 37,\ 36,\ 35 \quad \text{-} \quad \text{-} \quad 1$$
$$z = 61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65 \quad \text{-} \quad \text{-} \quad 99$$

§. 227.

§. 227.

Endlich giebt es Aufgaben, deren Auflösung unmöglich ist, das ist, wo für die unbekannten Größen gar keine Werthe gefunden werden können, die den Bedingungen ein Genüge leisten. Dieses ereignet sich entweder, wenn die Bedingungen der Aufgabe sich selbst widersprechen, oder auch wenn die Aufgabe rationale, positive, oder ganze Zahlen fordert, und doch nur irrationale, negative, oder gebrochene von der verlangten Eigenschaft gefunden werden können. Sowohl eines als das andere erfährt man (wo die Unmöglichkeit nicht ohnehin schon aus den Bedingungen klar vor die Augen fallen sollte) wenn man aus den Gleichungen entweder etwas ungereimtes, oder für den Werth einer unbekannten Größe eine unmögliche Wurzel (§. 119. III), oder auch einen negativen oder gebrochenen Werth findet, den die Natur der Sache nicht zuläßt.

Beyspiele.

1. Aufgabe. Drey Zahlen zu finden, wo die Summe der ersten und zweyten $= 28$, die Summe der zweyten und dritten $= 30$, und die Differenz, wenn die dritte von der ersten abgezogen wird, $= 15$ sey.

Auflösung. Benennet man die drey Zahlen mit x, y, z, so ist laut Bedingung $x + y = 28$, $y + z = 30$, und $x - z = 15$. Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweyten, so ist $z - x = 2$; und diese Gleichung zu der dritten addirt giebt $x - z + z - x = 17$, nämlich $0 = 17$, welches ungeräumt ist; und folglich ist diese Aufgabe unmöglich.

2. Aufgabe. Es kauft Jemand einige Ellen Tuch, und giebt für jede Elle eben so viele Gulden, als es Ellen Tuch sind: er verkauft sie wieder, und bekommt für alle Ellen zweymal so viel Gulden als es Ellen sind, und gewinnt bey diesem Handel 5 Fl. Wie viel waren es Ellen?

Auf-

z. B. in der vorgelegten Gleichung $a^x = b$, sey $a = 27$, und $b = 177147$, wo x gesucht werden soll,

$$\begin{array}{rlr} \text{so ist } 177147 : (27)^3 = 9 & & \text{daher } m = 3 \\ 27 : (9)^1 = 3 & & n = 1 \\ 9 : (3)^2 = 1 & & p = 2 \end{array}$$

und folglich $x = 3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 3\frac{2}{3}$.

Eben so läßt sich aus der Gleichung $(512)^x = 33554432$ der Exponent x bestimmen,

$$\begin{array}{rlr} \text{denn es ist } 33554432 : (512)^2 = 128; & & \text{daher } m = 2 \\ 512 : (128)^1 = 4 & & n = 1 \\ 128 : (4)^3 = 2 & & p = 3 \\ 4 : (2)^2 = 1 & & q = 2 \end{array}$$

und folglich $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = 2\frac{7}{9}$.

Daß dieses angeführte Verfahren, den unbekannten Exponenten zu finden richtig sey, erhellet aus folgender Betrachtung:

In der Gleichung $a^x = b$ ist vermög Voraussetzung $a^m < b$, und $a^{m+1} > b$, daher kann nur $x = m + \frac{1}{y}$ seyn; und es ist sodann $a^{m+\frac{1}{y}} = b$, nämlich $a^m \cdot a^{\frac{1}{y}} = b$, und $a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^m}$. Setzet man nun den Quotienten $\frac{b}{a^m} = c$, so ist auch $a^{\frac{1}{y}} = c$, und $c^y = a$. Es sey nun wieder $c^n < a$, und $c^{n+1} > a$; daher kann $c^{n+\frac{1}{z}} = a$ seyn; und es es ist sodann $y = n + \frac{1}{z}$, wegen $c^y = a$; wo nun auch aus der Gleichung $c^{n+\frac{1}{z}} = a$, oder $c^n . c^{\frac{1}{z}} = a$ wieder folgt, $\frac{a}{c^n} = c^{\frac{1}{z}} = d$, und $d^z = c$. Es sey nun wieder $d^p < c$, und $d^{p+1} > c$; also ist $d^{p+\frac{1}{u}} = c$, und $z = p + \frac{1}{u}$; ferner sey $\frac{c}{d^p} = e$, so ist $d^{\frac{1}{u}} = e$, und $e^u = d$, wo nun $u = q + \frac{1}{r}$ sey u. s. w. Substituirt man nun den Werth $q + \frac{1}{r}$ statt u in der Gleichung $z = p + \frac{1}{u}$, so ist $z = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}$; dieser Werth in der Gleichung $y = n + \frac{1}{z}$ für z gesetzt giebt

$$y = n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}}; \text{ und also } x = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}}}$$

weil $x = m + \frac{1}{y}$ ist.

Wenn man durch dieses Verfahren auf einen Quotienten gelanget, der genau $= 1$ ist, so ist dadurch die Arbeit geendigt, und der gesuchte Exponent x läßt sich in einem solchen Fall völlig genau angeben. Wenn hingegen niemals ein Quotient genau $= 1$ seyn kann, so hat der gesuchte Expoponent x entweder einen irrationalen, oder auch einen transzendenden Werth, von solcher Beschaffenheit nämlich, daß man ihn weder durch ganze, noch durch gebrochene Zahlen, und auch nicht durch Wurzelgrößen genau angeben kann; nur durch eine hinlängliche Annäherung kann man einen solchen Exponenten bestimmen, und zwar wenn man das angeführte Verfahren so weit fortsetzt, bis man auf einen Quotienten gelanget, der schon ziemlich nahe = 1 ist.

Es sey z. B. $10^x = 625$

so ist	$625 : (10)^2$	$= 6{,}25$	$m = 2$
	$10 : (6{,}25)^1$	$= 1{,}6$	$n = 1$
	$6{,}25 : (1{,}6)^3$	$= 1{,}52587$	$p = 3$
	$1{,}6 : (1{,}52587)^1$	$= 1{,}04857$	$q = 1$
	$1{,}52587 : (1{,}04857)^8$	$= 1{,}04404$	$r = 8$
	$1{,}04857 : (1{,}04404)^1$	$= 1{,}00433$	$s = 1$
	$1{,}04404 : (1{,}00433)^9$	$= 1{,}00416$	$t = 9$
	$1{,}00433 : (1{,}00416)^1$	$= 1{,}00016$	$u = 1$

	1,	3,	1,	8,	1,	9,	1
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{4}{5}$,	$\frac{35}{44}$,	$\frac{39}{49}$,	$\frac{386}{485}$,	$\frac{425}{534}$

nämlich $x = 2\frac{425}{534} = 2{,}795880I.$

Es wäre überflüssig, diese Untersuchung weiter auszuführen, weil in der Folge die unbekannten Exponenten mittelst der Logarithmen viel leichter zu bestimmen seyn werden.

Sech-

Sechste Vorlesung.

Von den Reihen, und ihrer Anwendung.

I. Abschnitt.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

Von den Reihen überhaupt.

§. 229.

Eine Folge von Größen, welche nach einem bekannten Gesetze wachsen, oder abnehmen, wird überhaupt eine Reihe, oder Progression, und zwar im ersten Falle eine steigende, und im andern eine fallende Reihe genennet. Die Größen, welche die Reihe bilden, heissen die Glieder der Reihe. So z. B. ist 1, 2, 4, 8, 16 eine steigende Reihe von 5 Gliedern, wo die Glieder nach einem solchen Gesetze wachsen, daß jedes nachfolgende Glied doppelt so groß ist, als das nächst vorhergehende. Hingegen ist 24, 18, 12, 6 eine fallende Reihe von 4 Gliedern, wo jedes nachfolgende Glied aus dem nächst vorhergehenden entsteht, wenn man solches um die Differenz 6 vermindert.

Eine Reihe, deren Glieder nach dem einmal bekannten Gesetze ohne Ende fortlaufen, wird eine **unendliche Reihe** genennet. So ist z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots$ und so ohne Ende fort, eine unendliche Reihe. Wenn aber die Reihe irgendwo, z. B. mit 1000 Gliedern, oder wo immer aufhöret, so ist sie eine **endliche Reihe**.

§. 230.

Es ist aus diesem zu ersehen, daß, wenn einmal das Gesetz einer Reihe bekannt ist, die Reihe nach Belieben fortgesetzt, und das sovielte Glied der Reihe, als man will, bestimmet werden könne; wie auch, daß man die Summe von jeder Anzahl Glieder der Reihe durch die Addition finden könne. Allein wie beschwerlich wäre es nicht, wenn man, um z. B. das tausendste Glied einer Reihe zu bestimmen, vorher alle 999 Glieder entwickeln müßte? Noch beschwerlicher wäre es 1000 Glieder nach (§. 17.) zu addiren, um die Summe einer solchen Reihe von 1000 Gliedern zu erhalten.

Es ist deswegen nothwendig, daß man bey jeder vorkommenden Reihe einen solchen algebraischen Ausdruck, nämlich eine Funktion von n (§. 57.) ausfindig mache, welche so beschaffen ist, daß man, wenn in der Funktion $n = 1$ gesetzet wird, dadurch das erste Glied der Reihe erhalte; wenn man $n = 2$, $n = 3$; $n = 4$ rc. setzet, dadurch auch das 2te, 3te, 4te Glied der Reihe zum Vorschein komme. Eine solche Funktion von n, welche diese Eigenschaft hat, wird deswegen das **allgemeine**, oder das $n$te Glied der Reihe genennet. So z. B. ist in der Reihe 2, 5, 8, 11, 14 ... das allgemeine Glied $= (3n - 1)$; denn man setze nur nacheinander $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, u. s. w. so erhält man das erste, zweyte, dritte, vierte

Glied der angeführten Reihe. Eben so sind

in den Reihen			die $n$ten Glieder
I. 5, 10, 15, 20, 25	=	=	$5n$
II. 4, 7, 10, 13, 16, 19	=	=	$3n+1$
III. 1, 4, 9, 16, 25	=	=	n^2
IV. 1, 3, 6, 10, 15, 21	=	=	$\frac{n^2+n}{2}$
V. 3, 6, 12, 24, 48	=	=	$3 \cdot 2^{n-1}$

Auf gleiche Weise muß man auch bey jeder Reihe eine andere algebraische Funktion von n aufsuchen, welche eine solche Eigenschaft hat, daß, wenn man in der Funktion nacheinander $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ u. s. w. setzet, dadurch die Summe von einem, von zwey, von drey, von vier Gliedern ꝛc. der Reihe zum Vorschein komme; eine solche Funktion von n wird die Summenformel von n Gliedern, oder das summatorische Glied der Reihe genennet. So z. B. ist in der Reihe 2, 5, 8, 11, 14 .... die Summenformel $\frac{3n^2+n}{2}$; denn setzt man in dieser Formel $n=1$, so erhält man blos das erste Glied 2; setzt man ferner $n=2$, sodann $n=3$, $n=4$ u. s. w., so erhält man 7, 15, 26, 40 u. s. w. für die Summe von 2, 3, 4, 5 Gliedern der Reihe.

Eben so sind die Summenformeln der fünf obangeführten Reihen folgende: $\frac{5n^2+5n}{2}$ bey I.; $\frac{3n^2+5n}{2}$ bey II; $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ bey III.; $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ bey IV.; $3(2^n-1)$ bey V.; weil jede dieser Formeln so beschaffen ist, daß sie die Summe so vieler Glieder der betreffenden Reihe zum Vorschein bringet, als man die Größe n Einheiten gelten läßt.

 §. 231.

§. 231.

Wäre in einer Reihe die Summenformel, als eine Funktion von n schon bekannt, so läßt sich das $n$te Glied leicht daraus bestimmen. Denn man setze nur $n - 1$ in der Summenformel statt n, so wird man die Summe von $(n - 1)$ Gliedern haben; zieht man sodann diese Summe von $(n - 1)$ Gliedern, von jener Summe von n Gliedern ab, so wird auf diese Art das $n$te Glied erhalten, weil die erste Summe von n Gliedern um dieses $n$te Glied größer ist, als die zweyte Summe von $(n - 1)$ Gliedern. Z. B. in der Reihe 3, 7, 11, 15, 19 ... ist die Summe von n Gliedern $= 2n^2 + n$; folglich ist die Summe von $(n - 1)$ Gliedern $= 2(n - 1)^2 + (n - 1) = 2n^2 - 3n + 1$; zieht man nun diese Summe von der Summe von n Gliedern ab, so ist $(2n^2 + n) - (2n^2 - 3n + 1) = 4n - 1 =$ dem $n$ten Gliede dieser Reihe.

Diese Regel aus der Summenformel von n Gliedern das allgemeine Glied abzuleiten ist überall anwendbar, so bald bey was immer für einer Reihe das summatorische Glied für bekannt angenommen wird. Allein gemeiniglich wird aus dem bekannten Gesetze der Reihe zuerst das $n$te Glied, und aus diesem sodann die Summenformel bestimmet. Wie aber dieses zu geschehen habe, muß bey jeder Gattung der Reihen insbesondere gezeiget werden.

Von den arithmetischen Reihen.

§. 232.

Eine Reihe, in welcher gleiche Differenzen erhalten werden, wenn man jedes vorhergehende Glied von dem nächst darauffolgenden abziehet, wird eine **arithmetische Reihe** genennet. Z. B. 1, 4, 7, 10, 13 ... ingleichen 12, 10, 8, 6 ... sind arithmetische Reihen, weil in beyden die Differenzen beständig sind. In der er-

sten

sten Reihe ist die beständige Differenz $= 3$, und in der zweyten $= -2$. Man sieht hieraus, daß bey einer arithmetischen Reihe nur zwey Glieder, oder das erste Glied, und die Differenz hinreichen, um die Reihe so weit als beliebig ist, fortsetzen zu können.

Es sey nun das erste Glied einer arithmetischen Reihe $= a$, und die Differenz $= d$, in der Bedeutung, daß jedes vorhergehende Glied vom nächstfolgenden abgezogen werde, so ist das zweyte Glied $= a + d$; daraus folgt das dritte Glied der Reihe $= a + 2d$; ferner das vierte $= a + 3d$, das fünfte $= a + 4d$ u. s. w. Es kann daher jede sowohl steigende, als auch fallende arithmetische Reihe von gleichen Differenzen durch nachstehende Formel vorgestellet werden:

Stelle	1,	2,	3,	4,	- - - - n
Reihe	a,	$(a+d)$,	$(a+2d)$,	$(a+3d)$ +	- - t
Differenz		d,	d,	d,	

allwo d bey einer steigenden Reihe eine positive, und bey einer fallenden eine negative Größe bedeutet. Z. B. man setze in dieser Formel $a = 1$ und $d = 3$, so hat man die erste obangeführte Reihe 1, 4, 7, 10, 13, 16 . . .; setzt man aber $a = 12$, und $d = -2$, so kömmt die zweyte obangeführte Reihe 12, 10, 8, 6, 4, . . . zum Vorschein.

Das $n$te oder allgemeine Glied $= t$ in der angeführten Formel einer arithmetischen Reihe ist leicht aus dem Gesetze zu bestimmen, nach welchem die Glieder aufeinander folgen. Denn da jedes Glied der Reihe, z. B. das 4te aus a und aus so vielen d (aus $3d$) besteht, als demselben Glieder vorhergehen, so ist das $n$te oder allgemeine Glied, wenn man solches mit t bezeichnet

I. $t = a + (n - 1)d$.

Nämlich das $n$te Glied einer jeden arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen wird erhalten, wenn man zum ersten Gliede a, die mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder $(n-1)$ multiplizirte Differenz d hinzusetzet. Z. B. in der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . ist das $n$te Glied $= 1 + 1(n-1) = n$; wegen $a = 1$, und $d = 1$; das $n$te Glied der ungeraden natürlichen Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . ist $t = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$, wegen $a = 1$ und $d = 2$; das $n$te Glied der Reihe der geraden natürlichen Zahlen 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . . . ist $t = 0 + 2(n-1) = 2n - 2$, wegen $a = 0$ und $d = 2$; und in der obangeführten Reihe 12, 10, 8, 6 . . . ist das $n$te Glied $t = 12 - 2(n-1) = 14 - 2n$, wegen $a = 12$, $d = -2$.

Um nun auch die Summe von jeder beliebigen Anzahl der Glieder in der angeführten allgemeinen Formel der arithmetischen Reihen zu finden, bezeichne man indessen die Summe von 5 Gliedern mit s; so ist, wenn die Reihe einmal gerade, und sodann verkehrt geschrieben wird,

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d)$$
$$s = (a+4d) + (a+3d) + (a+2d) + (a+d) + a$$

folglich auch durch die Addition der zwey Gleichungen

$$2s = (2a+4d) + (2a+4d) + (2a+4d) + (2a+4d) + (2a+4d)$$
$$= (2a+4d) \times 5, \text{ wo } (2a+4d) = a + (a+4d) \text{ ist;}$$

und endlich $s = (2a+4d) \times \frac{5}{2}$.

Nämlich die Summe von allen 5 Gliedern wird erhalten, wenn man die Summe aus dem 1ten und 5ten Gliede mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirt. Eben so findet man die Summe von jeder andern beliebigen Anzahl der Glieder bey der nämlichen Reihe.

Es wird daher bey jeder arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen die Summe aller Glieder erhalten, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirt.

Be=

Bezeichnet man nun bey einer solchen arithmetischen Reihe die Summe von n Gliedern mit s, und das $n$te, oder letzte Glied, wie oben, mit t, wenn die Reihe mit dem $n$ten Gliede aufhört, so ist die zweyte Fundamentalgleichung folgende:

$$\text{II. } s = (a+t) . \frac{n}{2}.$$

Setzet man aber für t in II. den Werth aus I., so ist das summatorische Glied $s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$ wodurch sich aus dem 1ten Gliede, und aus der Differenz bey jeder arithmetischen Reihe für jede gegebene Anzahl der Glieder die Summe bestimmen läßt. So z. B. ist bey der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... die Summe von n Gliedern $s = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Eben so ist in der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . die Summe von n Gliedern $s = \frac{2n + 2n^2 - 2n}{2} = n^2$.

§. 233.

Das summatorische Glied für jede arithmetische Reihe von gleichen Differenzen kann man auch unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede $a + dn - d$ auf folgende Art ableiten:

Man kann sich vorstellen, daß die Summe von n Gliedern erhalten werde, wenn das allgemeine Glied $a + dn - d$ mit irgend einer Funktion von n, die fn heissen mag, multipliziret wird. Es kann demnach das summatorische Glied

$$s = (a + dn - d) \times fn = df . n^2 + (af - df) . n$$

gesetzet werden, wo f von solcher Beschaffenheit gedacht wird, daß diese Gleichung richtig sey. Ferner sey $df = A$, und

und $(af - df) = B$, so ist auch das summatorische Glied

$s = An^2 + Bn$ = = = = A =

Setzet man nun in dieser Formel $n = 1$, so erhält man die Summe von einem Gliede $= A + B$; setzet man aber $n = 2$, so erhält man die Summe von zwey Gliedern $4A + 2B$.

Es ist aber in der Reihe a, $(a + d)$, $(a + 2d)$, $(a + 3d)$ . . . die Summe von einem Gliede $= a$, und die Summe von zwey Gliedern $= 2a + d$; folglich ist $A + B = a$, und $4A + 2B = 2a + d$; daraus folgt $A = \frac{1}{2}d$ und $B = a - \frac{1}{2}d$. Substituirt man nun diese Werthe in der obangenommenen Summenformel A, so ist

$$s = \tfrac{1}{2}dn^2 + (a - \tfrac{1}{2}d)n = \frac{2an + dn^2 - dn}{2} \text{ wie vorhin.}$$

Anmerkung. Daß die Summenformel

$s = An^2 + Bn$

ganz richtig mit jeder arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen zusammen gehöre, erhellet auch daraus.

Man setze in dieser Formel $n - 1$ statt n, so erhält man die Summe von $n - 1$ Gliedern, die s^1 heissen mag, nämlich:

$s^1 = A(n - 1)^2 + B(n - 1) = An^2 - 2An + A + Bn - B$;

Subtrahirt man ferner s^1 von s, so erhält man, vermög (§. 231.), das allgemeine Glied $s - s^1 = t$ derjenigen Reihe, welche mit dem angenommenen summatorischen Gliede $s = An^2 + Bn$ zusammen gehöret, nämlich:

$t = 2An - A + B$.

Substituirt man endlich in diesem allgemeinen Gliede $n = 1$, sodann $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ u. s. w., so entsteht folgende Reihe:

Stellen	1,	2,	3,	4	=
Reihe	$(A+B)$,	$(3A+B)$,	$(5A+B)$,	$(7A+B)$	=
Differenzen		$2A$,	$2A$,	$2A$	

wo-

wodurch auch jede arithmetische Reihe von gleichen Differenzen vorgestellet werden kann. Daher gehöret das angenommene summatorische Glied ganz richtig mit jeder arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen zusammen.

§. 234.

Durch Hilfe der in (§. 232.) angeführten zwey Fundamentalformeln $t = a + (n-1)d$ und $s = \frac{1}{2}n \times (a+t)$ lassen sich sehr viele in der Mathematik und im gemeinen Leben vorkommende Aufgaben auflösen. Weil aber hier nur zwey Gleichungen vorhanden sind, in welchen sich 5 verschiedene Größen befinden, als das erste Glied a, das letzte Glied t, die Anzahl der Glieder n, die Differenz d, und die Summe s; so müssen drey davon aus den Bedingungen der Aufgabe jederzeit bekannt seyn, wodurch sich sodann die übrigen zwey nach (§. 221.) finden lassen; im Gegentheile wäre die Aufgabe unbestimmt. Und da sich jede dieser 5 Größen auf viererley Art, und zwar jedesmal durch drey andere Größen ausgedrückt, aus den zwey Fundamentalformeln finden läßt; so können diese Werthe zum voraus entwickelt, und auf folgende Art in eine Tafel eingetragen werden, damit man bey einer vorkommenden Aufgabe die passende Formel für die unbekannte Größe alsogleich finden könne.

Zu such.	gegeb	N.	Formeln.	Diese Formeln erhält man.
t	a,d,n	1	$t = a + dn - d$	Vermög §. 232. I.
	a,n,s	2	$t = \frac{2s}{n} - a$	Aus §. 232. II.
	d,n,s	3	$t = \frac{s}{n} + \frac{dn-d}{2}$	Den Werth von a aus I. in II. substit.
	a,d,s	4	$t = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2)}$	Den Werth von n aus I. in II. substit.
s	a,n,t	5	$s = \frac{1}{2}n(a+t)$	Vermög §. 232. II.
	a,d,n	6	$s = an + \frac{dn}{2}(n-1)$	Den Werth von t aus I. in II. substit.
	a,d,t	7	$s = \frac{a+t}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d}$	Den Werth von n aus I in II. substit.
	t,d,n	8	$s = tn - \frac{nd}{2}(n-1)$	Den Werth von a aus I. in II. substit
d	a,t,n	9	$d = \frac{t-a}{n-1}$	Aus I.
	a,n,s	10	$d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$	Den Werth von t aus I. in II. substit.
	a,t,s	11	$d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s-t-a}$	Den Werth von n aus I. in II. substit.
	t,n,s	12	$d = \frac{2nt-2s}{n(n-1)}$	Den Werth von a aus I. in II. substit.

Zu such.	gegeb.	N.	Formeln.	Diese Formeln erhält man.
n	a,t,d	13	$n = 1 + \frac{t-a}{d}$	Aus I.
	a,t,s	14	$n = \frac{2s}{a+t}$	Aus II.
	a,d,s	15	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)}$	Den Werth von t aus I. in II. substit.
	t,d,s	16	$n = \frac{1}{2} + \frac{t}{d} + \sqrt{\left(\frac{t^2}{d^2} + \frac{t}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}\right)}$	Den Werth von a aus I. in II. substit.
a	t,d,n	17	$a = t + d - dn$	Aus I.
	t,n,s	18	$a = \frac{2s}{n} - t$	Aus II.
	t,d,s	19	$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\left(t^2 + dt + \frac{d^2}{4} - 2ds\right)}$	Den Werth von n aus I. in II. substit.
	d,n,s	20	$a = \frac{s}{n} - \frac{d}{2}(n-1)$	Den Werth von t aus I. in II. substit.

§. 235.

Einige hieher gehörige Aufgaben.

I. Es spielt Jemand Pharo, und setzt das erstemal einen Gulden, das zweytemal 3, das drittemal 5, das viertemal 7 Fl. und nach diesem Gesetze weiter fort. Die Frage ist, wie viel wird er das 30stemal, und wie viel insgesamt setzen müssen, wenn er bis dahin immer verspielet.

Die

Die erste Frage wird durch die erste Formel $t = a + d(n - 1) = 59$, und die andere Frage wird durch die 6te Formel $s = an + \frac{nd}{2}(n - 1) = 900$ Fl. beantwortet; weil hier $a = 1$, $d = 2$, und $n = 30$ gegeben sind, und im ersten Falle nach t, im andern aber nach s gefragt wird.

II. Es ist aus Versuchen bekannt, daß ein freyfallender Körper in der ersten Sekunde beynahe 15 pariser Fuß, und in jeder darauffolgenden Sekunde um 30 Fuß mehr, als in der nächst vorhergehenden zurücklege. Nun ist ein Körper von einem Thurme 960 Fuß hoch herunter gefallen: wie viel Zeit hat er wohl dazu gebrauchet?

Dieses zeigt die 15te Formel $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)} = 8$ Sek.; weil hier $a = 15$, $d = 30$, und $s = 960$ gegeben sind, und nach der Anzahl der Glieder n gefragt wird.

Eben so läßt sich auch, wenn die Dauerzeit des freyen Falles $n = 8$ Sekunden aus einer Beobachtung für bekannt angenommen wird, mittelst der 6ten Formel die Höhe des Thurmes $s = 960$ Fuß berechnen.

III. Unter 5 Kanonier, welche auf die Scheibe schiessen, sollen 35 Fl. dergestalt vertheilet werden, daß der vorzüglichste aus ihnen 11 Fl., von den übrigen aber jeder etwas erhalten soll, und zwar so, daß jeder minder vorzügliche immer um gleichviel Gulden weniger erhalte, als der nächst vorhergehende. Nun ist die Frage, wie viel bekommt der schlechteste, und um wie viel bekommt jeder folgende mehr?

Die erste Frage beantwortet die 18te Formel $a = \frac{2s}{n} - t = 3$, und die andere Frage beantwortet die

12te

12te Formel $d = \frac{2nt - 2s}{n(n-1)} = 2$, weil hier $s = 35$, $n = 5$ und $t = 11$ gegeben sind, und im ersten Falle a, im andern aber d gesucht wird.

IV. Es setzt Jemand einen Groschen in die Lotterie, und da er das erstemal nicht gewinnt, so setzt er das zweytemal zwey Groschen, das drittemal drey Groschen u. s. w. immer um 1 Groschen mehr. Da aber die Lotterie einen einzelnen Treffer 14fach zurück bezahlt, so ist die Frage, wie vielmal kann solcher auf diese Art spielen, damit er durch einen Treffer doch noch all sein gesetztes Geld zurück erhalte?

Da er das erstemal 1, das zweytemal 2, das drittemal 3 Groschen setzt u. s. w., so setzt er das $n$temal n Groschen, und wenn er da trift, so bekommt er $14n$ Groschen zurück; er hat aber in Allem gesetzt $\frac{1}{2}n(1+n)$; folglich ist $\frac{1}{2}n(1+n) = 14n$, wenn er nichts gewinnen, noch verspielen soll. Hieraus ist $n = 27$mal.

V. Eine Kompagnie Soldaten wurde wegen Bestürmung einer Festung dergestalt belohnet, daß derjenige Mann, welcher den Wall am ersten erstiegen, eine gewisse Summe Geld bekam, der zweyte etwas weniger, der dritte wieder um eben so viel weniger u. s. w. Als das Geld ausgetheilet wurde, konnten zwey dieser Soldaten wegen Blessuren nicht gegenwärtig seyn; man gab daher deren Antheil zweyen ihrer Kameraden. Diese zwey steckten sowohl ihr eigenes erhaltenes Geld, als auch jenes ihrer zwey Kameraden in einen einzigen Sack zusammen, und wußten in der Folge, bey der Vertheilung nicht mehr, was jedem gebühre. Der eine hatte für sich und seinen Kameraden 92 Fl. erhalten, und erinnerte sich noch, daß er der zweyte und sein blessirter Kamerad der siebente gewesen sey; der andere hatte für sich und seinen Kameraden 71 Fl. erhalten, und wußte, daß er der eilfte, sein Kamerad aber der vierte gewesen sey. Nun ist die Frage, was jedem dieser 4 Soldaten gebühre?

Da hier eigentlich weder das erste Glied, noch die Differenz der Reihe bekannt ist, so sey der Theil, welchen der allererste bekommen soll $= x$, und die Differenz, um welche jeder nachfolgende weniger bekommen soll, als sein vorhergehender, sey $= y$; so bekommt der 2te $x - y$, der 3te $x - 2y$, der 4te $x - 3y$, der 7te $x - 6y$ und der 11te $x - 10y$. Es haben aber der 2te und 7te zusammen 92 Fl., und der 4te und 11te zusammen 71 Fl. erhalten;

folglich ist $x - y + x - 6y = 92$

und $x - 3y + x - 10y = 71$

daraus folgt $x = 58\frac{1}{4}$, und $y = 3\frac{1}{2}$. Es bekam demnach der 2te $54\frac{3}{4}$ Fl., der 4te $47\frac{3}{4}$ Fl., der 7te $37\frac{1}{4}$ Fl., und der 11te $23\frac{1}{4}$ Fl.

VI. Es läßt Jemand einen Brunnen graben, mit diesem Akkord, daß er für die erste Klafter 5 Fl., für die zweyte 11 Fl., für die dritte 17 Fl., und so für jede folgende Klafter, weil die Arbeit immer beschwerlicher wird, um 6 Fl. mehr als für die nächst vorhergehende zahlen wolle. Der Brunnenmeister bringt einen Brunnen zu Stande, welcher $2\frac{1}{2}$ Klafter tief ist. Wie viel gebührt ihm dafür Bezahlung?

Da die Zahlungen der ganzen Klaftern in einer arithmetischen Reihe steigen, so müssen auch jene für die halben Klaftern in eben einer solchen Reihe steigen. Es sey nun die Gebühr für die erste halbe Klafter $= x$ Fl., und die Differenz $= y$, um welche für jede nachfolgende halbe Klafter mehr bezahlt werden muß, als für die vorhergehende; so kostet die 2te halbe Klafter $x + y$, die 3te $x + 2y$, die 4te $x + 3y$, und die 5te $x + 4y$. Da aber laut Akkord für die erste Klafter 5 Fl. und für die zweyte 11 Fl. bezahlt werden muß, so ist $x + (x + y) = 5$, und $(x + 2y) + (x + 3y) = 11$; daraus folgt $x = \frac{7}{4}$, und $y = \frac{6}{4}$. Es gebührt demnach dem Brunnenmeister

$$\frac{7}{4}+\frac{13}{4}+\frac{19}{4}+\frac{25}{4}+\frac{31}{4}=\frac{31+7}{4}\cdot\frac{5}{2}=23\tfrac{3}{4}\text{ Fl.}$$

Das nämliche erhält man, wenn man in der Formel

$s = an + \frac{dn}{2}(n-1)$, $a=5$, $d=6$ und $n=2\frac{1}{2}$ setzet.

Von arithmetischen Reihen des 2ten, 3ten, 4ten Ranges u. s. w. und deren Anwendung.

§. 236.

Die arithmetischen Reihen, wovon bisher gehandelt wurde, pflegt man auch **arithmetische Reihen des ersten Ranges** zu nennen, weil die ersten Differenzen der Glieder beständig sind. Es giebt aber auch Reihen, wo man bey der Subtraktion der Glieder noch keine gleiche Differenzen, sondern eine arithmetische Reihe des ersten Ranges erhält, und wo folglich erst die zweyten Differenzen der Glieder beständig sind. Z. B. bey der Reihe der natürlichen Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36 . . . sind die ersten Differenzen der Glieder = 3, 5, 7, 9, 11 . . . und die 2ten Differenzen sind alle einander gleich, nämlich = 2.

Solche Reihen, bey denen die zweyten Differenzen der Glieder gleich sind, werden überhaupt **arithmetische Reihen des zweyten Ranges** genennet. Man sieht hieraus, daß zu einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges drey Glieder gegeben seyn müssen, um die Reihe sodann fortsetzen zu können. Z. B. wenn die ersten drey Glieder einer solchen Reihe 4, 7, 12, gegeben werden, so sind die ersten Differenzen 3, 5, und die zweyte Differenz, welche hier unveränderlich seyn soll, ist = 2; folglich ist die Reihe der ersten Differenzen = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . . und endlich die vorgelegte Reihe = 4, 7, 12, 19, 28, 39 . . . von der Beschaffenheit, daß 19 = 12 + 7, 28 = 19 + 9, 39 = 28 + 11 sey u. s. w.

§. 237.

Es sey nun das erste Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges $= e$, und die ersten Differenzen sollen seyn $= a$, $(a+d)$, $(a+2d)$, $(a+3d)$ u. s. w., so haben wir folgende allgemeine Formel, wodurch jede arithmetische Reihe des zweyten Ranges vorgestellet werden kann.

1tes $= e$
2tes $= e + a$
3tes $= e + a + (a+d)$
4tes $= e + a + (a+d) + (a+2d)$
5tes $= e + a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d)$
6tes $= e + a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d)$
$n$tes $= e + a + (a+d) + \ldots + [a + (n-2)d]$

daraus ist zu ersehen, daß jedes Glied der Reihe aus dem ersten Gliede e, mehr der Summe so vieler Glieder der arithmetischen Reihe des ersten Ranges bestehe, als Glieder in der Reihe demselben vorhergehen. Es besteht also auch das $n$te Glied aus dem ersten Gliede e, mehr der Summe von $(n-1)$ Gliedern der arithmetischen Reihe des ersten Ranges, nämlich das $n$te Glied der angeführten arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, wenn solches $= t$ gesetzet wird, ist vermög (§. 234. N. 6.)

$$t = e + \frac{2a(n-1) + d(n-1)^2 - d(n-1)}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}dn^2 + (a - \tfrac{3}{2}d)n + (e + d - a).$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}d = P$, $(a - \frac{3}{2}d) = Q$, $(e + d - a) = R$, so ist das allgemeine Glied einer jeden arithmetischen Reihe des zweyten Ranges durch nachstehende Formel sehr einfach ausgedrückt;

$$t = Pn^2 + Qn + R.$$

Qua-

Die Koeffizienten P, Q, R können bey einer jeden gegebenen arithmetischen Reihe des 2ten Ranges jederzeit sehr leicht bestimmet werden, und zwar auf folgende Art: Man setze in der angeführten Formel $n = 1$, sodann $n = 2$, und endlich $n = 3$, so erhält man dadurch das 1te, 2te, und 3te Glied der Reihe; da ferner diese drey Glieder in einer vorgelegten Reihe schon bekannt sind, so hat man nun auf diese Art drey Gleichungen, woraus sich die drey unbekannten Größen P, Q, R entwickeln lassen.

Es sey z. B. das $n$te Glied der Reihe 35, 26, 20, 17 . . . zu bestimmen, so setze man in der angeführten allgemeinen Formel des $n$ten Gliedes $n = 1$; dadurch ist $P + Q + R = 35$ als das 1te Glied; sodann setze man $n = 2$, so ist $4P + 2Q + R = 26$ als das 2te Glied; endlich setze man $n = 3$, so ist $9P + 3Q + R = 20$ als das 3te Glied. Aus diesen drey Gleichungen findet man $P = \frac{3}{2}$, $Q = -\frac{27}{2}$, $R = 47$; folglich ist das $n$te Glied in der angeführten Reihe $t = \frac{3}{2}n^2 - \frac{27}{2}n + 47$.

Man kann auch überhaupt das 1te Glied einer solchen Reihe $= a$, das zweyte $= b$, und das 3te $= c$ setzen; sodann ist vermög der angeführten Formel

$$\begin{aligned} P + Q + R &= a \text{ für } n = 1 \\ 4P + 2Q + R &= b \quad " \quad " = 2 \\ 9P + 3Q + R &= c \quad " \quad " = 3 \end{aligned}$$

daraus folgt $P = \dfrac{a + c - 2b}{2}$, $Q = \dfrac{8b - 5a - 3c}{2}$,

und $R = \dfrac{6a + 2c - 6b}{2}$

und folglich ist das allgemeine, oder $n$te Glied

$$t = \frac{(a + c - 2b)n^2 + (8b - 5a - 3c)n + (6a + 2c - 6b)}{2}$$

§. 238.

§. 238.

Da wir einmal das allgemeine Glied

I. $t = Pn^2 + Qn + R$

einer jeden arithmetischen Reihe des 2ten Ranges kennen, so wird es nicht mehr schwer seyn auch das summatorische Glied für jede solche Reihe anzugeben. Man kann nämlich hier eben so, wie im (§. 233.) sich vorstellen, daß aus dem allgemeinen Gliede $= Pn^2 + Qn + R$ das summatorische Glied erhalten werde, wenn man ersteres mit irgend einer Funktion von n, die Fn heissen mag, multipliziret; man kann nämlich setzen, es sey hier das summatorische Glied

$$s = FPn^3 + FQn^2 + FRn$$

wo Fn von solcher Beschaffenheit gedacht wird, daß diese Gleichung richtig sey.

Setzet man ferner $FP = A$, $FQ = B$, und $FR = C$, so kann man auch sagen, es sey in jeder arithmetischen Reihe des 2ten Ranges das summatorische Glied

II. $s = An^3 + Bn^2 + Cn$

wo die unbestimmten Koeffizienten A, B, C bey jeder gegebenen Reihe dieser Art, eben so wie vorhin die Koeffizienten P, Q, R des allgemeinen Gliedes, aus den drey ersten gegebenen Gliedern der Reihe bestimmet werden.

Es sey z. B. für die Reihe

35, 26, 20, 17, 17, 20, 26 = = =

das summatorische Glied zu bestimmen, so setze man in der letzt angeführten allgemeinen Formel II. des summatorischen Gliedes $n = 1$; und es ist sodann

$$A + B + C = 35$$

als die Summe des 1ten Gliedes. Darauf setze man $n = 2$, so ist

$$8A + 4B + 2C = 61$$

als

als die Summe des 1ten und 2ten Gliedes. Endlich setze man $n = 3$, so ist

$$27A + 9B + 3C = 81$$

als die Summe des 1ten, 2ten und 3ten Gliedes; nämlich $35 + 26 + 20 = 81$; daraus folgt $A = \frac{1}{2}$, $B = -6$, und $C = \frac{81}{2}$; folglich ist für die gegebene Reihe das summatorische Glied

$$s = \tfrac{1}{2}n^3 - 6n^2 + \tfrac{81}{2}n.$$

Setzt man auch hier allgemein das erste Glied jeder Reihe dieser Art $= a$, das zweyte $= b$, und das dritte $= c$; so ist wieder

$$\begin{array}{lll} A + B + C = a & \text{für } n & = 1 \\ 8A + 4B + 2C = a + b & \text{=} \;\; \text{=} & = 2 \\ 27A + 9B + 3C = a + b + c & \text{=} & = 3 \end{array}$$

daraus folgt

$$A = \frac{a+c-2b}{6},\; B = \frac{9b-6a-3c}{6}, \text{ und } C = \frac{11a+2c-7b}{6};$$

folglich ist

$$s = \left(\frac{a+c-2b}{6}\right)n^3 + \left(\frac{9b-6a-3c}{6}\right)n^2 + \left(\frac{11a+2c-7b}{6}\right)n.$$

Anmerkung. Daß das angeführte summatorische Glied

$$s = An^3 + Bn^2 + Cn$$

ganz richtig mit jeder arithmetischen Reihe des 2ten Ranges zusammen gehöre, kann man auch hier, so wie im (§. 233. Anmerk.) mittelst des (§. 231.) erweisen.

§. 239.

Wenn man die Glieder folgender Reihe

I. $1,\ 1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ 1 + 4d$ =

 nach

nach und nach addiret, so erhält man nachstehende arithmetische Reihe des 2ten Ranges

$$\text{II. } 1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d,\ 6+15d\ =\ =$$

deren allgemeines Glied $t = \frac{1}{2}dn^2 + (1 - \frac{1}{2}d)n$, und die Summe $s = \frac{1}{6}dn^3 + \frac{1}{2}n^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}d)n$ (§. 237. u. 238) ist.

Setzet man nun in der Reihe II. $d = 1$, sodann $d = 2$, $d = 3$, $d = 4$ u. s. w., so erhält man folgende Reihen:

1) 1, 3, 6, 10, 15, 21 = = =
2) 1, 4, 9, 16, 25, 36 = = =
3) 1, 5, 12, 22, 35, 51 = = =
4) 1, 6, 15, 28, 45, 66 = = u. s. w.

welche überhaupt Reihen der **Polygonal**= oder **vieleckigen** Zahlen genennet werden, weil sich die Einheiten ihrer Glieder in regelmässige Vielecke ordnen lassen. Und zwar insbesondere heissen die Glieder der Reihe 1) **dreyeckige Zahlen**, oder **Triangularzahlen**, weil sich deren Einheiten folgendermassen in Dreyecke ordnen lassen

1, 3, 6, 10, u. s. w.

Die Glieder der Reihe 2) heissen aus der nämlichen Ursache **viereckige**= oder **Quadratzahlen** (auch **Tetragonalzahlen**), weil sich ihre Einheiten in regelmässige Vierecke gleichförmig vertheilen lassen.

Und so heissen weiter die Glieder der Reihe 3) **fünfeckige**, oder **Pentagonalzahlen** u. s. w.

Summirt man nun wieder die Glieder dieser Polygonalzahlen nach der Ordnung, so hat man folgende Reihen:

a) 1, 4, 10, 20, 35, 56 = = =
b) 1, 5, 14, 30, 55, 91 = = =
c) 1, 6, 18, 40, 75, 126 = = =
d) 1, 7, 22, 50, 95, 161 = = =

deren Glieder wieder überhaupt **Pyramidalzahlen** genennet werden; weil man sich einbilden kann, daß gleichsam Pyramiden, oder Spitzsäulen entstehen, wenn man die obbemeldeten Polygonalzahlen nach der Ordnung, wie sie summirt werden, so übereinander leget, daß die kleinern immer auf die nächstgrößern der nämlichen Gattung zu liegen kommen. Eben deswegen heissen auch die Glieder der Reihe *a*) die **dreyeckigen Pyramidalzahlen**, der Reihe *b*) die **viereckigen**, der Reihe *c*) die **fünfeckigen Pyramidalzahlen** u. s. w.

§. 240.

Aus den Kugeln von gleicher Größe lassen sich sowohl drey = als auch viereckige Pyramiden auf obige Art wirklich schlichten, wie man sie in den Zeughäusern überall antrift. Die Anzahl der Kugeln $= t$, welche in der *n*ten Lage von oben abwärts gezählt, sowohl bey der einen als der andern Pyramide liegen, läßt sich demnach aus dem *n*ten Gliede $t = \frac{1}{2}dn^2 + (1 - \frac{1}{2}d)n$, und so auch die Anzahl der Kugeln der ganzen Pyramide von n Lagen durch die Summenformel

$$s = \frac{1}{6}dn^3 + \frac{n^2}{2} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}d)n$$

bestimmen, allwo bey der dreyeckigen Pyramide $d = 1$, und bey der viereckigen $d = 2$ ist. Es ist also bey der dreyeckigen Pyramide die Anzahl der Kugeln in der *n*ten Lage

$$t = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

und die Summe der ganzen Pyramide von n Lagen, nämlich die Anzahl aller Kugeln

$$s = \frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}.$$

z. B. in einer dreyeckigen Pyramide von 20 Lagen liegen unten auf der Erde $\frac{20.21}{2} = 210$, und in der ganzen Pyramide $\frac{20.21.22}{2.3} = 10.7.22$ $= 1540$ Kugeln.

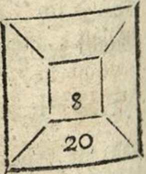
Bey der viereckigen Pyramide liegen in der $n$ten Lage $t = n^2$, und in der ganzen Pyramide von n Lagen

$$s = \frac{n.(n+1).(n+n+1)}{2.3}.$$

z. B. in einer viereckigen Pyramide von 20 Schichten liegen unten auf der Erde 400, und in der ganzen Pyramide $\frac{20.21.41}{2.3} = 10.7.41 = 2870$ Kugeln.

Da bey dergleichen Pyramiden die Anzahl der Kugeln, welche auf einer Seite der Grundfläche in einer Zeile liegen, immer der Anzahl der Lagen gleich ist; so ist es auch leicht die Anzahl der Kugeln zu bestimmen, welche in einer unvollständigen Pyramide liegen. Denn man darf nur die Pyramide so berechnen, als wenn sie ganz wäre, sodann auch den abgängigen Theil bestimmen, und solchen von der ganzen Pyramide abziehen, so giebt der Rest die Anzahl der Kugeln der abgestutzten Pyramide.

Es sey z. B. bey einer viereckigen abgestutzten Pyramide die unterste Reihe 20, und die obere Reihe 8 Kugeln, so ist die Anzahl der Kugeln, wenn die Pyramide ganz wäre $= \frac{20.21.41}{2.3} = 2870$; da aber



oben eine Pyramide fehlet, bey welcher zur untersten Seite 7, und folglich in allen $\frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 140$ Kugeln gehören, so bleibt der Inhalt der abgestutzten Pyramide $2870 - 140 = 2730$ Kugeln.

§. 241.

Wenn viele Kugeln zu schlichten sind, so werden sie gemeiniglich in lange Haufen, deren Grundflächen Rechtecke sind, übereinander geschlichtet, so daß oben eine einzige Zeile von Kugeln zu liegen kommt, welche der **Rücken** des **Haufens** genennt wird.

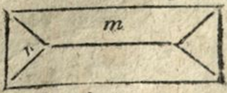
Befinden sich nun in dem Rücken m Kugeln, so liegen in der folgenden untern Lage zwey Zeilen, deren jede $(m + 1)$ Kugeln enthält, und folglich sind in der ganzen zweyten Lage $(2m + 2)$ Kugeln. In der dritten Lage sind drey Zeilen, jede von $(m + 2)$, folglich in allen $(3m + 6)$ Kugeln; in der vierten sind vier Zeilen, von $(m + 3)$, also in allen $(4m + 12)$ Kugeln u. s. w.; folglich sind in der $n$ten Lage n Zeilen, jede von $(m + n - 1)$ Kugeln; und daher sind in dieser ganzen Lage $n(m + n - 1)$ Kugeln enthalten.

Es sind demnach auch hier die aufeinander folgenden Lagen der Kugeln von oben nach unten gezählt, Glieder einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, nämlich:

1te	2te	3te	4te	$n$te Lage
m,	$(2m+2)$,	$(3m+6)$,	$(4m+12)$,	$n.(m+n-1)$.

folglich ist vermög (§. 238.) die Summe aller Kugeln, welche in n Schichten enthalten sind,

$$s = \frac{n(n+1).(2n+3m-2)}{2 \cdot 3}.$$



$m + n - 1$

 Es

Es sey z. B. der Rücken des Haufens = 100, und die Eckseite, welche die Anzahl der Lagen anzeiget = 10, so enthält die unterste Lage 1090, und der ganze Haufen 5830 Kugeln.

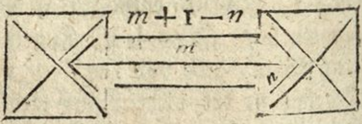
Benennet man die Anzahl der Kugeln mit p, welche in der untersten Zeile liegen, so ist $p = m + n - 1$, und daher $m = p + 1 - n$; folglich ist

$$s = \frac{n.(n+1).(3p+1-n)}{2.3}.$$

Und weil auch hier in der schmalen Seite der Grundfläche eben so viele Kugeln, als in der Eckseite liegen, so kann ein unvollständiger solcher Haufen eben so, wie die unvollständige Pyramide im (§. 240.) berechnet werden.

§. 242.

Man pflegt auch einen langen Haufen zu schlichten, der an beyden Enden an Pyramiden angelegt ist.



Auch hier sind die Lagen der Kugeln von oben nach unten gezählet, Glieder einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges. Denn es sey der Rücken = m Kugeln, so liegen in der 2ten Lage zwey Zeilen zu $(m - 1)$; in der dritten drey Zeilen zu $(m - 2)$; in der vierten vier Zeilen zu $(m - 3)$; und daher in der $n$ten Lage n Zeilen zu $(m-n+1)$ Kugeln; weil hier die Zeilen immer um eine Kugel kürzer werden. Die Reihe ist demnach

1te	2te	3te	4te		$n$te Lage
m,	$(2m-2)$,	$(3m-6)$,	$(4m-12)$	..	$n(m+1-n)$

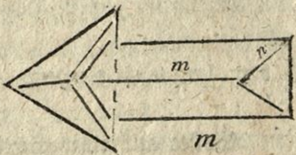
deren Summe von n Gliedern nach (§. 238.) gefunden wird,

$$s = \frac{n.(n+1).(3m-2n+2)}{2.3}.$$

Es sey z. B. der Rücken des Haufens $m = 30$, und die Eckseite $n = 10$, so liegen in der untersten Schichte 210, und im ganzen Haufen $s = 1320$ Kugeln.

Wenn hier die Anzahl der Kugeln in der untersten Zeile $= p$ gesetzet wird, so ist $p = m - n + 1$; und $m = p + n - 1$; folglich ist

$$s = \frac{n.(n+1).(3p+n-1)}{2.3}.$$

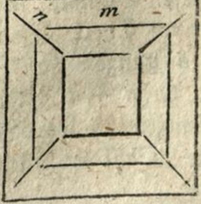


Anmerkung. Wenn der Haufen nur von einer Seite an eine Pyramide angelehnt ist, so sind die Lagen der Kugeln, von oben nach unten genommen, Glieder einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges. Denn es sey der Rücken $= m$, so sind in der zweyten Lage $2m$, in der dritten $3m$, in der vierten $4m$, und in der $n$ten Lage mn Kugeln, weil hier die Zeilen alle gleich lang sind; und folglich ist die Summe aller Kugeln

$$s = \tfrac{1}{2}n.(m + nm) = \frac{m.n.(n+1)}{2}.$$

§. 243.

Endlich lassen sich auch die Kugeln in einen Haufen schlichten, dessen Grundfläche aus einem Vierecke besteht, aus welchem ein anderes kleineres Viereck gleichsam herausgeschnitten ist; so daß die Schlichtung in der Mitte einen leeren Raum habe, der an allen vier Seiten eingeschlossen ist.



Bey der Untersuchung eines solchen Haufens findet man, wenn oben im Rücken m Kugeln sind, daß in der zweyten Lage zwey Zeilen liegen, wovon die innere $(m - 4)$, und die äussere $(m + 4)$ Kugeln enthält, und daß folglich in der ganzen 2ten Lage $2m$ Kugeln befindlich sind. Ferner daß in der 3ten Lage drey Zeilen liegen, wovon die mittlere m, die innere $m - 8$, und die äussere $m + 8$ Kugeln enthält, und daß folglich in der ganzen 3ten Lage $3m$ Kugeln sich befinden; eben so, daß in der 4ten Lage $4m$, in der 5ten $5m$, und in der $n$ten nm Kugeln liegen; folglich sind hier die Lagen der Kugeln Glieder einer arithmetischen Reihe des 1ten Ranges; es ist demnach die Anzahl aller Kugeln im ganzen Haufen

$$s = \tfrac{1}{2}n(m + nm) = \frac{n.(n+1).m}{2}.$$

Sollte auf einer Seite eines solchen Haufens ein Eingang seyn, so ist ein solcher Haufen mit jenem in (§. 241.) angeführten freystehenden Haufen einerley, und kann daher nach (§. 241.) berechnet werden. Alle übrige Gattungen von Kugelhaufen lassen sich in lauter hier schon beschriebene Theile zerlegen, und können also nach den angeführten Formeln berechnet werden.

§. 244.

Aus den hier entwickelten Summenformeln der Kugelhaufen läßt sich eine allgemeine Regel geben, nach welcher alle Gattungen von Kugelschlichtungen berechnet werden können, nämlich:

Man addire zu dem Rücken des Haufens beyde mit ihm gleichlaufende Grundzeilen, und multiplizire diese Summe mit einem Seitendreyeck; so ist der dritte Theil dieses Produkts die Anzahl aller Kugeln des ganzen Haufens. Das Seitendreyeck ist allenthalben $= \tfrac{1}{2}n(n + 1)$, weil es eine arithmetische Reihe des ersten Ranges ist, wo das 1te Glied $= 1$, das letzte $= n$, und die Anzahl der Glieder ebenfalls $= n$ ist.

z. B. 1) Bey der dreyeckigen Pyramide ist der Rücken $= 1$, die eine Grundzeile $= n$, und die andere gleichlaufende $= 1$; folglich ist $s = \frac{1}{3}(2+n) \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$.

2) Bey der viereckigen Pyramide ist der Rücken $= 1$, und jede der gleichlaufenden Grundzeilen $= n$; folglich $s = \frac{1}{3}(1+n+n) \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$.

3) Beym langen freystehenden Haufen ist der Rücken $= m$, jede der gleichlaufenden Grundzeilen $= m + n - 1$; folglich $s = \frac{1}{3}(m+2m+2n-2) \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$.

4) Bey dem beyderseits angelehnten Haufen ist der Rücken $= m$, und jede der gleichlaufenden Grundzeilen $= m-n+1$; folglich $s = \frac{1}{3}(m+2m-2n+2) \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$.

Und so auch bey allen übrigen Arten von Haufen, die unter verschiedenen Winkeln zusammengestossen sind. Nur muß die Summe der beyden zum Rücken gleichlaufenden Grundzeilen richtig bestimmet werden. So z. B. ist bey dem im (§. 243.) angeführten Haufen mit einem Eingange, wenn der Rücken m, und eine Eckseite n Kugeln enthält, die Summe der innern und äussern Grundzeile nicht $= 2m$, wie bey einem nur von einer Seite angelehnten Haufen, sondern diese Summe ist $= 2m + 2n - 2$, eben so groß als bey einem freystehenden langen Haufen im (§. 241.). Ist hingegen ein solcher Haufen ganz geschlossen, so ist die Summe der äussern und innern Grundzeile $= 2m$, wenn der Rücken m Kugeln enthält; folglich ist die Summe aller Kugeln

$$s = \frac{1}{3}(m+2m) \cdot \frac{1}{2}n(n+1).$$

§. 245.

Sollte aber I. eine gegebene Anzahl von Kugeln $= s$ in eine dreyeckigte Pyramide geschlichtet werden, so ist (§. 240.)

$$s = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6};$$

und folglich $6s = n^3 + 3n^2 + 2n$

eine

eine verwickelte kubische Gleichung (§. 213.), wovon die Auflösung zwar erst in der künftigen Vorlesung folgen wird; doch aber läßt sich hier die Grundzeile n auf folgende Art bestimmen:

Da $n^3+3n^2+2n=6s$, so ist $n^3<6s$, wenn man links $3n^2+2n$ abzieht (§. 22. Grundsatz 2.), und $n^3+3n^2+3n+1>6s$, wenn man eben da $n+1$ hinzusetzet (§. 16. Gr. 2); nämlich $n^3<6s$, und $(n+1)^3>6s$; also auch $n<\sqrt[3]{6s}$, und $(n+1)>\sqrt[3]{6s}$ (§. 137. Gr. 2.), oder $n<\sqrt[3]{6s}$, und $n>\sqrt[3]{6s}-1$ (§. 22. Gr. 3.). Da nun der Unterschied zwischen $\sqrt[3]{6s}$ und n keine ganze Einheit beträgt, n aber doch hier eine ganze Zahl seyn muß, so hat man folgende Regel: **Man multiplizire die gegebene Anzahl der Kugeln mit 6, und ziehe die Kubikwurzel nur in ganzen Zahlen daraus**, substituire auch diese Kubikwurzel statt n in der Formel $\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$; kömmt nun die gegebene Anzahl der Kugeln zum Vorschein, so ist diese eine dreyeckige Pyramidalzahl, und läßt sich also genau in eine dreyeckige Pyramide schlichten, wovon die Grundzeile der gefundenen Kubikwurzel gleich ist. Ist aber die, nach der Formel $\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$ berechnete Summe kleiner, als die gegebene Anzahl der Kugeln $=s$; so ist es ein Zeichen, daß die gegebene Zahl der Kugeln sich nicht genau in eine dreyeckige Pyramide schlichten lasse. Ist endlich die gefundene Summe größer, als die gegebene Zahl der Kugeln; so muß zur Grundzeile um eine Kugel weniger, als die Kubikwurzel anzeigt, genommen werden, um eine vollständige Pyramide zu erhalten, wo noch ein Rest übrig bleiben wird. Z. B. es sollen 1140 Kugeln in eine dreyeckige Pyramide geschlichtet werden, so ist $\sqrt[3]{(6.1140)}=18$ ganzen Einheiheiten, und $\frac{18 . 19 . 20}{2 . 3} = 1140$; folglich ist 1140 eine Pyramidalzahl. Wären aber 7775 Kugeln in eine solche Pyramide zu schlichten, so ist $\sqrt[3]{(6 . 7775)} = 35$ ganzen Einheiten; es ist aber $\frac{35 . 36 . 37}{2 . 3} = 7770$; folglich bleiben 5 Kugeln übrig. Wären endlich 4000 Kugeln in eine solche Pyramide zu schlichten, so ist $\sqrt[3]{(6 . 4000)} = 28$ ganzen Einheiten; es ist aber $\frac{28 . 29 . 30}{2 . 3} = 4060$; folglich können nur 27 zur Grundzeile genommen werden, und es bleiben noch 346 Kugeln übrig.

II. Auf eben diese Art läßt sich eine Regel finden, um eine gegebene Anzahl der Kugeln in eine viereckige Pyramide zu schlichten. Denn da (§. 240.) $s = \frac{n(n+1).(2n+1)}{2.3}$, und daher $3s = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$; so ist $n^3 < 3s$, und $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 > 3s$; oder $n < \sqrt[3]{3s}$, und $(n+1) > \sqrt[3]{3s}$. Da nun hier ebenfalls n um keine ganze Einheit von $\sqrt[3]{3s}$ verschieden ist; so multiplizire man die gegebene Anzahl der Kugeln mit 3, und ziehe die Kubikwurzel daraus, so wird wieder die Kubikwurzel selbst, oder die um eine Einheit von ihr verschiedene Zahl die Grundzeile seyn, welches, wie vorher bey den dreyeckigen Pyramiden, allhier mittelst der Formel $\frac{n(n+1).(n+n+1)}{2.3}$ zu untersuchen ist.

III.

III. Wäre endlich eine gegebene Anzahl der Kugeln in einen langen freystehenden Haufen zu schlichten, so ist vermög (§. 241.)

$$s = \frac{2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n}{6}.$$

Da nun in dieser Gleichung m und n unbekannt sind, so ist hier eine unbestimmte Aufgabe aufzulösen; und es muß für eine Größe, m oder n, ein willkührlicher Werth angenommen werden. Nun ist es am besten n für bekannt anzunehmen; theils weil n sich nach der Höhe des Haufens richten muß, und theils auch, damit man der kubischen Gleichung ausweiche; es ist sodann $m = \frac{6s + 2n - 2n^3}{3n^2 + 3n}$

$$= \frac{2s}{n(n+1)} - \tfrac{2}{3}(n-1).$$

Läßt sich nun für n eine solche Zahl ausfindig machen, damit auch m eine ganze Zahl wird, so läßt sich die gegebene Anzahl der Kugeln in einen solchen Haufen ohne Rest schlichten; wo aber nicht, so kann für n jede andere schickliche Zahl angenommen, und für m der Werth nur in ganzen Einheiten daraus bestimmet werden, wo sodann noch ein Rest übrig bleiben wird, der nicht in einen solchen Haufen geschlichtet werden kann. Z. B. es sollen 1155 Kugeln in einen solchen freystehenden Haufen geschlichtet werden, so ist für $n = 10$, $m = 15$; hingegen lassen sich 1623 Kugeln in keinen solchen Haufen genau schlichten.

Wenn viele solche Haufen geschlichtet, oder berechnet werden sollten, so könnte man sich auf folgende Art eine Tafel verfertigen, um nicht jedesmal nach den angeführten Formeln rechnen zu dürfen.

Die Breite $= n$	Der Rücken des Haufens $= m$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	u.s.w.
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	
3	14	20	26	32	38	44	50	56	62	
4	30	40	50	60	70	80	90	100	110	
5	55	70	85	100	115	130	145	160	175	
6	91	112	133	154	175	196	217	238	259	
7	140	168	196	224	252	280	308	336	364	
8	204	240	276	312	348	384	420	456	492	
9	285	330	375	420	465	510	555	600	645	
10	385	440	495	550	605	660	715	770	825	
11	506	572	638	704	770	836	902	968	1034	
u.s.w.										
Die Länge der Grundfläche $= m + n - 1$										

Diese Tafel ist auch für die viereckigen Pyramiden zu gebrauchen, weil diese als lange Haufen, deren Rücken $= 1$ ist, angesehen werden können.

Es ist sehr leicht diese Tafel fortzusetzen, wenn einmal die erste Vertikalkolonne, die nur bis $n = 30$, oder höchstens $= 40$ fortzusetzen ist, nach der Formel $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{2.3}$ berechnet ist, weil die horizontalen Kolonnen arithmetische Reihen des 1ten Ranges sind, deren beständige Differenzen $= \frac{n.(n+1)}{2}$ sind, wo n die Stelle der horizontalen Kolonne anzeiget.

Auf

Auf die nämliche Art kann auch eine Tafel für die auf beyden Seiten angelehnten Haufen verfertigt werden, welche zugleich auch für die dreyeckigen Pyramiden gelten wird, weil sie ebenfals als solche Haufen anzusehen sind, bey denen aber die zum Rücken gleichlaufende Grundzeile = 1 ist

Die Eckseite $= n$	Die Länge der Grundfläche $= m$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	7	10	13	16	19	22	25
3	10	16	22	28	34	40	46	52
4	20	30	40	50	60	70	80	90
5	35	50	65	80	95	110	125	140
6	56	77	98	119	140	161	182	203
u. s. w.								
Der Rücken des Haufens $= m + n - 1$								

Auch die Fortsetzung dieser Tafel ist leicht einzusehen; denn die erste vertikale Kolonne wird nach der Formel $s = \frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$ berechnet, und die horizontalen Kolonnen sind Glieder einer arithmetischen Reihe des 1ten Ranges, deren Differenzen $= \frac{n.(n+1)}{2}$ sind.

§. 246.

Eine Reihe, deren erste Differenzen Glieder einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, und wo daher die dritten Differenzen erst beständig sind, wird eine arithmetische Reihe des drit-

dritten Ranges genennet. So z. B. ist die Reihe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe des 3ten Ranges, nämlich:

Reihe	1,	8,	27,	64,	125	= = = = =
1ten		7,	19,	37,	61	Differenzen.
2ten			12,	18,	24	
3ten				6,	6	

Hieraus erhellet, daß zu einer solchen Reihe 4 Glieder gegeben seyn müssen, um die Reihe fortsetzen, und das zugehörige sowohl allgemeine, als auch summatorische Glied bestimmen zu können.

Macht man hier eine dem (§. 237.) ähnliche Betrachtung, so sieht man, daß jedes Glied einer solchen Reihe aus einer angenommenen Größe S mehr der Summe von einigen Gliedern einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges bestehe; diese Summe aber kann nun nach (§. 238.) durch $Pn^3 + Qn^2 + Rn$ vorgestellet werden; folglich kann auch das $n$te, oder allgemeine Glied jeder arithmetischen Reihe des 3ten Ranges auf folgende Art vorgestellet werden:

I. $t = Pn^3 + Qn^2 + Rn + S.$

Multipliziret man nun, um die Summe s zu erhalten, dieses allgemeine Glied mit Fn, wie im (§. 238.), und setzet sodann $PF = A$, $QF = B$, $RF = C$, und $SF = D$, so ist das summatorische Glied einer jeden arithmetischen Reihe des 3ten Ranges

II. $s = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn,$

wo wieder hier A, B, C, D, so wie auch in I. die Koeffizienten P, Q, R, S aus 4 Gliedern einer vorgelegten Reihe des 3ten Ranges bestimmet werden, wenn man $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, sodann $n = 4$ setzet, und für t und s die zugehörigen Werthe substituiret. So z. B. findet

det man das $n$te Glied obiger Reihe der 3ten Potenzen der natürlichen Zahlen $t = n^3$, und die Summe

$$s = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = [\tfrac{1}{2} n(n+1)]^2$$

§. 247.

Eben so giebt es Reihen, deren 4te, 5te, 6te . . . Differenzen erst beständig sind, und werden deshalben **arithmetische Reihen des vierten, fünften, sechsten Ranges** genennet. So z. B. ist die Reihe der 4ten Potenzen der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe des vierten Ranges; die 5ten Potenzen der natürlichen Zahlen sind eine arithmetische Reihe des 5ten Ranges, und überhaupt die $m$ten Potenzen der natürlichen Zahlen sind eine arithmetische Reihe des $m$ten Ranges. Da aber solche Reihen in der ausübenden Mathematik äusserst selten vorkommen, so werden hier keine fernere Beyspiele angeführet. Nur folget hier das Gesetz der Formeln, sowohl für das $n$te Glied, als auch für die Summe von n Gliedern jeder dieser Reihen, damit ein jeder, welcher das bereits Vorgetragene gut verstanden hat, in vorkommenden Fällen Gebrauch davon machen kann.

Rang der Reihe	Das $n$te Glied $t =$	Summe von n Gliedern $s =$
1	$Pn + Q$	$An^2 + Bn$
2	$Pn^2 + Qn + R$	$An^3 + Bn^2 + Cn$
3	$Pn^3 + Qn^2 + Rn + S$	$An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$
4	$Pn^4 + Qn^3 + Rn^2 + Sn + T$	$An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En$
. .	. . . .	. . . .
m	$Pn^m + Qn^{m-1} \ldots + Yn + Z$	$An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} . + Hn$

Man

Man sieht aus diesem, daß jede Reihe, deren allgemeines und summatorisches Glied durch eine ganze rationale Funktion von n vorgestellet werden kann (von einer solchen Gestalt nämlich als die eben angeführten sind), zur Familie der arithmetischen Reihen gehöre; und daß es aus dem höchsten Exponenten des allgemeinen, oder auch des summatorischen Gliedes zu erkennen sey, von welchem Range die dazu gehörige Reihe sey, und wie viel Glieder der Reihe gegeben seyn müssen, um die Koeffizienten entweder des allgemeinen, oder auch des summatorischen Gliedes bestimmen zu können.

Von der Verbindung und Versetzung der Größen.

(De Combinatione & Permutatione.)

§. 248.

Es ist oft, sowohl bey mathematischen Untersuchungen, als auch im gemeinen Leben nothwendig, alle mögliche Fälle bey einer vorkommenden Sache aufzusuchen, wie auch in gewissen Fällen das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit eines Erfolges zu bestimmen. Z. B. da bey der arithmetischen Reihe des ersten Ranges 5 Größen vorkommen, wovon allzeit drey bekannt seyn müssen, um die 4te daraus zu bestimmen (§. 234.), so könnte gefragt werden: **Wie oft lassen sich 5 Größen so verbinden, damit jedesmal 4 andere beysammen seyn?** oder wie viele verschiedene Formeln können überhaupt bey den arithmetischen Reihen des ersten Ranges aufgestellet werden?

Eben so, wenn von 90 **Losen, oder Zahlen, die in einem Topfe untereinander gemischet sich befinden, nur 5 als Treffer heraus gezogen werden; und Jemand wollte behaupten, daß bey 10 von ihm unter den 90 gewählten Losen 3 Treffer seyn würden; wie verhält sich da die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, daß unter den gewählten 10 Losen 3 Treffer sich befinden sollten?**

Zur Beantwortung solcher Fragen ist es nothwendig, allgemeine Untersuchungen anzustellen, wie oft sich n Größen so verbinden lassen, damit jedesmal m verschiedene Größen beysammen stehen. Dieses kann auf folgende Art geschehen.

§. 249.

Wenn zwey einzelne Größen a und b zu zwey verbunden werden sollen, so ist nur eine Verbindung ab möglich; bey einer einzelnen Größe hingegen ist gar keine Verbindung zu zweyen möglich. Kömmt aber zu zwey Größen a und b noch die dritte c hinzu, so läßt sie sich noch mit a und mit b verbinden; also sind $1 + 2 = 3$ Verbindungen zu zweyen bey drey Größen möglich, nämlich ab, ac, bc. Kömmt noch die vierte Größe d hinzu, so erhält man noch drey Verbindungen ad, bd, cd; folglich sind in allen $3 + 3 = 6$ Verbindungen möglich. Kömmt noch die 5te Größe e hinzu, so läßt sie sich abermal mit den vier vorhergehenden Größen verbinden, und man erhält folglich in allen $6 + 4 = 10$ Verbindungen. Eben so findet man, daß sich 6 Größen 15mal zu zweyen verbinden lassen, u. s. w. Nun sind die Zahlen der Verbindungen zu zweyen, bey 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . n Größen, Glieder einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges, nämlich:

Bey Größen	1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . .
sind Verbind. zu zwey	0, 1, 3, 6, 10, 15 . . .

deren allgemeines Glied $= \frac{1}{2}n(n-1)$ ist (§. 237.)

I. **Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu zweyen (oder der sogenannten Amben) bey n Größen**

$$= \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}.$$

Sollen die Größen zu dreyen verbunden werden, so ist bey einer Größe a, und bey zwey Größen a, b gar keine; bey drey Größen aber a, b, c erst eine einzige Ver-

Verbindung zu dreyen, nämlich *abc* möglich. Kömmt noch die vierte Größe *d* hinzu, so giebt solche mit jedem Ambo der drey vorhergehenden Größen mit *ab*, *ac*, *bc* verbunden noch drey andere Verbindungen zu dreyen, nämlich nebst *abc*, noch *abd*, *acd*, *bcd*. Die Anzahl der Verbindungen zu dreyen ist demnach bey 4 Größen $= 1 + 3 = 4$. Kömmt noch die 5te Größe *e* hinzu, so giebt solche mit den 6 Amben der 4 vorhergehenden Größen verbunden, noch 6 andere Verbindungen zu dreyen, nämlich nebst *abc*, *abd*, *acd*, *bcd* entstehen noch *abe*, *ace*, *ade*, *bce*, *bde*, *cde*. Die Anzahl der Verbindungen zu dreyen bey 5 Größen ist demnach $= 4 + 6 = 10$. Kömmt noch die 6te Größe hinzu, so giebt solche mit den 10 Amben der 5 vorhergehenden Größen verbunden, noch 10 andere Verbindungen zu dreyen, welche mit den 10 Verbindungen zu dreyen der 5 vorhergehenden Größen zusammen 20 solche Verbindungen ausmachen. Die Anzahl der Verbindungen zu dreyen bey 6 Größen ist demnach $= 20$. Eben so findet man die Anzahl der Verbindungen zu dreyen bey 7 Größen $= 35$ u. s. w. Nun sind die Zahlen der Verbindungen zu dreyen bey 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . *n* Größen, nämlich die Zahlen 0, 0, 1, 4, 10, 20, 35 . . . Glieder einer arithmetischen Reihe des 3ten Ranges, deren allgemeines Glied $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{3.2.1}$ ist vermög (§. 246.)

II. **Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu dreyen (oder der sogenannten Ternen) bey *n* Größen** $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{3.2.1}$.

Bey der Verbindung zu vieren lassen sich eine, zwey, drey Größen **Nullmal**, vier Größen aber einmal verbinden *abcd*. Kömmt noch die 5te Größe *e* hinzu, so läßt sie sich noch mit jedem Terno der vorigen 4 Größen verbinden, mit *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*. Es sind also bey 5 Größen in allem

lem $1 + 4 = 5$ Verbindungen zu vieren. Kömmt noch die 6te Größe f hinzu, so läßt sie sich noch mit jedem Terno der vorigen 5 Größen, nämlich noch 10mal verbinden; und folglich sind hier $5 + 10 = 15$ Verbindungen möglich u. s. w. Diese Verbindungen zu vieren bey 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . n Größen sind Glieder einer arithmetischen Reihe des vierten Ranges, nämlich 0, 0, 0, 1, 5, 15 . . . deren allgemeines Glied $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2.1}$ ist vermög (§. 247.)

III. Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu vieren (oder der sogenannten Quaternen) bey n Größen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2.1}$.

Eben so kann man zeigen, daß sich n Größen zu fünfen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5.4.3.2.1}$ mal, zu sechsen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6.5.4.3.2.1}$ mal, u. s. w. verbinden lassen.

IV. Es ist demnach die Anzahl der verschiedenen Verbindungen bey n Größen, wenn in jeder Verbindung m Größen beysammen stehen

$$= \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3) \ldots [n-(m-1)]}{m.(m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots 1}$$

Z. B. die fünf Größen in einer arithmetischen Reihe (das erste Glied, die Differenz, die Anzahl der Glieder, das letzte Glied, und die Summe aller Glieder) können $\frac{5.4.3.2}{4.3.2.1} = 5$mal zu vieren verbunden werden; das ist, es lassen sich aus diesen 5 Größen 5 Gleichungen ableiten, wo in jeder Gleichung 4 Größen miteinander verbunden sind; und da aus jeder dieser 5 Gleichungen jede der 4 Grö-

Größen gesucht werden kann, so sind überhaupt $5 \cdot 4 = 20$ verschiedene Formeln möglich, wie es aus der im (§. 234.) angeführten Tafel zu ersehen ist.

Eben so, da aus 90 Losen $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 117480$ Verbindungen zu dreyen, nämlich 117480 Ternen gemacht werden können; und da aus den 5 herausgezogenen Treffern nur $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ Ternen als Treffer entstehen, so kommen auf einen Treffer 11748 Fehler. Da ferner aus 10 gewählten Losen $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ Ternen entstehen, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit unter den gewählten 10 Losen einen Terno zu treffen, zur Unwahrscheinlichkeit wie 120 zu 11748, oder wie 10 zu 979. Und hiemit sind die zwey oben im (§. 248.) vorgelegten Fragen beantwortet.

§. 250.

Aufgabe. Es will jemand in die gewöhnliche Lotterie von 90 Numern so viel Zetteln zu 5 Numern spielen, damit er alle herausgezogene 5 Numern auf einem Zettel beysammen habe. Wie viel muß er in allem Zetteln setzen? Wie viel Zetteln werden darunter befindlich seyn, auf welchen 4 Numern getroffen sind? Wie viel Zetteln werden drey, und wie viele zwey Treffer enthalten? Auf wie viel Zetteln wird nur ein einzelner Treffer sich befinden? Und endlich wie viel Zetteln werden darunter seyn, worauf sich gar kein Treffer befindet?

Auflösung. Da er alle 5 herausgezogene Numern beysammen auf einem Zettel (einen Quinterno) haben will; so muß er alle Verbindungen der 90 Numern zu fünfen, nämlich $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43949268$ Zetteln se-

 tzen,

zen, unter welchen er ganz gewiß den Quinterno haben wird. Da nun auch bey den 5 herausgezogenen Numern 5 Quaternen möglich sind, wovon jeder mit allen 85 gefehlten Numern gespielt worden ist; so hat er $5 \cdot 85 = 425$ Quaternen. Ueber dieses sind bey den herausgezogenen fünf Numern $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ Ternen möglich, welche mit jeder Verbindung zu zweyen der 85 gefehlten Numern gespielt worden sind; also hat er $10 \times \frac{85 \cdot 84}{2 \cdot 1} = 35700$ Ternen. Eben so giebt es bey den 5 herausgezogenen Numern $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ Amben, die mit jeder Verbindung zu dreyen der 85 gefehlten Numern gespielt worden sind; folglich hat er $10 \times \frac{85 \cdot 84 \cdot 83}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 987700$ Amben. Ferner sind die 5 getroffenen Numern mit jeder Verbindung zu vieren der 85 gefehlten Numern gespielt worden; folglich hat er $5 \times \frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10123925$ Estratten. Endlich hat er noch $\frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 32801517$ Zetteln, worauf sich gar kein Treffer befindet.

§. 251.

Das privilegirte k. k. Lottospiel, wo 5 Numern aus 90 als Treffer herausgezogen werden, ist allhier so eingerichtet, daß die eingesetzte Einlage für jeden einzelnen Treffer (Estratto) 14fach, für jeden einzelnen an seiner Stelle errathenen Treffer (Estratto determinato) 67fach, für jeden getroffenen Ambo 240fach, und für jeden getroffenen Terno 4800fach zurückbezahlet wird. Der Quaterno, und Quinterno wird allhier nicht besonders, sondern nur nach der darinn enthaltenen Anzahl der

der Ternen und Amben bezahlet. Werden bey dem Ambospiele mehr als zwey, und bey dem Ternospiele mehr als drey Numern auf ein einziges Zettel gesetzet, so wird die ganze Einlage auf ein einzelnes Zettel mit n Numern bey dem blossen Ambospiele für jeden getroffenen Ambo $\frac{480}{n(n-1)}$ fach, und bey dem blossen Ternospiele für jeden getroffenen Terno $\frac{28800}{n(n-1)(n-2)}$ fach zurückbezahlet. Aus diesen Angaben, und aus der Voraussetzung, daß im Durchschnitte genommen die Lottokammer mit den sämmtlichen Spielern gleiches Glück habe, läßt sich nun berechnen, welcher Theil der sämmtlichen Einlage aller Spieler für die Treffer hinausbezahlet werde, und welcher Theil in der Lottokammer theils zur Bestreitung der Kösten, theils als reiner Gewinn zurückverbleibe. Als

1) Bey dem einfachen Estrattospiele werden von der sämmtlichen daraufgesetzten Einlage aller Spieler $\frac{7}{9}$ für die Treffer hinaus bezahlet, und $\frac{2}{9}$ zurückbehalten. Denn wenn man alle 90 Nnmern als Estratto spielet, und auf jede Numer a Fl. setzet, so ist die Einlage $90a$ Fl.; unter den 90 Numern werden richtig fünfe getroffen, und die Zurückbezahlung dafür beträgt $5 \cdot 14a = 70a$ Fl., wo nun $\frac{70a}{90a} = \frac{7}{9}$ ist.

2) Bey dem Spiele auf Estratto determinato werden von der sämmtlichen Einlage $\frac{67}{90}$, oder ohngefähr $\frac{3}{4}$ für die Treffer hinausbezahlet, und $\frac{1}{4}$ davon wird zurückbehalten; welches man eben so wie vorhin finden kann.

3) Bey dem Ambospiele werden von der sämmtlichen Einlage aller Spieler $\frac{160}{267}$, oder sehr nahe $\frac{3}{5}$ für die Treffer hinaus bezahlet, und $\frac{2}{5}$ davon verbleiben der Lottokam-

kammer. Denn die Anzahl aller möglichen Amben bey 90 Numern ist 4005 als Einlage, wenn auf jeden Ambo eine Einlage 1 gesetzet wird; bey den 5 herausgezogenen Numern sind 10 Amben als Treffer, wo die Einlage 1 für jeden solchen Treffer mit 240 hinausbezahlet wird; daher ist $10 \times 240 = 2400$ als Hinausbezahlung, wo nun $\frac{2400}{4005}$ sehr nahe $\frac{3}{5}$ ist, welches auch auf folgende Art begreiflich wird. Es werde bey dem blossen Ambospiele auf ein einzelnes Zettel mit allen 90 Numern die Einlage a gesetzet, so werden bey den 5 herausgezogenen Numern 10 Amben getroffen, und weil in einem solchen Falle für jeden getroffenen Ambo die ganze Einlage $\frac{480}{90 \cdot 89} = \frac{16}{267}$ fach zurückbezahlet wird, so beträgt die Hinausbezahlung $\frac{160}{267} \cdot a$, welches sehr nahe $\frac{3}{5}\ a$ ist.

4) Bey dem Ternospiele endlich ist die Hinausbezahlung gar nur $\frac{400}{979}$, oder beynahe $\frac{2}{5}$ der sämmlichen Einlage aller Ternospieler, so daß fast $\frac{3}{5}$ der Einlage in der Lottokammer zurückverbleibet. Denn, wenn bey dem blossen Ternospiele auf ein einzelnes Zettel mit allen 90 Numern die Einlage a gesetzet wird, so werten bey den 5 herausgezogenen Numern 10 Ternen getroffen; und weil in einem solchen Falle für jeden getroffenen Terno die ganze Einlage $\frac{28800}{90 \cdot 88 \cdot 89} = \frac{40}{979}$ fach zurückbezahlet wird, so beträgt die Hinausbezahlung $\frac{400}{979} \cdot a$, welches sehr nahe $\frac{2}{5}\ a$ ist, so daß fast $\frac{3}{5}\ a$ in der Lottokammer zurückverbleibet.

Auch

Auch die Wahrscheinlichkeit einen Treffer bey dem Lottospiele zu errathen läßt sich berechnen; es verhält sich nämlich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit mit drey Numern einen Terno zu errathen wie 1 zu 11748; mit zwey Numern einen Ambo zu errathen wie 10 zu 4005; einen einzelnen Treffer an seiner Stelle zu errathen, wie 1 zu 90; und endlich einen einzelnen Treffer ohne auf seine Ordnung zu achten, wie 1 zu 18. Das ist, wenn ein nämliches Los unausgesetzt fortgespielet wird, so wird solches im Durchschnitte genommen immer in 18 Ziehungen einmal getroffen. Auch ist nun leicht die Wahrscheinlichkeit eines Treffers zu berechnen, wenn bey dem Ambospiele mehr als 2, und bey dem Ternospiele mehr als 3 Numern auf einem einzelnen Zettel gespielet werden. Eben so leicht ist es auch nach den obangeführten Angaben die Einlage $= x$ zu berechnen, wenn auf einem einzelnen Zettel n Numern dergestalt gespielet werden, daß der Spieler für jeden getroffenen Ambo a Fl., und für jeden getroffenen Terno b Fl. erhalte. Z. B. für ein Zettel mit 10 Numern, den Ambo mit 10, und Terno mit 100 Dukaten, den Dukaten zu 4 Fl. gerechnet, beträgt die Einlage 17 Fl. 30 Kr.

Aus den angeführten Betrachtungen ist es zu ersehen, daß die Lotterie, besonders bey dem Ternospiele, für die Lottokammer ungemein vortheilhaft, aber auch eben darum für die Spieler nachtheilig eingerichtet sey; hauptsächlich für solche, welche diese Einrichtung nicht begreifen können.

§. 252.

Zuweilen ist es auch nothwendig die Anzahl der **Versetzungen** (Numerum permutationum) von n verschiedenen Größen zu bestimmen. Z. B. es könnte gefragt werden; **wie oft können 6 Personen an einem Tische ihre Plätze verwechseln, bis sie gezwungen sind ihre vorige Stellung wieder anzunehmen?** Dieses kann auf folgende Art untersucht werden.

Eine einzelne Größe *a* läßt sich nur einmal ansetzen; kömmt aber die zweyte *b* hinzu, so sind zwey Versetzungen *ab*, *ba* möglich. Kömmt nun noch eine dritte Größe *c* hinzu, so läßt sie sich bey jeder der zwey vorigen Versetzungen dreymal anbringen, nämlich vorne, in der Mitte, und hinten; als *cab*, *acb*, *abc*, und *cba*, *bca*, *bac*; also sind bey drey Größen $2 \cdot 3 = 6$ Versetzungen möglich. Kömmt eine vierte Größe *d* noch hinzu, so läßt sie sich bey jeder der sechs vorigen Versetzungen viermal anbringen, nämlich vorne, an den zwey mittlern Stellen, und hinten; z. B. *dcab*, *cdab*, *cadb*, *cabd*; folglich sind hier $6 \cdot 4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ Versetzungen möglich. Kömmt noch die fünfte Größe *e* hinzu, so läßt sie sich wieder mit jeder der 24 vorigen Versetzungen fünfmal, wie *edcab*, *decab*, *dceab*, *dcaeb*, *dcabe* versetzen; und es sind also hier $24 \cdot 5 = 120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ Versetzungen möglich u. s. w. Folglich lassen sich *n* Größen $1, 2, 3, 4 \ldots n$mal versetzen. Im obigen Beyspiele können demnach die 6 Personen bey einer Tafel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$mal ihre Plätze verwechseln, bis sie ihre vorige Stellung wieder einnehmen müssen.

Anmerkung. Die Untersuchung, wie oft sich *n* Größen versetzen lassen, wenn dabey *m* gleiche Größen befindlich sind, wird dem eigenen Fleiße der Anfänger überlassen. Z. B. wie viel verschiedene Zahlen können durch die Versetzung mit den Ziffern 11234, wie viele mit 122333 bezeichnet werden? Auch können die fleißigern Anfänger versuchen, die angeführten Gründe von den Verbindungen und Versetzungen der Größen, auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit in einigen besondern Fällen anzuwenden. Z. B. beym Würfelspiele mit drey Würfeln könnte gefragt werden: wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit? 1) Bey einem bestimmten gleichen Wurfe, etwan um alle drey Sechser zu werfen; 2) bey einem unbestimmten gleichen Wurfe; 3) bey einem bestimmten ungleichen Wurfe, etwan um eins, zwey, drey zu werfen; 4) bey einem

nem unbestimmten ungleichen Wurfe; 5) bey einem ganz bestimmten Wurfe von zwey gleichen, und einem davon verschiedenen Felde; 6) bey einem Wurfe, wo zwey gleiche Felder bestimmt, das dritte aber unbestimmt gelassen wird; 7) bey einem Wurfe, wo zwey gleiche Felder unbestimmt verbleiben, das dritte Feld aber bestimmt wird; 8) bey einem Wurfe, wo die zwey gleichen Felder, nebst dem dritten unbestimmt verbleiben; u. s. w.

Man findet nach vorgenommener Untersuchung, daß in N. 1. das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit sey = 1 : 216, nämlich daß im Durchschnitte genommen immer unter 216 Würfen einmal alle drey Sechser fallen, weil unter allen möglichen verschiedenen Würfen, welche mit drey Würfeln gemacht werden können, 6 Würfe von drey gleichen Feldern, 90 Würfe von zwey gleichen und einem davon verschiedenen Felde, und 120 Würfe von gänzlich ungleichen Feldern, zusammen 216 verschiedene Würfe sich befinden. Bey N. 3. ist das Verhältniß wie 1 zu 36 u. s. w.

Wenn nun zwey Personen *A* und *B* mit drey Würfeln dergestalt um die Wette spielen, daß bey jedem Wurfe nach N. 4. der Spieler *A*, hingegen bey jedem Wurfe nach N. 8. der Spieler *B* die sämmtliche Einlage gewinne; so muß vermög Billigkeit, die Einlage des *A* zur Einlage des *B* sich verhalten wie 4 zu 3. Wenn hingegen *A* bey jedem Wurfe nach N. 2., und *B* bey jedem Wurfe nach N. 3. gewinnen soll, so müssen deren Einlagen gleich groß seyn.

In einigen Schriften, z. B. in Hrn. Mönichs Lehrbuch der Math. I. B. I. Anh. §. 15. wird das Verhältniß für N. 1. ganz anders angegeben, nämlich 1 : 816, weil drey Würfel 18 Felder haben, die sich $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816$ mal zu dreyen verbinden lassen; allein weil ein Würfel nicht mehr als ein einziges Feld auf einmal zeigen kann, so müssen von diesen 816 Verbindungen folgende ausgeschlossen werden, 1) bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu dreyen $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = 60$; 2) bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu zweyen mit den 12 Feldern der beyden andern Würfel verbunden $= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 12 \cdot 3 = 540$; mithin verbleibt die Anzahl der möglichen Verbindungen nur $= 816 - 60 - 540 = 216$, wie vorhin.

Von den geometrischen Reihen.

§. 253.

Eine Reihe, in welcher man beständig gleiche Quotienten erhält, wenn man jedes nachfolgende Glied durch das vorhergehende dividiret, wird eine geometrische Reihe genennet. So z. B. sind 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... imgleichen 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ geometrische Reihen; weil in der ersten der beständige Quotient 2, und in der andern $\frac{1}{3}$ erhalten wird, wenn man jedes nachfolgende Glied durch das nächst vorhergehende dividiret. Man erhält demnach bey einer geometrischen Reihe jedes folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden, wenn man dieses mit dem Quotienten multiplizieret vermög (§. 173.). Es erhellet hieraus, daß wenn das erste Glied und der Quotient einer geometrischen Reihe gegeben sind, die Reihe nach belieben forgesetzt werden könne. Es sey z. B. das erste Glied einer Reihe = 2, und der Quotient = 3, so ist das zweyte Glied = 6, das dritte = 18 u. s. w.

Es sey nun das erste Glied $= a$, und der Quotient, mit welchem man jedes vorhergehende Glied multiplizieren muß, um das folgende zu erhalten sey $= q$; so hat man folgende allgemeine Formel für jede geometrische Reihe.

Stel-

Stellen	1	2	3	4	5	. . . . n
Glieder	a,	aq,	aq^2,	aq^3,	aq^4	. . . . t

wo q bey einer steigenden Reihe > 1, hingegen bey einer fallenden Reihe < 1 seyn muß. Da nun hier jedes Glied aus q auf die Potenz der Anzahl der vorhergehenden Glieder erhoben, multiplizirt mit a besteht, so ist das allgemeine Glied $= aq^{n-1}$. Benennet man nun das letzte oder allgemeine Glied einer solchen Reihe mit t, und die Anzahl der Glieder mit n, so ist

I. $t = aq^{n-1}$.

Nämlich das letzte Glied einer jeden geometrischen Reihe besteht aus dem Quotienten zur Potenz der Anzahl der Glieder weniger eins erhoben, multiplizirt mit dem ersten Gliede.

Benennet man ferner die Summe von n Gliedern mit s; so ist $s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$

Um nun diese Formel geschickt abzukürzen multiplizire man beyde Theile der Gleichung mit q

so ist $qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^n$

und ferner durch die Subtraktion die zwey Gleichungen,

$sq - s = aq^n - a$, das ist $s(q-1) = aq^n - a$, und

$$s = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q-1};$$

oder wenn man vermög vorigen, t statt aq^{n-1} setzet, so ist

$$\text{II. } s = \frac{tq - a}{q-1}$$

Nämlich, die Summe einer jeden geometrischen Reihe wird erhalten, wenn man das letzte Glied mit dem Quotienten multiplizirt, das erste Glied davon abzieht, und den Rest durch den um eins verminderten Quotienten dividiret.

So

So z. B. ist die Summe der obigen Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 63$; eben so ist $81 + 27 + 9 + 3 = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = -80 : -\frac{2}{3} = +120$.

Es ist aus diesem letzten Beyspiele zu ersehen, daß die fallenden geometrischen Reihen eben so wie die steigenden behandelt werden können, ohne daß man nöthig habe die Reihe umzukehren, nämlich das letzte Glied für das erste, und das erste für das letzte anzusehen.

Die angeführte Formel II. kann man auch auf folgende Art finden: In der geometrischen Reihe $a + aq + aq^3 + aq^4 + \ldots + t$, wovon die Summe aller Glieder $= s$ sey, sind $a : aq$, $aq : aq^2$, $aq^2 : aq^3$, $aq^3 : aq^4$ ꝛc. gleiche Verhältnisse; und es ist bey diesen gleichen Verhältnissen die Summe aller vordern Glieder $= s - t$, und die Summe aller hintern Glieder $= s - a$; es ist daher vermög (§. 191.)

$s - t : s - a = a : aq$, woraus $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ folget.

§. 254.

Bey den geometrischen Reihen sind ebenfalls wie bey den arithmetischen 5 Größen in Betrachtung zu ziehen, nämlich das erste Glied $= a$, das letzte $= t$, der Quotient $= q$, die Anzahl der Glieder $= n$, und die Summe von n Gliedern $= s$, wo wieder jedesmal drey bekannt seyn müssen um die übrigen zwey daraus bestimmen zu können. Nur wenn s, n, a, oder s, n, t gegeben wären, so lassen sich die zwey übrigen blos durch höhere Gleichungen bestimmen; wie es folgende Formeln zeigen.

Zu such.	gegeb	N.	Formeln.	Diese Formeln erhält man.
t	a,q,n	1	$t = aq^{n-1}$	Vermög §. 253. I.
	a,q,s	2	$t = \frac{a+(q-1)s}{q}$	Aus §. 253. II.
	q,n,s	3	$t = \frac{q^{n-1}(q-1)s}{q^n - 1}$	Den Werth von a aus I. in II. substit
	a,n,s	4	$t.(s-t)^{n-1} - a.(s-a)^{n-1} = 0$	Den Werth von q aus I. in II. substit.
s	a,q,t	5	$s = \frac{tq - a}{q - 1}$	Vermög §. 253. II.
	a,q,n	6	$s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$	Den Werth von t aus I. in II. substit.
	q,n,t	7	$s = \frac{t(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$	Den Werth von a aus I. in II. substit.
	a,n,t	8	$s = \dfrac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$	Den Werth von q aus I. in II. substit.
a	q,n,t	9	$a = \frac{t}{q^{n-1}}$	Aus I.
	q,t,s	10	$a = tq - (q-1)s$	Aus II.
	q,n,s	11	$a = \frac{(q-1)s}{q^n - 1}$	Den Werth von t aus I. in II. substit.
	n,t,s	12	$a.(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$	Den Werth von q aus I. in II. substit.

Zu such	gegeb.	N.	Formeln.	Diese Formel erhält man
q	a, n, t	13	$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$	Aus I.
	a, t, s	14	$q = \frac{s-a}{s-t}$	Aus II.
	a, n, s	15	$q^n - \frac{s}{a} q + \frac{s-a}{a} = 0$	Den Werth von t aus I. in II. substit.
	n, t, s	16	$q^n - \frac{s}{s-t} \cdot q^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0$	Den Werth von a aus I in II. substit.
n	a, q, t	17	$q^n = \frac{tq}{a}$	Aus I.
	a, t, s	18	$\left(\frac{s-a}{s-t}\right)^{n-1} = \frac{t}{a}$	Den Werth von q aus I. in II. substit.
	q, t, s	19	$q^n = \frac{tq}{tq-(q-1)s}$	Den Werth von a aus I. in II. substit.
	a, q, s	20	$a^n = \frac{a+(q-1)s}{a}$	Den Werth von t aus I. in II. substit.

Unter diesen 20 Formeln sind N. 4, 12, 15, 16 höhere Gleichungen, deren Eigenschaften in der folgenden Vorlesung vorkommen werden. Aus den Formeln N. 17, 18, 19, 20 könnte n zwar nach (§. 228.) gefunden werden; da aber dieses etwas beschwerlich ist, besonders, wenn n ein Bruch seyn sollte, und die unbekannten Exponenten aus den Gleichungen durch die Lehre von den Logarithmen viel leichter zu bestimmen sind, so wollen wir lieber zuvor zur Kenntniß der Logarithmen schreiten, und hernach sowohl die Lehre von geometrischen Reihen, als von Logarithmen durch wirkliche Beyspiele anzuwenden suchen.

II.

II. Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 255.

Wenn man eine beliebige Zahl a nacheinander auf verschiedene Potenzen erhebet, so werden die Exponenten die **Logarithmen** der hervorgebrachten Potenzen genennet. Z. B. es sey $a^m = b$, $a^n = c$, $a^p = d$ u. s. w.; so ist m der Logarithmus von b, n der Logarithmus von c, p der Logarithmus von d, und wird also bezeichnet, $m = \log b$, $n = \log c$, $p = \log d$. Und so ist der Logarithmus einer jeden andern Zahl f derjenige Exponent, auf welchen a erhoben werden muß, damit f zum Vorschein komme. Auf diese Art erhält man ein **logarithmisches System**, wovon die Zahl a die **Grundzahl** genennet wird; weil sie den einmal angenommenen Werth beständig beybehält, und das System gleichsam auf derselben erbauet wird.

Wenn man bey einer angenommenen Grundzahl $= a$ die Exponenten m, n, p, q ꝛc. in einer arithmetischen Reihe steigen, nämlich gleichförmig zunehmen läßt, so werden die hervorgebrachten Potenzen in einer geometrischen Reihe wachsen, oder zusammenhängende Proportionalglieder seyn; z. B.

Exponenten, oder Logarithm.	$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\ \ldots$
hervorgebr. Potenzen	$a^3,\ a^5,\ a^7,\ a^9,\ a^{11}\ \ldots$

Und daher kann man auch mit Adr. Vlacq sagen: **Die Logarithmen sind von zusammenhängenden Proportionalgrößen gleichförmig zunehmende Begleiter** (Logarithmi sunt quantitatum continue proportionalium comites æquidifferentes).

§. 256.

§. 256.

Es sey nun auch $A^m = q$, $A^n = r$, $A^p = s$ u. s. w.; so hat man wieder ein logarithmisches System; wovon A die Grundzahl und also $m = \text{Log}\ q$, $n = \text{Log}\ r$, und $p = \text{Log}\ s$ ist. Ist nun $A = a$, so ist wegen $a^m = b$ auch $b = q$, wie auch $c = r$, $d = s$ rc. (§. 137. N. 1.), und man hat eben dasselbe System. Ist aber A von a verschieden, so sind es verschiedene Systeme, und auch die Größen b, c, d sind von q, r, s verschieden, das heißt: **Gleiche Größen haben in einerley Systeme auch gleiche Logarithmen, und in verschiedenen Systemen verschiedene Logarithmen. Und umgekehrt, gleichen Logarithmen entsprechen in einerley Systeme auch gleiche Zahlen, und in verschiedenen Systemen verschiedene Zahlen.**

§. 257.

Die merkwürdigsten allgemeinen Eigenschaften der Logarithmen sind folgende:

1) Man setze in der Gleichung $a^m = b$ den Exponenten $m = 0$, so ist vermög (§. 126.) $b = 1$; und also $0 = \log 1$, das **heißt, in jedem System ist der Logarithmus von $1 = 0$.**

2) Setzet man aber $m = 1$, so ist $b = a$, und also $1 = \log a$, nämlich: **in jedem Systeme ist der Logarithmus von der Grundzahl $= 1$.**

3) Nimmt man übrigens $a > 1$ an, so ist vermög (§. 123. II.) $b > 1$, wenn m eine positive Zahl; und vermög (§. 127.) $b < 1$, wenn m eine negative Zahl bedeutet; **das heißt, in jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl größer ist, als 1, sind die Logarithmen der Zahlen, welche die Einheit übersteigen, positiv, und die Logarithmen der eigentlichen Brüche sind negativ.**

4) Wäre aber die Grundzahl $a < 1$, so ist vermög (§. 123. I.) $b < 1$, wenn m positiv; und vermög (§. 127.) $b > 1$, wenn m negativ; nämlich, in jedem logarithmischen System, wo die Grundzahl kleiner ist als 1, sind die Logarithmen der eigentlichen Brüche positiv; und die Logarithmen der Zahlen, welche die Einheit übersteigen, sind negativ. Man sieht hieraus, daß es am füglichsten ist für die Grundzahl einen Werth, der größer ist als 1, und zwar positiv anzunehmen; hierdurch erhalten nur die positiven Zahlen reelle Logarithmen, die Logarithmen der negativen Zahlen hingegen werden sodann unmöglich. Und zwar je größer die Zahl ist, desto größer ist der dazu gehörige Logarithmus; weil b in der Gleichung $a^m = b$ immer um so größer wird, je größer man m annimmt.

5) Wenn $a^m = b$, und $a^n = c$ ist, so ist auch $a^m \cdot a^n = a^{m+n} = bc$, (§. 29. N. 1.), und also $m+n = \log bc$. Es ist aber auch $m = \log b$, und $n = \log c$; folglich $\log bc = \log b + \log c$; daß heißt, der Logarithmus eines Produktes besteht aus der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Daß dieser Satz sich auch auf ein Produkt mit mehreren Faktoren erstrecke, ist leicht einzusehen. Denn es sey $c = df$, so ist $\log bc = \log b + \log df = \log b + \log d + \log f$.

6) Da $a^m = b$ und $a^n = c$, so ist auch (§. 39. N. 1.) $a^{m-n} = \frac{b}{c}$; also $(m-n) = \log \frac{b}{c}$; oder wenn man für m und n die gleichen Werthe $\log b$, und $\log c$ setzet, so ist $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$; nämlich, der Logarithmus eines Quotienten besteht aus dem Logarithmus des Dividendus, weniger dem Logarithmus des Divisors; oder der Logarithmus eines Bruches besteht aus dem Logarithmus des Zählers, weniger dem Logarithmus des Nenners.

7) Da $a^m = b$ ist, so ist auch $a^{rm} = b^r$ vermög (§. 137. N. 1.) und also $rm = \log b^r$; oder $r . \log b = \log b^r$; nämlich, der **Logarithmus einer Potenz** b^r **besteht aus dem Logarithmus der Wurzel** b **multiplizirt mit dem Exponenten** r **der Potenz.**

8) Da $a^m = b$, so ist auch $a^{\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{b}$ vermög (§. 137. N. 2.); daher $\frac{m}{r} = \log \sqrt[r]{b}$, und endlich $\frac{\log b}{r} = \log \sqrt[r]{b}$; nämlich, der **Logarithmus einer Wurzelgröße** $\sqrt[r]{b}$ **besteht aus dem Logarithmus der Potenz** b **dividirt durch den Exponenten** r **des Wurzelzeichens.**

Aus diesen angeführten Sätzen erhellet nun, daß es bey der Berechnung der Logarithmen nur nöthig sey, die Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 . . . . zu berechnen, weil die übrigen durch eine blosse Addition leicht daraus zu bestimmen sind.

§. 258.

In dem gewöhnlichen logarithmischen Systeme, welches das **gemeine**, oder **briggische System** genennt, und am meisten in der Mathematik gebraucht wird, hat man die Grundzahl $a = 10$ gesetzt. Es ist sodann, weil $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ ist, $\log. 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10000 = 4$ u. s. w. Eben so ist, weil $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$, $10^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{10}$, $10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$ ist, $\frac{1}{2} = \log \sqrt{10}$, $\frac{1}{3} = \log \sqrt[3]{10}$, $\frac{1}{x} = \log \sqrt[x]{10}$, $\frac{m}{n} = \log \sqrt[n]{10^m}$

Hieraus erhellet, daß die Logarithmen der rationalen Potenzen der Grundzahl ganze rationale Zahlen, und die-

Logarithmen der irrationalen Potenzen der Grundzahl rationale Brüche seyn müssen; und daß die Logarithmen aller übrigen Zahlen weder rational noch irrational, sondern transcendent (§. 228.) seyn müssen; weil es nicht möglich ist, eine rationale Grundzahl auf irgend einen Exponenten zu erheben, daß eine solche Zahl vollkommen genau zum Vorschein komme.

§. 259.

Uebrigens kann man im briggischen Systeme doch sicher schliessen, daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 kleiner als 1, und grösser als 0 seyn müssen; daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 aus einer Einheit nebst einem Bruch, die Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000 aus zwey Einheiten nebst einem Bruch, die Logarithmen der Zahlen zwischen 1000 und 10000 aus drey Einheiten nebst einem Bruch, überhaupt daß der Logarithmus einer jeden ganzen Zahl aus so vielen ganzen Einheiten, als die Zahl Ziffern hat weniger 1, nebst einem Bruch bestehen müsse, welche Brüche nur näherungsweise durch Dezimalbrüche ausgedrückt werden können, die der Wahrheit um so näher kommen, jemehr Dezimalstellen man bey demselben zu bestimmen trachtet. Auch wird deswegen die Ziffer des Logarithmus, welche die ganzen Einheiten anzeigt, die **Kennziffer**, oder **Charakteristik** genennet; weil man diese also gleich kennt, sobald die Anzahl der Ziffern von der dem Logarithmus zugehörigen Zahl bekannt ist. Und umgekehrt, weil man aus der Kennziffer eines Logarithmus also gleich erkennet, aus wie viel Ziffern die demselben entsprechende Zahl bestehen muß.

Auch ist es leicht einzusehen, daß in eben diesem briggischen Systeme der Logarithmus einer Zahl, welche hinten Nullen bey sich führet, dem Logarithmus der bedeutlichen Ziffern in seinen Dezimalstellen vollkommen gleiche, und nur in der Charakteristik um eben so viele Einheiten grösser sey, als

als die Zahl hinten Nullen hat. So z. B. ist log 3564000 = log 3564 × 1000 = log 1000 + log 3564 = 3 + log. 3565.

Eben so ist auch log $654,89 = \log \frac{65489}{100} = \log 65489 - 2$; das heißt, der Logarithmus eines Dezimalbruches ist in den Dezimalstellen dem Logarithmus eben dieser Zahl, als einer ganzen Zahl betrachtet, völlig gleich, und nur allein in der Charakteristik um eben so viele Einheiten kleiner, als Dezimalstellen bey der vorgelegten Zahl vorhanden sind.

§. 260.

Man könnte sich aber dem Logarithmus einer Zahl nähern, welche keine vollkommene Potenz von der Grundzahl ist, wenn man nach und nach eine solche irrationale Potenz der Grundzahl aufsuchet, welche von der gegebenen Zahl nur um einen solchen kleinen Bruch verschieden ist, der bey einer vorkommenden Rechnung für nichts zu achten, und also eines für das andere ohne einen Fehler zu begehen, gesetzt werden darf. Z. B. es wäre der briggische Logarithmus von 5 zu berechnen, so könnte man folgendermassen zu Werke gehen:

Da 5 zwischen 10^0, und 10^1 liegt, so suche man zwischen diesen zweyen Potenzen nach (§. 184.) die mittlere geometrische Proportionalzahl $= 10^{\frac{1}{2}} = 3,162277601$. Da nun $10^{\frac{1}{2}} < 5$ ist, so suche man zwischen $10^{\frac{1}{2}}$ und 10 die mittlere Proportionale $= 10^{\frac{3}{4}} = 5,623413251$. Da aber $10^{\frac{3}{4}} > 5$ ist, so suche man zwischen $10^{\frac{3}{4}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$ wieder die mittlere Proportionale $= 10^{\frac{5}{8}} = 4,216965034$. Ferner suche man wieder zwischen $10^{\frac{5}{8}}$ und $10^{\frac{3}{4}}$ die mittlere Pro-

Proportionale $= 10^{\frac{11}{16}} = 4{,}869675252$. Auf diese Art fahre man fort, und suche jedesmal zwischen der nächst kleinern, und nächst größern schon bekannten Potenz der Grundzahl die mittlere geometrische Proportionale, so wird man sich immer mehr und mehr der Zahl 5 nähern; und man kann die Arbeit so lange fortsetzen, bis man eine Potenz erhält, die nicht mehr merklich von der Zahl 5 verschieden ist. So z. B. würde man, wenn man auf diese Art 22 mittlere Proportionalen suchet, die Potenz $10^{\frac{2931693}{4194304}}$ $= 5{,}000000864 \ldots$ erhalten, welche von der Zahl 5 nicht mehr um $\frac{1}{1000000}$ verschieden ist. Man kann darum in den Rechnungen, wo $\frac{1}{1000000}$ nicht mehr zu achten ist, $\log 5 = \frac{2931693}{4194304} = 0{,}6989700 \ldots$ setzen, wo nur die sieben ersten Dezimalziffern richtig sind; weil die Potenz der Grundzahl nur bis auf die 7te Dezimalstelle übereinstimmt.

Man sieht hieraus, daß man die Arbeit noch weiter fortsetzen, und jede mittlere Proportionale mit mehr als 7 Dezimalstellen entwickeln müßte, wenn man den Logarithmus mit mehr als 7 Dezimalstellen richtig bestimmen wollte.

Beyläufig auf diese ungemein beschwerliche Art hat **Heinrich Brigg** die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 mit 14 Dezimalstellen berechnet, hernach hat **Adrian Vlacq** die Lücke von 20000 bis 90000 mit 10 Dezimalstellen ausgefüllet, welche Logarithmen sodann in ordentliche Tabellen eingetragen wurden, so daß man zu jeder Zahl, die zwischen diese Grenzen fällt, den dazu gehörigen Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl alsogleich finden konnte, welche Tabellen unter dem Namen **logarithmische Tafeln** allgemein bekannt sind.

Man könnte zwar auch den Logarithmus einer jeden Zahl unmittelbar nach (§. 228.) finden. Es wird aber weiter hinten, bey der Lehre von den unendlichen Reihen (die aber bey **Brigg's**, und **Vlacq's** Zeiten noch nicht bekannt waren) gezeigt werden, wie die Logarithmen aller Zahlen auf eine ungemein kürzere Art hätten berechnet werden können.

§. 261.

Der logarithmischen Tafeln giebt es heutiges Tages eine Menge: in den meisten sind die Logarithmen nur mit sieben Dezimalziffern anzutreffen, weil dieselben in den meisten Fällen eine hinlängliche Genauigkeit gewähren. Es wäre überflüßig ausführliche Beschreibungen von verschiedenen logarithmischen Tafeln hier einzurücken, und deren Einrichtungen zu erläutern. Es ist am besten bey dieser Gelegenheit eine logarithmische Tafel in die Hand zu nehmen, und deren Einrichtung, wie auch den Gebrauch der Tafeln aus der beygefügten Einleitung zu erlernen. Hierzu dürfte vorzüglich dienlich seyn, mein **Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Vlacqischen, Wolfischen, und andern dergleichen meistens sehr fehlerhaften Logarithmisch-Trigonometrischen Tafeln, für die Mathematik beflissenen eingerichtet; 2te verbesserte und vermehrte Auflage; Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung** 1800. Denjenigen, welche sich mit der ausübenden Mathematik beschäftigen, dürften meine **Logarihmisch-Trigonometrische Tafeln nebst andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln in zwey Bänden, Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung** 1797, sehr nützlich seyn; so wie diejenigen, die äusserst feine mathematische Berechnungen zu machen haben, meine **Vollständige Sammlung größerer Logarithmisch-Trigonometrischer Tafeln** (*Thesaurus logarithmorum completus*) *in Folio*, **Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung** 1794, hierzu geeignet finden werden.

Die

Die Gründe auf denen der Gebrauch der logarithmischen Tafeln beruhet, sind aus folgenden Betrachtungen zu ersehen.

§. 262.

Wenn man in den logarithmischen Tafeln die Logarithmen von drey nacheinander folgenden Zahlen vergleicht, so findet man, daß die Differenzen immer einander mehr und mehr gleichen, je größer die den Logarithmen entsprechenden Zahlen werden, und zwar so, daß dieselben, wenn die Zahlen schon grösser als 1000 sind, nur noch in der 7ten Dezimalstelle um einige wenige Einheiten mehr voneinander unterschieden sind. Nähern sich aber die Zahlen schon gegen 10000, so beträgt der Unterschied in der 7ten Dezimalstelle keine ganze Einheit mehr; als z. B.

Zahlen	Logarithmen	Differenzen
1001	3,0004341	
		0,0004336
1002	3,0008677	
		0,0004332
1003	3,0013009	

Hier sind die Differenzen nur noch in der letzten Dezimalstelle um 4 Einheiten verschieden.

Zahlen	Logarithmen	Differenzen
9988	3,9994785	
		0,0000435
9989	3,9995220	
		0,0000435
9990	3,9995655	

Hier sind demnach die Differenzen um keine Einheit in der 7ten Dezimalstelle mehr verschieden.

Nimmt man aber drey Zahlen an, die um keine ganze Einheit voneinander verschieden sind, so trift dieses schon bey den Zahlen, die nur 1000 übersteigen, so viel als vollkommen überein; als z. B.

Zah-

Zahlen	Logarithmen	Differenzen
1001	3,0004341	
		0,0002168
$1001\frac{1}{2}$	3,0006509	
		0,0002168
1002	3,0008677	

Man kann demnach den Satz für richtig annehmen, daß bey Zahlen die größer als 1000, und um keine Einheit mehr von einander verschieden sind, **die Differenzen der Zahlen sich gegeneinander verhalten, wie die Differenzen der dazu gehörigen Logarithmen.** Denn es ist $(1002-1001):(1001\frac{1}{2}-1001)=(\log 1002-\log 1001):(\log 1001\frac{1}{2}-\log 1001)$; nämlich $1:\frac{1}{2}=0{,}0004336:0{,}0002168$.

§. 263.

Durch Hilfe dieses Satzes kann man nun auch den Logarithmus einer Zahl finden, welche die Grenze der Tafeln übersteiget; z. B. es wäre nach einer Tafel, welche nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthält, der Logarithmus von 5462389 zu finden, so verfahre man auf folgende Art: **Man schneide von der Zahl so viele Ziffern durch ein Komma ab, damit man eine ganze Zahl nebst einem Dezimalbruch erhalte, welche inner die Grenzen der Tafel fällt.** In unserm Beyspiele ist sodann 5462,389, wozu eigentlich der Logarithmus gesucht wird. Aus dem gefundenen log 5462,389 folgt sodann unmittelbar log 5462389, weil vermög (§. 259.) diese zwey Logarithmen in den Dezimalstellen vollkommen gleich sind. Da nun $\log 5462{,}389 > \log 5462$, und auch $\log 5462{,}389 < \log 5463$ seyn muß; so sey $\log 5462{,}389 = \log 5462 + x$; und es ist vermög (§. 262.), weil diese drey Zahlen um keine ganze Einheit voneinander unterschieden sind $(5463 - 5462) : (5462{,}389 - 5462) = (\log 5463 - \log 5462) : (\log 5462{,}389 - \log 5462)$; nämlich $1 : 0{,}389 = (\log 5463 - \log 5462) : x$, oder

1000

$1000 : 389 = (\log 5463 - \log 5462) : x$. Nämlich man sage: 1 mit so viel Nullen, als man Ziffern abgeschnitten hat, verhält sich zu den abgeschnittenen Ziffern, gleich wie sich die Differenz des nächst kleinern und nächst größern Logarithmus in der Tafel, zur Differenz des nächst kleinern und des gesuchten Logarithmus verhält; welche gefundene Differenz man nur zum nächst kleinern Logarithmus in der Tafel addiren darf. Endlich setze man diesem Logarithmus die ihm vermög (§. 259.) zugehörige Charakteristik vor, so hat man den gesuchten Logarithmus. In unserm Beyspiel ist $\log 5463 = 3{,}7374312$, und $\log 5462 = 3{,}7373517$; also $\log 5463 - \log 5462 = 795$; folglich $1000 : 389 = 795 : x = \frac{389 \cdot 795}{1000} = 309$. Es ist demnach $\log 5462{,}389 = 3{,}7373517 + 309 = 3{,}7373826$, und folglich $\log 5462389 = 6{,}7373826$.

Es sey noch zur Zahl 7842365 der dazu gehörige Logarithmus nach einer Tafel, welche die Logarithmen der Zahlen bis 100000 enthält, zu finden; so ist in der Tafel $\log 78423 = 4{,}8944435$, und $\log 78424 - \log 78423 = 55$; folglich $100 : 65 = 55 : x = \frac{55 \cdot 65}{100} = 36$. Es ist also $\log 7842365 = 6{,}8944471$.

Daß man bey dieser Division x nur im Ganzen ohne Annäherung bestimmen muß, ist leicht einzusehen; weil diese Ganzen vermög (§. 262.) nur zehnmillionte Theilchen sind, und die 8te Dezimalstelle ohnehin nicht mehr richtig erhalten wird; weswegen auch die letzte Ziffer um 1 vermehrt werden muß, wenn der Rest größer als $\frac{1}{2}$ ist.

In vollständigen logarithmischen Tafeln wird die hier angeführte Proportion erspart; weil auf jedem Blatte, für die dort herrschenden Differenzen, die Proportionaltheile zum voraus berechnet, und beygefügt sind, welche sodann nur

zum

zum Logarithmus der 5 ersten Ziffern addirt werden, wie es aus der Einleitung solcher Tafeln deutlich zu ersehen ist.

§. 264.

Wenn man auf diese Art den Logarithmus zu einer Zahl suchet, die aus 8 Ziffern bestehet, so findet man, daß wegen der 8ten Ziffer der Logarithmus in der 7ten Dezimalstelle höchstens um 4 Einheiten größer werden kann; und zwar nur damals, wenn die erste Ziffer der Zahl 1, und die achte ein 9 ist: in den übrigen Fällen aber ist meistens der Logarithmus einer Zahl mit 8 Ziffern dem Logarithmus der 7 ersten Ziffern bis in die 7te Dezimalstelle vollkommen gleich, oder um eine Einheit in der letzten Dezimalstelle verschieden. Wenn demnach zu einer Zahl, welche aus mehr, als 8 Ziffern bestehet, der Logarithmus gesucht werden soll, so suche man denselben nur zu den 7, oder 8 ersten Ziffern auf, und setze die gehörige Charakteristik vor. Z. B. es wäre log 1009345976 zu suchen; so findet man nach (§. 263.) $\log 10093459 = *{,}0040401$, und $\log 1009345976 = 9{,}0040401$. Eben so findet man $\log 7985435 = *{,}9022986$, und $\log 798543598 = 8{,}9022986$.

Hat aber eine Zahl hinten Nullen bey sich; so suche man nur zu den bedeutlichen Ziffern den Logarithmus, und vermehre die Charakteristik um so viele Einheiten, als hinten Nullen folgen, vermög (§. 259.).

§. 265.

Wenn zu einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Dezimalbruche der Logarithmus gesucht werden soll, so darf man nur nach (§. 263.) den Logarithmus aufsuchen, als wenn es lauter Ganze wären, und sodann wird die Charakteristik um so viele Einheiten vermindert, als Dezimalstellen vorhanden sind. Hätte aber der Dezimalbruch gar keine Ganze, und die Anzahl der Dezimalstellen wäre daher größer

als

als die Charakteristik, so ziehe man so viele Einheiten ab, damit die Charakteristik Null werde; die übrigen noch abzuziehenden Einheiten aber hänge man hinten an den Logarithmus mit dem Zeichen — an. Z. B. es ist $\log 0{,}8432$ $= \log \frac{8432}{10000} = \log 8432 - \log 10000 = 3{,}9259306 - 4$ $= 0{,}9259306 - 1.$

Man könnte hier zwar die Subtraktion verrichten, und es ist $\log 0{,}8432 = 0{,}9259306 - 1{,}0000000$ $= -0{,}0740694$; allein es ist, wie wir in der Folge sehen werden, viel vortheilhafter im Rechnen, wenn man die negativen Logarithmen vermeidet.

Wenn zu einem ächten Bruche, oder zu einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Bruche der Logarithmus zu suchen wäre; so kann man den gegebenen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln; oder im letzten Falle kann man auch die ganze Zahl mit dem beygefügten Bruche in einen Afterbruch verwandeln, und sodann den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers abziehen vermög (§. 257. N. 6.). So ist z. B. $\log 6\frac{3}{4} = \log \frac{27}{4}$ $= \log 27 - \log 4$; imgleichen $\log \frac{5}{11} = \log 5 - \log 11.$ Auch hier bey eigentlichen Brüchen kann der negative Logarithmus vermieden werden, wenn man zu der Charakteristik des kleinern Logarithmus so viele Einheiten addirt, damit die Subtraktion verrichtet werden könne, und hinten eben so viele Einheiten mit dem negativen Zeichen wieder anhängt. So ist z. B. $\log \frac{5}{11} = \log 5 - \log 11 = (0{,}6989700) - 1{,}0413927$ $= (1{,}6989700 - 1) - 1{,}0413927 = 0{,}6575773 - 1.$

§. 266.

Auch kann durch Hilfe des im (§. 262.) angeführten Satzes zu jedem gegebenen Logarithmus, der nicht genau in der Tafel anzutreffen ist, die dazu gehörige Zahl gefun-

den

den werden. Z. B. es sey ✱,8765432 ein gegebener Logarithmus, ohne auf die Charakteristik zu sehen, weil dieselbe (§. 259.) die Ziffern der dazu gehörigen Zahl nicht ändert, sondern nur anzeigt, wie viel deren für die Ganzen abgeschnitten werden müssen; man soll die dazu gehörige Zahl bestimmen; so ist in den größern Tafeln der

	Logarithmen	Diff.	zugeh. Zahlen
nächst kleinere	✱,8765411	. . .	75256
		21	
der gegebene	✱,8765432	. . .	$75256 + x$
		58	
der nächst größere	✱,8765469	. . .	75257

Und es ist nach (§. 262.) $58 : 21 = 100 : x$, wo x die abgeschnittenen zwey Ziffern vorstellet. Hieraus ist

$x = \frac{2100}{58} = 36$. Folglich ist die gesuchte Zahl 7525636; wo erst nach Beschaffenheit der Charakteristik die Ganzen von den Dezimalstellen abgeschnitten werden müssen. Wäre also die Charakteristik $= 0$, so ist die Zahl 7,525636 vermög (§. 259.); wäre aber die Charakteristik $= 6$, so ist die Zahl 7525636 ohne Dezimalstellen.

Sollte aber die Charakteristik > 6 seyn, so muß die dazu gehörige Zahl aus mehr als 7 Ziffern bestehen. Da sich aber die 8te Ziffer schon nicht mehr bestimmen läßt, weil vermög (§. 264.) die Logarithmen zweyer Zahlen, die aus 8 Ziffern bestehen, und nur um einige Einheiten voneinander verschieden sind, die 7 ersten Dezimalziffern vollkommen gleich haben; so hänge man hinten noch so viele Nullen an, damit man die der Charakteristik entsprechende Anzahl der Ziffern erhält. So z. B. ist 8,8765432 = log 752563600.

§. 267.

Wäre aber zu einem Logarithmus, dessen Charakteristik 0 ist, und bey welchem hinten noch einige Einheiten mit dem negativen Zeichen angehängt sind (§. 265.), die zugehörige Zahl zu suchen; so setze man der Zahl, welche den Dezimalstellen des Logarithmus entspricht, so viele Nullen vor, als hinten am Logarithmus Einheiten abgezogen sind, wovon aber eine für die Ganzen abgeschnitten werden muß. Z. B. es wäre $0,9868747 - 3$ ein gegebener Logarithmus: man soll die zugehörige Zahl finden; so entspricht den Dezimalstellen des Logarithmus die Zahl 97023, und folglich ist die gesuchte Zahl 0,0097023. Sollte aber zu einem negativen Logarithmus der zugehörige Bruch gefunden werden, so mache man die Dezimalziffern des Logarithmus nach (§. 265.) positiv, und verfahre sodann, wie eben gesagt worden; oder man suche die Zahl auf, als wenn der Logarithmus positiv wäre, setze selbe zum Nenner eines Bruches, wovon der Zähler 1 ist, so hat man den gesuchten Bruch (§. 257. N. 6.). Z. B. es sey $-2,4353665$ ein gegebener Logarithmus; man soll den dazu gehörigen Bruch finden, so ist $2,4353665 = \log 272,5$, und also $-2,4353665 = \log \frac{1}{272,5}$. Oder weil $-2,4353665 = 0,5646335 - 3$, und $*,5646335 = \log 366972$; so ist auch $-2,4353665 = \log 0,00366972$.

§. 268.

Wenn man nun mit einer logarithmischen Tafel versehen ist, so können die mit großen Zahlen sehr beschwerlichen Multiplikationen und Divisionen durch eine blosse Addition und Subtraktion verrichtet werden. Z. B. es sey in der Gleichung $x = \frac{ab}{c}$, $a = 628723$, $b = 83629$,

$c = 567023$, so kann x auf folgende Art in Zahlen gefunden werden: Es ist $\log x = \log \frac{ab}{c}$ (§. 256.), und $\log x = \log ab - \log c$ (§. 257. N. 6.); endlich $\log x = \log a + \log b - \log c$ (§. 257. N. 5.). Nun ist $\log 628723 = 5{,}7984594$, $\log 83629 = 4{,}9223569$, $\log 567023 = 5{,}7536007$; folglich $\log x = 4{,}9672156$, wozu die Zahl $x = 92729$ gehöret.

Eben so kann die Erhebung zu Potenzen mit Hilfe der Logarithmen durch eine kleine Multiplikation, und die Ausziehung der Wurzeln durch eine kleine Division geschehen. Z. B. es wäre der Bruch $\frac{39543}{8564}$ zur dritten Potenz zu erheben, so ist (§. 257. N. 7.) $\log \left(\frac{39543}{8564}\right)^3 = 3 \times \log \frac{39543}{8564} = 3(\log 39543 - \log 8564)$. Nun ist $\log 39543 = 4{,}5970696$, und $\log 8564 = 3{,}9326767$, folglich ist $\log \left(\frac{39543}{8564}\right)^3 = 3 \times 0{,}6643929 = 1{,}9931787$, welchem Logarithmus die Zahl $98{,}441622$ entspricht.

Auf die nämliche Art kann aus der Gleichung $x = \sqrt[5]{4a^2b}$, wo $a = 563{,}28$, $b = 7934$ sey, die Größe x in Zahlen entwickelt werden. Denn es ist

$$\log x = \frac{\log 4a^2b}{5} = \frac{\log 4 + \log a^2 + \log b}{5} = \frac{\log 4 + 2\log a + \log b}{5}$$

Nun ist $\log a = \log 563{,}28 = 2{,}7507243$, $\log b = \log 7934 = 3{,}8994922$, $\log 4 = 0{,}6020600$; folglich $\log x = 2{,}0006002$, wozu $x = 100{,}1384$ gehöret.

Es

Es sey noch $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ zu entwickeln, so ist $\log \sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{\log 5 - \log 7}{3}$

$$= \frac{0{,}6989700 - 0{,}8450980}{3} = \frac{1{,}6989700 - 1 - 0{,}8450980}{3}$$

$$= \frac{0{,}8538720 - 1}{3}.$$

In dergleichen Fällen müssen die negativen Einheiten, welche hinten angehängt sind, so eingerichtet werden, damit die Division ohne Rest aufgeht; und man kann deswegen in unserm Beyspiele also setzen: $\log \sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{2{,}8538720 - 3}{3}$ $= 0{,}9512907 - 1$, wozu die Zahl 0,8939036 gehöret (§. 267.). Eben so ist

$$\log \sqrt[\frac{4}{3}]{\frac{9}{11}} = \frac{3}{4} (\log 9 - \log 11) = \frac{3 \log 9 - 3 \log 11}{4}$$

$$= \frac{2{,}8627275 - 3{,}1241781}{4} = \frac{0{,}7385494 - 1}{4} =$$

$$\frac{3{,}7385494 - 4}{4}, = 0{,}9346373 - 1$$ wozu die Zahl 0,860275 gehöret.

§. 269.

In den Rechnungen, wo Logarithmen zu addiren, und wieder einige abzuziehen kommen, kann man sich der dekadischen Ergänzung bedienen. Die dekadische Ergänzung einer Zahl ist der Abgang, den man zu ihr addiren muß, damit die nächstfolgende Potenz von 10 zum Vorschein kömmt; so ist z. B. 3 die dek. Erg. von 7; weil $7 + 3 = 10$; die dek. Erg. von 76 ist 24, weil $76 + 24 = 100$ ist u. s. w.

Die dekadische Ergänzung eines Logarithmus erhält man gar leicht, ohne denselben aus der Tafel herausschreiben zu dürfen, wenn man von der Charakteriteristik angefangen jede Ziffer des Logarithmus von 9 und die letzte bedeutliche Ziffer rechts von 10 abzieht. So z. B. ist dek. Erg. log 15 = 8,8239087; dek. Erg. log 20 = 8,6989700 u. s. w.

Wenn nun in einer Rechnung einige Logarithmen zu addiren, und wieder einige davon abzuziehen kommen; so schreibe man die zu addirenden Logarithmen untereinander, und unter dieselben die dekadischen Ergänzungen der zu subtrahirenden Logarithmen; addire sodann dieses alles zusammen, und lasse bey der Summe der Kennziffern so viele Zehner hinweg, als dek. Erg. vorhanden sind, so hat man das richtige Resultat. Z. B. es sey aus der Gleichung $x = \log 74256 + \log 2045 + \log 0{,}00347 - \log 2{,}56 - \log 203{,}47$, die Größe x zu entwickeln; so ist

	log 74256	=	4,8707316
	log 2045	=	3,3106933
	log 0,00347	=	0,5403295 − 3
dek. Erg.	log 2,56	=	9,5917600
dek. Erg.	log 203,47	=	7,6914996
	Summe		26,0050140 − 3

folglich $x = 6{,}0050140 - 3 = 3{,}0050140$

Eben so, wenn $x = \log 34{,}56 - \log 69{,}9 - \log 48{,}56$; so ist

	log 34,56	=	1,5385737
dek. Erg.	log 69,9	=	8,1555228
dek. Erg.	log 48,56	=	8,3137213
	Summe		18,0078178

folglich $x = 0{,}0078178 - 2$.

§. 270.

Der besondere Vortheil, den die logarithmischen Tafeln gewähren, besteht darin, daß man durch Hilfe derselben, die

die unbekannten Exponenten aus einer Gleichung viel leichter als nach (§. 228.) entwickeln kann; denn es sey $a^x = b$, so ist $\log a^x = \log b$, und vermög (§. 257. N. 4.) $x \log a = \log b$; endlich $x = \frac{\log b}{\log a}$. Eben so aus der Gleichung $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$ folgt, $\log a^x c^{qx} = \log b^{mx-n}$; nämlich $x \log a + xq \,.\, \log c = mx \,.\, \log b - n \,.\, \log b$, und $mx \,.\, \log b - x \,.\, \log a - xq \,.\, \log c = n \,.\, \log b$; endlich $x = \frac{n \,.\, \log b}{m \,.\, \log b - \log a - q \,.\, \log c}$.

Auch kann aus folgender Gleichung $ac^{mx} - bc^{\frac{mx}{2}} = d$ durch Hilfe der Logarithmen x gefunden werden; denn es ist $c^{mx} - \frac{b}{a} \,.\, c^{\frac{mx}{2}} = \frac{d}{a}$, und nach (§. 215.) $c^{mx} - \frac{b}{a} \,.\, c^{\frac{mx}{2}} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{d}{a}$; woraus $c^{\frac{mx}{2}} = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)}$ folget. Ferner $\log c^{\frac{mx}{2}} = \log \left[\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)}\right]$, nämlich $\frac{mx}{2} \times \log c = \log \left[\frac{b \pm \sqrt{(b^2 + 4ad)}}{2a}\right]$; endlich $x = \frac{2}{m \,.\, \log c} \times \log \left[\frac{b \pm \sqrt{(b^2 + 4ad)}}{2a}\right]$.

§. 271.

Wenn für ein System einmal die Logarithmen berechnet sind, so kann der Logarithmus einer jeden Zahl für jedes andere System leicht daraus gefunden werden. Denn es sey in dem berechneten Systeme für die Grundzahl a der Logarithmus was immer für einer Zahl $\log b = m$, und für eine andere Grundzahl A der Logarithmus eben dieser Zahl $= x$, nämlich $\text{Log } b = x$ für die Grundzahl A; so ist vermög (§. 255.) $A^x = b$, und auch $a^m = b$; folglich $A^x = a^m$, und für einerley System $m \log a = x \log A$: also $x = \frac{m \log a}{\log A}$. Es ist aber für die Grundzahl a, $\log a = 1$; also ist $x = \frac{m}{\log A} = \frac{\log b}{\log A} = \frac{1}{\log A} \times \log b$.

Z. B. aus dem berechneten Briggischen Systeme soll der Logarithmus x von jeder Zahl b für die Grundzahl $A = 5$ berechnet werden, so ist $x = \frac{1}{\log \text{brig } 5} \times \log \text{brig } b$

$= \frac{1}{0,6989700} \times \log \text{brig } b = 1,4306766 \times \log \text{brig. } b.$

Man darf demnach nur den Briggischen Logarithmus einer Zahl mit 1,4306766 multiplizīren, so hat man den Logarithmus von der nämlichen Zahl für die Grundzahl 5. Die Zahl, womit die Logarihmen eines Systems multiplizirt werden müssen, um ein anderes neues System zu erhalten, wird der **Modul** des neuen Systems genennet.

III. Abschnitt.

Anwendung der geometrischen Reihen und der Logarithmen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 272.

Um den Gebrauch der logarithmischen Tafeln durch eine fleissige Uebung sich eigen zu machen, kann folgende Anwendung der geometrischen Reihen, und Logarithmen auf die Auflösung einiger Aufgaben nützlich seyn; als:

1. Aufgabe. Es hat Jemand einen Metzen Waizen ausgesäet; die Erndte hievon säet er im zweyten Jahr wieder ganz aus; und von dieser 2ten Aussat hat er wieder

die

die ganze Erndte im 3ten Jahr ausgesäet u. s. w. Wie viel würde er wohl auf diese Art im 10ten Jahr erndten, wenn man annimmt, daß jeder Metzen Aussat jährlich 4 Metzen Erndte bringet?

Auflösung. Da hier die Erndten in einer geometrischen Reihe folgen; denn im 1ten Jahr ist die Erndte 4, im 2ten Jahr 16, im 3ten 64 u. s. w.; so ist (§. 254. N. 1.) $a = 4$, $q = 4$, $n = 10$; folglich $t = 4 \cdot 4^9 = 4^{10}$, oder $\log t = 10 \log 4 = 6,0206000$; daher $t = 1048576$ Metzen.

2. **Aufgabe.** Es spielt Jemand in die Lotterie, und setzt das erstemal 3 Groschen; dupplirt aber jedesmal seinen vorhergehenden Satz. Wie viel wird er wohl durch 12 Setzungen verspielen?

Auflösung. Da hier die nacheinander folgenden Sätze die geometrische Reihe 3, 6, 12, 24 . . . formiren, so ist (§. 254. N. 6.) $a = 3$, $q = 2$, $n = 12$; folglich $s = 3(2^{12} - 1)$. Nun ist $\log 2^{12} = 12 \log 2 = 3,6123600$, und also $2^{12} = 4096$; folglich $s = 3(4096 - 1)$ $= 3 \cdot 4095 = 12285$ Groschen $= 614\frac{1}{4}$ Gulden.

Man sieht aus dieser Auflösung, daß auch in den Gleichungen, wo die unbekannte Größe sich nicht unmittelbar logarithmisch entwickeln läßt, man doch einzelne Glieder der Gleichung durch Hilfe der logarithmischen Tafeln entwickeln kann, wodurch sich dann die unbekannte Größe leichter ergiebt.

3. **Aufgabe.** Zwischen 1 und 2 sollen noch 11 Glieder eingeschaltet werden, damit eine geometrische Reihe von 13 Gliedern entstehet?

Auflösung. Weil hier das erste Glied der Reihe $a = 1$, das letzte Glied $t = 2$, und die Anzahl der Glieder $n = 13$ seyn soll; so ist (§. 254. N. 13.) $q = \sqrt[12]{2}$, und

 log

$\log q = \frac{\log 2}{12} = 0{,}0250858.$ Nun ist aber die Reihe $1, q, q^2, q^3 \ldots q^{11}, 2$; folglich ist

$\log q = 0{,}0250858$	zugehör. Zahl $1{,}059\ldots$	$=$ 2ten Glied
$2 \log q = 0{,}0501716$	= = $1{,}122\ldots$	$=$ 3ten =
$3 \log q = 0{,}0752574$	= = $1{,}189\ldots$	$=$ 4ten =
= . . .	. . .	. .
= . . .	. . .	. .
$11 \log q = 0{,}2759438$	= = $1{,}888\ldots$	$=$ 12ten =
$12 \log q = 0{,}3010296$	= = $2{,}000\ldots$	$=$ 13ten =

4. Aufgabe. Jedes Glied der geometrischen Reihe $a, aq, aq^2, aq^3 \ldots$ in m solche Theile zu theilen, damit alle Theile wieder in einer zusammenhängenden geometrischen Reihe stehen, und folglich eine Reihe zum Vorschein komme, welche $m$mal so viel Glieder hat, als die Hauptreihe?

Auflösung. Es sey das erste Glied der gesuchten Reihe $= x$, und ihr Quotient $= y$; so ist die Reihe $x, xy, xy^2 \ldots xy^{m-1}; xy^m, xy^{m+1} \ldots xy^{2m-1}; xy^{2m}, xy^{2m+1} \ldots$ Da nun die Summe von m ersten Gliedern dieser Reihe dem ersten Gliede der Hauptreihe gleich seyn muß, so ist

$$x + xy + xy^2 + \ldots\ldots + xy^{m-1} = a \ldots\ldots A$$

Ferner, da die Summe von den folgenden m Gliedern dieser Reihe dem zweyten Gliede der Hauptreihe gleich seyn muß; so ist

$$xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{2m-1} = aq \ldots\ldots B$$

Multiplizirt man nun die Gleichung A mit y^m, so ist

$$xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots xy^{2m-1} = ay^m \ldots C$$

Folglich auch $aq = ay^m$, vermög (§. 12. Grundsf. 3.); nämlich $q = y^m$, und $y = \sqrt[m]{q}$.

Nun

Nun summire man in der Gleichung A den ersten Theil derselben nach (§. 254. N. 5.); so ist die Summe $= \frac{x(y^m - 1)}{y - 1}$, mithin $\frac{x(y^m - 1)}{y - 1} = a$, woraus $x = \frac{a\sqrt[m]{q} - 1}{q - 1}$ folget. Es ist demnach die gesuchte Reihe

$$\frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)}{q - 1}, \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q}}{q - 1}, \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)\sqrt[m]{q^2}}{q - 1} \ldots D$$

Z. B. in der geometrischen Reihe $7, 56, 448 \ldots$ soll jedes Glied in drey solche Theile getheilet werden, damit wieder eine zusammenhängende geometrische Reihe entstehet; so ist hier $a = 7$, $q = 8$, und $m = 3$; folglich ist das erste Glied der gesuchten Reihe $= \frac{7(\sqrt[3]{8} - 1)}{7} = 1$, und der Quotient $= \sqrt[3]{8} = 2$; daher ist die verlangte Reihe $1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots$

Summirt man ferner n Glieder der angeführten Reihe D nach (§. 254. N. 6.), so ist

$$s = \frac{a(\sqrt[m]{q} - 1)}{q - 1} \times \frac{(\sqrt[m]{q^n} - 1)}{\sqrt[m]{q} - 1} = \frac{a(\sqrt[m]{q^n} - 1)}{q - 1}.$$

So z. B. ist die Summe von 7 Gliedern der erst gefundenen Reihe $= \frac{7(\sqrt[3]{8^7} - 1)}{7} = 8^2\sqrt[3]{8} - 1 = 64 \cdot 2 - 1 = 127.$

Die nämliche Summe würde man erhalten, wenn man in der Hauptreihe $\frac{n}{m}$ Glieder summiret, das ist, wenn man in der Summenformel (§. 264. N. 6.) $\frac{n}{m}$ statt n substituiret.

Man

Man sieht hieraus, in welchem Verstande man in der allgemeinen Summenformel für n eine gebrochene Zahl annehmen kann. Nach dieser Formel läßt sich auch folgende Aufgabe auflösen.

5. Aufgabe. Es bestellt Jemand bey einem Juwelier einen Diamanten mit diesem Akkord, daß er ihm für den ersten Karat, den der Diamant wiegt 40 Fl., für den zweyten Karat 120 Fl., für den dritten Karat 360 Fl. u. s. w. nämlich für jeden folgenden Karat 3mal so viel, als für den vorhergehenden zahlen wolle. Nun ist das Gewicht des Diamanten $3\frac{1}{4}$ Karat, wie viel muß er dem Juwelier bezahlen?

Auflösung. Da hier die Werthe der ganzen Karate in einer geometrischen Progression steigen, so müssen auch die Werthe der Theile derselben ebenfalls in einer solchen Reihe wachsen; und es ist, wenn man die obige Formel hier anwendet, $a = 40$, $q = 3$, $m = 4$, und $n = 13$; folglich der ganze Werth des Diamanten $s = \frac{40(\sqrt[4]{3^{13}} - 1)}{2}$ $= 20(\sqrt[4]{3^{13}} - 1)$. Nun ist $\log \sqrt[4]{3^{13}} = \frac{13 \cdot \log 3}{4}$ $= 1{,}5506442$, wozu die Zahl 35,534 gehöret; folglich $s = 20 \cdot 35{,}534 = 690{,}68$ Fl. $= 690$ Fl. 41 Kr. Mithin kostet das letzte Viertel Karat 170 Fl. 41 Kr. Würde man aber für dieses letzte Viertel Karat den 4ten Theil von 1080 Fl. rechnen, welche der ganze 4te Karat kosten würde; so hätte man 270 Fl., welches um 99 Fl. 19 Kr. zu viel ist. Weit mehr würde man fehlen, wenn man für den Werth des Diamanten $40 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3^{\frac{9}{4}}$ rechnen wollte, wo für das letzte Viertel Karat um 303 Fl. 6 Kr. zu viel bezahlt würde.

6.

6. Aufgabe. Es hat Jemand ein Faß Wein, welches $a = 100$ Maß enthält, wovon jede Maß $c = 36$ Kr. kostet; er zapfet $b = 1$ Maß heraus, und füllet das Faß wieder voll mit Wasser an. Nachdem sich das Wasser mit dem Weine vollkommen vermischt hat, zapft er abermal $b = 1$ Maß heraus, und füllet das Faß wieder mit Wasser an. Wie oft kann nun dieses wiederholet werden, damit jede Maß der Vermischung, welche sich noch im Faße befindet, $d = 24$ Kr. werth sey?

Auflösung. Da hier vorausgesetzt wird, daß sich das Wasser mit dem Weine jederzeit völlig genau vermenge, so läuft bey jedem Abzapfen wieder ein Theil Wasser mit heraus; und zwar verhält sich bey jedesmaligem Abzapfen die ganze Vermischung zu der Menge der Vermischung, die abgezapft wird, gleichwie die Menge Wein, die sich in der ganzen Vermischung befindet, sich zu der Menge Wein verhält, die beym Abzapfen mit heraus fließt; nämlich es ist jedesmal $a : b =$ wie die Menge Wein, die noch im Faße ist, zur Menge Wein, die unter den b Maßen mit abgezapft wird. Nun sind nach dem ersten Abzapfen noch $a - b$ Maß Wein im Faße; folglich $a : b = (a-b) : \frac{b}{a}(a-b) =$ der Menge Wein, die beym zweyten Abzapfen mit heraus fließt; und es bleiben also nach dem zweyten Abzapfen noch $(a-b) - \frac{b}{a}(a-b) = \frac{(a-b)^2}{a}$ Maß Wein im Faße. Ferner ist wieder $a : b = \frac{(a-b)^2}{a} : \frac{b(a-b)^2}{a^2} =$ der Menge Wein, die beym dritten Abzapfen ausfließt; und es bleibt noch im Faße $\frac{(a-b)^2}{a} - \frac{b(a-b)^2}{a^2} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$; eben so findet man, daß nach dem vierten Abzapfen $\frac{(a-b)^4}{a^3}$, nach

dem

dem fünften Abzapfen $\frac{(a-b)^5}{a^4}$; und folglich nach dem $n$ten Abzapfen $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ Maß Wein noch im Faß verbleiben, wovon jede Maß c Kr. werth ist. Also ist der Werth der ganzen Vermischung $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} \times c$, weil das Wasser hier keinen Werth haben soll. Da aber jede Maß der Vermischung d Kr. werth seyn soll; so ist auch der Werth der Vermischung ad Kr. Folglich ist $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} . c = ad$; und $n \log (a-b) + \log c - (n-1) \log a = \log a + \log d$; hieraus folgt $n = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log (a-b)}$.

Nun ist in unserem Beyspiel:

log	c	= log	36	= . . .	1,5563025
log	d	= log	24	= . . .	1,3802112
log	c	— log	d	= . . .	0,1760913
log	a	= log	100	= . . .	2,0000000
log	$(a-b)$	= log	99	= . . .	1,9956352
log	a	— log	$(a-b)$	= . . .	0,0043648

Folglich $n = \frac{1760913}{43648} = 40$ nebst einem Bruche. Nämlich, wenn die Anzapfung 40mal wiederholet wird, so ist die Vermischung im Faße noch etwas besser als ein Wein, dessen Maß 24 Kr. kostet. Wiederholt man aber die Abzapfung 41mal, so ist eine Maß der Vermischung nicht mehr 24 Kr. werth.

7. **Aufgabe.** Es legt Jemand ein Kapital $a = 20000$ Fl. zu $c = 5$ pr. Zento jährlichen Interessen an, und schlägt mit Ende eines jeden Jahres die Interessen zum Kapital, oder wel-

welches einerley ist, er erhebt solche, und legt selbe gleich wieder als ein Kapital an. Wie groß wird nun dieses Kapital nach der Zeit von $n = 12$ Jahren seyn?

Auflösung. Da 100 Fl. Kapital in einem Jahre c Fl. Interessen bringen, so bringt das Kapital a Fl., ebenfalls in einem Jahre $\frac{ac}{100}$ Fl. Interessen. Denn 100 Fl. Kap.: a Fl. Kap. $= c$ Fl. J.: $\frac{ac}{100}$ Fl. J.; mithin ist am Ende des ersten Jahres Kapital samt Interessen $a + \frac{ac}{100} = a\left(1 + \frac{c}{100}\right)$ $= a\left(\frac{100 + c}{100}\right)$. Man muß demnach jedesmal das Kapital am Anfange des Jahres mit $\frac{100 + c}{100}$ multipliziren, um das Kapital samt Interessen am Ende dieses Jahres zu erhalten. Es ist demnach das Kapital samt Interessen

Am Ende des 1ten Jahres $= a\left(\frac{100 + c}{100}\right)$

" " 2ten " $= a\left(\frac{100 + c}{100}\right)$

" " 3ten " $= a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^2$

Folglich ist das Kapital samt Interessen am Ende des $n$ten Jahres $s = a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n$, oder wenn man den Dezimalbruch $\left(\frac{100 + c}{100}\right) = p$ setzet, so ist $s = ap^n$, und $\log s = \log a + n \log p$.

Nun

Nun ist in unserem Beyspiele

$$\begin{aligned} \log a &= \log 20000 = 4{,}3010300 \\ n \log p &= 12 \log 1{,}05 = \underline{0{,}2542716} \\ \text{folglich } \log s &= \quad 4{,}5553016 \end{aligned}$$

und $s = 35917{,}12$ Fl. $= 35917$ Fl. $7\frac{1}{2}$ Kr.

Diese Formel kann aber nicht unmittelbar angewendet werden, um den Anwachs des Kapitals zu berechnen, wenn die Anzahl der Jahre n ein Bruch seyn sollte. Denn es sey in der obigen Aufgabe $n = m + \frac{1}{q}$, so ist der Anwachs des Kapitals nach m Jahren $= a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m$; und dieses als ein Kapital betrachtet, trägt noch in der Zeit von $\frac{1}{q}$ Jahren $\frac{c}{100q} \cdot a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m$ Fl. Interesse, weil eben dieses Kapital $a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m$ Fl. in einem ganzen Jahre $\frac{c}{100}\, a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m$ Fl. an Interessen bringet; mithin ist das Kapital samt Interessen nach $\left(m + \frac{1}{q}\right)$ Jahren $s = a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m$ $+ \frac{c}{100q} a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m = a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{c}{100q}\right)$

Würde man aber um den Anwachs des Kapitals nach $m + \frac{1}{q}$ Jahren zu bestimmen, in der obigen Formel $n = m + \frac{1}{q}$ setzen; so wäre $s = a\left(\frac{100+c}{100}\right)^{m+\frac{1}{q}}$ $= a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right)^{\frac{1}{q}}$, welches Augenscheinlich

nicht

nicht einander gleich seyn kann. Um den Fehler deutlicher durch ein wirkliches Beyspiel einzusehen, sey oben $n = 12\frac{1}{2}$ Jahre; so ist das Kapital nach 12 Jahren angewachsen auf 35917,12 Fl., und dieses trägt noch in $\frac{1}{2}$ Jahr 897,93 Fl.; weil 100 Fl. in dieser Zeit $\frac{5}{2}$ Fl. Interessen bringen. Mithin ist die ganze Summe nach $12\frac{1}{2}$ Jahren $s = 36815{,}05$ Fl. Würde man aber in der obigen Formel $n = 12\frac{1}{2}$ setzen, so wäre $s = 20000 \cdot (1{,}05)^{\frac{25}{2}}$; dieses logarithmisch entwickelt giebt 36804,1, welches um 11 Fl. beynahe zu wenig ist. Beträchtlicher würde der Fehler seyn, wenn das anfängliche Kapital größer wäre, oder wenn solches durch eine größere Anzahl der Jahre immer auf die angeführte Art vermehret würde. In den k. k. Staaten werden die Interessen in den öffentlichen Fonds halbjährig ausbezahlet. Wollte man mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder zum Kapital schlagen, (welches allhier sehr leicht angeht, weil die Interessen gewöhnlicherweise um 8 auch 14 Tage vor dem verfallenen Termin schon ausgezahlet werden); so würde der Anwachs dieses Kapitals beträchtlicher seyn, als im vorigen Falle. Z. B. es legt Jemand in das wiener Banko-Amt ein Kapital von 25000 zu $3\frac{1}{2}$ pr. Zento jährlichen Interessen an, und legt mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder als ein Kapital an; wie hoch wird dieses Kapital in 20 Jahren anwachsen? Wendet man hier obige Formel $s = ap^n$ an, so ist $a = 25000$, $n = 40$ halbe Jahre, und $c = \frac{3\frac{1}{2}}{2}$ $= \frac{7}{4} = \frac{175}{100}$; nämlich $p = \left(100 + \frac{175}{100}\right) : 100 = 1{,}0175$; folglich $\log s = \log 25000 + 40 \log 1{,}0175 = 4{,}6993160$, und $s = 50039{,}8$. Würde man aber nur mit Ende eines jeden Jahres die Interessen zum Kapitale schlagen, so wäre in der Formel $a = 25000$, $n = 20$ Jahre, und $c = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ $= \frac{35}{10}$, nämlich $p = 1{,}035$; folglich $\log s = \log 25000$

+

$+ 20 . \log 1{,}035 = 4{,}6967460$, und $s = 49744{,}6$; also um 295 Fl. beynahe weniger als vorhin.

§. 273.

Aus der Formel I. $\log s = \log a + n \log p$

fliessen folgende

$$\text{II. } \log a = \log s - n \log p$$

$$\text{III. } \log p = \frac{\log s - \log a}{n}$$

$$\text{IV. } n = \frac{\log s - \log a}{\log p}$$

Nach jeder dieser Formeln können nun verschiedene hieher gehörige Rechnungsfragen beantwortet werden.

1. Frage. In einer Provinz befinden sich 2 Millionen Menschen: wenn nun diese Summe jährlich um den 50ten Theil, daß ist um 2 pr. Zento zunimmt, wie groß würde wohl die Anzahl der Menschen nach 100 Jahren seyn?

Antwort. Hier ist $a = 2000000$, $p = 1{,}02$; $n = 100$; folglich nach der Formel I. $\log s = \log 2000000 + 100 . \log 1{,}02 = 7{,}1610500$, und $s = 14490000$ beynahe.

2. Frage. Es hat Jemand nach 4 Jahren eine Summe von 6000 Fl. ohne Interessen zu fordern: wie viel ist sie itzt werth, wenn die Interessen zu 4 pr. Zento, und die Interessen von Interessen gerechnet werden?

Antwort. Hier ist $s = 6000$, $n = 4$, und $p = 1{,}04$, folglich nach der Formel II.
$\log a = \log 6000 - 4 \log 1{,}04 = 3{,}7100181$, und $a = 5128{,}827$ Fl. $= 5128$ Fl. $49\frac{1}{2}$ Kr.

3. Frage. Ein Wucherer leihet Jemanden 600 Fl. und läßt sich dafür einen Schuldbrief von 800 Fl. ausstellen, die nach 3 Jahren ohne Interessen zahlbar sind. Wie viel Interessen nimmt dieser jährlich von 100?

Antwort. Hier ist $a = 600$, $s = 800$, $n = 3$; folglich nach der Formel III. $\log p = \dfrac{\log 800 - \log 600}{3}$ $= 0{,}0416462$, und $p = 1{,}1006$; also etwas mehr als 10 pr. Zento.

4. **Frage.** Wie lang muß ein Kapital liegen, damit das Kapital samt den Interessen auf eine Summe anwächst, die noch einmal so groß ist, als das anfängliche Kapital, wenn die Interessen zu 4 pr. Zento vorgeschrieben sind, und die Interessen jährlich zum Kapital geschlagen werden?

Antwort. Hier ist $s = 2a$, $p = 1{,}04$; folglich ist nach der Formel IV. $n = \dfrac{\log 2a - \log a}{\log 1{,}04} = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}04}$ $= 17$ Jahre, nebst einem Bruche, nämlich nach 18 Jahren wird die Summe schon größer seyn als das Doppelte des anfänglichen Kapitals.

§. 274.

Aufgabe. Ein Kapital a wird angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres nicht nur mit seinen gefallenen Interessen zu c pr. Zento, sondern auch noch überdieß mit einer Summe b vermehret. Wie groß wird wohl die ganze Summe s nach n Jahren seyn?

Auflösung. Der Anwachs des Kapitals a nach n Jahren ist nach der vorigen Aufgabe ap^n, wo p wie vorhin $= \dfrac{100 + c}{100}$ ist.

Der Anwachs der Summe b, die nach Verlauf des ersten Jahres, oder mit Anfang des zweyten Jahres angelegt wird, ist $= bp^{n-1}$, weil diese Summen nur durch $n - 1$ Jahre anliegt.

Der Anwachs der Summe b, die nach Ende des 2ten Jahres angelegt wird, ist $= bp^{n-2}$.

Eben so ist der Anwachs der Summe b, welche mit Ende des 3ten Jahres angelegt wird $= bp^{n-3}$ u. s. w.

Endlich ist der Anwachs der Summe b, welche am Ende des vorletzten, oder mit Anfang des letzten Jahres angelegt wird $= bp$, weil diese Summe nur ein Jahr liegt.

Es stehen demnach die Summen, auf welche die jährlich zugelegten Theile b anwachsen, in folgender geometrischen Reihe:

$bp + bp^2 + bp^3 + \ldots . bp^{n-1}$; hiervon ist die Summe $= \frac{bp(p^{n-1} - 1)}{p-1}$ nach (§. 254. N. 5.).

Addirt man nun zu diesem Betrage noch den Anwachs des Kapitals a, so erhält man $s = ap^n + \frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1}$.

Es sey z. B. $a = 6000$, $b = 500$, $n = 10$, und die Interessen sind zu 5 pr. Zento vorgeschrieben, nämlich $p = 1{,}05$;

so ist $ap^n = 9773{,}37$ } wenn man jedes insbesondere
und $p^{n-1} = 1{,}551328$ } logarithmisch entwickelt

also $p^{n-1} - 1 = 0{,}551328$.

Mithin $\frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1} = \frac{500 \,.\, 1{,}05 \,.\, 0{,}551328}{0{,}05} = 5788{,}94$

folglich $s = 9773{,}37 + 5788{,}94 = 15562{,}31$.

Setzet man aber in dieser Aufgabe $b = a$, nämlich daß die jährliche Zulage dem anfänglichen Kapitale gleich ist; so ist $s = ap + ap^2 + ap^3 + \ldots . ap^{n-1} + ap^n$;

also nach (§. 254. N. 5.) $s = \frac{ap(p^n - 1)}{p-1}$

und I. $\log s = \log a + \log p + \log(p^n - 1) - \log(p-1)$

II. $\log a = \log s + \log(p-1) - \log p - \log(p^n - 1)$

III. $n = \frac{\log[ap + s(p-1)] - \log a}{\log p} - 1$.

Jede

Jede dieser Formeln löset nun wieder verschiedene daher gehörige Rechnungsfragen auf, wie sich ein jeder deren einige nach Belieben in Zahlen aufsetzen, und durch Hilfe der Logarithmen entwickeln kann; z. B.

1. Frage. Ein Kaufmann war verpflichtet durch 6 Jahre hintereinander mit Anfange eines jeden Jahres 4000 Fl. zu bezahlen: er hat aber gar nichts bezahlet. Wie viel ist er am Ende des 6ten Jahres schuldig, wenn die Interessen zu 4 pr. Zento, und Interessen von Interessen gerechnet werden.

Antwort. Hier ist $a = 4000$, $n = 6$, $c = 4$; also $p = 1{,}04$; folglich ist nach der Formel

$$\text{I. } \log s = \log 4000 + \log 1{,}04 - \log 0{,}04 + \log(1{,}04^6 - 1)$$
$$= \log 4000 + \log 26 + \log(1{,}04^6 - 1).$$

Nun ist $(1{,}04)^6 = 1{,}265318$, logarithmisch entwickelt;

ferner $\log(1{,}04^6 - 1) = \log 0{,}265318$	=			$0{,}4237667 - 1$
$\log 26$	=	=	=	$1{,}4149733$
$\log 4000$	=	=	=	$3{,}6020600$
$\log s$	=	=	=	$4{,}4408000$

folglich $s = 27593{,}07$ Fl.

2. Frage. Es hat Jemand nach 20 Jahren eine Summe von 10000 Fl. ohne Interesse zu erheben; er will aber dafür während dieser 20 Jahre mit Anfang eines jeden Jahres eine gleiche Summe dafür erhalten, damit die Schuld nach 20 Jahren ganz getilget sey. Wie viel kann ihm jährlich gegeben werden, wenn die Interessen zu 4 pr. Zento vorgeschrieben sind?

Antwort. Hier ist $s = 10000$, $n = 20$, $c = 4$; also $p = 1{,}04$; folglich ist nach der Formel II. $\log a = \log 10000 + \log 0{,}04 - \log 1{,}04 - \log(1{,}04^{20} - 1)$. Nun ist $(1{,}04)^{20} = 2{,}19112$.

daher $\log 10000 =$ - - - $4,0000000$
$\log 0,04 =$ - - - $0,6020600-2$
der. E. $\log(1,04^{20}-1) =$ d. E. $\log 1,19112 = 9,9240445$
der. E. $\log 1,04 =$ - - - $9,9829667$

Folglich $\log a =$ - - - $2,5090712$

und $a = 322,902$, welches jährlich für diese Schuld bezahlt werden kann; weil diese Summe zu 4 pr. Zento angelegt, und jährlich auf die angeführte Art vermehrt in 20 Jahren eine Summe von 10000 Fl. zum Vorschein bringet.

§. 275.

Aufgabe. Ein Kapital a wird zu c pr. Zento angelegt, und das Interesse jährlich zum Kapital geschlagen: es wird aber hingegen mit Ende eines jeden Jahres eine Summe b hinweggenommen; wie groß wird der Rest R nach n Jahren noch seyn?

Auflösung. Das Kapital a, wenn nichts davon genommen wird, bringt in n Jahren die Summe ap^n zum Vorschein vermög (§. 273.); und die Summe b, die mit Ende des ersten Jahres hinweggenommen wird, kann ebenfalls als ein Kapital angesehen werden, welches in $(n-1)$ Jahren auf bp^{n-1} anwachsen würde, wenn es durch diese Zeit immer angelegt verbliebe. Eben so wächst die Summe b, welche mit Ende des 2ten Jahres hinweggenommen wird, als Kapital betrachtet auf bp^{n-2} u. s. w., und die Summe b, welche am Ende des vorletzten Jahres hinweggenommen wird, auf bp. Endlich, da am Ende des letzten Jahres ebenfalls noch b Fl. hinweggenommen werden, so ist nach n Jahren das Kapital ap^n, um $b + bp + bp^2 + \ldots bp^{n-1}$ vermindert worden. Diese Reihe nach (§. 254. N. 5.) summirt, giebt $\frac{b(p^n-1)}{p-1}$

Folg-

Folglich I. $R = ap^n - \frac{b(p^n - 1)}{p - 1}$

II. $a = \frac{b(p^n - 1)}{p^n(p - 1)} + \frac{R}{p^n}$

III. $b = (ap^n - R) . \frac{p - 1}{p^n - 1}$

IV. $n = \frac{\log[(p-1)R-b] - \log[(p-1)a-b]}{\log p}$.

Einige Beyspiele zur Anwendung dieser Formeln.

1. Frage. Es legt Jemand ein Kapital von 30000 Fl. zu 4 pr. Zento an, und nimmt jährlich von den Interessen 800 Fl. zu seiner Unterhaltung weg; den Ueberrest aber schlägt er zum Kapital. Wie groß wird dieses Kapital nach 15 Jahren seyn?

Antwort. Hier ist $a = 30000$, $b = 800$, $n = 15$, und $c = 4$; nämlich $p = 1,04$; folglich ist nach der Formel I. $R = 30000 . (1,04)^{15} - \frac{800 . (1,04)^{15} - 800}{0,04}$.

Nun ist $(1,04)^{15} = 1,800941$, folglich $R = 38009,41$.

2. Frage. Es hat Jemand durch 6 Jahre hintereinander eine Rente von 500 Fl. zu geniessen: er ist gesinnt diese Rente zu verkaufen; was wird sie wohl itzt werth seyn, wenn die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ pr. Zento vorgeschrieben sind? Oder, welches einerley ist: es will Jemand seinem Freunde ein jährliches Auskommen von 500 Fl. bey einer allgemeinen Lehnbank durch 6 Jahre anweisen; wie groß muß das Kapital seyn, welches bey dieser Bank zu erlegen ist, wenn die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ pr. Zento gerechnet werden, und am Ende des 6ten Jahres das Kapital samt den Interessen verzehret seyn soll?

Antwort. Hier ist das unbekannte Kapital $= a$, die jährliche Rente 500 Fl. $= b$, 6 Jahre $= n$, $3\frac{1}{2} = c$, mithin $p = 1{,}035$; und da nach Ende des 6ten Jahres das Kapital samt den Interessen verzehrt seyn soll, so ist der Rest $R = 0$; folglich ist nach der Formel II.

$$a = \frac{500.(1{,}035)^6 - 500}{(1{,}035)^6 . 0{,}035} = 14286 - \frac{14286}{(1{,}035)^6} = 2665 \text{ Fl.}$$

3. Frage. Es ist ein Rittergut zu verkaufen, und es melden sich drey Käufer: der erste will dafür 34500 Fl. alsogleich baar bezahlen; der zweyte biethet 38000 Fl. aber so, daß er 6000 Fl. alsogleich, und 4 Jahre hintereinander mit Ende eines jeden Jahres 8000 Fl. erlegen will; der dritte biethet 40000 Fl. jedoch so, daß er 4000 alsogleich, und 6 Jahre hintereinander mit Ende eines jeden Jahres 6000 Fl. erlegen will. Wer hat nun am meisten gebothen, wenn die Interessen zu 5 pr. Zento gerechnet werden.

Antwort. Man untersuche so wie im vorhergehenden Beyspiele, wie viel die 32000, welche der 2te in vier Zahlungsterminen bezahlen will, für itzt werth sind; nämlich man setze in der Formel II. $b = 8000$, $n = 4$, $p = 1{,}05$, und $R = 0$, und man findet für den jetzigen Werth dieser Zahlungen $a = \frac{8000(1{,}05)^4 - 8000}{(1{,}05)^4 . 0{,}05} = 160000 - \frac{160000}{(1{,}05)^4}$ $= 28367{,}6$. Mithin ist der Anboth des zweyten $= 6000 + 28367{,}6 = 34367{,}6$ Fl.

Eben so bestimme man aus der Formel II., wie viel die 6 Zahlungen des 3ten für itzt werth sind, indem man $b = 6000$, $n = 6$, $p = 1{,}05$, $R = 0$ setzet; und man findet für den jetzigen Werth $a = 30454{,}14$. Mithin ist der Anboth des 3ten $= 4000 + 30454{,}14 = 34454{,}14$ Fl. folglich hat der erste den größten Anboth gemacht.

4.

4. Frage. Es soll eine gegenwärtige Schuld von 1000 Fl. in fünf jährliche Zahlungstermine eingetheilet werden, damit am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe bezahlt wird. Wie groß muß diese Summe seyn, wenn die Interessen zu 5 pr. Zento vorgeschrieben sind?

Antwort. Man sehe die Summe, welche alle Jahre bezahlt werden soll, als eine Rente an, wovon der gegenwärtige Werth 1000 Fl. ist; also ist hier $a = 1000$, $n = 5$, $p = 1{,}05$, $R = 0$; folglich nach der Formel III. $b = \frac{1000 \,.\, 1{,}05^5 \,.\, 0{,}05}{1{,}05^5 - 1} = 230{,}97$ Fl., welche in jedem Termin bezahlt werden müssen.

5. Frage. Es hat Jemand ein Kapital von 100000 Fl. zu 5 pr. Zento anliegen: allein mit den Interessen hiervon kann er seinen Aufwand nicht bestreiten; er braucht jährlich eine Summe von 6000 Fl., und ist daher bemüssiget vom Kapitale mit Ende eines jeden Jahres so viel hinweg zu nehmen, daß dieses samt den gefallenen Interessen 6000 Fl. beträgt. In wie viel Jahren wird der Mann wohl ein Bettler werden, wenn er so fortfährt?

Antwort. Hier ist $a = 100000$, $b = 6000$, $p = 1{,}05$, und $R = 0$; folglich nach der Formel IV.

$$n = \frac{\log{-6000} - \log{-1000}}{\log 1{,}05} = \left(\log \frac{-6000}{-1000}\right) : \log 1{,}05$$

$= \frac{\log 6}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36$ Jahre beynahe. Wollte man nun wissen, wie viel ihm nach verflossenen 36 Jahren noch übrig bleibt, so setze man in der Formel I. $a = 100000$, $b = 6000$, $p = 1{,}05$ und $n = 36$; so findet man $R = 4163{,}7$ Fl., welche mit Anfang des 37ten Jahres noch vorhanden sind. Dieses bringt in diesem Jahre noch 208,2 Fl. Interessen; mithin hat dieser Mann am

Ende des 37ten Jahres 4371,9 Fl. zu empfangen, wo sodann das ganze Kapital samt Interessen verzehrt ist.

Man würde aber fehlen, wenn man $n = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}$ $= 36{,}723$ Jahre $=$ 36 Jahre 266 Täge setzen wollte; nämlich daß dieser Mann den nämlichen Aufwand durch 36 Jahre und 266 Täge treiben könne; denn der Rest 4163,7 Fl., welcher nach verflossenen 36 Jahren verbleibt, bringt in 266 Tägen 151,7 Fl. Interessen; also hat er nach Verlauf dieser Zeit in Allem 4315,4 Fl.; er braucht aber in dieser Zeit zu seinem Aufwande 4372,6 Fl.; mithin hat er um 57,2 Fl. zu wenig.

6. Frage. Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft eine Summe von 20000 Fl. ausgeborget: dagegen hat sie der Herrschaft einen Wald, welcher jährlich 1500 Fl. reinen Nutzen bringt, indessen zum Unterpfande hindan gegeben. Wie viele Jahre kann die Herrschaft diesen Wald mit Recht benutzen, wenn die Interessen zu 5 pr. Zento und Interessen von Interessen gerechnet werden?

Antwort. Hier ist $a = 20000$, $b = 1500$, $p = 1{,}05$, und weil das ganze Kapital durch Benutzung des Waldes getilgt seyn soll, ist $R = 0$; folglich nach der Formel IV.

$$n = \frac{\log - 1500 - \log - 500}{\log 1{,}05} = \left(\log \frac{-1500}{-500}\right) : \log 1{,}05$$

$$= \frac{\log 3}{\log 1{,}05} = \frac{4771213}{211893} = 22 \text{ Jahr beynahe,}$$

durch welche die Herrschaft den Wald mit Recht benutzen darf. Und wenn man nun in der Formel I $n = 22$, $a = 20000$, $b = 1500$, und $p = 1{,}05$ setzet, so findet man $R = 747{,}4$ Fl., welches die Gemeinde der Herrschaft nach verflossenen 22 Jahren bey der Zurücknahme des Waldes noch zu bezahlen hat. Gesetzt aber die Herrschaft hätte das Pfand durch 30 Jahre benutzet, und nun soll liquidirt werden; so ist nach der Formel $I. R. = - 13219{,}5$. Nämlich die Herrschaft muß der Gemeinde nebst dem Wald auch noch eine Summe von 13219,5 Fl. zurückgeben.

Anmerkung. Diese angeführte Rechnungsaufgaben mögen einstweilen hinreichend seyn, um den Nutzen einzusehen, welchen die Logarithmen auch bey den, im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungen verschaffen; und wie schwer es demjenigen blos mechanischen Rechner fallen müsse, dergleichen Aufgaben aufzulösen, dem die Theorie der Logarithmen ganz unbekannt ist. Indessen kann doch der fleissige Anfänger sich über alle diese vorhergehenden Formeln verschiedene numerische Beyspiele aufsetzen, um sich den Gebrauch der Logarithmen recht geläufig zu machen.

IV. Abschnitt.

Von den Funktionen, und ihren Verwandlungen.

§. 276.

Bey der Auflösung mathematischer Aufgaben findet man oft für die gesuchte Größe einen analytischen Ausdruck, welcher eine, oder auch mehrere unbestimmte Größen von der Beschaffenheit enthält, daß man für jede unbestimmte Größe beliebige Werthe setzen könne, wodurch auch der gefundene Ausdruck verschiedene Werthe annimmt. Z. B. aus der Aufgabe zwey Größen x und y zu finden, deren Produkt $= a$ sey, folgt $xy = a$, $y = \frac{a}{x}$, und $x = \frac{a}{y}$. Nimmt man nun in der letzten Gleichung für y einen beliebigen Werth an, etwa $y = \frac{1}{2} a$, so ist sodann $x = 2$; setzt man aber $y = \frac{1}{3} a$, so ist $x = 3$ u. s. w., wo für jeden geänderten Werth von y sich auch x verändert; nur a allein wird hier für unveränderlich angesehen. Diejenigen völlig bestimmten Größen, welche in einer Gleichung immer einen nämlichen

 Werth

Werth beybehalten, werden beständige oder unveränderliche Größen genennet; solche unbestimmte Größen aber, denen man in einer Gleichung nach Belieben verschiedene Werthe beylegen kann, heissen veränderliche Größen. So sind in dem angeführten Beyspiele x, y veränderliche Größen, a aber ist beständig. Man pflegt überhaupt die veränderlichen Größen, so wie die unbekannten mit den letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z, und die beständigen mit den ersten a, b, c zu bezeichnen.

Ein algebraischer Ausdruck kann zwar nach (§. 57.) eine Funktion von jeder darinn vorkommenden Größe genennet werden; man pflegt aber diejenigen Ausdrücke, worinn sich veränderliche Größen befinden, blos Funktionen von den veränderlichen Größen zu nennen. So sind z. B. die Ausdrücke $a + x$, $ax - x^2$, $\frac{b}{a - x}$, $a - \sqrt{ax}$ Funktionen von der veränderlichen Größe x; und die Ausdrücke axy, $x^2 - ay$, $\frac{b + ax}{y}$ sind Funktionen von x und von y, u. s. w.

Ist daher zwischen zwey veränderlichen Größen x und y eine Gleichung gegeben, so läßt sich sowohl x durch y, als auch y durch x ausdrücken, das heißt, x ist sowohl eine Funktion von y, so wie y eine Funktion von x seyn muß.

§. 277.

Die Funktionen werden eingetheilet in ganze und gebrochene. Ganze Funktionen heissen diejenigen, worinn sich im Nenner keine veränderliche Größe befindet: hingegen werden jene Funktionen, welche im Nenner veränderliche Größen enthalten, gebrochene Funktionen genennet.

Ferner werden die Funktionen in rationale, und irrationale Funktionen eingetheilet. Rational heissen sie, wenn

wenn die veränderliche Größe mit keinem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten behaftet ist; im Gegentheile, wenn sich in der Funktion die veränderliche Größe unter einem Wurzelzeichen befindet, oder einen gebrochenen Exponenten hat, so ist solche eine irrationale Funktion. So z. B. ist $\frac{ax+x^2}{a}$ eine ganze rationale, $a\sqrt{x} - b$ eine ganze irrationale, $\frac{ax^2-b}{x}$ eine gebrochene rationale, und $\frac{a\sqrt{(x+b)}}{x}$ eine gebrochene irrationale Funktion.

§. 278.

Jede Funktion einer veränderlichen Größe, aus wie viel Gliedern sie auch bestehen mag, läßt sich auf so viele Glieder bringen, als verschiedene Potenzen der veränderlichen Größe vorhanden sind. Z. B. die Funktionen $ax^3 + 2ax^2 + 5x - a + 3cx^2 - x^3 + 3bc + x^2$ scheint 8 Glieder zu haben; ordnet man selbe aber so, daß einerley Potenzen der veränderlichen Größe zusammen zu stehen kommen; so hat man $(a-1)x^3+(2a+3c+1)x^2+5x+(3bc-a)$; nämlich eine Funktion von 4 Gliedern, oder wenn man die beständigen Koeffizienten $(3bc - a) = A$, $5 = B$, $(2a+3c+1) = C$, und $(a-1) = D$ setzt, so ist die Funktion $= A + Bx + Cx^2 + Dx^3$.

§. 279.

Es läßt sich daher keine ganze rationale Funktion von einer veränderlichen Größe x gedenken, die nicht unter die Gestalt oder Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ gebracht werden kann, wo die beständigen Koeffizienten A, B, C, D u. s. w., was immer für positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Werthe haben können. Und jede rationale gebrochene Funktion

tion kann daher durch die Form $\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 ..}{a + bx + cx^2 + dx^3 ..}$ vorgestellet werden, wo die Koeffizienten derjenigen Potenzen, welche in der Funktion abgehen, $= 0$ seyn müssen.

§. 280.

Wenn man zwey Funktionen einer veränderlichen Größe von einerley Form, z. B. $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + ..)$ und $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + ..)$ miteinander multiplizirt, die Faktoren mögen gleich viel, eine bestimmte oder eine unbestimmte Anzahl der Glieder haben; so kann das Produkt als eine Funktion von eben der nämlichen Form dargestellet werden.

Denn es ist nach den Regeln der Multiplikation (§. 64.)

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4) \times (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 ..)$$
$$\begin{aligned} = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \ldots \\ + bAx + bBx^2 + bCx^3 + bDx^4 + \ldots \\ + cAx^2 + cBx^3 + cCx^4 + \ldots \\ + dAx^3 + dBx^4 + \ldots \\ + eAx^4 + \ldots \end{aligned}$$

Setzet man nun $Aa = \alpha$, $aB + bA = \beta$, $aC + bB + cA = \gamma$, $aD + bC + cB + dA = \delta$, $aE + bD + cC + dB + eA = \varepsilon$, so ist $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ..) \times (a + bx + cx^2 + dx^3 + ..)$ $= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots$

Das nämliche findet auch statt, wenn mehrere Faktoren von der nämlichen Form miteinander multiplziret werden.

§. 281.

Wenn man die Funktion $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + ..$, die Anzahl der Glieder möge bestimmt seyn, oder ohne Ende fortlaufen, nach den Regeln (§. 132.) zum Quadrat erhebet, und die gleichnamigen Potenzen der veränderlichen Größe untereinander gehörig ordnet, so ist

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots)^2$$

=

$$= A^2 + 2ABx + \left.\begin{matrix} B^2 \\ +2AC \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +2BC \\ +2AD \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +C^2 \\ +2BD \\ +2AE \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

folglich ist das Quadrat wieder eine Funktion von der nämlichen Form.

Auf die nämliche Art könnte auch die Funktion $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ nach den Regeln (§. 135.) zum Kubus erhoben werden.

Ueberhaupt muß jede Potenz eines ganzen Exponenten von der Funktion $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$ wieder eine Funktion von der nämlichen Form seyn; weil jede Potenz ein Produkt von lauter Faktoren einer nämlichen Form ist vermög (§. 113.).

§. 282.

Jede gebrochene Funktion von der Gestalt $\frac{1}{a + bx}$ läßt sich nach den Regeln der Division (§. 67.) in eine unendliche Reihe verwandeln; denn es ist

$$1 : (a + bx) = \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} - \frac{b^3x^3}{a^4} + \ldots$$

$$\pm 1 \pm \frac{bx}{a}$$

$$\overline{}$$

$$- \frac{bx}{a} + bx$$

$$\mp \frac{bx}{a} \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$\overline{}$$

$$+ \frac{b^2x^2}{a^2} + bx$$

$$\pm \frac{b^2x^2}{a^2} \pm \frac{b^3x^4}{a^3}$$

$$\overline{}$$

$$- \frac{b^3x^3}{a^3} + bx \text{ u. s. w.}$$

Setzet

Setzet man nun die beständigen Koeffizienten $\frac{1}{a} = A$, $-\frac{b}{a^2} = B$, $\frac{b^2}{a^3} = C$, $-\frac{b^3}{a^4} = D$ u. s. w., so ist

$$\frac{1}{a + bx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

Eben so läßt sich auch durch eine blosse Division zeigen, daß die Funktion $\frac{1}{a + bx + cx^2 + dx^3}$ durch eine eben solche Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3$ vorgestellet werden könne.

Nun ist $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots)$ $\times \frac{1}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots) \times$ $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots)$, und ferner wegen (§. 280.) $= \mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \mathfrak{e}x^4 + \mathfrak{f}x^5 + \ldots$ daher kann jede gebrochene rationale Funktion durch eine eben solche Form vorgestellet werden.

§. 283.

Wenn eine Funktion einer veränderlichen Größe von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots$ sie möge eine bestimmte oder unbestimmte Anzahl der Glieder enthalten, immer gleich Null verbleibet, man möge für x was immer für einen Werth, auch $x = 0$ annehmen, so muß jeder der beständigen Koeffizienten $= 0$ seyn; nämlich $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$.

Denn man setze $x = 0$, so sind auch alle Potenzen von $x = 0$; daher verschwinden alle Glieder der Funktion bis auf das erste Glied; und man erhält sodann $A = 0$. Da aber A eine beständige Größe ist, so muß auch bey jedem andern Werthe von x der nämliche Koeffizient $A = 0$ seyn.

Da

Da nun $A = 0$ ist, so kann solches in der Funktion ausgelassen werden, und man erhält $0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ oder wenn man alles durch x dividiret, so ist $0 = B + Cx + Dx^2 + \ldots\ldots$, wo nun wieder für $x = 0$, auch $B = 0$ seyn muß; und folglich ist auch $B = 0$ für jeden andern Werth von x, weil B ebenfalls eine beständige Größe ist. Und eben so läßt sich zeigen, daß $C = 0$, $D = 0$ u. s. w., nämlich daß jeder Koeffizient $= 0$ seyn muß.

Die Richtigkeit des angeführten Satzes bey einer Funktion von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots = 0$ läßt sich auch auf folgende Art darthun.

Man nehme eine beliebige Anzahl der Glieder dieser Funktion, z. B. vier Glieder, nämlich $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0$, und setze hier für die veränderliche Größe x eben so viele verschiedene Werthe, damit man so viele Gleichungen erhalte, als Glieder der Funktion genommen worden sind; nämlich man setze zuerst $x = 1$, sodann $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ u. s. w., so erhält man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
A + B + C + D &= 0 \\
A + 2B + 4C + 8D &= 0 \\
A + 3B + 9C + 27D &= 0 \\
A + 4B + 16C + 64D &= 0
\end{aligned}$$

Hieraus findet man durch die Subtraktion der Gleichungen nach (§. 222.) $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. Und so kann man so viele Glieder der Funktion annehmen, als man will, und durch die Formirung eben so vieler Gleichungen zeigen; daß jeder Koeffizient $= 0$ seyn müsse.

So wie vorher erwiesen wurde, daß bey der angeführten Funktion unter der gesetzten Bedingung jeder Koeffizient $= 0$ seyn müsse; eben so läßt sich dieses auch darthun, wenn die vorgelegte Funktion irgend eine andere Gestalt hätte, z. B.

$$0 = A + Bx^p + Cx^{p+q} + Dx^{p+2q} + Ex^{p+3q} + Fx^{p+4q} + \ldots\ldots$$

es

es mögen p und q was immer für ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen, bedeuten.

Ist nun eine Funktion von der Gestalt $a + bx^p + cx^{p+q} + dx^{p+2q} + \ldots gx^{p+nq}$ immer gleich einer andern Funktion von der nämlichen Form

$$\alpha + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \ldots \pi x^{p+nq} + \omega x^{p+tq},$$

unter der Bedingung, daß x jeden beliebigen Werth annehmen kann; so müssen die beyderseitigen Koeffizienten, die zu einerley Potenzen von x gehören, einander gleich seyn; und jene, welche auf der andern Seite keine correspondirenden Koeffizienten der nämlichen Potenz haben, müssen für sich $= 0$ seyn.

Denn da $a + bx^p + cx^{p+q} + dx^{p+2q} + \ldots + gx^{p+nq}$ $= \alpha + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \ldots + \pi x^{p+nq} + \omega x^{p+tq}$ ist, so ist auch, wenn man alle Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringet,

$$0 = \left.\begin{matrix}\alpha + \beta \\ -a - b\end{matrix}\right\} x^p \left.\begin{matrix}+\gamma \\ -c\end{matrix}\right\} x^{p+q} \left.\begin{matrix}+ \ldots + \pi \\ - \ldots - g\end{matrix}\right\} x^{p+nq} + \omega x^{p+tq}$$

folglich ist vermöge des Vorhergehenden

$\alpha - a = 0$, $\beta - b = 0$, $\gamma - c = 0$, $\pi - g = 0$, $\omega = 0$; und daher $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\pi = g$, und $\omega = 0$.

§. 284.

Wir wollen von dem angeführten ungemein fruchtbaren Satze alsogleich einige Anwendungen machen.

Aufgabe. Man soll die gebrochene Funktion $\frac{a-x}{a+x}$ in eine gleichgültige Reihe verwandeln.

Auflösung. Man setze nach (§. 282.)

$$\frac{a-x}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

die

die beständigen Koeffizienten A, B, C, D u. s. w., sollen nämlich von der Beschaffenheit seyn, daß bey jedem Werthe von x diese Gleichung statt finde. Um nun die Koeffizienten A, B, C, D wirklich zu bestimmen, multiplizire man beyde Theile der Gleichung mit dem Nenner $a+x$; so erhält man

$$\begin{aligned} a-x = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \ldots \\ + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \end{aligned}$$

bringt man nun die Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \left.\begin{array}{l} aA + aB \\ -a + A \\ \quad + 1 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +aC \\ \\ +B \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} +aD \\ \\ +C \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l} +aE \\ \\ +D \end{array}\right\} x^4 \begin{array}{l} + \ldots \\ \\ + \ldots \end{array}$$

daher ist vermög (§. 283.)

$Aa - a = 0$, und $A = +1$

$aB + A + 1 = 0$, $B = -\dfrac{2}{a}$

$aC + B = 0$, $\quad C = +\dfrac{2}{a^2}$

$aE + D = 0$; u. s. w.

folglich ist $\dfrac{a-x}{a+x} = 1 - \dfrac{2x}{a} + \dfrac{2x^2}{a^2} - \dfrac{2x^3}{a^3} + \dfrac{2x^4}{a^4} - \ldots$

welches man auch erhalten würde, wenn man $\dfrac{1}{a+x}$ nach (§. 282.) durch die Division in eine Reihe verwandelt, und sodann solche mit dem Zähler $(a-x)$ multipliziret.

Auf diese Art läßt sich auch jede andere gebrochene Funktion in eine gleichgiltige Reihe verwandeln, wenn man die gegebene Funktion einer Reihe $Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + Dx^{p+3q} + \ldots$ gleich setzt, wo die Exponenten in einer solchen arithmetischen Reihe auf einander folgen müssen, daß alle Exponenten der veränderlichen Größe, die sich sowohl im Zähler als im Nenner befinden, darunter enthalten sind; sodann wird die angenommene Reihe he mit dem Nenner der Funktion multipliziret, die Gleichung auf Null gebracht, und jeder Koeffizient entwickelt. Z. B. es sey $\frac{1+x^2}{1-x-x^3}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln; so setze man

$$\frac{1+x^2}{1-x-x^3} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots$$

Es ist hier für das erste Glied der Reihe 1 angenommen worden, weil es einleuchtend ist, daß für $x = 0$ die Funktion $= 1$ seyn muß. Multipliziret man nun beyderseits mit dem Nenner, und bringet die Gleichung auf Null, so ist

$$\begin{aligned} 0 = 1 &+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots \\ - 1 &- x - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - Dx^5 - Ex^6 - \ldots \\ & \quad\;\; - x^2 - x^3 - Ax^4 - Bx^5 - Cx^6 - \ldots \end{aligned}$$

daher ist $A - 1 = 0$, $B - A - 1 = 0$, $C - B - 1 = 0$,
$D - C - A = 0$, $E - D - B = 0$, $F - E - C = 0$;
nämlich $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$, $E = 6$, $F = 9$ u. s. w.

folglich $\frac{1+x^2}{1-x-x^3} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 9x^6 + \ldots$

wo jeder Koeffizient vom 4ten angefangen aus dem 1ten und 3ten vorhergehenden besteht; so z. B. ist der Koeffizient $F = E + C$, nämlich $9 = 6 + 3$, und der darauffolgende ist $= 9 + 4 = 13$; so daß daher diese Koeffizienten in einer sogenannten wiederkehrenden, oder recurrenten Reihe fortgehen. Man nennt solche Reihen, wo jedes folgende Glied aus einigen vorhergehenden besteht, wiederkehrend, oder recurrent, weil die 1ten, 2ten, 3ten... Differenzen immer die nämliche Reihe wiedergeben.

Imgleichen es sey $\frac{x+1}{2+\sqrt{x}}$ in eine gleichgiltige Reihe zu verwandeln, so setze man

$$\frac{x+1}{2+x^{\frac{1}{2}}} = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^2 + \ldots$$

so

so ist $x+1 = 2A + 2Bx^{\frac{1}{2}} + 2Cx + 2Dx^{\frac{3}{2}} + 2Ex^2 + \ldots$

$$+ Ax^{\frac{1}{2}} + Bx + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 + \ldots$$

und $0 = 2A + 2Bx^{\frac{1}{2}} + 2Cx + 2Dx^{\frac{3}{2}} + 2Ex^2$

$$-1 + Ax^{\frac{1}{2}} + Bx + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2$$

$$-x$$

daraus folgt $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{5}{8}, D = -\frac{5}{16}, E = \frac{5}{32}$ u. s. w.

folglich $\dfrac{x+1}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{4} + \dfrac{5x}{8} - \dfrac{5x^{\frac{3}{2}}}{16} + \dfrac{5x^2}{32} - \ldots$

Eine ausführliche und gründliche Abhandlung von der Verwandlung gebrochener Funktionen in gleichgiltige Reihen findet man in Hrn. Pasquich mathem. Analys. I. B.

§. 285.

Aufgabe. Man soll die Funktion $(x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 \pm \ldots)^{\frac{1}{2}}$ in eine gleichgiltige Reihe verwandeln.

Auflösung. Es sey $(x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots)^{\frac{1}{2}}$
$= Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} + \ldots$

Man hat hier auch im ersten Gliede x angenommen, weil für $x = 0$ auch die ganze Funktion $= 0$ seyn muß.

Erhebet man nun beyde Theile der Gleichung zum Quadrat, so erhält man $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - \ldots$

$$\begin{aligned} = A^2x + 2ABx^2 + B^2x^3 &+ 2BCx^4 + C^2x^5 \\ + 2ACx^3 &+ 2ADx^4 + 2BDx^5 \\ &+ 2AEx^5 \end{aligned}$$

und wenn man die Gleichung auf Null bringet

$$0 = \left.\begin{matrix} A^2 \\ -1 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +2AB \\ +2 \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +B^2 \\ +2AC \\ -3 \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +2BC \\ +2AD \\ +4 \end{matrix}\right\} x^4 \left.\begin{matrix} +C^2 \\ +2BD \\ +2AE \\ -5 \end{matrix}\right\} x^5$$

Hieraus folgt $A=1, B=-1, C=1, D=-1, E=1$ u. s. w. folglich ist $(x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - \ldots\ldots)^{\frac{1}{2}}$
$$= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{9}{2}} - \ldots\ldots$$

Wenn man aber die Funktion $(x-2x^2+3x^3-4x^4+\ldots)^{\frac{1}{2}}$ $= Ax^{\frac{1}{2}} + Bx + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 + Ex^{\frac{5}{2}}$ setzet, so findet man bey der Entwicklung, daß die Koeffizienten an den geraden Stellen B, D, F u. s. w. $= 0$ seyn müssen.

Auf diese nämliche Art läßt sich auch jede andere irrationale Potenz einer Funktion in einer gleichgiltigen Reihe darstellen, wenn man die Funktion einer Reihe von schicklichen aufeinander folgenden Potenzen der veränderlichen Größe gleich setzet, sodann durch die Lehre von den Potenzen die Funktion von dem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten befreyet, und die unbekannten Koeffizienten nach dem (§. 283.) vorgetragenen Satze entwickelt. So z. B. findet man auf diese Art

$$\sqrt[3]{(a^3+x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^5}{9a^5} + \frac{5a^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + \ldots$$

wenn man $\sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + Ax^3 + Bx^6 + Cx^9 + \ldots$ setzet, beyde Theile der Gleichung zum Kubus erhebet, und die Koeffizienten A, B, C nach (§. 283.) entwickelt. Die nämliche Reihe haben wir auch schon im (§. 140. Beyspiel N. 3.) gefunden.

§. 286.

Aufgabe. Man soll das summatorische Glied einer Reihe finden, deren allgemeines Glied eine gegebene rationale Funktion von n ist; als z. B. $t = 25 + 4n^2 - n$.

Auflösung. Da das gegebene allgemeine Glied eine rationale Funktion von n ist, so kann solches vermög (§. 247.) als das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe des so vielten Ranges, als der höchste Exponent von n Einheiten enthält, angesehen werden. In unserem Beyspiele

ist

ist es also das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges; hiervon ist das summatorische Glied vermög (§. 238.) $s = An + Bn^2 + Cn^3$.

Da nun n eine veränderliche Größe ist, so setze man in dieser Formel $(n-1)$ statt n, so wird man die Summe von $(n-1)$ Gliedern haben, die wir mit s^1 bezeichnen wollen, nämlich

$$s^1 = A(n-1) + B(n-1)^2 + C(n-1)^3 = An - A + Bn^2 - 2Bn + B + Cn^3 - 3Cn^2 + 3Cn - C.$$

Es muß aber die Summe von $n-1$ Gliedern, von der Summe von n Gliedern abgezogen (§. 231.), das $n$te Glied übrig lassen nämlich $s - s^1 = t$; folglich ist

$$An + Bn^2 + Cn^3 - An + A - Bn^2 + 2Bn - B - Cn^3 + 3Cn^2 - 3Cn + C = 25 + 4n^2 - n,$$ nämlich

$$25 + 4n^2 - n = A + 2Bn - B + 3Cn^2 - 3Cn + C;$$

und diese Gleichung auf Null gebracht giebt

$$0 = (A - B + C - 25) + (2B - 3C + 1)n + (3C - 4)n^2$$

daher vermög (§. 283.) $A - B + C - 25 = 0$, $2B - 3C + 1 = 0$, $3C - 4 = 0$. Aus diesen Gleichungen findet man

$$A = \frac{151}{6},\ B = \frac{9}{6},\ C = \frac{8}{6}.$$

Es ist demnach die gesuchte Summenformel

$$s = \frac{151n + 9n^2 + 8n^3}{6}$$

§. 287.

Der im (§. 283.) angeführte Satz kann auch mit Nutzen angewendet werden, wenn eine gebrochene Funktion in mehrere einfacher ausgedrückte Brüche zu zerlegen ist, welches in der Integralrechnung öfters erforderlich seyn wird. Eine solche Zerlegung einer gebrochenen Funktion kann sehr leicht bewerkstelliget werden, wenn sich nur der Nenner des vorgegebenen Bruches in mehrere ungleiche Faktoren auflösen läßt, deren jeder eine Funktion von einer nämlichen Größe des nämlichen Exponenten vorstellet. Z. B. der Bruch $\frac{1}{a^2x - x^3}$ kann in drey andere zertheilet werden, weil $\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{1}{x(a+x)(a-x)}$ ist; (der Nenner $a^2x - x^3$ besteht nämlich aus drey ungleichen Faktoren $x, a+x, a-x$; jeder ist eine Funktion von der nämlichen Größe x, auch hat x in einem jeden Faktor den nämlichen Exponenten).

Um die drey Brüche zu finden, setze man
$$\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x},$$
bringe diese drey Brüche auf eine gleiche Benennung, nämlich
$$\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{a^2A - Ax^2 + aBx - Bx^2 + aCx + Cx^2}{a^2x - x^3}, \text{ oder}$$
$1 = a^2A + (aB + aC)x + (C - B - A)x^2$, und reduzire die Gleichung auf Null; so ist
$$0 = (a^2A - 1) + (aB + aC)x + (C - B - A)x^2;$$
folglich $a^2A - 1 = 0$, $aB + aC = 0$, $C - A - B = 0$,

nämlich $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{2a^2}$, $C = \frac{1}{2a^2}$.

Es ist demnach $\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(a+x)} + \frac{1}{2a^2(a-x)}$.

Diese Zertheilung findet auch noch statt, wenn schon der Zähler des Bruches eine zusammengesetzte Größe seyn sollte; nur muß in diesem Falle der höchste Exponent derjenigen Größe, aus der man die ungleichen Faktoren formiret, in dem Zähler wenigstens um 1 kleiner seyn, als der höchste Exponent der nämlichen Größe in dem Nenner ist. Wäre aber der höchste Exponent der veränderlichen Größe im Zähler größer als im Nenner, so kann die angeführte zur Zertheilung der gebrochenen Funktion erforderliche Eigenschaft bloß allein mittelst der Division des Zählers durch den Nenner bewirket werden. Z. B. die Funktion $\frac{1 - x + 2a^4x + x^2 - 2x^5}{a^2x - x^3}$ läßt sich durch die Division in $2x^2 + 2a^2 + \frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3}$ verwandeln. Und nun wird der Bruch $\frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3}$ in folgende drey Brüche zerleget,

$$\frac{1}{a^2x} - \frac{(1 + a + a^2)}{2a^2(a + x)} + \frac{(1 - a + a^2)}{2a^2(a - x)},$$ wenn man

$$\frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a + x} + \frac{C}{a - x}$$ setzet, die Brüche auf gleiche Benennung bringet, die ganze Gleichung auf Null reduziret, und endlich die Größen A, B, C bestimmet.

Eben so läßt sich der Bruch $\frac{a + bx + cx^2}{x^3 - 2ax^2 + a^2x} = \frac{a + bx + cx^2}{x\,.\,(x - a)^2}$ zertheilen, wenn man $\frac{a + bx + cx^2}{x^3 - 2ax^2 + a^2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x - a)^2}$ setzet, und sodann die Koeffizienten A, B, C auf die angeführte Art bestimmet.

Ferner da $\frac{1 + x^3}{a^3x + x^4} = \frac{1 + x^3}{x(x + a)(x^2 - ax + a^2)}$ ist, so läßt sich dieser Bruch ebenfalls zertheilen, wenn man $\frac{1 + x^3}{a^3x + x^4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a + x} + \frac{Cx + D}{a^2 - ax + x^2}$ setzet; denn die Größen A, B, C, D lassen sich sodann auf die angeführte Art richtig bestimmen.

Wäre endlich ein Bruch von dieser Gestalt $\frac{a}{x^3(b + x)}$ in andere zu verlegen, so setze man

$$\frac{a}{x^3(b + x)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3} + \frac{Dx + E}{(b + x)^2}$$

 und

und bestimme darauf die Größen A, B, C, D, E auf die nämliche Art u. s. w. Eine vollständige Abhandlung über die Zerlegung gebrochener Funktionen findet man in H. L. **Eulers** Anleitung zur Analysis des Unendlichen von H. **Michelsen** übersetzt.

§. 288.

Auch wird der im (§. 283.) angeführte Satz bey der **Umkehrung der Funktionen**, oder bey der sogenannten **umgekehrten Methode der Reihen** mit Nutzen gebrauchet. Es wird nämlich bey analytischen Untersuchungen zuweilen eine Größe x, als eine durch Potenzen der veränderlichen Größe y ausgedrückte Reihe vorgelegt, z. B.

$$x = 3y - 6y^2 + 12y^3 - 24y^4 + 48y^5 - \ldots \pm 3 \cdot 2^{n-1} y^n \ldots \mathfrak{A}$$

wo x als eine Funktion von y gegeben ist; und es wird verlangt, aus dieser Gleichung die Größe y dergestalt zu entwickeln, daß sodann y als eine Funktion von der veränderlichen Größe x ausgedrückt sey, und zwar durch eine Reihe von Potenzen der veränderlichen Größe x.

Um nun in $\mathfrak{A}$ eine solche Reihe für y zu finden, setze man

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots \quad \mathfrak{B}$$

so ist
$$y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$$
$$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots$$
$$y^4 = A^4x^4 + \ldots$$

Darauf substituire man diese Werthe für y, y^2, y^3, y^4 in der Gleichung $\mathfrak{A}$, und bringe sodann die Gleichung auf 0, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} 3A \\ -1 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +3B \\ -6A^2 \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +3C \\ -12AB \\ +12A^3 \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +3D \\ -6B^2 \\ -12AC \\ +36A^2B \\ -24A^4 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Folg-

Folglich ist $3A-1=0$, $3B-6A^2=0$, $3C-12AB+12A^3=0$, $3D-6B^2-12AC+36A^2B-24A^4=0$.

Daraus folgt $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{3^2}$, $C=\frac{2^2}{3^3}$, $D=\frac{2^3}{3^4}$ u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung B für A, B, C, D die gefundenen Werthe setzet

$$y=\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{3^2}+\frac{2^2x^3}{3^3}+\frac{2^3x^4}{3^4}+\ldots$$

Wenn man mehrere Koeffizienten bestimmet, so sind die folgenden $=\frac{2^4}{3^5}, \frac{2^5}{3^6}, \ldots \frac{2^{n-1}}{3^n}$, welches hier leicht einzusehen ist; weil die vorgelegte Reihe $x=3y-6y^2+12y^3-24y^4\pm\ldots$ entsteht, wenn man den Bruch $x=\frac{3y}{1+2y}$ in eine gleichgiltige Reihe auflöset. Aus dieser Gleichung folgt $y=\frac{x}{3-2x}$, wo nun $\frac{x}{3-2x}$ in eine gleichgiltige Reihe aufgelöset für y den nämlichen Werth giebt, der durch die Umkehrung der vorgelegten Funktion gefunden wurde.

Auf die nämliche Art findet man aus der Gleichung

$$z=x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3.x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7}+\frac{1.3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9}+\ldots\ldots \text{A}$$

den Werth von x, wenn man

$$x=Az+Bz^3+Cz^5+Dz^7+\ldots\ldots\ldots \text{B}$$

setzet; denn es ist alsdann

$x^3=A^3z^3+3A^2Bz^5+3AB^2z^7+B^3z^9+3A^2Cz^7+\ldots$

$x^5=A^5z^5+5A^4z^7+\ldots$

$x^7=A^7z^7+\ldots$

u. s. w.

Substituiret man nun diese Werthe für x, x^3, x^5 .... in der Gleichung A, und reduziret sodann die ganze Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix}\Big\} z \begin{matrix} +B \\ +\frac{A^3}{2\cdot 3} \end{matrix}\Big\} z^3 \begin{matrix} +C \\ +\frac{3A^2B}{2\cdot 3} \\ +\frac{3A^5}{2\cdot 4\cdot 5} \end{matrix}\Bigg\} z^5 \text{ u. s. w.}$$

Folglich $A = 1$, $B = -\frac{1}{2\cdot 3}$, $C = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$, $D = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$ u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung B für A, B, C, D . . . diese gefundenen Werthe setzet

$$x = z - \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{z^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + ..$$

Man erhält den nämlichen Werth für x, obschon etwas mühsamer, wenn man $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + ...$ setzet; denn bey der Entwicklung der Größen A, B, C, D . . . findet man, daß B, D, F . . . u. s. w. nämlich, daß die Koeffizienten der geraden Potenzen $= 0$ sind, und daß folglich die gesuchte Reihe nur die ungeraden Potenzen von z enthalten müsse. Wenn man hingegen die gesuchte Reihe mit folgender Gestalt annehmen wollte, $x = Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + ...$ so würden sich bey der Bestimmung der Koeffizienten A, B, C . ., Widersprüche zeigen, woraus es zu ersehen wäre, daß diese angenommene Gestalt der Reihe nicht statt finden könne.

Bey der Umkehrung der Funktionen kömmt es hauptsächlich darauf an, daß man für die gesuchte Reihe eine schickliche Gestalt annimmt, um sodann die Koeffizienten bestimmen zu können. Wenn man für die gesuchte Reihe eine unrichtige Gestalt wählet, so zeigen sich sodann bey der Bestimmung der Koeffizienten Widersprüche; wodurch man gezwunzwungen wird die Potenzen der veränderlichen Größe nach irgend einem andern Gesetze bey der gesuchten Reihe anzunehmen, und zwar so, daß sich bey der Bestimmung der Koeffizienten keine Widersprüche ergeben. Nun zeigt es sich überhaupt, wenn eine Reihe von dieser Form

$$x^n = \alpha y^p + \beta y^{p+q} + \gamma y^{p+2q} + \delta y^{p+3q} + \ldots.$$

umzukehren, nämlich y durch eine Reihe der Potenzen von x auszudrücken wäre, daß man für die gesuchte Reihe folgende Gestalt annehmen könne.

$$y = Ax^{\frac{n}{p}} + Bx^{\frac{n(1+q)}{p}} + Cx^{\frac{n(1+2q)}{p}} + Dx^{\frac{n(1+3q)}{p}} + \ldots$$

Z. B. um die Reihe $z^3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ umzukehren, kann man setzen

$$x = Az^{\frac{3}{2}} + Bz^3 + Cz^{\frac{9}{2}} + Dz^6 + Ez^{\frac{15}{2}} + \ldots$$

Eben so läßt sich die Funktion

$$y^{-1} = z^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}z^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{16}z^{\frac{5}{2}} - \tfrac{5}{128}z^{\frac{7}{2}} - \ldots$$

umkehren, wenn man setzet

$$z = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + \ldots.$$

denn die Koeffizienten lassen sich sodann nach den angeführten Gründen richtig bestimmen.

V. Abschnitt.

Anwendung der Reihen auf die Berechnung der Logarithmen.

§. 289.

Wenn man nach (§. 255.) eine Zahl $a > 1$ für die Grundzahl eines logarithmischen Systems annimmt, und diese Grundzahl auf verschiedene Potenzen der Exponenten

m,

m, n, p 2c. erhebet, so daß $a^m = b, a^n = c, a^p = d$ 2c. sey, so sind diese Exponenten m, n, p Logarithmen der hervorgebrachten Potenzen b, c, d. Für $m = 0$ in der Gleichung $a^m = b$ wird $b = 1$; für jeden positiven Werth von m wird $b > 1$, z. B. $b = 1 + z$; und für jeden negativen Werth von m wird b ein ächter Bruch, oder $b < 1$, und daher $b = 1 - u$. Um nun bey der angenommenen Grundzahl a den Logarithmus einer Zahl b zu finden, müßte man einen solchen Exponenten m aufsuchen, daß $a^m = b$ wäre. Oder weil es erlaubet ist, jede Zahl durch $1 + x$ vorzustellen (wo $1 + x$ auch einen ächten Bruch bedeuten kann, wenn man für x einen negativen Bruch annimmt), so würde man für die Grundzahl a den Logarithmus einer jeden Zahl $1 + x$ haben, wenn man einen solchen Exponenten X, der eine Funktion von x ist, angeben könnte, daß $a^X = 1 + x$ sey. Und eben so würde man den Logarithmus einer andern Zahl $1 + y$ finden, wenn man einen solchen Exponenten Y als eine Funktion von y angeben könnte, daß $a^Y = 1 + y$ sey. Sodann ist $\log(1 + x) = X$, und $\log(1 + y) = Y$.

Nun kann die Frage aufgeworfen werden, ob es nicht möglich sey X in der Gleichung $\log(1 + x) = X$ durch eine solche Potenz-Funktion von x auszudrücken, daß diese Funktion für jeden Werth für x den Logarithmus der Zahl $(1 + x)$ vorstelle; wie auch $\log(1 + y)$ durch eine eben solche Funktion von y auszudrücken.

Um solche Funktionen zu finden, nehmen wir für $\log(1 + x)$ und $\log(1 + y)$ folgende gleichgiltige Reihen an

$$\log(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots \quad \mathfrak{A}$$
$$\log(1 + y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots \quad \mathfrak{B}$$

wo die unveränderlichen Koeffizienten A, B, C, D.. in $\mathfrak{A}$ von solcher Beschaffenheit seyn sollen, daß die angenommene Gleichung $\mathfrak{A}$ bey jedem beliebigen Werthe von x, und folglich sich auch dann statt finde, wenn x in y übergeht, so daß daher die Koeffizienten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einerley Werthe haben. Daß die angenommene gleichgiltige Reihe $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ auch im ersten Gliede die veränderliche Größe enthalten müsse, ist einleuchtend; weil diese gleichgiltige Reihe so beschaffen seyn muß, daß solche in $\log(1+0) = 0$ übergeht vermög (§. 257. N. 1.), wenn die veränderliche Größe $= 0$ gesetzet wird. Es kömmt nur darauf an, daß die Koeffizienten A, B, C, D . . . richtig bestimmet werden; die angenommene Gestalt der Reihe hat sodann nichts wiedersprechendes.

Um die Koeffizienten zu bestimmen, setze man in den obigen Gleichungen $a^X = 1 + x$, und $a^Y = 1 + y$, es sey Y irgend ein Vielfaches von X, z. B. $Y = 2X$, so ist sodann, wenn für X und Y die Reihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gesetzet werden,

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + 2Ex^5 + \ldots$$
$$= Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots \qquad \mathfrak{C}$$

Auch ist sodann $1 + y = (1 + x)^2$

wegen $(1 + y) = a^Y = a^{2X} = (a^X)^2 = (1 + x)^2$;

nämlich es ist sodann $1 + y = 1 + 2x + x^2$;

folglich
$$\begin{aligned} y &= 2x + x^2 \\ y^2 &= 4x^2 + 4x^3 + x^4 \\ y^3 &= 8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6 \\ y^4 &= 16x^4 + 32x^5 + \ldots \\ y^5 &= 32x^5 + \ldots \\ &- \; - \; - \; - \; - \end{aligned}$$

Nun setze man diese Werthe für y, y^2, y^3, y^4 ꝛc. in die Gleichnng $\mathfrak{C}$,

so ist
$$\begin{aligned} 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + 2Ex^5 + \ldots\ldots \\ = 2Ax + Ax^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ + 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4 \qquad\qquad\qquad \\ + 8Cx^3 + 12Cx^4 + 6Cx^5 + \ldots \\ + 16Dx^4 + 32Dx^5 + \ldots \\ + 32Ex^5 + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}$$

folg-

folglich ist vermög (§. 283.)

$2A = 2A$; nämlich $A = A$

$2B = A + 4B$; $B = -\frac{1}{2}A$

$2C = 4B + 8C$; $C = +\frac{1}{3}A$

$2D = B + 12C + 16D$ $D = -\frac{1}{4}A$

$2E = 6C + 32D + 32E$ $E = +\frac{1}{5}A$

u. s. w. nämlich $F = -\frac{1}{6}A$, $G = +\frac{1}{7}A$, $H = -\frac{1}{8}A \pm \ldots$

Es ist daher, wenn man diese Werthe in die Gleichung A setzet

$\log(1+x) = Ax - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 + \frac{1}{5}Ax^5 - \ldots$

wo der Koeffizient A unbestimmt verbleibet, so wie die Grundzahl a nach Willkühr anzunehmen ist. Wie nun dieser Koeffizient A mit der Grundzahl zusammenhänge, wird weiter unten zu ersehen seyn.

§. 290.

Damit nun diese gefundene Reihe (§. 289.)

$$\log(1+x) = Ax - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 + \frac{1}{5}Ax^5 - \frac{1}{6}Ax^6 + \frac{1}{7}Ax^7 - \frac{1}{8}Ax^8 \pm \ldots \quad D$$

dergestalt schnell abnehme, oder zusammenlaufe (convergire), daß nur einige wenige Glieder in Zahlen entwickelt, den gesuchten Logarithmus einer Zahl $1 + x$ mit hinlänglicher Genauigkeit darstellen, muß nothwendig x ein ächter Bruch seyn.

Man setze daher $x = \frac{1}{z}$, so ist $1 + x = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$;

und $\log(1+x) = \log\left(\frac{z+1}{z}\right) = \log(z+1) - \log z$

vermög (§. 257. N. 6.); substituirt man nun diese Werthe in der Gleichung D, so ist

$$\log(z+1) - \log z = \frac{A}{z} - \frac{A}{2z^2} + \frac{A}{3z^3} - \frac{A}{4z^4} \pm \ldots \quad E$$

Ferner, um nun die negativen Glieder verschwinden zu machen, setze man $x = -\frac{1}{z}$ in der Gleichung D; so ist

log

$$\log(z-1) - \log z = -\frac{A}{z} - \frac{A}{2z^2} - \frac{A}{3z^3} - \frac{A}{4z^4} - \ldots \; F$$

Nun ziehe man die Gleichung F von E ab, so ist

$$\log(z+1) - \log(z-1) = \frac{2A}{z} + \frac{2A}{3z^3} + \frac{2A}{5z^5} + \ldots \; G$$

oder $\log(z+1) = \log(z-1) + 2A.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + ..\right)$

Um nun mittelst der Reihe G den Logarithmus von 2 zu berechnen, setze man $z = 3$; so erhält man $\log 4 -$

$$\log 2 = \log\frac{4}{2} = \log 2 = 2A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right)$$
$$= 2A(0{,}3333 + 0{,}0123 + 0{,}0008 + 0{,}0001 + \ldots)$$
$= A . 0{,}693 \ldots$ Ferner setze man $z = 2$; $z = 4$, so ist

$$\log 3 = 1 + 2A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \ldots\right)$$
$$= 2A(0{,}500 + 0{,}041 + 0{,}006 + \ldots) = A . 1{,}096$$

$$\log 5 = 3 + 2A\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \ldots\right) = A . 1{,}606 \ldots$$

Und so findet man auch log 7, log 11, log 13, u. s. w.

Substituiret man aber in der Gleichung G für z einen solchen Werth, damit $\log(z+1) - \log(z-1)$ die Differenz der Logarithmen zweyer Zahlen wird, welche nur um eine Einheit voneinander verschieden sind; so erhält man eine andere Gleichung, aus welcher der Logarithmus einer jeden Zahl berechnet werden kann, wenn der Logarithmus der nächst vorhergehenden Zahl bekannt ist. Man setze dieserwegen

$$\log(z+1) - \log(z-1) = \log p - \log(p-1)$$

nämlich $\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \log\left(\frac{p}{p-1}\right)$

so

so ist $\frac{z+1}{z-1} = \frac{p}{p-1}$; daraus folgt $z = 2p - 1$.

Diese Werthe in der Gleichung G substituirt, geben

$$\log p - \log(p-1) = 2A\left(\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \ldots\right), \text{und}$$

$$\log p = \log(p-1) + 2A\left(\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \ldots\right) \ldots H$$

Man setze nun $p = 2$, so ist $\log 2 = 0 +$

$$2A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \ldots\right)$$

$= A \,.\, 0{,}6931472 \ldots$ welches man erhält, wenn man 6 Glieder dieser Reihe mit 7 Dezimalstellen richtig entwickelt. Wollte man aber diesen Logarithmus mit mehreren Dezimalstellen haben, so müßten auch mehrere Glieder, und jedes Glied mit mehreren Dezimalstellen entwickelt werden.

Und so könnten auch die Logarithmen der folgenden Zahlen 3, 4, 5 . . . nach und nach aus dieser Reihe berechnet werden, wenn man $p = 3$, dann $p = 4$, $p = 5$ u. s. w. setzet.

§. 291.

Allein ist einmal der Logarithmus von 2 berechnet, so kann die Reihe H zum ferneren Gebrauche noch viel schneller abnehmend gemacht werden, wenn man $p = q^2$ setzet; denn es ist sodann $\log q^2 = \log(q^2 - 1) + 2A\left(\frac{1}{2q^2-1}\right.$

$$\left. + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \frac{1}{5(2q^2-1)^5} + \ldots\right); \text{ oder } 2\log q$$

$$= \log(q+1)(q-1) + 2A\left(\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \ldots\right); \text{ endlich}$$

$$\log q = \frac{\log(q+1) + \log(q-1)}{2} + A\left(\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5(2q^2-1)^5} + \frac{1}{7(2q^2-1)^7} + \ldots\right) \ldots \ldots J$$

Se-

Setzet man nun in dieser Reihe für q die nacheinander folgenden Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13 . . so erhält man

$$\log 3 = \frac{\log 4 + \log 2}{2} + A\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5}\right)$$
$$= \frac{2\log 2 + \log 2}{2} + A\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5}\right)$$
$$= \tfrac{3}{2}\log 2 + A(0{,}0588235 + 0{,}0000678 + 0{,}0000001)$$
$$= A \,.\, 1{,}0986122.$$
$$\log 4 = 2\log 2 = A \,.\, 1{,}3862944.$$
$$\log 5 = \frac{\log 6 + \log 4}{2} + A\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3 \cdot 49^3}\right) = \frac{\log 2 + \log 3 + \log 4}{2}$$
$$+ A(0{,}0204082 + 0{,}0000028) = A \,.\, 1{,}6094379.$$
$$\log 6 = \log 3 + \log 2 = A \,.\, 1{,}7917595.$$
$$\log 7 = \frac{\log 8 + \log 6}{2} + A\left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3 \cdot 97^3}\right) = \frac{3\log 2 + \log 6}{2}$$
$$+ A\,.(0{,}0103093 + 0{,}0000003) = A \,.\, 1{,}9459101;$$
$$\log 8 = 3\log 2 = A \,.\, 2{,}0794415.$$
$$\log 9 = 2\log 3 = A \,.\, 2{,}1972244.$$
$$\log 10 = \log 5 + \log 2 = A \,.\, 2{,}3025851.$$
$$\log 11 = \frac{\log 12 + \log 10}{2} + A\left(\frac{1}{241} + \frac{1}{3 \cdot 241^3}\right)$$
$$= \frac{\log 4 + \log 3 + \log 10}{2} + A(0{,}0041494 + 0{,}0000000)$$
$$= A \,.\, 2{,}3978952.$$

Und so könnte man die Logarithmen aller Zahlen, so weit man will, durch diese gefundene Reihe berechnen, ohne daß man noch die Größe A bestimmet hätte, der man jedoch jeden beliebigen unveränderlichen Werth beylegen kann, z. B. $A = 1$, oder $A = 2$, $A = \frac{1}{10}$, $A = \frac{3}{7}$ u. s. w. Die Reihe nimmt so schnell ab, daß man, um den Logarithmus von 11 mit 7 Dezimalstellen, und um den Logarithmus von 23 mit 10 Dezimalstellen richtig zu berechnen, nur das erste Glied der Reihe allein entwickeln darf; weil das

das zweyte Glied an diesen Stellen keine bedeutliche Ziffer mehr giebt.

§. 292.

Nimmt man nun für A einen beliebigen Werth an, und multiplizirt alle, auf die eben gezeigte Art, berechneten Logarithmen damit, so erhält man ein logarithmisches System. Es ist aber am natürlichsten $A = 1$ zu setzen, damit man keine weitere Multiplikation verrichten darf, und die obigen Logarithmen ungeändert bleiben. Man nennt selbe daher auch die **natürlichen Logarithmen**, und werden bezeichnet mit log nat (Logarithmus naturalis). Es ist nämlich log nat $2 = 0{,}6931472$; log nat $3 = 1{,}0986122$; log nat $4 = 1{,}3862944$; log nat $10 = 2{,}3025851$ u. s. w. Von einigen Schriftstellern werden die natürlichen Logarithmen, aus geometrischen Gründen, auch **hyperbolische** Logarithmen genennet.

§. 293.

Hat man einmal die natürlichen Logarithmen aller Zahlen berechnet, so läßt sich auch daraus nach (§. 271.) jedes andere System für eine angenommene Grundzahl berechnen; so ist z. B. der Briggische Logarithmus einer jeden Zahl b für die Grundzahl 10, nämlich log brig b

$$= \frac{1}{\text{log nat } 10} \times \text{log nat } b = \frac{1}{2{,}3025851} \times \text{log nat } b$$

$= 0{,}4342945 \times$ log nat b; oder es ist log vulg b $= 0{,}4342945 \times$ log nat b; weil man die Briggischen Logarithmen zur Unterscheidung von den natürlichen Logarithmen, wenn beyde in einer Rechnung vorkommen, mit log vulg (Logarithmus vulgaris) zu bezeichnen pflegt. Meistentheils aber werden die Briggischen Logarithmen blos mit log bezeichnet, so daß in der Anwendung log jederzeit einen Briggischen Logarithmen bedeutet, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird.

Man darf daher nur alle natürliche Logarithmen mit 0,4342945 multiplizirern, so erhält man das Briggische System; deswegen wird auch 0,4342945 der **Modul des Briggischen Systems** genennet nach (§. 271.). Und umgekehrt können die Briggischen Logarithmen in natürliche verwandelt werden, wenn man selbe durch 0,4342945 dividiret; oder, welches einerley ist, mit 2,3025851 multiplizirert. Ueberhaupt heißt in den obangeführten Reihen die Größe A der **logarithmische Modul**, weil für jeden andern Werth von A aus dem natürlichen System ein anderes erhalten wird. Und dieser logarithmische Modul A hängt in jedem Systeme von der dazu gehörigen Grundzahl a dergestalt ab, daß $A = \frac{1}{\log \text{nat } a}$ sey.

Damit man aber auch für jeden beliebig angenommenen Werth für $A = m$ die zu diesem System gehörige Grundzahl finden könne; so setze man dieselbe $= 1 + y$, weil sie grösser seyn muß, als 1, da 1 auf jede Potenz erhoben wieder 1 giebt; und es ist sodann vermög (§. 257. N. 2.) $\log (1+y) = 1$; es ist aber auch vermög (§. 289.)

$$\log (1+y) + m\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right)$$

also auch $1 = m\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right)$

und $m^{-1} = \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right) \ldots\ldots$ A

Nun setze man nach (§. 288.)

$y = Am^{-1} + Bm^{-2} + Cm^{-3} + Dm^{-4} + \ldots$ B

so ist $y^2 = A^2m^{-2} + 2ABm^{-3} + B^2m^{-4} + 2ACm^{-4} + \ldots$

$y^3 = A^3m^{-3} + 3A^2Bm^{-4} + \ldots$

$y^4 = A^4m^{-4} + \ldots$

u. s. w.

Darauf substituire man diese Werthe für y, y^2, y^3, y^4 .. in der Gleichung A, und reduzire die ganze Gleichung auf Null; so ist

$$\begin{aligned} 0 = & Am^{-1} + Bm^{-2} + Cm^{-3} + Dm^{-4} + \ldots \\ & - m^{-1} - \tfrac{1}{2}A^2m^{-2} - ABm^{-3} - \tfrac{1}{2}B^2m^{-4} \\ & \qquad + \tfrac{1}{3}A^3m^{-3} - ACm^{-4} \\ & \qquad\qquad + A^2Bm^{-4} \\ & \qquad\qquad - \tfrac{1}{4}A^4m^{-4} \end{aligned}$$

woraus nach (§. 283.) folgt $A = 1$, $B = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{1.2.3}$,

$D = \frac{1}{1.2.3.4}$, $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$ u. s. w.

Substituiret man diese Werthe in der Gleichung B, so ist

$$y = m^{-1} + \frac{m^{-2}}{1.2} + \frac{m^{-3}}{1.2.3} + \frac{m^{-4}}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$\text{und } 1 + y = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{1.2.m^2} + \frac{1}{1.2.3.m^3} + \frac{1}{1.2.3.4m^4}.$$

Setzet man z. B. $m = 1$, so erhält man die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systems

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}7182818.$$

Diese Grundzahl 2,7182818 . . . des natürlichen logarithmischen Systems werden wir in der Folge jederzeit mit h benennen, und uns von allem andern Gebrauch dieses Buchstabens enthalten; nämlich es soll h künftig jederzeit 2,7182818 bedeuten. Einige pflegen auch diese Grundzahl jederzeit mit e zu bezeichnen; h hat den Vorzug vor e, weil die Exponenten, besonders die gebrochenen, auf h bequemer anzubringen sind.

§. 294.

§. 294.

Auch läßt sich zu jedem gegebenen natürlichen Logarithmus x die dazu gehörige Zahl h^x, wo h die Grundzahl des nat. logarithmischen Systems bedeutet, durch eine unendliche Reihe ausgedrückt finden. Denn es sey $h^x = 1 + y$, nämlich $x = \log \text{nat} (1 + y)$, so ist auch, vermög (§. 289.)

$$x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{A}$$

Um nun den Werth von y durch x ausgedrückt zu finden, so setze man nach (§. 288.)

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{B}$$

so ist $y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$

$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots$

$y^4 = A^4x^4 + \ldots$

u. s. w.

Wenn man diese Werthe für y, y^2, y^3, y^4 in der Gleichung $\mathfrak{A}$ substituiret und die Gleichung auf Null reduziret; so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +B \\ -\frac{1}{2}A^2 \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +C \\ -AB \\ +\frac{1}{3}A^3 \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +D \\ -\frac{1}{2}B^2 \\ -AC \\ +A^2B \\ -\frac{1}{4}A^4 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Folglich $A = 1$, $B = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{1.2.3}$, $D = \frac{1}{1.2.3.4}$ u. s. w.

Es ist demnach, wenn man für $A, B, C, D \ldots$ die gefundenen Werthe in der Gleichung $\mathfrak{B}$ substituiret

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

und folglich $h^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$

Setzen wir nun z. B. den gegebenen natürlichen Logarithmus $x = 1,5000000 = 1,5 = \frac{3}{2}$; so ist

$$h^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{1.2.2^2} + \frac{3^3}{1.2.3.2^3} + \frac{3^4}{1.2.3.4.2^4} + ..$$

$= 4,4816$ beynahe; welches man erhält, wenn man nur einige wenige Glieder dieser unendlichen Reihe entwickelt. Setzen wir aber $x = 1$, so ist

$$h = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + .. = 2,7182818 ..$$

wie ehevor.

Durch Hilfe einer logarithmischen Tafel läßt sich der Werth von h^x für ein in Zahlen gegebenes x, nachdem h bereits bekannt ist, viel geschwinder und leichter berechnen.

§. 295.

So wie wir gefunden haben, daß

$$h^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots\ldots$$

sey; eben so läßt sich zeigen, daß überhaupt

$$a^x = 1 + x \times \log\text{nat}\, a + \frac{(x \times \log\text{nat}\, a)^2}{2} + \frac{(x \times \log\text{nat}\, a)^3}{2.3} + \frac{(x \times \log\text{nat}\, a)^4}{2.3.4} + \ldots$$ seyn müsse.

Um dieses einzusehen setze man $a^x = 1 + y$, so ist $x \log\text{nat}\, a = \log\text{nat}\,(1 + y)$; das ist $x(\log\text{nat}\, a)$ $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots.$

oder wenn man $x(\log\text{nat}\, a) = z$ setzet, so ist

$z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6 + \ldots$

Aus dieser Gleichung findet man nach dem vorhergehenden

$$y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{2.3.4}z^4 + \frac{1}{2.3.4.5}z^5 + \ldots$$ das ist

y

$$y = x(\log\text{nat}\, a) + \frac{1}{2}x^2(\log\text{nat}\, a)^2 + \frac{1}{2.3}x^3(\log\text{nat}\, a)^3 + \ldots$$

und endlich

$$a^x = 1 + x(\log\text{nat}\, a) + \tfrac{1}{2}x^2(\log\text{nat}\, a)^2 + \ldots$$

oder $a^x = 1 + \log\text{nat}\, a^x + \frac{1}{2}(\log\text{nat}\, a^x)^2 + \frac{1}{2.3}(\log\text{nat}\, a^x)^3 + .$

Setzen wir nun $a = x$, so ist auch

$$x^x = 1 + x(\log\text{nat}\, x) + \tfrac{1}{2}x^2(\log\text{nat}\, x)^2 + \ldots$$

oder $x^x = 1 + \log\text{nat}\, x^x + \frac{1}{2}(\log\text{nat}\, x^x)^2 + \frac{1}{2.3}(\log\text{nat}\, x^x)^3 + .$

§. 296.

Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen wird auch zuweilen mit Vortheil gebrauchet, um aus einer logarithmischen Gleichung eine unbekannte Größe zu entwickeln. Z. B. aus der Gleichung $\log\text{nat}\, x^2 = \frac{m}{n} + \log\text{nat}\, \frac{c}{x}$, sey x zu entwickeln, so ist $2\log\text{nat}\, x = \frac{m}{n} + \log\text{nat}\, c - \log\text{nat}\, x$, und $\frac{m}{n} \times 1 = \log\text{nat}\, \frac{x^3}{c}$. Nun kann $\log\text{nat}\, h$ statt 1 gesetzet werden; daher ist auch $\frac{m}{n} \times \log\text{nat}\, h = \log\text{nat}\, \frac{x^3}{c}$; folglich auch $\log\text{nat}\, h^{\frac{m}{n}} = \log\text{nat}\, \frac{x^3}{c}$ vermög (§. 257. N. 7. u. 8.), ferner $h^{\frac{m}{n}} = \frac{x^3}{c}$ vermög (§. 256.), und endlich $x = \sqrt[3]{ch^{\frac{m}{n}}}$.

Es sey endlich aus der Gleichung $\log\text{nat}\, \frac{a}{x} = mx - \log\text{nat}\, c$ der Werth von x zu bestimmen. In diesem Beyspiele ist $\log\text{nat}\, \frac{a}{x} + \log\text{nat}\, c = mx$, oder $\log\text{nat}\, \frac{ac}{x}$ =

$= mx \cdot \log \text{nat } h = \log \text{nat } h^{mx}$; folglich auch $\frac{ac}{x} = h^{mx}$; und endlich ist $ac = xh^{mx}$. Ferner läßt sich diese Gleichung nicht reduziren; und dies ereignet sich gemeiniglich, sobald die unbekannte Größe in der nämlichen Gleichung als Faktor, und als Exponent erscheint. Es sey z. B. folgende Aufgabe aufzulösen: eine **Zahl x zu finden, die mit $\frac{64}{5}$ multipliziret ein Produkt zum Vorschein bringt, welches der $x$ten Potenz von 4 gleichet.** Vermög der Bedingung der Aufgabe ist $\frac{64x}{5} = 4^x$; folglich ist auch $\log 64 + \log x - \log 5 = x \log 4$; oder $x \log 4 - \log x = \log 64 - \log 5$; nämlich

$x \cdot 0{,}60206 - \log x = 1{,}10721 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{A}$

weil $\log 4 = 0{,}60206$; $\log 64 = 1{,}80618$, und $\log 5 = 0{,}69897$; nun versuche man für x eine solche Zahl zu substituiren, daß der erste Theil der Gleichung $\mathfrak{A}$ dem 2ten Theile gleich werde; setzt man $x = 2$, so ist der erste Theil der Gleichung $= 0{,}90309$; setzt man hingegen $x = 3$, so ist der erste Theil der Gleichung $= 1{,}3290587$; es ist demnach $x > 2$, und $x < 3$; man setze also $x = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$; und dann ist der erste Theil der Gleichung dem zweyten vollkommen gleich; folglich ist die gesuchte Zahl $= 2{,}5 = \frac{5}{2}$. Bey einer fernern Untersuchung findet man, daß auch die Zahl $0{,}088298 \, . \, .$ dieser Aufgabe ein Genügen leistet.

Aus der vorhergehenden Gleichung $ac = x\,h^{mx}$ könnte der Werth für x durch eine unendliche Reihe entwickelt werden; allein die Reihe würde von keinem Nutzen seyn, wenn sie nicht schleunig zusammenläuft: die gesuchte Reihe könnte auf folgende Art gefunden werden. Da $ac = xh^{mx}$, so ist auch vermög (§. 294.)

$$ac = x \, . \left(1 + mx + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} + \frac{m^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)$$
$$= x + mx^2 + \frac{m^2x^3}{1.2} + \frac{m^3x^4}{1.2.3} + \frac{m^4x^5}{1.2.3.4} + \ldots$$

Nun setze man $ac = y$, so ist

$$y = x + mx^2 + \frac{m^2x^3}{1.2} + \frac{m^3x^4}{1.2.3} + \frac{m^4x^5}{1.2.3.4} + \ldots$$

Wenn man nun für den Werth von x folgende Reihe annimmt $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots$ die Größen $A, B, C \ldots$ nach (§. 283.) bestimmet, und endlich für $y, y^2, y^3 \ldots$ wieder ihre Werthe $ac, a^2c^2, a^3c^3 \ldots$ substituiret, so wird endlich die gesuchte Reihe als der Werth von x zum Vorschein kommen.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Reihen auf eine allgemeine Entwicklung der Potenzen.

§. 297.

Man erhebe eine zweynamige Größe $a + b$ nach (§. 113.) auf die nacheinander folgenden Potenzen, so ist

$(a+b)^1 = a + b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(b+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
u. s. w.

Betrachtet man nun diese entwickelten Potenzen mit Aufmerksamkeit, so wird man bey denselben folgendes Gesetz bemerken.

1) Die Anzahl der Glieder von einer jeden entwickelten Potenz ist um 1 größer als der Exponent von $(a+b)$; so besteht z. B. $(a+b)^2$ aus 3 Gliedern; $(a+b)^5$ aus 6 Gliedern u. s. w.

2) In jeder dieser entwickelten Potenzen enthält jedes Glied sowohl eine Potenz von a, als auch eine Potenz von b; und zwar fängt a in dem ersten Gliede mit dem höchsten Exponenten an, und in jedem folgenden Glied nimmt der Exponent von a um 1 ab, so daß in dem letzten Gliede sich a mit dem Exponenten 0 befindet, welches aber nicht ausdrücklich angesetzt ist, weil $a^0 = 1$ ist. Die Potenzen von b hingegen gehen in umgekehrter Ordnung, nämlich im ersten Gliede befindet sich b^0, und in jedem folgenden Gliede wächst der Exponent von b um 1, so daß im letzten Gliede b den größten Exponenten hat.

3) In jeder Potenz ist der Koeffizient des ersten und letzten Gliedes $= 1$.

Es läßt sich daher jede Potenz eines ganzen positiven Exponenten n von $(a+b)$ durch folgende Formel vorstellen.

$$(a+b)^n = a^n + \mathfrak{A}a^{n-1}b + \mathfrak{B}a^{n-2}b^2 + \mathfrak{C}a^{n-3}b^3 + \ldots b^n$$

wo die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$... solche Größen sind, damit diese Gleichung statt finde.

Untersuchet man nun das Gesetz, nach welchem die numerischen Koeffizienten von den oben entwickelten Potenzen fortgehen, so bemerket man, daß in den nacheinander folgenden Potenzen die Koeffizienten der zweyten Glieder in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortgehen, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...; daß die Koeffizienten in den dritten Gliedern nach einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges 0, 1, 3, 6, 10, 15 ...; daß die Koeffizienten von den vierten Gliedern nach einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges 0, 0, 1, 4, 10, 20 ...; daß die Koeffizienten der fünften Glieder in einer arithmetischen Reihe des vierten Ranges 0, 0, 0, 1, 5, 15 ... fortgehen u. s. w.

Su-

Suchet man nun zu jeder dieser Reihen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . .
0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 . . .
0, 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56 . . .
0, 0, 0, 1, 5, 15, 35, 70 . . .

u. s. w. nach (§. 247.) das $n$te Glied, so ist das $n$te Glied der ersten Reihe $= n$

= = zweyten = $= \frac{n(n-1)}{1.2}$

= = dritten = $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

= = vierten = $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$

. . . .

Da aber die oben angenommenen Koeffizienten A, B, C, D, nichts anders sind, als eben die $n$ten Glieder dieser Reihen, so ist $\mathfrak{A} = n$, $\mathfrak{B} = \frac{n(n-1)}{1.2}$, $\mathfrak{C} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

$\mathfrak{D} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ u. s. w.

folglich ist für jeden ganzen positiven Exponenten n

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 +$$

wo die Reihe nach demjenigen Gliede abbricht, in welchem der Exponent von a Null wird; weil der Koeffizient eines jeden folgenden Gliedes der Reihe $= 0$ seyn muß. Z. B. wenn man $n = 2$ setzet, so ist nach dieser Reihe

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + \frac{2.1}{1.2}a^0b^2 + \frac{2.1.0}{1.2.3}a^{-1}b^2 + \ldots$$

$= a^2 + 2ab + b^2$; weil das vierte und alle folgenden Glie-

Glieder der Reihe den Koeffizienten 0 haben, und folglich jedes derselben = 0 ist.

§. 298.

Aus dieser gefundenen Reihe ist es nun sichtbar, daß **jeder Koeffizient eines folgenden Gliedes aus dem nächst vorhergehenden Gliede bestimmet werden könne, wenn man in dem vorhergehenden Gliede den Koeffizienten mit dem Exponenten von a multipliziret, und dieses Produkt durch die Stelle dieses Gliedes dividiret.** So ist z. B. der Koeffizient des vierten Gliedes $= \frac{n(n-1)}{1.2} \times \frac{(n-2)}{3}$.

Man kann demnach jede zweynamige Größe sehr leicht zu was immer für einer Potenz eines ganzen Exponenten (z. B. $a+b$ auf die 8te Potenz) erheben, und zwar auf folgende Art.

1) Man schreibe zwey Reihen untereinander, wovon die erste bey der höchsten Potenz des ersten Gliedes der vorgegebenen zweynamigen Größe anfängt, und sich bey der 0ten Potenz endiget; die zweyte Reihe hingegen fängt bey der 0ten Potenz des zweyten Gliedes der vorgegebenen Größe an, und endiget sich bey der höchsten Potenz. In unserm Beyspiele schreibe man folgende zwey Reihen

$a^8, a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0$
$b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7, b^8$

2) Dann multiplizire man die Glieder der obern Reihe mit den darunter stehenden Gliedern der untern Reihe, so erhält man für die litteralischen Produkte

$a^8, a^7b, a^6b^2, a^5b^3, a^4b^4, a^3b^5, a^2b^6, ab^7, b^8$

3) Ferner ist der Koeffizient des ersten Gliedes = 1; und der Koeffizient des zweyten Gliedes ergiebt sich, wenn man in dem ersten Gliede den Koeffizienten mit dem Expo-

nen-

nenten von a multipliziret, und dieses durch die Stelle des Gliedes dividiret $= \frac{1 \cdot 8}{1} = 8$; der Koeffizient des dritten Gliedes wird wieder gefunden, wenn man in dem zweyten Gliede den Koeffizienten mit dem Exponenten von a multipliziret, und dieses durch die Stelle des Gliedes dividiret $= \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$; eben so erhält man den Koeffizienten des vierten Gliedes, indem man in dem dritten Gliede den Koeffizienten mit dem Exponenten von a multipliziret, und dieses durch die Stelle des Gliedes 3 dividiret $= \frac{28 \cdot 6}{3} = 56$ u. s. w. Man findet sodann

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

Wäre das zweyte Glied einer zweynamigen Größe, welche zu einer Potenz erhoben werden soll, negativ, z. B. es sollte $(c-x)$ nach diesen Regeln auf die 7te Potenz erhoben werden, so müssen die Glieder, in welchen sich die ungeraden Potenzen des zweyten Gliedes befinden, negativ genommen werden (§. 118.); nämlich es ist

$$(c-x)^7 = c^7 - 7c^6x + 21c^5x^2 - 35c^4x^3 + 35c^3x^4 - 21c^2x^5 + 7cx^6 - x^7.$$

§. 299.

Daß aber diese gefundene Reihe für $(a+b)^n$ nicht nur allein wenn n eine positive ganze Zahl ist, sondern auch für jeden andern ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werth von n angewendet werden könne, läßt sich auf folgende allgemeine Art darthun.

Es ist $(a+b)^n = a^n \left(\frac{a+b}{a}\right)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$,

und

und wenn man $\frac{b}{a} = x$ setzet, so ist $(a+b)^n = a^n(1+x)^n$:
Es kömmt also nur darauf an, $(1+x)^n$ durch eine gleichgiltige Reihe auszudrücken, unter der Bedingung, daß sowohl x als auch n jeden beliebigen Werth annehmen könne.

Um eine solche Reihe zu finden, setze man
$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ A
weil die Glieder der Reihe ganz sicher Funktionen von x seyn müssen; und es ist für das erste Glied der Reihe 1 angenommen worden, weil für $x = 0$ die Potenz $(1+x)^n$ bey jedem Werthe von n immer $= 1$ seyn muß. Uebrigens sollen die beständigen Koeffizienten $A, B, C, D \ldots$ so beschaffen seyn, daß die angenommene Gleichung statt finde.

Um nun diese Koeffizienten bistimmen zu können, setze man den veränderlichen Theil $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ der für $(1+x)^n$ angenommenen Reihe $= y$, nämlich
$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$
so ist $y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$
$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots$
$y^4 = A^4x^4 + \ldots$

Ferner da $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$
so ist $1 + y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$
es ist aber auch $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$
folglich auch $(1+x)^n = 1 + y$ (§. 12. N. 3.)
und $\log nat\,(1+x)^n = \log nat\,(1+y)$ vermög (§. 256)
oder $n \log nat\,(1+x) = \log nat\,(1+y)$ verm. (§. 257 N. 7)
und wenn man statt $\log nat\,(1+x)$ und $\log nat\,(1+y)$ die Reihe D (§. 90.) setzet, so ist

$$nx - \frac{nx^2}{2} + \frac{nx^3}{3} - \frac{nx^4}{4} + \ldots = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots$$

Nun substituire man in dieser Gleichung für $y, y^2, y^3, y^4 \ldots$ die oben gefundenen Werthe, und reduzire die ganze Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} A \\ -n \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + B \\ -\frac{1}{2}A^2 \\ +\frac{1}{2}n \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + C \\ - AB \\ +\frac{1}{3}A^3 \\ -\frac{1}{3}n \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} + D \\ -\frac{1}{2}B^2 \\ -AC \\ +A^2B \\ -\frac{1}{4}A^4 \\ +\frac{1}{4}n \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Folglich $A - n = 0$

$$B - \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}n = 0$$
$$C - AB + \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{3}n = 0$$
$$D - \tfrac{1}{2}B^2 - AC + A^2B - \tfrac{1}{4}A^4 + \tfrac{1}{4}n = 0$$

nämlich $A = n$

$$B = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung A diese gefundenen Werthe für A, B, C, D . . . substituiret,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{2 \cdot 3} + \ldots$$

Setzet man nun wieder in dieser Gleichung $\frac{b}{a}$ statt x, so ist

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{b^4}{a^4} + \ldots$$

Und da $(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ ist, so ist auch

$(a+b)^n$

$$(a+b)^n = a^n \left[1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \ldots\right]$$

nämlich $(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1.2}$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}b^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

wo a, b und n jeden beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werh haben kann. Nur wird die Reihe, wenn n keine positive ganze Zahl ist, niemalen abbrechen, sondern ohne Ende fortlaufen, wo man sodann von der Reihe so viele Glieder entwickeln kann, als es die Richtigkeit einer Rechnung nur immer fordern mag.

Anmerkung. Diese gefundene Reihe für $(a+b)^n$ pflegt man den binomischen Lehrsatz, oder auch das Newtonische Binomium zu nennen, weil Newton am ersten gezeigt hat, wie die Koeffizienten bey dieser Formel auf eine allgemeine Art auszudrücken sind.

§. 300.

Bevor wir aber von dieser gefundenen Formel eine weitere Anwendung auf die Ausziehung verschiedener Wurzeln machen, wollen wir dieselbe noch auf einen einfachern Ausdruck bringen; theils damit man solche leichter im Gedächtniß behalten könne, theils auch damit man jedes folgende Glied der Reihe aus dem schon entwickelten vorhergehenden Gliede viel kürzer bestimmen könne. Man benenne in der gefundenen Formel

$$(a+b)^n = \overset{A}{a^n} + \overset{B}{\frac{na^{n-1}b}{1}} + \overset{C}{\frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1.2}} + \overset{D}{\ldots}$$

die

die Glieder der Reihe nach der Ordnung mit A, B, C, D . .
so ist $B = nA . \frac{b}{a}$; $C = \frac{n-1}{2} B . \frac{b}{a}$; $D = \frac{n-2}{3} C . \frac{b}{a}$;
$E = \frac{n-3}{4} D . \frac{b}{a}$ u. s. w.

Setzen wir nun das erste Glied der vorgegebenen zweynamigen Größe $a = P$, und den Quotienten, den man erhält, wenn man das zweyte Glied der vorgegebenen zweynamigen Größe durch das erste dividiret, $\frac{b}{a} = Q$, so ist

$$(a+b)^n = \overset{A}{P^n} + \overset{B}{nAQ} + \overset{C}{\frac{n-1}{2} BQ} + \overset{D}{\frac{n-2}{3} CQ} + \overset{E}{\frac{n-3}{4} DQ} + \ldots$$

§. 301.

Es sey nun nach dieser Formel $\sqrt{(a^2 \pm x)} = (a^2 \pm x)^{\frac{1}{2}}$ zu entwickeln, so ist $P = a^2$; $Q = \pm \frac{x}{a^2}$; und $n = \frac{1}{2}$;

folglich $P^n = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a = A$

$$nAQ = \frac{1}{2} . a . \pm \frac{x}{a^2} = \pm \frac{x}{2a} = B$$

$$\frac{n-1}{2} BQ = -\frac{1}{4} . \pm \frac{x}{2a} . \pm \frac{x}{a^2} = -\frac{x^2}{2.4.a^3} = C$$

$$\frac{n-2}{3} CQ = -\frac{3}{6} . -\frac{x^2}{2.4.a^3} . \pm \frac{x}{a^2} = \pm \frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^5} = D$$

$$\frac{n-3}{4} DQ = -\frac{5}{8} . \pm \frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^5} . \pm \frac{x}{a^2} = -\frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^7} = E$$

u. s. w.

folglich ist $\sqrt{}(a^2 + x) = a \pm \frac{x}{2a} - \frac{1.x^2}{2.4.a^3} \pm \frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^5}$

$$- \frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^7} \pm \ldots .$$

Hierdurch läßt sich nun aus jeder vorgegebenen irrationalen Zahl die Quadratwurzel durch Annäherung finden, wenn man die vorgegebene Zahl in zwey andere zerleget, wovon eine ein vollkommenes Quadrat ist, und deren Summe oder Differenz der vorgegebenen Zahl gleich ist; und man thut am besten, wenn man eine solche Quadratzahl wählet, welche in Rücksicht des andern Theiles ziemlich groß ist, weil alsdann die Reihe sehr schnell abnimmt. Z. B. es wäre durch diese Formel $\sqrt{}30$ zu entwickeln, so läßt sich $\sqrt{}30$ vorstellen durch $\sqrt{}(25 + 5)$, und auch durch $\sqrt{}(36 - 6)$; man thut aber besser, wenn man das zweyte wählt, weil im ersten Fall $\frac{x}{a^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, und im zweyten Fall $\frac{x}{a^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ ist. Setzet man darum $\sqrt{}30 = \sqrt{}(36 - 6)$, so ist, wenn man in der obigen Formel $a^2 = 36$, und $x = 6$ setzet,

$$\sqrt{}30 = 6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4.6} - \frac{1.3}{2.4.6.(6)^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.(6)^3}$$

$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.(6)^4} - \ldots .$$

Eine noch weit schneller abnehmende Reihe würde man für $\sqrt{}30$ erhalten, wenn man die Zahl unter dem Zeichen mit einer vollkommenen Quadratzahl multipliziret, und solche zugleich wieder als Nenner unterschreibet, den Nenner aber vor das Zeichen hinausschaffet. Z. B. wenn man setzet

$$\sqrt{}30 = \sqrt{}\frac{30.100}{100} = \frac{1}{10}\sqrt{}3000 = \frac{1}{10}\sqrt{}(3025 - 25);$$

denn

denn in diesem Falle ist in der obigen Formel $a^2 = 3025$, $x = 25$, und $\frac{x}{a^2} = \frac{25}{3025} = \frac{1}{121}$; folglich

$$\sqrt{30} = \frac{1}{10}\left(55 - \frac{25}{2.55} - \frac{1.25^2}{2.4.55^3} - \frac{1.3.25^3}{2.4.6.55^5} - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(55 - \frac{55.25}{2.55^2} - \frac{1.55.25^2}{2.4.55^4} - \frac{1.3.55.25^3}{2.4.6.55^6} - \ldots\right)$$

$$= \frac{55}{10}\left(1 - \frac{1}{2.121} - \frac{1}{2.4.(121)^2} - \frac{1.3}{2.4.6.(121)^3} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.(121)^4} - \ldots\right)$$

$$= \frac{55}{10}(1 - 0{,}0041408044) = 5{,}4772255761,$$

welches man erhält, wenn man nur drey Brüche von dieser Reihe entwickelt; weil die folgenden Glieder bis in die zehnte Dezimalstelle keine bedeutliche Ziffer mehr geben.

Wäre aus einer grossen irrationalen Zahl die Quadratwurzel durch Annäherung zu finden, wo die nächst kleinere Wurzel in Rücksicht des Restes schon beträchtlich groß ist, nämlich wenn a schon beträchtlich größer als x wäre; so erhält man schon einige der folgenden Dezimalstellen der Wurzel richtig, wenn man blos das erste Glied $\frac{x}{2a}$ allein entwickelt; z. B.

$$\sqrt{675915} = \sqrt{(675684 + 231)} = 822 + \frac{231}{2.822}$$

$= 822{,}1405$, wo die vierte Dezimalziffer noch richtig ist; weil das folgende Glied der Reihe $-\frac{(231)^2}{2.4(822)^3}$ an der vierten Stelle keine bedeutliche Ziffer mehr giebt.

Imgleichen ist $\sqrt{8596,47} = \sqrt{(8593,29 + 3,18)}$
$= 92,7 + \frac{3,18}{2.92,7} = 92,71715.$

Hierauf gründet sich die in verschiedenen praktischen Rechenbüchern vorfindige Regel: daß wenn man bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einer irrationalen Zahl einige Ziffern der Wurzel (entweder durch wirkliches Ausziehen nach (§. 146.), oder mittelst der Logarithmen, oder auch durch Beyhilfe einer Tafel der Quadratzahlen) schon gefunden hat, man nur das Quadrat dieser gefundenen Ziffern von der vorgegebenen Zahl abziehen, und den Rest durch das doppelte der schon gefundenen Wurzel dividiren soll, um noch einige folgende Ziffern der Wurzel richtig zu erhalten.

§. 302.

Es sey auch nach der Formel (§. 300.) $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = (a^3 \pm x)^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln, so ist $n = \frac{1}{3}$, $P = a^3$, und $Q = \pm \frac{x}{a^3}$; folglich

$$P^n = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a = A$$

$$n\,AQ = \frac{1}{3} \,.\, a \,.\, \pm \frac{x}{a^3} = \pm \frac{x}{3.a^2} = B$$

$$\frac{n-1}{2} BQ = -\frac{2}{2.3} . \pm \frac{x}{3a^2} . \pm \frac{x}{a^3} = -\frac{2.x^2}{2.3^2.a^5} = C$$

$$\frac{n-2}{3} CQ = -\frac{5}{3.3} . -\frac{2.x^2}{2.3^2.a^5} . \pm \frac{x}{a^3} = \pm \frac{2.5.x^3}{2.3.3^3.a^8} = D$$

$$\frac{n-3}{4} DQ = -\frac{8}{3.4} . \pm \frac{2.5.x^3}{2.3.3^3.a^8} . \pm \frac{x}{a^3} = -\frac{2.5.8.x^4}{2.3.4.3^4.a^{11}} = E$$

$$\frac{n-4}{5} EQ = -\frac{11}{3.5} . -\frac{2.5.8.x^4}{2.3.4.3^4.a^{11}} . \pm \frac{x}{a^8} = \pm \frac{2.5.8.11.x^5}{2.3.4.5.3^5.a^{14}} = F$$

u. s. w.

folg-

folglich $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = a \pm \frac{x}{1.3.a^2} - \frac{2.x^2}{1.2.3^2.a^5} \pm \frac{2.5.x^3}{1.2.3.3^3.a^8}$

$$- \frac{2.5.8.x^4}{1.2.3.4.3^4.a^{11}} \pm \frac{2.5.8.11.x^5}{1.2.3.4.5.3^5.a^{14}} - ..$$

Durch diese Reihe läßt sich nun wieder sehr leicht aus einer vorgegebenen irrationalen Zahl die Kubikwurzel durch Annäherung finden, wenn man die Zahl in solche zwey Theile zerleget, wovon einer ein vollkommener Kubus, und in Rücksicht des andern beträchtlich groß ist; weil alsdann die Reihe sehr schnell abnehmen wird, und in den meisten Fällen nur das erste Glied der Reihe ganz allein entwickelt werden darf, um die Kubikwurzel mit einigen Dezimalstellen richtig zu erhalten. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{(512 - 12)} = 8 - \frac{12}{3.64} = 8 - 0{,}062 = 7{,}937;$$

weil das folgende Glied der Reihe die dritte Dezimalstelle in der Wurzel nicht mehr ändert.

Imgleichen $\sqrt[3]{572319} = \sqrt[3]{(571787 + 532)}$
$= 82 + \frac{532}{3.(82)^2} = 82{,}02574$, wo die fünfte Dezimalziffer noch richtig ist, weil das folgende Glied an dieser Stelle keine bedeutliche Ziffer mehr giebt.

Hat man demnach durch Hilfe der Logarithmen, oder durch Hilfe der Tafeln der Kubikzahlen, die Wurzel aus einer vorgelegten Zahl mit einigen Dezimalstellen bestimmt, und man wollte deren noch einige richtig haben; so ziehe man nur den Kubus der schon gefundenen Wurzel von der vorgelegten Zahl ab, und dividire den Rest durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, so wird der Quotient noch einige der folgenden Ziffern der Wurzel geben.

§. 303.

Endlich wollen wir noch $(a+x)^{-\frac{3}{4}}$ nach der Formel (§. 300.) entwickeln. Da ist $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, und $n = -\frac{3}{4}$; folglich

$$P^n = a^{-\frac{3}{4}} = A$$

$$nAQ = -\frac{3}{4} . a^{-\frac{3}{4}} . \frac{x}{a} = -\frac{3a^{-\frac{7}{4}}x}{4} = B$$

$$\frac{n-1}{2} . BQ = -\frac{7}{2.4} . -\frac{3a^{-\frac{7}{4}}x}{4} . \frac{x}{a} = +\frac{3.7a^{-\frac{11}{4}}x^2}{2.4^2} = C$$

$$\frac{n-2}{3} . CQ = -\frac{11}{3.4} . \frac{3.7.a^{-\frac{11}{4}}x^2}{2.4^2} . \frac{x}{a} = -\frac{3.7.11.a^{-\frac{15}{4}}x^3}{2.3.4^3} = D$$

$$\frac{n-3}{4} DQ = -\frac{15}{4.4} - \frac{3.7.11.a^{-\frac{15}{4}}x^3}{2.3.4^3} . \frac{x}{a} = +\frac{3.7.11.15.a^{-\frac{19}{4}}x^4}{2.3.4.4^4} = E$$

u. s. w.

folglich ist

$$(a+x)^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{3}{4}} - \frac{3.a^{-\frac{7}{4}}x}{1.4} + \frac{3.7.a^{-\frac{11}{4}}x^2}{1.2.4^2} - \frac{3.7.11.a^{-\frac{15}{4}}x^3}{1.2.3.4^3} + \frac{3.7.11.15.a^{-\frac{19}{4}}x^4}{1.2.3.4.4^3} - \ldots$$

§. 304.

Sollte eine Größe, die aus mehr als zwey Gliedern bestehet, durch den binomischen Lehrsatz auf irgend eine Potenz erhoben werden, so muß man die vorgegebene Größe als zweynamig vorstellen. Z. B. es wäre $(c^2 + x^2 - x)^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln; so setze man $c^2 = P$, $\frac{x^2 - x}{c^2} = Q$, und $\frac{1}{3} = n$,

sodann

sodann substituire man diese Werthe in der Formel (§. 300.), so wird man die verlangte Reihe erhalten. Da aber dergleichen Reihen der Potenzen einer mehr als zweynamigen Größe von keiner besondern Anwendung sind, so wollen wir uns dabey gar nicht aufhalten.

Anmerkung. Wenn man in (§. 299.) statt b allenthalben den negativen Werth $-\frac{ax}{a+x}$ setzet, um für $(a+x)^{-n}$ eine Reihe zu erhalten; und wenn man sodann für n auch einen negativen Werth $-m$ annimmt, so kömmt nachstehende Formel zum Vorschein

$$(a+x)^m = a^m \cdot \left(1 + \frac{mx}{a+x} + \frac{m(m+1)x^2}{2.(a+x)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^3}{2.3.(a+x)^3} + \ldots\right)$$

VII. Abschnitt.

Von der Summirung einiger besondern, theils endlichen, theils unendlichen Reihen, nebst vorläufigen Begriffen von dem unendlich Großen, und unendlich Kleinen.

§. 305.

Obwohlen jede Größe ohne Ende vermehrt werden kann, und man nie zu einer Größe gelangen wird, wo sich nicht eine noch größere angeben läßt; so ist es doch in der Mathematik öfters nützlich, sich eine unendlich große Größe zu gedenken, eine Größe nämlich, die größer ist, als jede angebliche Größe der nämlichen Gattung. Z. B. wenn uns jemand in der ohne Ende fortlaufenden Reihe $(1+2+3+4+5+\ldots\ldots+$ ohne Ende$)$ um das letzte Glied, wie auch um die Anzahl der Glieder befragen würde; so können wir nicht anders, als mit einer unendlich großen

Zahl antworten. Das Zeichen, durch welches man in der Mathematik eine unendlich große Zahl vorzustellen pflegt, ist ∞; es bedeutet nämlich dieses Zeichen ∞ eine Zahl, die größer ist, als jede angebliche noch so große Zahl. Eine Größe hingegen, welche ihre bestimmten Grenzen hat, wird eine endliche Größe genennet.

Man kann zu dem Begriffe einer unendlichen großen Zahl auf folgende Art gelangen. Es sey der Nenner z des Bruches $\frac{1}{z}$ eine veränderliche Funktion, z. B. $z = a - x$, so wird der Werth des Bruches immer mehr und mehr wachsen, je kleiner der Nenner z angenommen wird (§. 78.); bildet man sich nun ein, daß der Nenner z immer mehr und mehr vermindert werde, bis er gleich Null wird, so muß der Quotient ohne Zweifel unendlich groß seyn; nämlich es ist $\frac{1}{0} = \infty$. Dieses läßt sich auch sehr deutlich einsehen, wenn man in (§. 282.) bey der Verwandlung des Bruches $\frac{1}{a-x}$ in eine unendliche Reihe, $a = 1$ und $x = 1$ setzet; denn man erhält sodann $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $+ 1 + \ldots = \infty$

Es ist demnach auch $\frac{a}{0} = \frac{1}{0} \cdot a = \infty \cdot a$.

§. 306.

So wie man sich nun eine Zahl einbilden kann, welche größer ist, als jede angebliche noch so große Zahl; eben so kann man sich auch einen unendlich kleinen Bruch vorstellen, einen Bruch nämlich, welcher kleiner ist, als jeder angebliche noch so kleine Bruch. Z. B. wenn in der unendlichen Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots$ die Nenner ohne

Ende

Ende wachsen, so wird der Nenner des letzten Gliedes $= \infty$ seyn; und das letzte Glied ist sodann $= \frac{1}{\infty}$. Nun aber wird der Werth eines Bruches immer kleiner, je größer sein Nenner wird; daher muß der Werth eines solchen Bruches $\frac{1}{n}$ unendlich klein werden, wenn dessen Nenner n unendlich groß wird.

Das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ deutet demnach einen Theil der Einheit an, welcher kleiner ist, als jeder angebliche noch so kleine Theil. Eben so stellet $\frac{a}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. a einen unendlich kleinen Theil von a vor.

§. 307.

Hieraus folgt nun, daß ein unendlich kleiner Theil einer Größe die Größe selbst weder vermehre noch vermindere, wenn solcher hinzu addirt, oder davon subtrahirt wird; nämlich daß $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$ sey. Denn wäre $1 \pm \frac{1}{\infty}$ nicht gleich 1, so müßte sich ein Unterschied angeben lassen, um welchen die Einheit vermehrt oder vermindert worden ist, welches wider den Begriff einer unendlich kleinen Größe ist. Eben so ist auch $a \pm \frac{a}{\infty} = a\left(1 \pm \frac{1}{\infty}\right) = a$. **Eine unendlich kleine Größe verschwindet demnach in Rücksicht einer endlichen Größe, wenn sie dazu addirt oder davon subtrahirt werden solle. Und daher kann man auch sagen: eine unendlich kleine Größe ist ein so kleiner Theil eines Ganzen, daß solcher in Rücksicht des Ganzen für nichts anzusehen ist.**

Anmerkung. Den Anfänger darf es nicht befremden, daß man in der Mathematrk Zeichen gebraucht, um unendlich große und unendlich kleine Zahlen vorzustellen, da es doch nach metaphysischen Gründen in der Natur keine solche Zahlen giebt. Man darf sich hier nur erinnern, daß auch in der Mathematik die unmöglichen Größen durch Zeichen ausgedrücket (wie z. B. $\sqrt[2n]{-a}$), und sodann verschiedene Rechnungen damit vorgenommen werden. Es kömmt nur darauf an, ob die arithmetischen Arbeiten, welche man mittelst der Bezeichnung der unendlich großen und unendlich kleinen Größen vornimmt, auf eine leichte Art zu nützlichen Untersuchungen und Anwendungen führen. In den folgenden Theilen der Mathematik wird es zu ersehen seyn, daß der Nutzen, welcher aus der arithmetischen Betrachtung der unendlich großen und unendlich kleinen Größen entspringt, weit wichtiger, ausgebreiteter, und für jeden auch nur mittelmässigen Kopf faßlicher ist, als jener, welchen die Rechnung mit unmöglichen Größen verschaffet.

§. 308.

Wenn man die unendlich großen und unendlich kleinen Größen auf die angeführte Art bezeichnet, so sind solche sodann, so wie die unmöglichen Größen, allen Rechnungsarten unterworfen; sie können addiret, subtrahiret, multipliziret, und dividiret werden; so ist z. B. $\infty + \infty = 2\infty$; $3\infty - 2\infty = \infty$; $\infty \times a = \infty a$; $\infty : a = \frac{\infty}{a}$; $a : \infty = \frac{a}{\infty}$ u. s. w.; eben so $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} . a = \frac{a}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} : b = \frac{1}{\infty b}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$. Imgleichen $\infty \times \infty = \infty^2$; $\infty^2 \times \infty = \infty^3$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3}$ u. s. w.

Die

Die Potenzen ∞^2, ∞^3, ∞^4; $\frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \frac{1}{\infty^4} \ldots$ pflegt man die Ordnungen des unendlichen zu nennen; nämlich ∞^2 heißt eine unendliche Größe der zweyten Ordnung, oder des zweyten Ranges; ∞^3 eine unendlich große Größe der dritten Ordnung, u. s. w. Eben so heißt $\frac{1}{\infty^2}$ eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung, oder des zweyten Ranges; $\frac{1}{\infty^3}$ eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung u. s. w.

§. 309.

Wenn man eine endliche Größe a mit einer unendlich großen Zahl ∞ multiplizirt, so ist das Produkt $= \infty a$; und wenn man a durch ∞ dividiret, so ist der Quotient $= \frac{a}{\infty}$, wo die Größen $\frac{a}{\infty}$, a, ∞a als drey aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Reihe anzusehen sind. Wenn man nun die übrigen Glieder dieser Reihe beyderseits ansetzt, so erhält man folgende geometrische Reihe

$$\ldots \frac{a}{\infty^3}, \frac{a}{\infty^2}, \frac{a}{\infty}, a, \infty a, \infty^2 a, \infty^3 a \ldots$$

es ist nämlich erlaubt zu a und $\frac{a}{\infty}$ die dritte zusammenhängende Proportionalgröße zu suchen; und so auch zu a und ∞a; oder welches einerley ist, es ist auch ferner erlaubt ∞a mit ∞ zu multipliziren, und $\frac{a}{\infty}$ durch ∞ zu dividiren u. s. w.

Aus der Betrachtung der angeführten geometrischen Reihe können nun folgende Schlüsse abgeleitet werden.

1)

1) Jede endliche Größe a verschwindet in Rücksicht einer unendlich großen Größe, wenn sie dazu addirt, oder davon subtrahirt werden soll. Denn es ist aus der Progression

$$\frac{a}{\infty} : a = a : \infty\, a$$

also auch $a \pm \frac{a}{\infty} : a = \infty\, a \pm a : \infty\, a$ (§. 187.)

Nun aber ist $a \pm \frac{a}{\infty} = a$ (§. 307.)

folglich auch $\infty\, a \pm a = \infty\, a$.

2) Jede unendlich große Größe einer niedrigern Ordnung verschwindet in Rücksicht einer unendlich großen Größe einer höhern Ordnung. Denn da

$$\frac{a}{\infty} : a = \infty\, a : \infty^2 a$$

so ist auch $a \pm \frac{a}{\infty} : a = \infty^2 a \pm \infty\, a : \infty^2 a$

nämlich $\infty^2 a \pm \infty\, a = \infty^2 a$.

Und so läßt sich auch zeigen, daß $\infty^3 a \pm \infty^2 a = \infty^3 a$ u. s. w.

3) Eben so verschwindtt auch jede unendlich kleine Größe einer höhern Ordnung in Rücksicht einer unendlich kleinen Größe von einer niedrigern Ordnung, wenn sie dazu addirt, oder davon abgezogen werden soll; nämlich $\frac{a}{\infty} \pm \frac{a}{\infty^2} = \frac{a}{\infty}$; $\frac{a}{\infty^2} \pm \frac{a}{\infty^3} = \frac{a}{\infty^2}$ u. s. w.

§. 310.

Es sey nun die Summe folgender unendlichen Reihe von Brüchen $\frac{b}{c} + \frac{b}{cm} + \frac{b}{cm^2} + \frac{b}{cm^3} + \ldots\ldots =$ wo die Zah-

Zähler beständig sind, die Nenner aber in einer geometrischen Progression beständig wachsen, zu bestimmen;

so ist vermög (§. 253.) $a = \frac{b}{c}$; $q = \frac{1}{m}$

und nach (§. 254. N. 6.) $s = \frac{bm(m^n - 1)}{cm^n(m-1)}$

Setzt man nun die Anzahl der Glieder $n = \infty$, so ist

$$s = \frac{bm \cdot m^\infty}{cm^\infty (m-1)} = \frac{bm}{c(m-1)}$$

Beyspiele.

I. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$

denn hier ist $b = 1$, $c = 2$, $m = 2$; folglich $s = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 1$

II. $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots = \frac{2}{3}$

denn $b = 1$, $c = 2$, $m = 4$; folglich $s = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

III. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3}$

denn $b = 1$, $c = 2$, $m = -2$; folglich $s = \frac{1 \cdot -2}{2 \cdot -3} = \frac{1}{3}$

IV. $\frac{3}{2} - \frac{6}{6} + \frac{12}{18} - \frac{24}{54} + \frac{48}{162} \ldots = \frac{9}{10}$

denn $b = 3$, $c = 2$, $m = -\frac{3}{2}$; folglich $s = (3 \cdot -\frac{3}{2}) : 2 \cdot -\frac{5}{2}$
$= -\frac{9}{2} : -\frac{10}{2} = \frac{9}{10}$.

V. Es ist das Gesetz eines ohne Ende fortlaufenden Dezimalbruches bekannt, z. B. 0,11111 . . . . man soll den gemeinen Bruch herbeyschaffen, welcher nach (§. 98.) in einen Dezimalbruch verwandelt, den vorgelegten zum Vorschein bringet.

Hier ist $b = 1$, $c = 10$, und $m = 10$, weil 0,11111 $= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots$ folglich ist der verlangte Bruch $s = \frac{1 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{1}{9}$.

Eben

Eben so findet man, daß zu dem Dezimalbruch $0,575757\ldots$ der Bruch $\frac{57}{99}=\frac{19}{33}$ gehöre; weil in diesem Falle $b=57$, $c=100$, und $m=100$ ist.

Wollte man aber den Bruch herbeyschaffen, welcher in einen Dezimalbruch verwandelt $0,9999\ldots$ giebt, so ist hier $b=9$, $c=10$, und $m=10$, folglich $s=\frac{9.10}{10.9}=1$; das heißt, es läßt der Bruch sich gar nicht angeben, welcher in einen Dezimalbruch verwandelt $0,9999\ldots$ giebt; weil sich vermög (§. 306.) zwischen diesem ohne Ende fortlaufenden Dezimalbruch, und zwischen der ganzen Einheit gar kein Unterschied angeben läßt, indem solcher unendlich klein ist.

§. 311.

Wenn man die Glieder einer arithmetischen Reihe

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d\ \ldots\ a+(n-1)d$

mit den Gliedern einer geometrischen Reihe

$b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3,\ bq^4,\ bq^5\ \ldots\ bq^{n-1}$

einzeln multipliziret, so erhält man nachstehende zusammengesetzte Reihe,

$ab,\ (a+d)bq,\ (a+2d)bq^2,\ (a+3d)bq^3\ \ldots$

wovon das allgemeine Glied ist

$t=[a+(n-1)d]bq^{n-1}$

und das summatorische Glied $=s$ von dieser zusammengesetzten Reihe läßt sich auf folgende Art bestimmen.

Man zertheile jedes Glied, z. B. $(a+3d)bq^3$ in so viele Glieder, als der Koeffizient von d Einheiten enthält, nämlich $(a+3d)bq^3=abq^3+bdq^3+bdq^3+bdq^3$, so ist

$$\begin{array}{l} s = ab \\ \quad + abq + bdq \\ \quad + abq^2 + bdq^2 + bdq^2 \\ \quad + abq^3 + bdq^3 + bdq^3 + bdq^3 \\ \quad + abq^4 + bdq^4 + bdq^4 + bdq^4 + bdq^4 \\ \quad + - - - - - - - - - \\ \quad + abq^{n-1} + bdq^{n-1} + bdq^{n-1} + \ldots bdq^{n-1} \end{array}$$

Nun ist von oben nach unten gezählet die Summe der ersten Kolonne $= \frac{abq^n - ab}{q-1}$, vermög (§. 254. N. 5.)

Die Summe der 2ten Kolonne, welche um 1 Glied weniger enthält,

ist, vermög eben der Formel $= \frac{bdq^n - bdq}{q-1}$;

die Summe der dritten $= \frac{bdq^n - bdq^2}{q-1}$

die Summe der vierten $= \frac{bdq^n - bdq^3}{q-1}$

die Summe der fünften $= \frac{bdq^n - bdq^4}{q-1}$

u. s. w.

folglich $s = \frac{abq^n - ab}{q-1} + (n-1) \times \frac{bdq^n}{q-1}$

$$- \frac{bdq}{q-1}\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2})$$

und endlich, wenn man auch statt der hier in Klammern eingeschlossenen Reihe aus (§. 254. N. 5.) den gleichen Werth $\frac{q^{n-1} - 1}{q-1}$ setzet, und alles gehörig reduziret

$$s = \frac{ab(q^n - 1) + nbdq^n}{q-1} - \frac{bdq(q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

§. 312.

§. 312.

Setzet man in der angeführten Formel (§. 311.) $\frac{1}{b}$ statt b, und $\frac{1}{q}$ statt q, so erhält man von nachstehender Reihe

$$\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}, \ldots$$

allgem. Glied $t = \frac{a+(n-1)d}{bq^{n-1}}$

summat. Glied $s = \frac{(aq-a+d)(q^n-1)-dn(q-1)}{bq^{n-1}(q-1)^2}$

Setzet man hier $n = \infty$

so ist $s = \frac{(aq-a+d)q^\infty}{bq^{\infty-1}(q-1)^2}$; weil das 2te Glied im Zähler als eine unendlich große Größe eines niedrigen Ranges in Rücksicht des ersten Gliedes verschwindet;

ferner $s = \frac{(aq-a+d)q \,.\, q^{\infty-1}}{b(q-1)^2 \,.\, q^{\infty-1}}$

und endlich $s = \frac{(aq-a+d)q}{b(q-1)^2}$

Z. B. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots\ldots\ldots = 3$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots\ldots\ldots = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{12}{18} + \frac{32}{54} + \frac{80}{162} + \ldots\ldots = \frac{9}{2}$

weil hier im letzten Beyspiele $a = 1$, $d = 1$, $b = 2$, und $q = \frac{3}{2}$ ist.

Eben so ist $0{,}12345679012345679012\ldots = \frac{12}{81}$ wenn man hier $a = 1$, $d = 1$, $b = 10$ und $q = 10$ setzet. Eben diese Summe findet man auch nach (§. 310.), wenn man dort

$b = 122456790$, $c = 10^9$ und $m = 10^9$ setzet.

§. 313.

§. 313.

Es giebt auch Reihen, die sich summiren lassen, bey denen die Zähler beständig sind, die Nenner aber in einer gewissen arithmetischen Reihe des 2ten Ranges fortgehen; imgleichen wo die Zähler sowohl, als auch die Nenner in arithmetischen Reihen wachsen; jedoch muß der Rang der arithmetischen Reihe im Nenner wenigstens um 2 größer seyn als im Zähler. Da aber dergleichen Reihen keinen besondern Nutzen verschaffen, so wird es genug seyn nur einige wenige aus diesen mit ihrem summatorischen Gliede hier anzusetzen; als

I. Reihe $\frac{a}{b.(b+d)} + \frac{a}{(b+d)(b+2d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \text{rc.}$

allgemeines Glied $t = \frac{a}{[b+(n-1)d]\,(b+nd)}$

summat. Glied $s = \frac{na}{b(b+nd)}$

Setzet man nun $n = \infty$, so ist $s = \frac{a}{bd}$

Z. B. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots = 1.$

$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \ldots = \frac{1}{6}.$

II. Reihe $\frac{a}{b(b+d)(b+2d)} + \frac{a}{(b+d)(b+2d)(b+3d)} + \ldots$

$$t = \frac{a}{[b+(n-1)d]\,[b+nd]\,[b+(n+1)d]}$$

$$s = \frac{a(2b+d)n + adn^2}{2b[b+d]\,[b+nd]\,[b+(n+1)d]}$$

Setzet man $n = \infty$; so ist $s = \frac{ad\,\infty^2}{2b(b+d)\,d\infty . d\infty}$

$$= \frac{a}{2bd(b+d)}.$$

Z. B. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots = \frac{1}{4}$.

$\frac{3}{2.4.6} + \frac{3}{4.6.8} + \frac{3}{6.8.10} + \ldots = \frac{3}{32}$.

III. Reihe $\frac{a}{b(b+d)(b+2d)} + \frac{a+c}{(b+d)(b+2d)(b+3d)}$

$+ \frac{a+2c}{(b+2d)\ \ldots\ (b+4d)} +$ ꝛc.

$$t = \frac{a+(n-1)c}{[b+(n-1)d]\,[b+nd]\,[b+(n+1)d]}.$$

$$s = \frac{(2ab-bc+ad)n+(ad+bc)n^2}{2b[b+d][b+nd][b+(n+1)d]}$$

Setzet man $n = \infty$

so ist $s = \frac{(ad+bc)\infty^2}{2b(b+d).\,d\infty.\,d\infty} = \frac{ad+bc}{2b(b+d).\,d^2}$.

Z. B. $\frac{1}{1.3.5} + \frac{2}{3.5.7} + \frac{3}{5.7.9} + \frac{4}{7.9.11} + \ldots = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2.4.6} + \frac{3}{4.6.8} + \frac{5}{6.8.10} + \ldots\ldots = \frac{3}{32}$

IV. Reihe $\frac{a}{a+1} + \frac{a+d}{(a+1)(a+1+d)} + \frac{a+2d}{(a+1)(a+1+d)(a+1+2d)}$

$+ \frac{a+3d}{(a+1)(a+1+d)(a+1+2d)(a+1+3d)} + \ldots$

$$t = \frac{a+(n-1)d}{(a+1)(a+1+d)\ldots[a+1+(n-1)d]}$$

$$s = 1 - \frac{1}{(a+1)(a+1+d)\ldots[a+1+(n-1)d]}$$

Setzet man $n = \infty$; so ist $s = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$;

z. B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} + \ldots = 1$.

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3.5} + \frac{6}{3.5.7} + \frac{8}{3.5.7.9} + \ldots = 1$.

Die summatorischen Glieder zu den hier angeführten Reihen sind dadurch entdeckt worden, daß man verschiedene Funktionen von n, z. B. $\frac{An}{B+Cn}$, imgleichen $\frac{An+Bn^2}{C+Dn+En}$ u. s. w. für summatorische Glieder gewisser Reihen angesehen hat; darauf hat man in einer jeden solchen Funktion, z. B. in $\frac{An}{B+Cn}$, um die Summe von $n-1$ Gliedern zu erhalten, $n-1$ statt n gesetzet, und diesen letztern Werth $\frac{A(n-1)}{B+C(n-1)}$ von dem vorigen $\frac{An}{B+Cn}$ abgezogen; dadurch hat man vermög (§. 231.) das allgemeine Glied $= \frac{AB}{[B+Cn][B+C(n-1)]}$ derjenigen Reihe erhalten, welche mit dem angenommenen summatorischen Gliede $\frac{An}{B+Cn}$ zusammen gehöret. Da man endlich in diesem allgemeinen Gliede nacheinander 1, 2, 3, 4, 5 .... für n gesetzet hat, so hat man die aufeinander folgenden Glieder einer solchen Reihe erhalten.

Man kann überhaupt jede Funktion von n für ein summatorisches Glied von irgend einer Reihe ansehen, wozu sich nach (§. 231.) das allgemeine Glied, und sodann die Reihe selbst nebst ihrer Gestalt bestimmen läßt. Nur muß die Funktion so beschaffen seyn, daß das nach (§. 231.) daraus abgeleitete allgemeine Glied mit der angenommenen Funktion, für $n = 1$ einerley Werth habe. Z. B. wenn man $s = (A + Bn + Cn^2)D^n$ als das summatorische Glied einer gewissen Reihe ansehen wollte, so wäre das allgemeine Glied

$$t = (A + Bn + Cn^2)D^n - [A + B(n-1) + C(n-1)^2]\,D^{n-1};$$

und nun ist für $n = 1$ der Werth $s = (A + B + C)D$; hingegen $t = (A + B + C)D - A$; daher ist nicht $(A + Bn + Cn^2)D^n$, sondern $(A + Bn + Cn^2)D^n - A$ so beschaffen, daß letzteres für das summatorische Glied einer gewissen Reihe angesehen werden könne.

Anmerkung. Es ist sonderbar, daß alle bisher bekannten Kunstgriffe der Algebra nicht hinreichen folgende unendliche Reihe

$$\text{I.}\quad \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots.$$

oder überhaupt eine Reihe von der Form

$$\text{II.}\quad \frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \ldots$$

richtig zu summiren. Man sollte denken, weil diese Reihe blos aus den ungeraden Gliedern der Reihe

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+d)(b+2d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+3d)(b+4d)} + \ldots$$

besteht, deren Summe wir oben angegeben haben, daß sich

auch

auch die Summe dieser Reihe bestimmen lassen müsse, so wie z. B. die Summe der Reihe

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{bq^2} + \frac{a}{bq^4} + \frac{a}{bq^6} + \ldots.$$

als der ungeraden Glieder der Reihe

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{bq} + \frac{a}{bq^2} + \frac{a}{bq^3} + \frac{a}{bq^4} + \ldots..$$

sich angeben läßt. Allein es bleibt bey dem, wie schon gesagt worden, daß alle bisher bekannten Kunstgriffe der Algebra nicht hinreichen, dergleichen Reihen, wie I. und II. zu summiren, wenn nicht jedes Gliedes Nenner mit dem zweyten Faktor des vorhergehenden Nenners anfängt. Nur durch eine Annäherung kann man die Summe einer solchen Reihe bestimmen; besonders wenn man die Reihe in eine andere verwandelt, die sehr geschwind zusammenläuft, welches man bey unendlichen Reihen, die nicht schleunig genug abnehmen, jederzeit ins Werk zu stellen trachten muß; wir haben ein solches Beyspiel bey der Reihe

$$\log \text{nat}\, 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots$$ gesehen, die wir in folgende Reihe $\log \text{nat}\, 2 = 2.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots..\right)$ verwandelt haben, welche schon dergestalt abnimmt, daß man nur einige wenige Glieder 8 oder 9 entwickeln darf, um eine Annäherung zu der Summe aller Glieder dieser unendlichen Reihe zu erhalten, die bis auf den millionten Theil einer Einheit richtig ist.

§. 314.

Es ereignet sich zuweilen, daß nur einige wenige Glieder, als z. B. das 20te, 30te, 40te, 50te und 60te Glied einer Reihe gegeben werden, ohne zu wissen, zu welcher Gattung diese Reihe gehöre; und doch wird es dabey verlanget, daß man die übrigen zwischenliegenden Glieder ziemlich verläßlich bestimmen solle. Beym Bombenwerfen trägt sich dieses zu; es sey z. B. die unter einem nämlichen Erhöhungswinkel erreichte Weite mit 20 Loth Pulver = 80 Klafter, mit 30 Loth = 250, mit 40 Loth 420, mit 50 Loth = 550, und mit 60 Loth Pulver 650 Klafter; nun sollen aus diesen, durch einen richtigen Versuch gefundenen Wurfweiten unter dem nämlichen Erhöhungswinkel, bey dem nämlichen Mörser, die zu den verschiedenen Ladungen von 20 bis 60 Loth des nämlichen Pulvers zugehörigen Wurfweiten vom Lothe zu Lothe durch Rechnung bestimmet werden. Dieses kann auf folgende Art geschehen:

Da es einmal gewiß ist, daß die zu den verschiedenen Ladungen von 20 bis 60 Loth zugehörigen Wurfweiten eine zunehmende Reihe ausmachen, von der uns weder das Gesetz, noch sonst etwas ausser dem 20ten, 30ten, 40ten, 50ten, und 60ten Gliede bekannt ist; so setze man die zu n Lothen des nämlichen Pulvers unter dem nämlichen Erhöhungswinkel zugehörige Wurfweite

$$w = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5.$$

Um nun die Koeffizienten A, B, C, D, E zu bestimmen, setze man einmal $n = 20$, dann $n = 30$, 40, 50, und endlich $n = 60$; und da die Wurfweiten mit diesen Ladungen schon bekannt sind, so erhält man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
80 &= 20A + 400B + 8000C + 160000D + 3200000E\\
250 &= 30A + 900B + 27000C + 810000D + 24300000E\\
420 &= 40A + 1600B + 64000C + 2560000D + 102400000E\\
550 &= 50A + 2500B + 125000C + 6250000D + 312500000E\\
650 &= 60A + 3600B + 216000C + 12960000D + 777600000E
\end{aligned}$$

Aus

Aus diesen Gleichungen findet man $A = -\frac{6912000}{288000}$;
$B = \frac{679600}{288000}$; $C = -\frac{17660}{288000}$; $D = \frac{212}{288000}$; $E = -\frac{1}{288000}$

Es ist demnach die zu n Lothen gehörige Wurfweite

$$w = \frac{-6912000n + 679600n^2 - 17660n^3 + 212n^4 - n^5}{288000}$$

$$= \frac{(679600n^2 + 212n^4) - (6912000n + 17660n^3 + n^5)}{288000}$$

Setzet man nun in dieser Formel $n = 20, 30, 40, 50, 60$, so erhält man für die Wurfweiten die nämlichen Zahlen, die das angenommene Experiment gegeben hat; setzet man ferner in dieser Formel $n = 21, 22, 23 \ldots 59$, und reduziret alles gehörig, so erhält man die zu 21, 22, 23 ... 59 Lothen des nämlichen Pulvers und unter den nämlichen Erhöhungswinkel zugehörigen Wurfweiten w in Klaftern.

§. 315.

Wenn bey einer Reihe die aufeinander folgenden, in Zahlen gegebenen Glieder z, z^{I}, z^{II}, z^{III}, z^{IV}, z^{V}, z^{VI} .... so beschaffen sind, daß solche ohne merklichen Fehler als Glieder irgend einer arithmetischen Reihe eines höhern Ranges angesehen werden können (nämlich, daß die daraus abgeleiteten Differenzreihen immer um einen Rang niedrigere arithmetische Reihen werden, und endlich beynahe in Null übergehen); und wenn man da das erste Glied bey der ersten Differenzreihe mit Δz, bey der zweyten Differenzreihe mit $\Delta^2 z$, bey der dritten mit $\Delta^3 z$, bey der vierten mit $\Delta^4 z$ u. s. w. bezeichnet; so ist nachstehende Formel sehr brauchbar um zwischen z und z^{I} das an die $\frac{n}{m}$ te Stelle gehörige Glied $= Z$ einzuschalten.

Allgemeine Interpolationsformel.

$$Z = z + \frac{n}{m}.\Delta z - \frac{n(m-n)}{2m^2}.\Delta^2 z + \frac{n(m-n)(2m-n)}{2.3.m^3}.\Delta^3 z$$
$$- \frac{n(m-n)(2m-n)(3m-n)}{2.3.4.m^4}.\Delta^4 z \pm \ldots\ldots$$

Um den Gebrauch dieser Formel durch ein Beyspiel zu erläutern, stelle man sich vor, es wären die gemeinen Logarithmen mit 7 Dezimalstellen nicht weiter als bis 100 berechnet; und nun sollte log 94,63 mittelst der Interpolation (Einschaltung) berechnet werden ohne die Eigenschaften der Logarithmen zu kennen. Dieses kann auf folgende Art geschehen. Man setze hier $z = \log 94 = *9731279$; sodann ziehe man die bey 94, 95, 96, 97, 98, stehenden Logarithmen voneinander ab, jeden vorhergehenden vom nächst darauffolgenden, um die erste Differenzreihe zu erhalten; aus dieser ersten Differenzreihe bestimme man eben so durch die Subtraktion jedes vorhergehenden Gliedes vom nächst darauffolgenden die 2te Differenzreihe; und darauf eben so die 3te; so ist sodann $\Delta z = + 45957$, $\Delta^2 z = - 481$, $\Delta^3 z = + 10$, $\Delta^4 z = 0$; ferner setze man $\frac{n}{m} = 0,63$; nämlich $m = 100$ und $n = 63$; endlich substituire man alle diese Werthe in der angeführten Formel, so wird man $Z = \log 94,63$ erhalten, nämlich

$$\log 94,63 = *9731279 + 0,63 \times 45957$$
$$+ 0,116 \times 481 + 0,05 \times 10 = 1,9760288$$

Diese allgemeine Interpolationsformel läßt sich aus folgenden Gründen ableiten. Bey der angenommenen Reihe $z, z^{I}, z^{II}, z^{III}, z^{IV}, z^{V}, \ldots$ bezeichne man die Glieder

der 1ten Differenzreihe mit $\Delta z, \Delta z^{I}, \Delta z^{II}, \Delta z^{III} \ldots$
der 2ten = = = $\Delta^2 z, \Delta^2 z^{I}, \Delta^2 z^{II}, \Delta^2 z^{III} \ldots$
der 3ten = = = $\Delta^3 z, \Delta^3 z^{I}, \Delta^3 z^{II}, \Delta^3 z^{III} \ldots$
der 4ten = = = $\Delta^4 z, \Delta^4 z^{I}$ u. s. w.

so

so erhält man folgende Gleichungen:

$\Delta z = z^{I} - z;\ \Delta z^{I} = z^{II} - z^{I};\ \Delta z^{II} = z^{III} - z^{II};\ \Delta z^{III} = z^{IIII} - z^{III} \ldots$

$\Delta^2 z = \Delta z^{I} - \Delta z;\ \Delta^2 z^{I} = \Delta z^{II} - \Delta z^{I};\ \Delta^2 z^{II} = \Delta z^{III} - \Delta z^{II} \ldots$

$\Delta^3 z = \Delta^2 z^{I} - \Delta^2 z;\ \Delta^3 z^{I} = \Delta^2 z^{II} - \Delta^2 z^{I} \ldots$

$\Delta^4 z = \Delta^3 z^{I} - \Delta^3 z \ldots$

$\Delta^5 z =$ u. s. w.

Aus diesen Gleichungen folgen nachstehende Werthe für $z^{I}, z^{II}, z^{III} \ldots$, blos durch z und durch $\Delta z, \Delta^2 z, \Delta^3 z, \Delta^4 z \ldots$ ausgedrückt;

$$z^{I} = z + \Delta z$$
$$z^{II} = z + 2\Delta z + \Delta^2 z$$
$$z^{III} = z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$$
$$z^{IV} = z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z$$
$$z^{V} = z + 5\Delta z + 10\Delta^2 z + \text{u. s. w.}$$

Nun sind die Koeffizienten allhier mit jenen des binomischen Lehrsatzes einerley (§. 297.); es ist daher das $r$te Glied nach z in der vorgelegten Reihe, wenn man solches mit z^r bezeichnet, folgendermassen allgemein ausgedrückt;

$$z^r = z + r\Delta z + \frac{r(r-1)\Delta^2 z}{2} + \frac{r(r-1)(r-2)\Delta^3 z}{2 \cdot 3} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)\Delta^4 z}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

Setzet man endlich in dieser letzten Formel statt r den eigentlichen Bruch $\frac{n}{m}$; so erhält man für das an der $\frac{n}{m}$ ten Stelle zwischen z und z^{I} einzuschaltende Glied Z den obangeführten Werth, wo bey $\Delta z, \Delta^2 z, \Delta^3 z$ ꝛc. auf die Zeichen $+ -$ die gehörige Rücksicht zu nehmen ist.

Anmerkung. Wenn man $(n-1)$ statt r in der letzten Formel setzet, so erhält man nachstehenden Werth für das all=

allgemeine Glied = T einer jeden arithmetischen Reihe eines höhern Ranges

$$T = z + (n-1)\Delta z + \frac{(n-1)(n-2)\Delta^2 z}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^3 z}{2 \cdot 3} + \ldots$$

Wenn man endlich auch bey der nämlichen Reihe $z, z^{I}, z^{II}, z^{III} \ldots$ die Summe von 1 Gliede mit s^{I}, von 2 Gliedern mit s^{II}, von 3 Gliedern mit s^{III} u. s. w., und endlich die Summe von n Gliedern mit $s^n = S$ bezeichnet; so ist das summatorische Glied einer jeden arithmetischen Reihe eines höhern Ranges

$$S = nz + \frac{n(n-1)\Delta z}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 z}{2 \cdot 3} + \frac{n(-1)(n-2)(n-3)\Delta^2 z}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

weil $s^{I} = z$; $s^{II} = z + z^{I} = 2z + \Delta z$; $s^{III} = z + z^{I} + z^{II} = 3z + 3\Delta z + \Delta^2 z$; $s^{IV} = 4z + 6\Delta z + 4\Delta^2 z + \Delta^3 z$ ist u. s. w.

§. 316.

Bevor wir diese Abhandluug von den Reihen beschliessen, wollen wir noch das summatorische Gled s von der Reihe der $m$ten Potenzen der natürlichen Zahlen $1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots\ldots n^m$, entwickeln.

Um dieses zu finden, setze man, weil die $m$ten Potenzen der natürlichen Zahlen in einer arithmetischen Reihe des $m$ten Ranges fortgehen, das summatorische Glied.

$$s = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots$$

weil vermög (§. 247.) das summatorische Glied dieser Funktion gleich gesetzt werden kann.

Fer-

Ferner setze man in diesem summat. Gliede $n - 1$ statt n; so wird man die Summe s^1 von $(n - 1)$ Gliedern der vorgelegten Reihe haben; nämlich es ist die Summe von $(n - 1)$ Gliedern der vorgelegten Reihe

$$s^1 = A(n-1)^{m+1} + B(n-1)^m + C(n-1)^{m-1} + \ldots$$

Ziehet man nun die Summe s^1 von der Summe s ab, so muß das $n$te Glied zum Vorschein kommen (§. 231.); nämlich es ist $s - s^1 = n^m$; und daher

$$n^m = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots$$
$$-A(n-1)^{m+1} - B(n-1)^m - C(n-1)^{m-1} - D(n-1)^{m-2} -$$

Entwickelt man nun jedes Glied der zweyten Reihe nach (§. 299.), und bringet die ganze Gleichung auf Null; so findet man vermög (§. 283.) nach gehöriger Reduktion

$$A = \frac{1}{m+1};\ B = \frac{1}{2};\ C = \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{2};\ D = 0;$$

$$E = -\frac{1}{30} \cdot \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4};\ F = 0$$

$$G = +\frac{1}{42} \cdot \frac{m(m-1) \ldots (m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6};\ H = 0 \text{ u. s. w.}$$

Es ist demnach das summatorische Glied von der Reihe der $m$ten Potenz en der natürlichen Zahlen

$$s = \frac{1}{m+1} \cdot n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{2} \cdot n^{m-1}$$

$$- \frac{1}{30} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot n^{m-3}$$

$$+ \frac{1}{42} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot n^{m-5}$$

u. s. w.

Oder

Oder wenn man vom 3ten Gliede angefangen die vorstehenden Koeffizienten mit 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, 𝔉, 𝔊 . . . bezeichnet, so ist

$$s = \frac{1}{m+1} . n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m$$

$$+ 𝔄 . \frac{m . n^{m-1}}{2}$$

$$+ 𝔅 . \frac{m(m-1)(m-2)n^{m-3}}{2.3.4}$$

$$+ ℭ . \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)n^{m-5}}{2.3.4.5.6.}$$

$$+ 𝔇 . \frac{m(m-1) \ldots\ldots (m-6)n^{m-7}}{2.3.4.5.6.7.8}$$

$$+ 𝔈 . \frac{m(m-1) \ldots\ldots (m-8)n^{m-9}}{2.3 \ldots\ldots 9.10}$$

$+ 𝔉$. u. s. w.

wo $𝔄 = +\frac{1}{6}$, $𝔅 = -\frac{1}{30}$; $ℭ = +\frac{1}{42}$ ist.

Und nun kann 𝔇 auf folgende Art gefunden werden. Man setze in dieser Formel $m = 8$, und $n = 1$; so ist $s = 1 =$ dem ersten Gliede in der Reihe der 8ten Potenzen der natürlichen Zahlen; folglich ist, wenn man auch für 𝔄, 𝔅, und ℭ die schon bekannten Werthe setzet,

$$1 = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} . 4 - \tfrac{1}{30} . 14 + \tfrac{1}{42} . \tfrac{28}{3} + 𝔇$$

eine Gleichung, woraus $𝔇 = -\frac{1}{30}$ folget.

Und darauf kann auch 𝔈 bestimmet werden, wenn man für 𝔄, 𝔅, ℭ und 𝔇 die schon bekannten Werthe substituiret, und $m = 10$, $n = 1$ und $s = 1$ setzet, um eine Gleichung zu erhalten, woraus $𝔈 = +\frac{5}{66}$ folget. Sodann findet man auf die nämliche Art $𝔉 = -\frac{691}{2730}$, wenn man $m = 12$, $n = 1$, und $s = 1$ setzet u. s. w.

Aus

Aus dieser allgemeinen Formel folget das summatorische Glied für die natürlichen Quadratzahlen $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ wie im (§. 239.); für die Kubikzahlen $= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$ wie im (§. 246); für die Biquadratzahlen $= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$ u. s. w.

§. 317.

Setzet man nun in der allgemeinen Summenformel (§. 316.) die Zahl der Glieder $n = \infty$, so verschwinden in dieser Summenformel alle Glieder in Rücksicht des ersten; weil solches ein unendlich Großes eines höhern Ranges ist; folglich ist $s = \frac{1}{m+1} \cdot \infty^{m+1} =$ der Summe aller Glieder einer unendlichen Reihe der $m$ten Potenzen der natürlichen Zahlen.

Z. B. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots \infty^2 = \frac{1}{3}\infty^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots \infty^3 = \frac{1}{4}\infty^4$$

$$1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + \ldots \infty^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$$

Anmerkung. Wenn bey der Anwendung der Analysis des Unendlichen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben unendlich große Größen in Rücksicht einer andern unendlich großen Größe eines höhern Ranges, oder auch endliche Größen in Rücksicht einer unendlich Großen weggelassen werden; so ist da immer in einem solchen Gliede, auch im Nenner eine unendlich große Größe befindlich, so daß eigentlich bey der Anwendung jederzeit nur unendlich kleine Größen in Rücksicht endlicher weggelassen werden, wie es zum Theil schon aus (§. 310. bis 313.) zu ersehen ist. Z. B. im (§. 313. II.) ist

$$s = \frac{a(2b+d)n + adn^2}{2b[b+d][b+dn][b+(n+1)d]}$$

$$= \frac{ad + a(2b+d):n}{2b(b+d)(d+b:n)(d+d:n+b:n)}$$

wo offenbar für $n = \infty$ die Summe $s = \frac{ad}{2b(b+d) \, . \, d \, . \, d}$ $= \frac{a}{2bd(b+d)}$ wird. Auf solche Art könnten überhaupt in allen Fällen bey der Anwendung der Analysis die verschiedenen Ordnungen des Unendlichen vermieden werden, welches aber unnöthig wäre, da eben diese verschiedene Ordnungen bloß wegen Abkürzung der arithmetischen Arbeiten eingeführt sind. Nur muß man dabey immer die gehörige Aufmerksamkeit anwenden, damit die unendlich kleinen Größen in Rücksicht endlicher, oder endliche Größen in Rücksicht unendlich großer, und so auch unendlich große in Rücksicht anderer eines höhern Ranges nicht zu voreilig hinweggelassen werden. Wenn man z. B. bey einer arithmetischen Untersuchung findet, eine gesuchte Größe sey

$$z = \frac{a}{\infty} \times (1-2+3-4+5-6+7-8+-\ldots \text{ ohne Ende})$$

so ist $z = \frac{a}{\infty} \, . \, (1+3+5+7+9+11+\ldots)$

$$- \frac{a}{\infty} \, . \, (2+4+6+8+10+12+\ldots)$$

Nun ist die Summe der ersten Reihe $= \infty^2$, wenn man im (§. 234. N. 6.) $a = 1$, $d = 2$, und $n = \infty$ setzet; und die Summe der zweyten Reihe ist $= \infty + \infty^2$ wegen $a = 2$, $d = 2$, $n = \infty$; daher ist $z = \frac{a}{\infty} \, . \, \infty^2$ $- \frac{a}{\infty} \, . \, (\infty + \infty^2) = - a$. Würde man hier bey der Summirung der zweyten Reihe ∞ in Rücksicht ∞^2 gleich weglassen; so wäre sodann $z = \frac{a}{\infty} \, . \, 0$, und die Summe

der

der unendlichen Reihe $1-2+3-4+5-6+7-8+-\ldots$ wäre daher $=0$, welches nicht seyn kann; ∞ darf hier in Rücksicht ∞^2 nicht weggelassen werden, weil die zwey mit ∞^2 bezeichneten Größen bey der ersten und zweyten Summe, wegen der entgegen gesetzten Zeichen, einander aufheben.

Wenn man $(1+x)^{-2}$ nach (§. 299.) in eine unendliche Reihe auflöset, oder auch $(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ $= \frac{1}{1+2x+x^2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5-\ldots$ mittelst der Division entwickelt, und sodann $x=1$ setzet; so scheinet $(1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+-\ldots$ ohne Ende$)=\frac{1}{4}$ zu seyn. Allein es ist wohl zu merken, daß bey einer steigenden Reihe, in welche eine gewisse Größe, entweder durch die Division, oder sonst auf eine andere Art aufgelöset worden, jederzeit noch ein Rest zu der Summe aller Glieder hinzuzusetzen sey, um eine wahre Gleichheit zu erhalten. Nur bey einer fallenden unendlichen Reihe kann man sagen, daß sie der Größe vollkommen gleich sey, aus der sie entsteht; weil der Rest bey einer solchen Reihe immer kleiner wird, jemehr Glieder als man entwickelt, und endlich gar verschwindet, wenn die Reihe ins unendliche fortgesetzet wird

Man findet z. B. wenn $\frac{1}{3-1}$ durch die Division in die unendliche Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots\ldots$ aufgelöset wird, daß der Rest nach zwey Gliedern $=\frac{1}{2.(3)^2}$, nach drey Gledern $=\frac{1}{2.(3)^3}$, nach vier Gliedern $=\frac{1}{2.(3)^4}$, nach n Gliedern $=\frac{1}{2.(3)^n}$, und folglich nach ∞ Gliedern

dern $= \frac{1}{2 \cdot 3^{\infty}}$; nämlich man findet, daß dieser Rest in Rücksicht einer endlichen Größe $= 0$ sey. Bey den wachsenden Reihen ist das Gegentheil; da wird der Rest immer größer, und endlich $= \infty$, wenn die Reihe ohne Ende fortgesetzet wird.

Wenn man z. B. $\frac{1}{1+2}$ durch die Division in die unendliche Reihe $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + - ..$ auflöset; so findet man den Rest nach n Gliedern $= \frac{(-2)^n}{1+2}$ $= \frac{(-2)^n}{3}$; und folglich nach ∞ Gliedern $= \frac{(-2)^{\infty}}{3}$ nämlich unendlich groß. Eben dieses ist bey einer unendlichen Reihe von gleichen Gliedern zu beobachten; man findet z. B. das $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ sich durch die Division in folgende Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - ..$ auflösen lasse, von der man nur sagen kann, sie sey $= \frac{1}{2}$, wenn man den Rest hinzufüget, der unverändert, und immer $= + \frac{1}{2}$ oder $= - \frac{1}{2}$ ist; jenachdem man die Reihe entweder bey einer geraden oder bey einer ungeraden Anzahl der Glieder endiget.

§. 318.

Auch die Summe der $m$ten Potenzen einer jeden arithmetischen Reihe läßt sich nach den bisher angeführten Gründen bestimmen. Es ist nämlich von der Reihe

$$a^m + (a+b)^m + (a+2b)^m + (a+3b)^m + \ldots + z^m$$

wenn

wenn man die Summe aller Glieder $= s$ setzet,

$$s = \frac{z^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)b} + \tfrac{1}{2}(z^m + a^m)$$
$$+ \mathfrak{A} \cdot \frac{mb}{2}(z^{m-1} - a^{m-1})$$
$$+ \mathfrak{B} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{2 \cdot 3 \cdot 4}(z^{m-3} - a^{m-3})$$
$$+ \mathfrak{C} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-4)b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}(z^{m-5} - a^{m-5}$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

wo die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ꝛc. (die sogenannten Bernoullischen Zahlen) die nämlichen Werthe haben, wie im (§. 316.), nämlich $\mathfrak{A} = +\frac{1}{6}$, $\mathfrak{B} = -\frac{1}{30}$, $\mathfrak{C} = +\frac{1}{42}$, $\mathfrak{D} = -\frac{1}{30}$, $\mathfrak{E} = +\frac{5}{66}$, $\mathfrak{F} = -\frac{691}{2730}$, $\mathfrak{G} = +\frac{7}{6}$, $\mathfrak{H} = -\frac{3617}{510}$. u. s. w.

1) Denn wenn man das erste Glied der angeführten arithmetischen Reihe mit A, das 2te mit B, das 3te mit C, das 4te mit D, und das 5te $(a+4b)$, welches wir hier bey der Erwägung für das letzte annehmen wollen, mit z bezeichnet; so ist vermög (§. 299.)

$$a^m = A^m$$
$$(a+b)^m = (A+b)^m = A^m + mA^{m-1}b$$
$$+\tfrac{1}{2}m(m-1)A^{m-2}b^2 + \tfrac{1}{6}m(m-1).(m-2)A^{m-3}b^3 + \ldots = B^m$$
$$(a+2b)^m = (B+b)^m = B^m + mB^{m-1}b$$
$$+\tfrac{1}{2}m(m-1)B^{m-2}b^2 + \tfrac{1}{6}m(m-1).(m-2)B^{m-3}b^3 + \ldots = C^m$$
$$(a+3b)^m = (C+b)^m = C^m + mC^{m-1}b$$
$$+\tfrac{1}{2}m(m-1)C^{m-2}b^2 + \tfrac{1}{6}m(m-1).(m-2)C^{m-3}b^3 + \ldots = D^m$$
$$(a+4b)^m = (D+b)^m = D^m + mD^{m-1}b$$
$$+\tfrac{1}{2}m(m-1)D^{m-2}b^2 + \tfrac{1}{6}m(m-1).(m-2)C^{m-3}b^3 + . = z^m$$

2) Daraus folgt, wenn man für D^m, C^m, B^m, A^m die gleichgiltigen Werthe setzet,

$$
\begin{aligned}
z^m = {} & mD^{m-1}b + \tfrac{1}{2}m(m-1)D^{m-2}b^2 + \ldots \\
& + mC^{m-1}b + \tfrac{1}{2}m(m-1)C^{m-2}b^2 + \ldots \\
& + mB^{m-1}b + \tfrac{1}{2}m(m-1)B^{m-2}b^2 + \ldots \\
& + mA^{m-1}b + \tfrac{1}{2}m(m-1)A^{m-2}b^2 + \ldots \\
& + a^m
\end{aligned}
$$

3) Und ferner, wenn man $(m+1)$ statt m in N. 2. setzet,

$$
\begin{aligned}
\frac{z^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)b} = {} & A^m + B^m + C^m + D^m + z^m - z^m \\
& + \tfrac{1}{2}mb(A^{m-1} + B^{m-1} + D^{m-1} + z^{m-1} - z^{m-1}) \\
& + \tfrac{1}{6}m(m-1)b^2(A^{m-2} + \ldots\ldots - z^{m-2}) \\
& + \tfrac{1}{24}m(m-1)(m-2)b^3(A^{m-3} + \ldots\ldots) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

4) Nun bezeichne man die Summe der $m$ten Potenzen aller Glieder mit S^m, die Summe der $(m-1)$ten Potenzen mit S^{m-1}, der $(m-2)$ten Potenzen mit S^{m-2} u. s. w.; so folget aus N. 3.

$$
\begin{aligned}
S^m = {} & \frac{z^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)b} + z^m \\
& + \tfrac{1}{2}mbz^{m-1} - \tfrac{1}{2}mbS^{m-1} \\
& + \tfrac{1}{6}m(m-1)b^2z^{m-2} - \tfrac{1}{6}m(m-1)b^2S^{m-2} \\
& + \tfrac{1}{24}m(m-1)(m-2)b^2z^{m-3} - \ldots
\end{aligned}
$$

5) Jetzt setze man $(m-1)$, sodann $(m-2)$, ferner $(m-4)$, $(m-6)$ u. s. f. statt m in N. 4.; so wird man Summenformeln S^{m-1}, S^{m-2}, S^{m-4} für die $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-4)$ten Potenzen erhalten; darauf muß man für S^{m-1} in N. 4. einen solchen Werth substituiren; dadurch

durch wird dort S^{m-1} weggeschaffet werden. Sodann wird in dieser letztlich erhaltenen Summenformel statt S^{m-2} der hier bemerkte gleiche Werth substituiret u. s. w. Setzet man nun auf diese Art die Arbeit fort, so wird allmählig die obangeführte Summenformel zum Vorschein kommen.

§. 319.

Nimmt man im (§. 318.) den Exponenten m negativ, und gedenkt die Reihe ohne Ende fortgesetzt; so erhält man von nachstehender unendlichen Reihe

$$\frac{1}{a^m}+\frac{1}{(a+b)^m}+\frac{1}{(a+2b)^m}+\frac{1}{(a+3b)^m}+\ldots.$$

die Summe aller Glieder

$$s=\frac{1}{(m-1)a^{m-1}b}+\frac{1}{2a^m}+\frac{1}{6}\cdot\frac{mb}{2a^{m+1}}$$
$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)b^3}{2.3.4.a^{m+3}}+\frac{1}{42}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+4)b^5}{2.3.4.5.6a^{m+5}}$$
$$-\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots$$

weil die Glieder, wo $\frac{1}{z^{m-1}}$, $\frac{1}{z^m}$, $\frac{1}{z^{m+1}}$ .... vorkommen, als unendlich kleine Größen verschwinden.

Diese angeführte Summenformel läuft sehr schnell zusammen, sobald a beträchtlich größer ist als b, welches in einem jeden Falle sehr leicht erhalten wird, wenn man einige Glieder der zu summirenden Reihe vorher durch die Addition zusammenzählet. Es sey z. B. die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{14^2}+\ldots$$

zu summiren; so findet man durch die blosse Addition die Summe der erstern vier Glieder $= 0{,}355903$, und sodann mittelst der angeführten Formel die Summe aller übrigen

 Glie-

Glieder = 0,055328, wenn man $a = 10$, $b = 2$, $m = 2$ setzet, und nur fünf Glieder der angeführten Summenformel entwickelt. Es ist daher die Summe der vorgelegten unendlichen Reihe = 0,355903 + 0,055328 = 0,411231 ...

Es ist leicht einzusehen, daß man von einer solchen Reihe auch eine bestimmte Anzahl der Glieder, z. B. die erstern 1000 summiren könne; denn wenn man zuerst die Summe aller Glieder, und sodann die Summe vom 1001ten Gliede angefangen, mittelst der angeführten Formel suchet; so wird deren Differenz die Summe der erstern 1000 Glieder seyn.

Siebente Vorlesung.

Von den höheren Gleichungen.

Von den Eigenschaften und der Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen.

§. 320.

Was eine verwickelte höhere Gleichung sey, ist schon oben (§. 213.) gesagt worden; nur kömmt hier noch anzumerken, daß eine verwickelte höhere Gleichung, in welcher alle Potenzen der unbekannten Größe, von der ersten bis zur höchsten anzutreffen sind, eine vollständige höhere Gleichung genennet wird. Fehlet hingegen in der Gleichung irgend eine Potenz von der unbekannten Größe, so ist es eine unvollständige höhere Gleichung. So ist z. B. $x^3 - 4x^2 + 3x = 12$ eine vollständige kubische Gleichung; hingegen ist $x^4 - 5x^3 + 25x = 125$ eine unvollständige Gleichung des 4ten Grades; weil darinn die 2te Potenz der unbekannten Größe abgehet.

§. 321.

Das erste, was bey der Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen zu beobachten kömmt, ist, daß man selbe ordne; das heißt:

1) Daß man alle Glieder der Gleichung auf eine Seite schaffe, damit sich auf der andern bloß 0 befindet; nämlich daß die Gleichung auf 0 gebracht werde.

2) Daß man die Glieder der Gleichung also stelle, daß in dem ersten Gliede die höchste Potenz der unbekannten Größe ohne Nenner und Koeffizienten mit dem positiven Zeichen sich befinde.

3) Daß in den folgenden Gliedern die immer um eine Einheit niedrigeren Potenzen der unbekannten Größe mit ihren Zeichen und Koeffizienten folgen; und daß im letzten Gliede sich die unbekannte Größe nicht mehr befindet; denn sonst könnte die ganze Gleichung durch selbe dividiret werden, wodurch die Gleichung um einen Grad vermindert wird.

4) Daß bey einer unvollständigen höheren Gleichung die Stellen, wo die Glieder der abgängigen Potenzen der unbekannten Größe hingehören, mit einem Zeichen z. B. mit einem Sternchen * besetzet werden.

5) Sollten sich in der Gleichung Glieder befinden, worinn die unbekannte Größe mit einem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten behaftet ist; so schaffe man diese Glieder auf die eine, und alle andere rationalen Glieder auf die andere Seite des Gleichheitszeichen; sodann erhebe man beyde Theile der Gleichung zur Potenz des Wurzelexponenten; dadurch werden die Wurzelzeichen, oder gebrochenen Exponenten aus der Gleichung fortgeschaffet, wo sodann dieselbe nach dem erst Gesagten geordnet werden kann.

Beyspiele.

I. Die Gleichung $\frac{4x^2 - 2x^3}{3} = 8 - 5x$ geordnet

giebt $x^3 - 2x^2 - \frac{15}{2}x + 12 = 0$

II. Die Gleichung $100 - 20x^2 = \frac{500}{x} - 4x^3$ geordnet

giebt $x^4 - 5x^3 \; * + 25x - 125 = 0$

Da

Da nämlich hier die zweyte Potenz von x abgehet, so wird die Stelle mit einem Sternchen bezeichnet.

III. Wäre die Gleichung $10x - \sqrt{12x} = 2x^2$ zu ordnen,
so ist $10x - 2x^2 = \sqrt{12x}$
und $100x^2 - 40x^3 + 4x^4 = 12x$ (§. 137. N. 1.)
endlich $x^3 - 10x^2 + 25x - 3 = 0$

IV. Imgleichen es sey zu ordnen $2 - \sqrt{3x} = \sqrt[3]{2x^2}$;
so ist $8 - 12\sqrt{3x} + 18x + \sqrt{27x^3} = 2x^2$,
und $8 + 18x - 2x^2 = 12\sqrt{3x} - \sqrt{27x^3}$,
ferner $64+288x+292x^2-72x^3+4x^4=432x-216x^2+27x^3$
endlich $x^4 - \frac{99}{4}x^3 + 127x^2 - 36x + 16 = 0$,

Es kann demnach jede geordnete höhere Gleichung durch die Formel

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + k = 0$$

vorgestellet werden. So ist im Beyspiele I. wenn man es mit dieser Formel vergleichet, $m = 3$, $a = -2$, $b = -\frac{15}{2}$, $c, d, e \ldots = 0$, und $k = 12$. Vergleicht man hingegen das Beyspiel II. mit dieser Formel; so ist $m = 4$, $a = -5$, $b = 0$, $c = 25$, $d, e, f \ldots\ldots = 0$, und $k = -125$.

§. 322.

Derjenige Werth, welchen man in einer geordneten höheren Gleichung statt der unbekannten Größe setzen kann, damit sich alle Glieder wechselweise tilgen, und $= 0$ werden, wird eine **Wurzel der Gleichung** genennt; so ist z. B. in der Gleichung $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$, eine Wurzel $= 3$; weil 3 für x in der Gleichung gesetzt richtig 0 zum Vorschein bringet. Eben so sind auch die Zahlen 7 und -1, Wurzeln dieser Gleichung, weil diese Zahlen statt x gesetzt, ebenfalls der Gleichung ein Genügen leisten. Man sieht hieraus, daß eine höhere Gleichung mehr als eine Wurzel haben könne. Wie viel aber derley Wurzeln vorhanden seyn müssen, und wie solche gefunden werden können, wird erst weiter unten gezeiget werden.

§. 323.

Wenn man eine einfache Gleichung, die auf Null gebracht ist, z. B. $x - a = 0$ mit einem binomischen Faktor von der Form $(x - b)$ multipliziret; so erhält man

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ \times\ \underline{x - b \qquad} \\ \left.\begin{array}{l} x^2 - a \\ \quad\;\, - b \end{array}\right\} x + ab = 0 \end{array}$$

eine quadratische Gleichung, worinn sowohl a, als auch b die Wurzel seyn kann; weil jedes für x gesetzt der Gleichung ein Genügen leistet.

Multipliziret man diese erhaltene Gleichung abermal mit einem binomischen Faktor $x - c$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - a \\ \quad\;\, - b \\ \quad\;\, - c \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + ab \\ + ac \\ + bc \end{array}\right\} x - abc = 0$$

eine kubische Gleichung, wovon a, oder b, oder auch c die Wurzel seyn kann.

Multipliziret man diese Gleichung wieder mit $x - d$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - a \\ \quad\;\, - b \\ \quad\;\, - c \\ \quad\;\, - d \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l} + ab \\ + ac \\ + ad \\ + bc \\ + bd \\ + cd \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} - abc \\ - abd \\ - acd \\ - bcd \end{array}\right\} x + abcd = 0$$

eine vollständige Gleichung des 4ten Grades, wovon a, b, c, d die Wurzeln sind; nämlich $x = a$, oder $x = b$, oder $x = c$, oder endlich $x = d$.

Bey=

Beyspiele.

I. $(x-3)(x-5)(x-6)(x+10)=0$
giebt $x^4-4x^3-77x^2+540x-900=0$, wovon $3, 5, 6, -10$ die Wurzeln sind.

II. $(x+3)(x+6)(x-9)=0$ giebt
$x^3 * -63x-162=0$, wovon $-3, -6, +9$, die Wurzeln sind.

III. $(x+\sqrt{-3})(x-4)(x-\sqrt{-3})=0$ giebt
$x^3-4x^2+3x-12=10$, wovon $4, \sqrt{-3}$, und $-\sqrt{-3}$ die Wurzeln sind.

IV. $(x-2+\sqrt{5})(x+1)(x-4)(x-2)(x-2-\sqrt{5})=0$ giebt
$x^5-9x^4+21x^3+5x^2-34x-8=0$, wovon $2-\sqrt{5}$, $-1, +4, +2, 2+\sqrt{5}$ die Wurzeln sind.

§. 324.

Man kann sich daher bey jeder geordneten höheren Gleichung vorstellen, daß solche aus so vielen binomischen Faktoren durch die Multiplikation zusammengesetzt sey, als der höchste Exponent in der Gleichung Einheiten enthält, und wo der bekannte Theil eines jeden binomischen Faktors mit verändertem Zeichen genommen, eine Wurzel der Gleichung ist. Betrachtet man ferner aufmerksam die im (§. 323.) angeführten, und mehr dergleichen durch die Multiplikation verschiedener Faktoren zusammengesetzte geordnete höhere Gleichungen; so wird man dabey sehr leicht folgende Eigenschaften entdecken.

1) Jede höhere Gleichung hat so viele Wurzeln, als der höchste Exponent Einheiten enthält. Unter diesen Wurzeln können einige positiv, andere negativ; einige rational, andere irrational; einige wirklich oder möglich, andere nur eingebildet oder unmöglich seyn. Auch können einige dieser Wurzeln einander vollkommen gleich seyn.

2) Ist einmal eine Wurzel der Gleichung bekannt; so muß sich die Gleichung durch ein Binomium, wovon die un-

bekannte Größe x der erste Theil, und die bekannte Wurzel mit verkehrtem Zeichen der andere Theil ist, genau dividiren lassen, und der Quotient ist abermal $= 0$; und man erhält dadurch eine um einen Grad niedrigere, geordnete höhere Gleichung.

3) In jeder geordneten höheren Gleichung ist der Koeffizient des zweyten Gliedes gleich der Summe aller Wurzeln, aber mit entgegengesetzten Zeichen; fehlet demnach das zweyte Glied in der Gleichung, wie im Beyspiele III. (§. 323.), so muß die Summe der positiven der Summe der negativen Wurzeln gleich seyn.

4) Der Koeffizient des dritten Gliedes ist gleich der Summe der Produkte aus jeden zwey und zwey Wurzeln mit ihren zugehörigen Zeichen; und der Koeffizient des vierten Gliedes ist gleich der Summe der Produkte aus jeder Verbindung der Wurzeln zu dreyen, aber mit verkehrtem Zeichen u. s. w.

5) Das letzte Glied endlich ist das Produkt aus allen Wurzeln, und hat das zugehörige Zeichen, wenn der höchste Exponent der unbekannten Größe eine gerade Zahl ist; im Gegentheil hat es das entgegengesetzte Zeichen.

6) Wenn eine geordnete höhere Gleichung keine unmöglichen Wurzeln enthält; so kann die unbekannte Größe so viele positive Werthe, als Abwechslungen der Zeichen $+ -$ oder $- +$, und eben so viele negative Werthe haben, als Folgen der Zeichen $+ +$, oder $- -$ in der Gleichung vorhanden sind.

8) Wenn in einer geordneten Gleichung unmögliche Wurzeln sich befinden, wie im Beyspiele IV.; so müssen solche in gerader Anzahl darinnen befindlich, und allzeit zwey davon nur bloß in den Zeichen $+$ und $-$ verschieden seyn. Das erste erhellet daraus, weil eine ungerade Anzahl unmöglicher Größen gar kein mögliches Produkt geben kann; enthielte demnach eine Gleichung eine ungerade Anzahl unmöglicher Wurzeln; so müßte das letzte Glied der Gleichung, als das Produkt von allen Wurzeln, auch eine unmögliche Größe

seyn,

seyn, welches wider unsere Voraussetzung ist, da wir die Gleichung schon geordnet annehmen. Das zweyte ist ebenfalls leicht einzusehen; denn, würden nicht immer zwey und zwey unmögliche Wurzeln einander gleich, und nur in den Zeichen verschieden seyn; so müßten sie in dem zweyten Gliede der Gleichung erscheinen, welches vermög N. 2. die Summe aller Wurzeln enthält; und dann wäre die Gleichung wieder nicht geordnet.

8) Jede geordnete höhere Gleichung, deren höchster Exponent eine ungerade Zahl ist, enthält demnach wenigstens eine mögliche Wurzel; die übrigen können theils möglich, theils unmöglich seyn. Hingegen kann eine geordnete Gleichung, deren höchster Exponent eine gerade Zahl ist, entweder lauter unmögliche, oder lauter mögliche, oder auch theils mögliche, theils unmögliche Wurzeln enthalten, unter der Bedingung in N. 7.

§. 325.

Es ist daher sehr leicht zu untersuchen, ob eine geordnete höhere Gleichung, deren Koeffizienten und letztes Glied ganze Zahlen sind, rationale Wurzeln enthalte; weil dergleichen Wurzeln unter den Faktoren des letzten Gliedes enthalten seyn müssen (§. 324. N. 5.). Man zerlege demnach das letzte Glied in seine Faktoren (§. 70.), und substituire einen Faktor nach dem andern statt der unbekannten Größe in der Gleichung; und zwar können alle Faktoren positiv genommen werden, wenn man nach (§. 324. N. 6.) vermuthet, daß alle Wurzeln der Gleichung positiv seyn müssen. Sollte man aber vermuthen, daß alle Wurzeln negativ seyn müssen; so können die Faktoren negativ statt x in der Gleichung substituiret werden; hingegen müssen alle diese Faktoren positiv und auch negativ statt x genommen werden, wenn die Gleichung positive und negative Wurzeln haben kann. Soll nun die Gleichung rationale Wurzeln enthalten, so müssen solche unter diesen Faktoren enthalten seyn; und

zwar

zwar diejenigen Faktoren, welche statt der unbekannten Größe in der Gleichung gesetzt Null zum Vorschein bringen, sind die gesuchten rationalen Wurzeln.

Beyspiele.

I. Es sollen die rationalen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

gefunden werden. Die Faktoren des letzten Gliedes 12, sind 1, 2, 3, 4, 6, 12; und weil man hier, wegen der Abwechslung aller Zeichen, lauter positive Wurzeln vermuthet (§. 324. N. 6.); so versuche man diese Faktoren positiv genommen, einen um den andern in der Gleichung statt x zu substituiren; und man findet, daß 1, 2 und 6 der Gleichung ein Genügen leisten. Es ist daher $x = 1$, oder $x = 2$, oder auch $x = 6$.

II. Es sollen die rationalen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 10x^2 + 31x + 30 = 0$$

gefunden werden. Die Faktoren des letzten Gliedes 30, sind 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Da aber hier wegen einerley Zeichen lauter negative Wurzeln vermuthet werden; so versuche man diese Faktoren negativ genommen, in der Gleichung zu substituiren; und man findet, daß -2, -3 und -5 die Wurzeln der Gleichung sind.

III. Es sollen die rationalen Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 18x^3 * - 274x + 255 = 0$$

gefunden werden. Die Faktoren des letzten Gliedes sind hier 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255; und da sich hier, wegen der vorhandenen Zeichen und wegen der Abwechslungen derselben, positive und negative Wurzeln vermuthen lassen; so müssen diese Faktoren, sowohl positiv als negativ, versuchet werden; und man findet, daß $+1$, $+3$, -5, -17 die gesuchten Wurzeln sind.

Es

Es kann hier noch erinnert werden, daß, wenn eine Gleichung lauter positive, oder lauter negative Wurzeln hat, man nur jene Faktoren des letzten Gliedes statt x in der Gleichung substituiren darf, welche den Koeffizienten des zweyten Gliedes nicht übersteigen; weil vermög (§. 324. N. 3.) das zweyte Glied die Summe aus allen Wurzeln ist. Z. B. in der Gleichung $x^3 - 13x^2 + 54x - 72 = 0$ sind die Faktoren des letzten Gliedes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Allein weil die Gleichung lauter positive Wurzeln vermuthen läßt; so können die Faktoren 18, 24, 36, 72 ausgelassen werden, weil sie den Koeffizienten 13 des zweyten Gliedes übersteigen.

§. 326.

Sollte man durch dieses Verfahren nur einige, aber nicht so viele Wurzeln gefunden haben, als der Gleichung vermög (§. 324. N. 1.) zukommen; so ist es ein Zeichen, daß die übrigen Wurzeln entweder irrational, oder unmöglich, oder auch daß solche einigen von den schon gefundenen Wurzeln vollkommen gleich seyn. Mann kann aber sodann die Gleichung um so viele Grade vermindern, als schon Wurzeln gefunden sind, wenn man selbe (§. 324. N. 2.) durch jedes Binomium dividiret, wovon der erste Theil die unbekannte Größe x, und der andere schon eine bekannte Wurzel mit geändertem Zeichen ist. Man erhält sodann eine Gleichung von einem so vielten Grade, als noch Wurzeln unbekannt sind. Wären nur noch zwey Wurzeln zu suchen, so geräth man dadurch auf eine quadratische Gleichung, wovon sich nach (§. 215.) die zwey übrigen Wurzeln finden lassen. Sollten aber noch mehr als 2 Wurzeln unbekannt verbleiben; so versuche man abermal die schon gefundenen Wurzeln in der neuen erhaltenen Gleichung zu substituiren, um zu sehen, ob nicht die vorgelegte Wurzel einige gleiche Wurzeln enthalte.

Beyspiele.

I. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0$$

gefunden werden. Die Faktoren des letzten Gliedes sind 1, 2, 3, 4, 6, 12; man findet aber unter allen diesen Faktoren sowohl positiv als negativ genommen, keinen andern, als $+4$, welcher der Gleichung ein Genügen leistet. Man dividire deswegen die vorgelegte Gleichung $x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0$ durch $x - 4$; und man findet nach geschehener Division $x^2 + 3 = 0$. Hieraus ist $x = \pm\sqrt{-3}$. Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind demnach $4, +\sqrt{-3}$, und $-\sqrt{-3}$.

II. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 34x - 8 = 0$$

gefunden werden. Hier sind die Faktoren des letzten Gliedes 1, 2, 4, 8, wovon -1, $+2$, $+4$ der Gleichung ein Genügen leisten; und also sind noch 2 Wurzeln abgängig. Man multiplizire demnach die drey Binomien $x + 1$, $x - 2$, $x - 4$ miteinander; das Produkt hiervon ist $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$, und die vorgelegte Gleichung dadurch dividirt giebt $x^2 - 4x - 1 = 0$. Hieraus ist nach (§. 215.) $x = 2 + \sqrt{5}$ oder $x = 2 - \sqrt{5}$.

III. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 25x^2 + 8x + 60 = 0$$

gefunden werden. Die Faktoren des letzten Gliedes sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60; von diesen findet man, daß nur $+2$ und -3 der Gleichung ein Genügen leisten; dividirt man nun die vorgelegte Gleichung durch $x^2 + x - 6$, als durch das Produkt der Binomien $x - 2$ und $x + 3$; so erhält man $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0$, welches noch eine kubische Gleichung ist.

Ver=

Versuchet man nun die schon gefundenen Wurzeln statt x in dieser erhaltenen Gleichung zu setzen, und zwar nur diejenigen, welche unter den Faktoren des letzten Gliedes 10 dieser letzten Gleichung anzutreffen sind; so findet man, daß $+2$ abermal eine Wurzel ist; dividiret man daher diese Gleichung wieder durch $x-2$, so erhält man $x^2+4x+5=0$; woraus (§. 215.) gefunden wird $x=-2+\sqrt{-1}$, oder $x=-2-\sqrt{-1}$. Die Gleichung hat demnach drey rationale Wurzeln, wovon zwey einander gleich sind, und zwey unmögliche Wurzeln.

Anmerkung. Das bisher von (§. 325.) Angeführte findet auch eine nützliche Anwendung, um aus einer zusammengesetzten algebraischen Größe, worinn verschiedene Potenzen eines nämlichen Buchstabens sich befinden, die mehrnamigen Faktoren zu bestimmen, und zwar auf folgende Art:

1) Man dividive alle Glieder der vorgegebenen Größe durch jene einnamigen Faktoren, welche allen Gattungen gemein sind.

2) Den übrigen mehrnamigen Faktor, worinnen die Glieder keinen Buchstaben mehr gemein haben, setze man $=0$; nämlich man sehe selben für eine höhere Gleichung an, woraus diejenige Größe, die in verschiedenen Potenzen erscheint, gesucht werden soll; daher man nur einen solchen algebraischen Ausdruck, als eine höhere Gleichung zu ordnen, und überhaupt, wie bisher gesagt worden, zu verfahren hat.

Beyspiele.

I. Es soll die Größe $m^4-6m^3+11m^2-6m$ in Faktoren zerlegt werden. Man dividire jedes Glied durch m, und setze sodann $m^3-6m^2+11m-6=0$. Die Faktoren des letzten Gliedes 6 sind 1, 2, 3, 6, und man findet, daß $m=1$ der Gleichung ein Genügen leistet; daher ist $m-1$ ein Faktor. Dividiret man nun durch $m-1$, so erhält man $m^2 - 5m + 6 = 0$; woraus $m = 2$, oder auch $m = 3$ folget. Die Faktoren der vorgelegten Größe sind demnach m, $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$.

II. Es soll $x^3 + 2x^2 + 2x^2y + xy + xy^2 - 3x - y^2 - 3y$ in Faktoren zerlegt werden.

Das letzte Glied, in welchem sich kein x befindet, ist $-(y^2 + 3y)$; die Faktoren hiervon sind y, und $y + 3$; und man findet, daß $-y$ statt x in der Größe gesetzt, richtig 0 zum Vorschein bringet; mithin ist $x + y$ ein Faktor. Dividiret man nun die vorgelegte Größe durch $(x+y)$, so erhält man $x^2 + xy + 2x - y - 3$; dieses $= 0$ gesetzt, giebt nach (§. 215.) $x = 1$, oder auch $x = -(y+3)$. Es sind demnach die gesuchten Faktoren $x + y$, $x - 1$, und $x + y + 3$.

§. 327.

Wenn bey einer geordneten Gleichung keiner aus den Faktoren des letzten Gliedes so beschaffen ist, daß er mit dem Zeichen + oder − genommen der Gleichung ein Genügen leistet; so kann man sicher schließen, daß die Gleichung keine rationale Wurzel enthalte. Würde man dem ungeachtet mögliche Wurzeln in der Gleichung vermuthen; so müssen selbe ganz gewiß irrationale Größen seyn, die man am füglichsten durch eine Annäherung bestimmen kann. Bevor wir aber diese Annäherung erörtern, wollen wir noch von einigen Verwandlungen, welche mit den Gleichungen vorgenommen werden können, eine Meldung machen.

§. 328.

Jede geordnete höhere Gleichung kann in eine andere dergestalt verwandelt werden, daß alle ihre Wurzeln um eine beliebige Größe vermehret, oder vermindert sind. So z. B. wird die Gleichung $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$, deren Wurzeln 4, -1, -2 sind, in eine andere verwandelt, deren Wurzeln um 3 größer sind,

wenn

wenn $x + 3 = y$; nämlich $x = y - 3$ gesetzet wird; denn es ist alsdann

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -\ x^2 &=& \quad - y^2 + 6y - 9 \\ -\ 10x &=& \qquad\quad - 10y + 30 \\ -\ 8 &=& \qquad\qquad\quad - 8 \\ \hline && y^3 - 10y^2 + 23y - 14 = 0 \end{array}$$

die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln 7, 2, 1 um 3 größer sind, als die vorhergehenden.

Wollte man nun diese letzte Gleichung in eine andere dergestalt verwandeln, daß jede ihrer Wurzeln um 10 vermindert wäre; so setze man $y - 10 = z$, nämlich $y = z + 10$: alsdann ist

$$\begin{array}{rcl} y^3 &=& z^3 + 30z^2 + 300z + 1000 \\ -\ 10y^2 &=& \quad - 10z^2 - 200z - 1000 \\ +\ 23y &=& \qquad\quad + 23z + 230 \\ -\ 14 &=& \qquad\qquad\quad - 14 \\ \hline \end{array}$$

$z^3 + 20z^2 + 123z + 216 = 0$ die verwandelte Gleichung, von deren Wurzeln -3, -8, -9, jede um 10 kleiner ist, als die vorhergehenden.

Nun setze man auch in der allgemeinen Formel

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + k = 0$$

$y + p$ statt x; so erhält man

$$\left.\begin{array}{rcl} x^m &=& y^m + mpy^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1.2}p^2y^{m-2} + \ldots + p^m \\ +ax^{m-1} &=& ay^{m-1} + a(m-1)py^{m-2} + . + ap^{m-1} \\ +bx^{m-2} &=& by^{m-2} + . + bp^{m-2} \\ + & \ldots & \ldots \\ +k &=& +k \end{array}\right\} = 0$$

für die verwandelte Gleichung, in der jede Wurzel um p größer, oder kleiner ist als in der vorhergehenden, je nachdem p negativ oder positiv genommen wird.

§. 329.

Diese letzte Verwandlung bietet uns ein Mittel dar, aus jeder geordneten Gleichung das zweyte Glied hinweg zu schaffen, welches in folgenden besteht. **Man setze statt der unbekannten Größe x in der gegebenen Gleichung eine andere unbekannte Größe y, zu welcher der Koeffizient des zweyten Gliedes getheilt durch den höchsten Exponenten mit entgegengesetztem Zeichen hinzugefüget ist.** Denn, wenn in unserer verwandelten Gleichung, die wir aus der allgemeinen Formel hergeleitet haben, das zweyte Glied verschwinden soll; so muß $mpy^{m-1} + ay^{m-1} = 0$, oder $mp + a = 0$, nämlich $p = -\frac{a}{m}$ seyn; und folglich muß $x = y - \frac{a}{m}$ gesetzet werden.

Sollte man demnach aus folgender Gleichung
$x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$
das zweyte Glied hinwegschaffen,
so setze man $x = y + \frac{12}{3} = y + 4$; denn es ist sodann

$$\begin{array}{rcrrrr}
x^3 & = & y^3 + & 12y^2 + & 48y + & 64 \\
-12x^2 & = & & -12y^2 - & 96y - & 192 \\
+41x & = & & & +41y + & 164 \\
-42 & = & & & & -42 \\
\hline
\end{array}$$

$y^3 * - 7y - 6 = 0$ die verwandelte Gleichung, in der das zweyte Glied verschwunden ist. Es ist in dieser Gleichung $y = -2$, oder $y = -1$, oder endlich $y = 3$. Da nun $x = y + 4$, so ist in der vorhergehenden Gleichung $x = 2$, oder $x = 3$, oder endlich $x = 7$.

Alle verwickelte quadratische Gleichungen können nach dieser Methode in reine Gleichungen verwandelt werden. Z. B. wenn man $x = y - \frac{1}{2}a$ in der Gleichung ($x^2 + ax = b$) setzet, so wird sie in folgende Gleichung $y^2 - \frac{1}{4}a^2 = b$,

das

das ist $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + 4b)}$ verwandelt; es ist aber $x = y - \frac{1}{2}a$ gesetzet worden; folglich $x = \frac{-a \pm \sqrt{(a^2+4b)}}{2}$

§. 330.

Auch giebt uns die im (§. 328.) angeführte Verwandlung ein Mittel an die Hand, aus einer gegebenen geordneten höheren Gleichung, bloß das letzte Glied einer andern höheren Gleichung herbey zu schaffen, in welcher die Wurzeln um eine beliebige Zahl größer oder kleiner sind, als die in der vorgelegten Gleichung. Denn, da in der aus der allgemeinen Formel abgeleiteten verwandelten Gleichung das letzte Glied die nämliche Form, wie die vorgelegte Gleichung hat; so setze man in der vorgelegten Gleichung eine positive Größe p statt x, und reduzire alles gehörig; so wird dieses Resultat das letzte Glied einer neuen Gleichung seyn, in welcher jede Wurzel um p kleiner ist, als in der vorgelegten Gleichung: oder man setze in der vorgelegten Gleichung eine negative Größe $-p$ statt x; so wird dieses Resultat das letzte Glied einer neuen Gleichung seyn, in welcher jede Wurzel um p größer ist, als in der vorgelegten. Dieses Mittel leistet uns bey Auflösung einer höheren Gleichung, in der das letzte Glied aus sehr vielen Faktoren besteht, einen guten Nutzen. Denn man versuche nur in einem solchen Falle statt x eine solche Zahl p in der gegebenen Gleichung zu substituiren, daß das Resultat sehr wenige Faktoren enthalte; löse dieses Resultat in die Faktoren auf, addire zu jedem Faktor die Zahl p, die man statt x gesetzet hat, wenn sie positiv ist, oder ziehe diese Zahl p von jedem Faktor ab, wenn sie negativ ist, und versuche sodann, ob diese so gefundene Zahlen der vorgelegten Gleichung ein Genügen leisten. Z. B. wenn man diese Gleichung aufzulösen hätte, $x^4 - 40x^3 + 595x^2 - 3900x + 9504 = 0$, in der das letzte Glied ungemein viele Faktoren enthält; so versuche man für x eine solche Zahl zu substituiren, daß das Resultat nur aus sehr wenigen Faktoren zusammengesetzet sey; setzet man $+ 10$ statt x, so ist das Resultat $= 10000 - 40000 + 59500 - 39000 + 9504 = 4$; die Faktoren davon sind $2, 1, -1, -2$; nun addire man zu jedem Faktor 10, weil man diese positive Zahl statt x gesetzet hat; so erhält man die Zahlen 12, 11, 9, 8, deren jede obiger Gleichung ein Genügen leistet.

§. 331.

Jede geordnete höhere Gleichung kann in eine andere so verwandelt werden, daß jede Wurzel mit einer beliebigen Größe multiplizirет ist.

Um dieses zu erhalten, setze man in der allgemeinen Formel

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + k = 0$$

die Größe $\frac{y}{n}$ statt x, nämlich $nx = y$; so erhält man

$$\left(\frac{y}{n}\right)^m + a\left(\frac{y}{n}\right)^{m-1} + b\left(\frac{y}{n}\right)^{m-2} + \ldots + k = 0;$$

oder wenn man beyde Theile der Gleichung mit n^m multipliziret, so hat man

$$y^m + nay^{m-1} + n^2by^{m-2} + n^3cy^{m-3} + \ldots + n^mk = 0$$

für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln man erhält, wenn man die Wurzeln der vorgelegten Gleichung mit n multipliziret; und folglich erhält man auch die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, wenn man die Wurzeln dieser verwandelten Gleichung durch n dividiret.

Aus dieser Formel ist zu ersehen, daß man, um die Wurzeln einer geordneten Gleichung mit einer beliebigen Größe n zu multipliziren, nur unter die Glieder der Gleichung eine geometrische Reihe, deren erstes Glied $= 1$, und der Quotient $= n$ ist, schreiben; und sodann die Glieder der

Glie-

Gleichung mit den darunter stehenden Gliedern der Reihe multipliziren solle. Z. B. es sollte die Gleichung $y^3 - 10y^2 + 23y - 14 = 0$, deren Wurzeln 1, 2, 7 sind, in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln 3mal so groß, als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind; so schreibe man also

$$\begin{array}{cccc} y^3 - & 10y^2 + & 23y - & 14 = 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27, \end{array}$$ und man erhält

$y^3 - 30y^2 + 207y - 378 = 0$, für die verwandelte Gleichung; in welcher 3, 6, 21 die Wurzeln sind.

Nur muß man nicht vergessen bey einer unvollständigen Gleichung auch unter die mit einem Sternchen bezeichneten Glieder die dazu gehörigen Glieder der Reihe zu schreiben. Z. B. wenn man diese Gleichung $x^4 * - 5x^2 * + 4 = 0$ in eine andere Gleichung verwandeln will, in der jede Wurzel dieser gegebenen Gleichung mit 2 multipliziret ist; so schreibe man also

$$\begin{array}{ccccc} x^4 & * - & 5x^2 & * + & 4 = 0 \\ 1, & 2, & 4, & 8, & 16, \end{array}$$ und man erhält

$x^4 * - 20x^2 * + 64 = 0$ für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln 2, 4, − 2, − 4 sind. Da nun diese Wurzeln mit 2 multipliziret sind, so müssen die Wurzeln der vorhergehenden Gleichung 1, 2, − 1, − 2 seyn.

§. 332.

Diese Verwandlung giebt uns ein Mittel an die Hand aus jeder geordneten Gleichung die Brüche wegzuschaffen, welches in folgendem besteht. **Man suche eine Zahl auf, die sich durch jeden Nenner der in der Gleichung befindlichen Brüche genau theilen läßt (§. 84.), schreibe unter die Glieder der Gleichung eine geometrische Reihe, deren erstes Glied = 1, und der Quotient der gefundenen Zahl gleich sey; und multiplizire die Glieder**

der Gleichung mit den dazu gehörigen Gliedern der Reihe; so erhält man eine Gleichung, die von den Brüchen befreyet ist, und deren Wurzeln durch den angenommenen Quotienten der geometrischen Reihe dividiret, die Wurzeln der gegebenen Gleichung zum Vorschein bringen: z. B. um aus der Gleichung $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$ die Brüche wegzuschaffen,

schreibe man also $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$
$\quad 1, \quad 18, \quad (18)^2, \quad (18)^3$

oder auch auf diese Art . . $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$
$\quad 1, \quad 6, \quad 36, \quad 216$

und multiplizire die Glieder der Gleichung mit den darunter stehenden Gliedern der geometrischen Reihe; so erhält man im zweyten Falle $x^3 - 27x^2 + 110x + 336 = 0$ für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln $-2, 8, 21,$ sind; nun sind diese Wurzeln nichts anders, als die mit 6 multiplizirten Wurzeln der vorhergehenden Gleichung. Es sind demnach die Wurzeln der gegebenen Gleichung $-\frac{2}{6}, \frac{8}{6}, \frac{21}{6},$ nämlich $x = -\frac{1}{3}$, oder $x = \frac{4}{3}$, oder endlich $x = \frac{7}{2}$.

§. 333.

Setzen wir $n = \frac{1}{p}$ in der Gleichung $y^m + nay^{m-1} + n^2by^{m-2} + n^3cy^{m-3} + \ldots + n^mk = 0$; so erhalten wir $y^m + \frac{ay^{m-1}}{p} + \frac{by^{m-2}}{p^2} + \ldots \frac{k}{p^m} = 0$ eine Gleichung, deren Wurzeln mit den Wurzeln der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + k = 0$ vollkommen einerley; nur daß sie durch p getheilt sind. Wir ersehen aus diesem, daß man jede geordnete Gleichung dergestalt verwandeln kann, daß alle ihre Wurzeln durch eine beliebige Größe dividiret sind. Durch diese letzte, und die vorhergehende Verwandlung kann man zuweilen aus einer gegebenen Gleichung die irrationalen Koeffizienten hinwegschaffen. Z. B. um aus der Gleichung

$x^3 - 4x^2\sqrt{3} + 12x - 24\sqrt{3} = 0$ die irrationalen Glieder hinwegzuschaffen, schreibe man unter diese Gleichung folgende geometrische Reihe: $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$, und dividire, oder multiplizire die Glieder der Gleichung mit den dazu gehörigen Gliedern der geometrischen Reihe; in dem einen Falle erhält man $x^3 - 4x^2 + 4x - 8 = 0$, und in dem andern $x^3 - 12x^2 + 36x - 216 = 0$.

§. 334.

Wenn eine geordnete höhere Gleichung, welche den zweyten Grad übersteiget, zwar mögliche, aber irrationale Wurzeln enthalten sollte; so können solche durch eine Annäherung auf folgende Art entwickelt werden.

1) Man substituire in der Gleichung, statt der unbekannten Größe, die positiven natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ wenn man in der Gleichung positive Wurzeln vermuthet; sollte man negative Wurzeln vermuthen, so substituire man statt x die negativen Zahlen $0, -1, -2, -3, -4 \ldots$. so wird die Zahl, bey der das Resultat das Zeichen ändert, größer, und die ihr vorhergehende Zahl kleiner seyn, als die gesuchte Wurzel. Z. B. es sey aus der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 17x + 43 = 0$, welche zwey positive, und eine negative Wurzel zu haben scheint, der Werth von x zu bestimmen; so verfahre man auf folgende Art.

x	Resultate.
0	$0 \quad 0 \quad 0 + 43 = +43$
1	$1 - 3 - 17 + 43 = +24$
2	$8 - 12 - 34 + 43 = +5$
3	$27 - 27 - 51 + 43 = -8$
4	$64 - 48 - 68 + 43 = -9$
5	$125 - 75 - 85 + 43 = +8$
6	$216 - 108 - 102 + 43 = +49$

Der eine positive Werth von x in der vorgelegten Gleichung ist demnach größer als 2, und kleiner als 3; der andere positive Werth aber ist größer als 4, und kleiner als 5.

2) Nachdem man nun die Zahlen bestimmet hat, zwischen welche eine Wurzel fallen muß; so setze man, daß die gesuchte Wurzel derjenigen Zahl, die das letzte Resultat mit ungeändertem Zeichen gegeben hat, nebst einem Bruch f gleich sey. In unserem Beyspiele setze man also für die erste Wurzel $x = 2 + f$.

3) Nun substituire man diesen Werth in der gegebenen Gleichung statt der unbekannten Größe: in unserem Falle ist nämlich

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& +\ 8 + 12f + 6f^2 + f^3 \\ -\ 3x^2 &=& -\ 12 - 12f - 3f^2 \\ -\ 17x &=& -\ 34 - 17f \\ +\ 43 &=& +\ 43 \\ \hline 0 &=& 5 - 17f + 3f^2 + f^3 \end{array}$$

Da aber f ein ächter Bruch ist, so kann indessen, ohne einen großen Fehler zu begehen, die 2te und 3te Potenz von f in der Gleichung hinweggelassen werden; und es ist $0 = 5 - 17f$, woraus $f = \frac{5}{17} = 0{,}29$ folget. Es ist demnach in unserer Gleichung $x = 2{,}29$ beynahe.

Erfordern es nun die Umstände der Aufgabe, den Werth von x genauer zu haben, so kann man die Arbeit wiederholen; nämlich man substituire nun $2{,}29 + f$ statt x in der vorgelegten Gleichung, und bestimme den Werth von x auf die itzt gezeigte Art noch einmal u. s. w.

Wollte man auf eben diese Art die andere positive Wurzel bestimmen, welche zwischen 4 und 5 fallen muß; und man setzte in der Gleichung $4 + f$ statt x, so würde man finden $f = \frac{9}{7}$, ein Zeichen, daß die gesuchte Wurzel viel näher bey 5 als bey 4 liegen muß; nämlich daß der Bruch, welcher zu 4 addirt werden muß, zu groß ist, als daß man dessen 2te und 3te Potenz ausser Acht lassen dürfte;

te; man substituire deswegen in der Gleichung $5-f$ statt x, und man findet sodann $f = 0{,}28$ beynahe; und folglich $x = 4{,}72$.

Sollte nun auch die negative Wurzel dieser Gleichung gefunden werden; so setze man

x	Resultate
0	$0 \quad 0 \quad 0 + 43 = + 43$
-1	$-1 - 3 + 17 + 43 = + 56$
-2	$-8 - 12 + 34 + 43 = + 57$
-3	$-27 - 27 + 51 + 43 = + 40$
-4	$-64 - 48 + 68 + 43 = - 1$

Es liegt daher die negative Wurzel dieser Gleichung zwischen -3 und -4; setzet man deswegen $x = -4+f$, so findet man $f = 0{,}018$; folglich $x = -3{,}982$.

§. 335.

Es ereignet sich zuweilen auch, daß die Resultate wieder zu wachsen anfangen, nachdem sie ehevor abgenommen hatten. In einem solchen Falle ist gemeiniglich jene Zahl, wo die Resultate wieder zu steigen anfangen, von einer Wurzel der Gleichung um keine ganze Einheit mehr unterschieden; jedoch nur damals, wenn man mittelst angenommener gebrochener Werthe für die unbekannte Größe die Resultate dem 0 immer näher bringen kann. Z. B. wenn man in der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 21x + 55 = 0$, wie bisher gesagt worden, verfährt; so erhält man

x	Resultate
0	$0 \quad 0 \quad 0 + 55 = + 55$
1	$1 - 2 - 21 + 55 = + 33$
2	$8 - 8 - 42 + 55 = + 13$
3	$27 - 18 - 63 + 55 = + 1$
4	$64 - 32 - 84 + 55 = + 3$
5	$125 - 50 - 105 + 55 = + 25$

Es kann daher eine positive Wurzel dieser Gleichung zwischen 2 und 3, und die andere zwischen 3 und 4, oder auch beyde zwischen 2 und 3, oder endlich beyde zwischen 3 und 4 liegen; jedoch nur unter der Bedingung, daß die Resultate dem 0 sich immer mehr nähern, wenn gebrochene Zahlen, hier $3 \pm \frac{1}{n}$, statt x gesetzet werden. Versuchet man nun in der vorgelegten Gleichung $3\frac{1}{2}$ statt x zu setzen; so ist das Resultat $- \frac{1}{8}$; folglich liegt eine Wurzel der Gleichung zwischen 3 und $3\frac{1}{2}$, und die andere zwischen $3\frac{1}{2}$ und 4; denen man sich wie vorhin nach Belieben nähern kann, wenn man $x = 3\frac{1}{2} + f$, oder $x = 3\frac{1}{2} - f$ setzet, und so wie im (§. 334.) verfährt.

Sollten aber in einer Gleichung, nachdem man für die unbekannte Größe 0, 1, 2, 3 . . . . und auch 0, − 1, − 2, − 3 . . gesetzt hat, die Resultate ununterbrochen steigen, ohne das Zeichen zu verändern; so kann man versichert seyn, daß die Gleichung lauter unmögliche Wurzeln enthalte. Z. B. in der Gleichung $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, findet man, daß die Resultate ohne Ende steigen, wenn man 0, 1, 2, 3 . . . . oder auch 0, −1, −2, −3, −4. . . . statt x setzet; folglich enthält diese Gleichung gar keine mögliche Wurzeln.

Auch sind alle Wurzeln unmöglich, wenn die Resultate anfänglich zwar abnehmen, und sodann ohne Ende fortwachsen; dabey aber doch durch angenommene gebrochene Werthe für die unbekannte Größe dem 0 nicht näher gebracht werden können. So z. B. sind in der Gleichung $x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 120x + 101 = 0$ alle vier Wurzeln unmöglich, weil für $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . . die Resultate $R = 101, 26, 5, 2, 5, 26, 101$ . . . erhalten werden, und zugleich für $x = 3 \pm \frac{1}{n}$ wieder $R > 2$ wird, dabey auch für negative Werthe von x die Resultate ohne Ende fortwachsen.

§. 336.

§. 336.

Wir können eine allgemeine Näherungsformel für alle geordnete höhere Gleichungen hieher setzen; diese ist folgende:

Wenn eine Wurzel dieser Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \ldots + k = 0$, beynahe gleich w gefunden wird, so ist

$$x = \frac{(m-1)w^m + (m-2)aw^{m-1} + (m-3)bw^{m-2} + (m-4)cw^{m-3} + \ldots - k}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + (m-3)cw^{m-4} + (m-4)dw^{m-5} + \ldots}$$

Nämlich bey den kubischen Gleichungen $x^3 + ax^2 + bx + k = 0$

ist $x = \dfrac{2w^3 + aw^2 - k}{3w^2 + 2aw + b}$

Bey den Gleichungen des 4ten Grades

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + k = 0$

ist $x = \dfrac{3w^4 + 2aw^3 + bw^2 - k}{4w^3 + 3aw^2 + 2bw + c}$ u. s. w.

Denn da wir annehmen, daß w von dem wahren Werthe nur noch etwan um einen kleinen Bruch verschieden sey; so ist $x = w + f$, wenn wir diesen Bruch mit f bezeichnen; es ist also auch

$$\begin{aligned}
x^m &= w^m + mw^{m-1}f + \frac{m.m-1}{1.2}w^{m-2}f^2 + \ldots \\
+ax^{m-1} &= aw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2}f + \frac{m-1.m-2}{1.2}aw^{m-3}f^2 + \ldots \\
+bx^{m-2} &= bw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3}f + \frac{m-2.m-3}{1.2}bw^{m-4}f^2 + \ldots \\
+cx^{m-3} &= cw^{m-3} + (m-3)cw^{m-4}f + \frac{m-3.m-4}{1.2}cw^{m-5}f^2 + \ldots \\
\ldots & \\
+k &= k \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Da nun beyde Theile der Gleichung $= 0$ sind, und alle Potenzen des Bruches f, ausser der ersten, ohne einen großen Fehler zu begehen, hinweggelassen werden können; so ist

$$0 = w^m + aw^{m-1} + bw^{m-2} + \ldots + k + f . [mw^{m-1} + (m-1) . aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + \ldots]$$

folglich $f = \dfrac{-w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - \ldots\ldots - k}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + \ldots}$

und $x = w - \dfrac{w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - \ldots\ldots - k}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + \ldots}$

woraus endlich, wenn man hier alles auf einen gleichen Nenner bringet, und gehörig reduziret, die obangeführte Formel folget.

Es sey z. B. aus der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$, der Werth von x zu bestimmen. Nun findet man vermög (§. 334. N. 1.) daß x beynahe $= 3$ sey; vergleicht man daher dieses Beyspiel mit der Näherungsformel der kubischen Gleichungen; so ist $w = 3$, $a = -12$, $b = 57$, und $b = -94$; folglich

$$x = \frac{54 - 108 + 94}{27 - 72 + 57} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3{,}33 \text{ beynahe.}$$

Um x genauer zu finden, kann man nun in der nämlichen Formel $w = 3{,}33$ setzen, wodurch $x = 3{,}3622$ schon um vieles genauer bestimmet wird u. s. w.

Imgleichen aus der Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ sollen die Werthe von x gefunden werden. Um diese zu bestimmen, setze man

Ne-

x	Resultate
0	$0 \quad 0 \quad 0 - 109 = - 109$
1	$1 - 15 + 72 - 109 = - 51$
2	$8 - 60 + 144 - 109 = - 17$
3	$27 - 135 + 216 - 109 = - 1$
4	$64 - 240 + 288 - 109 = + 3$
5	$125 - 375 + 360 - 109 = + 1$
6	$216 - 540 + 432 - 109 = - 1$
7	$343 - 735 + 504 - 109 = + 3$
8	$512 - 960 + 576 - 109 = + 19$

so findet man, daß der eine Werth von x beynahe $= 3$, der zweyte beynahe $= 5$, und der dritte Werth endlich beynahe $= 6$ sey. Wir wollen den ersten Werth von x durch die angeführte Näherungsformel bestimmen; es ist nämlich in diesem Falle $w = 3$, $a = - 15$, $b = 72$, und $k = - 109$;

folglich $x = \dfrac{54 - 135 + 109}{27 - 90 + 72} = \dfrac{28}{9} = 3,11$ beynahe.

Setzen wir nun $w = 3,11$; so ist

$$x = \frac{60,160462 - 145,0815 + 109}{29,0163 - 93,3 + 72} = \frac{24,078962}{7,7163}$$

$= 3,1205$ schon sehr genau. Wäre es erforderlich den Werth von x noch genauer zu haben; so müßte man nun $w = 3,1205$ setzen, und dann würde man $x = 3,1206148$ erhalten.

Um die zwey übrigen Werthe von x zu finden, setze man in der Näherungsformel einmal $w = 5$, und dann $w = 6$; oder auch man dividire die vorgelegte Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ durch $(x - 3,1206 = 0)$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2 - 11,8794x + 34,92914 = 0$, in der $x = 5,9397 \pm \sqrt{[(5,9397)^2 - 34,92914]}$; nämlich $x = 5,3473$, oder $x = 6,5321$ ist; es sind demnach die Wurzeln der vorgelegten Gleichung

x^3

$x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ folgende Zahlen; 3,1206, 5,3473, und 6,5321.

Auf die nämliche Art findet man die Wurzeln folgender Gleichung $x^4 - * - 20x^2 - 12x + 13 = 0$, wenn man in der Näherungsformel der Gleichungen vom 4ten Grade $a = 0$, $b = -20$, $c = -12$, $k = 13$, und $w = 1$, oder $w = 5$, $w = -1$, $w = -4$ setzet; denn wenn 0, 1, 2, 3, 4, 5, und auch 0, −1, −2, −3, −4, −5 für x substituiret wird; so zeigt sichs, daß w diese Werthe habe. Man erhält nach gehöriger Reduktion $x = 0,563$; oder $x = 4,687$; oder $x = -1,223$; oder endlich $x = -4,027$.

§. 337.

Wir können bey dieser Gelegenheit auch eine Näherungsformel für die Ausziehung was immer für einer Wurzel aus jeder vorgegebenen Zahl hieher setzen; diese ist folgende:

Wenn aus einer Zahl x die Wurzel m zu ziehen wäre, und es ist schon beynahe $\sqrt[m]{x} = w$, welches man entweder durch Hilfe der Logarithmen, oder sonst auf eine andere Art schon bestimmet hat; so ist

$$\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w.(x - w^m)}{(m+1).w^m + (m-1).x} \text{ sehr genau.}$$

Denn es sey der kleine Bruch $= f$, den man zu w noch hinzufügen muß, um $\sqrt[m]{x} = w + f$ zu erhalten; so ist auch $x = (w + f)^m$; nämlich

$$x = w^m + mw^{m-1}f + \frac{m(m-1)}{1.2}w^{m-2}f.f + \ldots$$

folglich $f = \dfrac{x - w^m}{mw^{m-1}}$ ziemlich genau,

oder $f = \dfrac{x - w^m}{mw^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)w^{m-2}f}$ um vieles genauer.

Nun

Nun substituire man $\frac{x-w^m}{mw^{m-1}}$ statt f in dem zweyten Gliede des Nenners bey dieser letzten Gleichung; so ist

$$f = \frac{w\,.\,(x-w^m)}{mw^m + \frac{1}{2}(m-1)\,(x-w^m)}$$

$$= \frac{2w\,.\,(x-w^m)}{(m+1)\,.\,w^m + (m+1)\,.\,x};$$

folglich $\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w\,.\,(x-w^m)}{(m+1)\,.\,w^m + (m-1)\,.\,x}$

Z. B. $\sqrt{x} = w + \frac{2w\,.\,(x-w^2)}{3w^2+x}$

$$\sqrt[3]{x} = w + \frac{w\,.\,(x-w^3)}{2w^3+x}$$

$$\sqrt[4]{x} = w + \frac{2w\,.\,(x-w^4)}{5w^4+3x}$$

$$\sqrt[5]{x} = w + \frac{w\,.\,(x-w^5)}{3w^5+2x};$$ u. s. w.

Um den Gebrauch dieser Formeln deutlicher einzusehen, wollen wir die Kubikwurzel aus 572 ausziehen.

Nun ist $\frac{1}{3}\log 572 = \frac{2{,}7573960}{3} = 0{,}9191320$, wozu die Zahl 8,30103 gehöret; es ist demnach

$\sqrt[3]{572} = 8{,}30103$ beynahe; folglich $w = 8{,}30103$; und

$$\sqrt[3]{572} = 8{,}30103 + \frac{8{,}30103\,.\,[572-(8{,}30103)^3]}{2\,.\,(8{,}30103)^3+572}$$

$$= 8{,}30103 + \frac{0{,}00085901131433809119}{1715{,}999793035005454}$$

$$= 8{,}30103 + 0{,}0000005005894044,$$ nämlich

$\sqrt[3]{572} = 8{,}3010305005894044$ sehr genau, und bis auf die letzte Dezimalziffer verläßlich.

§. 338.

Es läßt sich auch ein allgemeiner Ausdruck für die Wurzel einer jeden kubischen Gleichung, durch Hilfe der sogenanten **Cardanischen Regel** angeben; und zwar auf folgende Art.

Man schaffe bey einer geordneten vollständigen kubischen Gleichung nach (§. 329.) das zweyte Glied hinweg, damit die Gleichung die Form $x^3 + px + q = 0$ erhalte. Um den Werth für x in dieser letzten Gleichung zu bestimmen, setze man $x = y + z$; so ist alsdann

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0.$$

Nun nehme man an, y und z sollen so beschaffen seyn, daß in dieser letzten Gleichung $y^3 + z^3 + q = 0$ sey; so ist auch $3y^2z + 3yz^2 + py + pz = 0$; oder $3yz(y + z) + p(y + z) = 0$, nämlich $3yz = -p$; und folglich $y = -\frac{p}{3z}$. Substituiret man nun diesen Werth für y in der Gleichung $y^3 + z^3 + q = 0$, so erhält man $z^6 + qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$; woraus man nach (§. 215.) findet,

$$z = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]};$$ folglich ist

$$y = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]};$$

und weil $x = y + z$, so ist endlich

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$

eine Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$.

Z. B. es sey aus der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$, der Werth von x zu bestimmen, so setzt man $x = u + 4$, um nach (§. 329.) das 2te Glied wegzuschaffen; dadurch erhält man $u^3 + 9u + 6 = 0$. Setzet man nun vermög obiger Formel $p = 9$, und $q = 6$, so ist hier $u = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$;

und

und folglich ist in der vorgelegten Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$ eine Wurzel $x = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3{,}3621659$, wie im (§. 336.)

Wenn man mittelst der angeführten Formel aus der Gleichung $x^3 + 6x + 20 = 0$ den Werth für x suchet, so findet man $x = \sqrt[3]{(-10 + 6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{(-10 - 6\sqrt{3})}$. Obwohlen nun hier der Werth von x irrational zu seyn scheinet, so findet man doch nach vorgenommener Untersuchung, daß $\sqrt[3]{(-10 + 6\sqrt{3})} = -1 + \sqrt{3}$, und $\sqrt[3]{(-10 - 6\sqrt{3})} = -1 - \sqrt{3}$ sey; und folglich ist hier $x = -2$, welches man nach (§. 325.) noch leichter findet.

§. 339.

Um in solchen Fällen zu untersuchen, ob sich die Kubikwurzel aus einer Größe $a \pm \sqrt{b}$, welche nämlich aus einem rationalen Gliede a, und aus einer quadratischen Wurzelgröße $\sqrt{b}$ bestehet, abgekürzet angeben lasse; setze man I. $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b}} = x \pm \sqrt{y}$, nämlich $\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = x + \sqrt{y}$, und $\sqrt[3]{(a - \sqrt{b})} = x - \sqrt{y}$; daraus folgt durch die Multiplikation dieser zwey Gleichungen $\sqrt[3]{(a^2 - b)} = x^2 - y$; folglich II. $y = x^2 - \sqrt[3]{(a^2 - b)}$. Ferner folgt aus der Gleichung I. durch die Erhebung zur 3ten Potenz $a \pm \sqrt{b} = x^3 \pm 3x^2\sqrt{y} + 3xy \pm y\sqrt{y}$, wo offenbar der rationale Theil $a = x^3 + 3xy$ seyn muß. Substituiret man endlich in dieser letzten Gleichung für y den Werth aus der Gleichung II. so ist III. $x^3 - \frac{3}{4}x.\sqrt[3]{(a^2 - b)} - \frac{1}{4}a = 0$. Aus dieser Gleichung III. muß man nun trachten den Werth für x nach (§. 325.) zu bestimmen, nachdem man ehevor noch (§. 332. u. 333.) die gebrochenen, und auch die irrationalen Koeffizienten weggeschaffet hat. Läßt sich nun auf diese Art x bestimmen, so ergiebt sich sodann aus der Gleichung II. auch y; und $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})}$ läßt sich dadurch abkürzen. So z. B. ist

$$\sqrt[3]{(20-12\sqrt{3})} = \sqrt[3]{(20-\sqrt{432})} = (1-\sqrt{3})\sqrt[3]{2}.$$

Imgleichen $\sqrt[3]{(2+11\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2-11\sqrt{-1})}$ $= (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$; u. s. w.

Anmerkung. Wenn die kubische Gleichung von der Form $x^3 + px + q = 0$ irrationale Wurzeln enthält, dabey aber p negativ, und zugleich $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$ ist, so giebt die im (§. 338.) angeführte Formel für den Werth von x einen unmöglichen Ausdruck, der sich gar nicht abkürzen läßt. Und eben deswegen ist auch die angeführte Formel in der Anwendung von keinem besondern Nutzen; wir wollen uns daher auch nicht länger dabey aufhalten; machen auch keine Erwähnung, daß man bey jeder Größe, nebst einer möglichen, auch noch zwey unmögliche Kubikwurzeln angeben könne; z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, oder $\sqrt[3]{8} = -1 + \sqrt{-3}$, oder endlich $\sqrt[3]{8} = -1 - \sqrt{-3}$; die zwey letzten unmöglichen Kubikwurzeln aus 8 werden gefunden, wenn die höhere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch $x - 2$ dividiret wird. Auch mit der Zerfällung einer höhern Gleichung in mehrere höhere Gleichungen wollen wir uns nicht beschäftigen. Man kann nämlich zuweilen eine verwickelte Gleichung des 4ten Grades, worinn das 2te Glied bereits weggeschaffet ist, von der Form $u^4 + pu^2 + qu + r = 0$ in zwey quadratische Gleichungen zerlegen, wenn man $u^4 + pu^2 + qu + r$ $= (u^2 + xu + y) \times (u^2 - xu + z) = 0$ setzet; dadurch erhält man nach gemachter Multiplikation $p = z - x^2 + y$, $q = (z-y)x$, $r = yz$, drey Gleichungen, um die drey unbekannten Größen x, y, z bestimmen zu können.

Aus

Aus diesen drey Gleichungen folgt $z + y = p + x^2$, und $z - y = \frac{q}{x}$; daher ist I. $z = \frac{p + x^2}{2} + \frac{q}{2x}$, und II. $y = \frac{p + x^2}{2} - \frac{q}{2x}$; ferner yz, oder $r = \frac{(p + x^2)^2}{4} - \frac{q^2}{4x^2}$; und endlich III. $x^6 + 2px^4 + (p^2 - 4r)\, x^2 - q^2 = 0$ eine höhere Gleichung, die als eine kubische behandelt werden kann, um x zu finden. Läßt sich nun auf diese Art x bestimmen, so ist sodann in den zwey Gleichungen I. und II. auch z und y bekannt. Substituiret man endlich die gefundenen Werthe für x, y, z in der Gleichung $(u^2 + xu + y) \times (u^2 - xu + z) = 0$, so hat man sodann die zwey quadratischen Gleichungen $u^2 + xu + y = 0$, und $u^2 - xu + z = 0$ aufzulösen, um alle vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung $u^4 + pu^2 + qu + r = 0$ zu bestimmen u. s. w.

Vollständige Untersuchungen über die Auflösung höherer Gleichungen findet man in Hrn. **L. Eulers** Anleitung zur Algebra II. Th. und in dessen Anleit. zur Analysis des Unendlichen von Hrn. **Michelsen** übersetzet.

§. 340.

Wenn aus einer verwickelten höhern Gleichung von zwey veränderlichen Größen eine aus diesen als eine Funktion von der andern zu entwickeln ist, so kann man dabey die **Umkehrung der Funktionen** (§. 288.) öfters mit Nutzen gebrauchen. Z. B. um aus der Gleichung
$y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$ den Werth für y zu finden, setze man $y = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + Dx^{p+3q} + \ldots$ und versuche für p und q solche Werthe anzunehmen, damit sich bey der Bestimmung der Koeffizienten nach (§. 283.), wenn man einen solchen Werth allenthalben in der vorgelegten Gleichung für y substituiret, keine Widersprüche ergeben. Bey dem angeführten Beyspiele kann man $p = 0$ und $q = 1$, oder $p = 3$ und $q = 1$, oder endlich $p = 1$

und $q = -1$ annehmen. Im ersten Falle für $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$ ist $A = \pm a$, $B = +\frac{1}{2}$,

$$C = \mp \frac{1}{8a},\ D = \pm \frac{7}{16a^2},\ E = \pm \frac{59}{128a^3},\ \dots \text{ u. s. w.}$$

Zuweilen können für p und q auch gebrochene Werthe genommen werden; z. B. um aus der Gleichung $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$ den Werth für y zu entwickeln, kann man annehmen entweder $p = 1$ und $q = 1$, oder $p = 0$ und $q = -3$, oder endlich $p = \frac{3}{2}$ und $q = -\frac{3}{2}$.

Diese Werthe für p und q im letzten Beyspiele können auf folgende Art gefunden werden. Man substituire den angenommenen Werth $y = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + \dots$ allenthalben statt y in der gegebenen Gleichung, so ist sodann

$$\begin{aligned} 0 = {} & aA^3x^{3p} + 3aA^2Bx^{3p+q} + 3aAB^2x^{3p+2q} + \dots \\ & - Ax^{p+3} - Bx^{p+q+3} - Cx^{p+2q+3} - \dots \\ & - ax^3 \end{aligned}$$

Nun sey 1) die Potenz $x^{3p} = x^3$, und $x^{3p+q} = x^{p+3}$, nämlich $3p = 3$, und $3p + q = p + 3$, so ist $p = 1$ und $q = 1$; oder 2) es sey $x^{p+3} = x^3$, und $x^{p+q+3} = x^{3p}$, so ist $p = 0$ und $q = -3$; oder endlich 3) sey $x^{3p} = x^{p+3}$, und $x^{3p+q} = x^3$, so ist $p = \frac{3}{2}$ und $q = -\frac{3}{2}$. Und eben so bestimmet man auch in andern solchen Fällen vorläufig die Werthe für p und q. Im letzten angeführten Falle für $y = Ax^{\frac{3}{2}} + B + Cx^{-\frac{3}{2}} + Dx^{-\frac{6}{2}} + Ex^{-\frac{9}{2}} + \dots$ findet man

$$A = \pm a^{-\frac{1}{2}},\ B = \tfrac{1}{2}a^{\frac{2}{2}},\ C = \pm\tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}},\ D = \tfrac{1}{2}a^{\frac{8}{2}},$$

$$E = \mp \tfrac{105}{128}a^{\frac{11}{2}} \text{ u. s. w.}$$

Einige Schriftsteller brauchen in solchen Fällen, um die Werthe für p und q zu bestimmen, das sogenannte **analytische Dreyeck**, wovon in C Cherfer Instit. Analyt. P. I. eine Abhandlung anzutreffen ist.

Schluß-

Schluß-Anmerkung. Die Richtigkeit einiger Sätze in diesem ersten Bande ist blos durch die gemeine Indukzion dargethan worden, und zwar in der Absicht, damit mehrere Lehrlinge auf eine leichtbegreifliche Art zur Kenntniß solcher Sätze gelangen, und damit sie nicht wegen einigen Schwierigkeiten bey der schärfesten Beweisart allen Lust zur Mathematik verlieren. Z. B. daß die Anzahl der Amben bey n Größen allgemein $= \frac{1}{2}n(n-1)$ sey, ist blos daraus geschlossen worden, weil man mittelst der Lehre von den arithmetischen Reihen des zweyten Ranges dargethan hat, daß diese Formel für 2, 3, 4, 5 Größen richtig sey (§. 249.), und weil man eben so zeigen konnte, daß solche auch für 6, 7, 8 und mehrere Größen gelte. Um nun in diesem Beyspiele mit der größten Schärfe zu erweisen, daß die Anzahl der Amben bey n Größen ganz richtig $= \frac{1}{2}n(n-1)$ sey, muß man noch aus den Eigenschaften der Amben zeigen, daß die Gestalt dieser Formel bey $(n+1)$ Größen statt finden müsse, wenn man solche bey n Größen für richtig annimmt; nämlich, daß bey $(n+1)$ Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2}(n+1)n$ seyn müsse, wenn bey n Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2}n(n-1)$ ist. Dieses kann auf folgende Art geschehen. Es sey bey n Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2}n(n-1)$; nun gedenke man noch eine Größe hinzugesetzet; so hat man sodann $(n+1)$ Größen, und dabey $\frac{1}{2}n(n-1)+n = \frac{1}{2}(n+1)n$ Amben; weil die hinzugesetzte $(n+1)$te Größe mit jeder der n vorigen Größen verbunden noch n neue Amben hervorbringet, welche mit den vorigen $\frac{1}{2}n(n-1)$, zusammen $\frac{1}{2}(n+1)n$ Amben betragen. Es muß daher ganz richtig für $(n+1)$ Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2}(n+1)n$ seyn, wenn für n Größen die Anzahl $= \frac{1}{2}n(n-1)$ ist. Nun gilt diese Formel $\frac{1}{2}n(n-1)$ wegen (§. 249.) ganz richtig für $n = 2$; also gilt solche, wegen des hier erwiesenen auch für $2+1 = 3$; und nun $n = 3$ gesetzt, gilt solche auch für $3+1 = 4$; und so gilt der Schluß immer für jede nächstfolgende um 1 größere Zahl; daher gilt die angeführte Formel in der größten Schärfe für jede beliebige Anzahl der Größen.

 Eben

Eben so hat man im (§. 252.) blos mittelst der gemeinen Induktion dargethan, daß bey n ungleichen Größen die Anzahl der Versetzungen $= n.(n-1).(n-2) \ldots 1$ sey, wo in jeder Versetzung n Größen beysammenstehen. Weil man nämlich diese Formel für 2, 3, 4, 5, Größen richtig fand, und auf eben die Art zeigen konnte, daß solche auch für 6, 7, 8, und mehrere Größen gelte, so behauptete man allgemein, sie sey für jede beliebige Anzahl n von ungleichen Größen richtig. Um nun in der größten Schärfe zu erweisen, daß diese Formel $n.(n-1).(n-2) \ldots 1$ richtig für jede beliebige Anzahl n von ungleichen Größen die Menge aller Versetzungen vorstelle, wo in jeder Versetzung alle n Größen beysammen stehen, so muß man noch aus der Natur der Sache (hier aus der Beschaffenheit der Versetzung) erweisen, daß die Gestalt dieser Formel bey $(n+1)$ ungleichen Größen richtig seyn müsse, wenn man solche bey n Größen für richtig annimmt; welches auf folgende Art geschehen kann. Wenn diese Formel bey n Größen richtig ist, so ist bey n ungleichen Größen die Anzahl der Versetzungen $= n.(n-1).(n-2) \ldots 1$; nun gedenke man noch eine ungleiche Größe hinzugefüget, so hat man $(n+1)$ Größen; und bey einer jeden der vorigen $n.(n-1).(n-2) \ldots 1$ Versetzungen giebt es $(n+1)$ Stellen, an denen die hinzugefügte $(n+1)$te Größe stehen kann, nämlich hinten und vorne, und zwischen jeden zwey anliegenden Größen; daher ist bey $(n+1)$ ungleichen Größen die Anzahl der Versetzungen ganz richtig $= n.(n-1).(n-2) \ldots 1 \times (n+1) = (n+1).n.(n-1).(n-2) \ldots 1$, wenn die erste Formel bey n ungleichen Größen richtig ist; nämlich die Gestalt der angeführten Formel muß für $(n+1)$ Größen richtig seyn, wenn solche für n Größen richtig ist. Es ist aber die Formel $n.(n-1).(n-2) \ldots 1$ wegen (§. 252.) für $n = 2$ ganz richtig; daher ist solche wegen des hier erwiesenen auch für $2+1=3$ richtig; und nun $n = 3$ gesetzt gilt eben diese Formel auch für

3

$3 + 1 = 4$; und so gilt der Schluß immer für jede darauffolgende um 1 größere Zahl n; folglich gilt die angeführte Formel allgemein für jede beliebige Anzahl n von ungleichen Größen.

Diese Beweisart beruhet überhaupt auf nachstehendem Grundsatze. **Bey mehrern Größen, die in einem gewissen Zusammenhange miteinander stehen, findet ein gewisses Gesetz statt: man findet aus richtigen Gründen, daß bey 2, 3, und 4 solchen Größen das Gesetz = G sey; wenn man nun eben dieses Gesetz = G bey n Größen nach der gemeinen Induktion für richtig annimmt, und dabey aus den obwaltenden Eigenschaften der vorhandenen Größen darthun kann, daß sodann eben dieses Gesetz auch bey ($n + 1$) Größen richtig seyn müsse, so ist das angenommene Gesetz = G für jede Anzahl n der Größen wirklich allgemein richtig.** Scharfsinnigen Anfängern wird zur Uebung in dieser Beweisart bey analytischen Untersuchungen des Hrn. J. **Pasquich** Unterricht in der mathematischen Analysis Leipzig bey **Weidman** 1790 anempfohlen.

Wenn eine gesuchte Größe durch eine Reihe mittelst der Bestimmung der Koeffizienten nach (§. 283. u. 288.) gefunden wird, so läßt sich öfters das Gesetz der Koeffizienten gar nicht entdecken, oder wenn solches auch vermög der gemeinen Induktion in die Augen fällt, so läßt es sich doch nach den bereits vorgetragenen Gründen nicht allgemein erweisen; als z. B. bey der Reihe für log ($1 + x$) in (§. 289.). In dergleichen Fällen muß man jederzeit trachten für die gesuchte Größe eine sehr schnell abnehmende Reihe zu erhalten, und man kann dabey einmal für allemal so viele Glieder der Reihe wirklich bestimmen, als man deren zur Berechnung der gesuchten Größe nothwendig hat; dadurch ist die gesuchte Größe gewiß in hinlänglicher Schärfe richtig bestimmet.

Anhang,
von einigen Tafeln.

In folgender Tafel aller einfachen Faktoren sind alle durch 2, 3, und 5 nicht theilbare Zahlen von 1 bis 10500 in ihre einfache Faktoren aufgelöset; man findet diese Faktoren, wenn man die Hunderter in der ersten horizontalen Kolonne, die Zehner und Einheiten der vorgegebenen Zahl aber in der ersten vertikalen Kolonne, und endlich den Ort aufsucht, an welchem diese zwey Kolonnen zusammenstossen; denn an diesem Orte sind die Faktoren anzutreffen, wenn die vorgegebene Zahl deren einige enthält: sollte hingegen an dem gefundenen Orte (. . . .) anzutreffen seyn, so ist dieß ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl eine Primzahl sey. Z. B. auf der Seite (509) findet man, daß die Zahl 4199 aus den einfachen Faktoren 13. 17. 19 zusammengesetzt sey; sie werden **einfach** genennt um sie von den übrigen Faktoren 221 = 13.17; 247 = 13.19; 323 = 17.19 zu unterscheiden, durch welche sich die vorgegebene Zahl ebenfalls genau theilen läßt. Auf der nämlichen Seite findet man, daß 4177 eine Primzahl sey. Die durch 2, 3, und 5 theilbaren Zahlen sind in der Tafel weggeblieben, weil die Faktoren 2, 3, oder 5 einer vorgegebenen Zahl gleich bey ihrem Anblicke in die Augen fallen (§. 69). Würde nun eine durch 2, 3, oder 5 theilbare Zahl z. B. 111972 in die Faktoren zu zerlegen seyn, so sieht man alsogleich, daß 111972 = 2.2.3.9331 sey; weiters findet man in der Tafel 9331 = 7.31.43; folglich ist 111972 = 2.2.3.7.31.43. Wenn jemand ein Belieben trägt diese Tafel weiter fortzuführen, der kann **Anton Felkels** Faktorentafel in diese geschmeidige Gestalt umschaffen; diese sehr seltene Felkelsche Tafel, die im Jahre 1776 die von Gehlensche Presse zu Wien verließ, enthält auf 17 Regalbögen alle einfachen

Faktoren der durch 2, 3, und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 408000.

Im 2ten Bande meiner logarith. trigonometr. Tafeln Leipzig 1797 ist eine solche Tafel der einfachen Faktoren bis 102000, und ein Verzeichniß der Primzahlen bis 400000 enthalten, welche aus der erwähnten Felkelschen Tafel abgeleitet sind. Genannter Ant. Felkel hat laut der monatl. Corresp. zur Beförd. der Erd- und Himmelskunde August-Heft 1800 Seite 223 eine Herausgabe der von ihm berechneten Faktoren-Tafeln bis 24 Millionen und 6mahl Hundert-Tausend zu Lissabon angekündiget. Auch befindet sich im Stifte Kloster-Neuburg oberhalb Wien eine handschriftliche Tafel aller einfachen Faktoren bis über eine Million, welche der kürzlich verstorbene Stifts-Herr Florian Ulbrich berechnet hat. Bey dieser Gelegenheit soll derselbe einige Fehler im oberwähnten Verzeichnisse der Primzahlen und in der Felkelschen Tafel entdecket haben, zu deren Kenntniß aber ich bisher noch nicht gelangen konnte, um solche zur Ausbesserung anzeigen zu können.

Die darauf folgende Tafel der Potenzen enthält die 2te, 3te, 4te, 5te, und 6te Potenz aller Wurzeln von 1 bis 100; sie kann sowohl bey der Auflösung der höheren Gleichungen, als auch bey dem Einschalten oder Interpolliren (wenn nämlich zu einigen gegebenen Gliedern einer Reihe die übrigen zwischenliegenden Glieder nach (317) zu bestimmen sind), und auch in anderen Fällen gute Dienste leisten. Durch Hilfe eben dieser Tafel findet man auch die Potenzen von 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; .... 9,9; imgleichen die Potenzen von 0,01; 0,02; 0,03; .... 0,99; wenn man nur für die gesuchte Potenz die gehörigen Dezimalziffern in der Tafel absondert.

Die Tafeln der Quadrat- und Cubiczahlen, wie auch die Tafeln der Quadrat- und Cubicwurzeln bedarfen keine Erläuterung, sie sind für sich deutlich genug; daß diese nämlichen Tafeln auch auf einige Decimalbrüche angewendet werden können, wird ohne meine Erinnerung ein jeder bey dem ersten Anblicke selbst einsehen.

N	0	300	600	900	1200	1500	1800
1	....	7 . 43	....	17 . 53	....	19 . 79	....
7	....	....	....	....	17 . 71	11 . 137	13 . 139
11	....	....	13 . 47	....	7 . 173	....	....
13	....	....	....	11 . 83	....	17 . 89	7 . 7 . 37
17	....	....	....	7 . 131	....	37 . 41	23 . 79
19	....	11 . 29	....	....	23 . 53	7 . 7 . 31	17 . 107
23	....	17 . 19	7 . 89	13 . 71	....	....	....
29	....	7 . 47	17 . 37	....	....	11 . 139	31 . 59
31	....	....	....	7 . 7 . 19	....	....	....
37	....	....	7 . 7 . 13	....	....	29 . 53	11 . 167
41	....	11 . 31	....	....	17 . 73	23 . 67	7 . 263
43	....	7 . 7 . 7	....	23 . 41	11 . 113	....	19 . 97
47	....	....	....	....	29 . 43	7 . 13 . 17	....
49	7 . 7	....	11 . 59	13 . 73	....	....	43 . 43
53	....	....	....	....	7 . 179	....	17 . 109
59	....	....	....	7 . 137	....	....	11 . 13 . 13
61	....	19 . 19	....	31 . 31	13 . 97	7 . 223	....
67	....	....	23 . 29	....	7 . 181	....	....
71	....	7 . 53	11 . 61	....	31 . 41	....	....
73	....	....	....	7 . 139	19 . 67	11 . 11 . 13	....
77	7 . 11	13 . 29	....	....	....	19 . 83	....
79	....	....	7 . 97	11 . 89	....	....	....
83	....	....	....	....	....	....	7 . 269
89	....	....	13 . 53	23 . 43	....	7 . 227	....
91	7 . 13	17 . 23	....	....	....	37 . 43	31 . 61
97	....	....	17 . 41	....	....	....	7 . 271

N	100	400	700	1000	1300	1600	1900
1	....	....	....	7 . 11 . 13	....	....	....
3	....	13 . 31	19 . 37	17 . 59	....	7 . 229	11 . 173
7	....	11 . 37	7 . 101	19 . 53	....	....	....
9	....	....	....	....	7 . 11 . 17	....	23 . 83
13	....	7 . 59	23 . 31	....	13 . 101	....	....
19	7 . 17	....	....	....	....	....	19 . 101
21	11 . 11	....	7 . 103	....	....	....	17 . 113
27	....	7 . 61	....	13 . 79	....	....	41 . 47
31	....	....	17 . 43	....	11 . 11 . 11	7 . 233	....
33	7 . 19	....	....	....	31 . 43	23 . 71	....
37	....	19 . 23	11 . 67	17 . 61	7 . 191	....	13 . 149
39	....	....	....	....	13 . 103	11 . 149	7 . 277
43	11 . 13	....	....	7 . 149	17 . 79	31 . 53	29 . 67
49	....	....	7 . 107	....	19 . 71	17 . 97	....

N	100	400	700	1000	1300	1600	1900
51	....	11 . 41	....	....	7 . 193	13 . 127	....
57	....	....	....	7 . 151	23 . 59	....	19 . 103
61	7 . 23	....	....	....	....	11 . 151	37 . 53
63	....	....	7 . 109	....	29 . 47	....	13 . 151
67	....	....	13 . 59	11 . 97	....	....	7 . 281
69	13 . 13	7 . 67	....	....	37 . 37	....	11 . 179
73	....	11 . 43	....	29 . 37	....	7 . 239	....
79	....	....	19 . 41	13 . 83	7 . 197	23 . 73	....
81	....	13 . 37	11 . 71	23 . 47	....	41 . 41	7 . 283
87	11 . 17	....	....	....	19 . 73	7 . 241	....
91	....	....	7 . 113	....	13 . 107	19 . 89	11 . 181
93	....	17 . 29	13 . 61	....	7 . 199	....	....
97	....	7 . 71	....	....	11 . 127	....	....
99	....	....	17 . 47	7 . 157	....	....	....

N	200	500	800	1100	1400	1700	2000
3	7 . 29	....	11 . 73	....	23 . 61	13 . 131	....
9	11 . 19	....	....	....	....	....	7 . 7 . 41
11	....	7 . 73	....	11 . 101	17 . 83	29 . 59	....
17	7 . 31	11 . 47	19 . 43	....	13 . 109	17 . 101	....
21	13 . 17	....	....	19 . 59	7 . 7 . 29	....	43 . 47
23	....	....	....	....	....	....	7 . 17 . 17
27	....	17 . 31	....	7 . 7 . 23	....	11 . 157	....
29	....	23 . 23	....	....	....	7 . 13 . 19	....
33	....	13 . 41	7 . 7 . 17	11 . 103	....	....	19 . 107
39	....	7 . 7 . 11	....	17 . 67	....	37 . 47	....
41	....	....	29 . 29	7 . 163	11 . 131	....	13 . 157
47	13 . 19	....	7 . 11 . 11	31 . 37	....	....	23 . 89
51	....	19 . 29	23 . 37	....	....	17 . 103	7 . 293
53	11 . 23	7 . 79	....	....	....	....	....
57	....	....	....	13 . 89	31 . 47	7 . 251	11 . 11 . 17
59	7 . 37	13 . 43	....	19 . 61	....	....	29 . 71
63	....	....	....	....	7 . 11 . 19	41 . 43	....
69	....	....	11 . 79	7 . 167	13 . 113	29 . 61	....
71	....	....	13 . 67	....	....	7 . 11 . 23	19 . 109
77	....	....	....	11 . 107	7 . 211	....	31 . 67
81	....	7 . 83	....	....	....	13 . 137	....
83	....	11 . 53	....	7 . 13 . 13	....	....	....
87	7 . 41	....	....	....	....	....	....
89	17 . 17	19 . 31	7 . 127	29 . 41	....	....	....
93	....	....	19 . 47	....	....	11 . 163	7 . 13 . 23
99	13 . 23	....	29 . 31	11 . 109	....	7 . 257	....

N	2100	2400	2700	3000	3300	3600	3900
1	11 . 191	7. 7. 7. 7	37 . 73	....	....	13 . 277	47 . 83
7	7. 7. 43	29 . 83	....	31 . 97	....	....	....
11	....	....	....	....	7. 11. 43	23 . 157	....
13	....	19 . 127	....	23 . 131	....	....	7. 13. 43
17	29 . 73	....	11. 13. 19	7 . 431	31 . 107	....	....
19	13 . 163	41 . 59	....	....	....	7. 11. 47	....
23	11 . 193	....	7 . 389	....	....	....	....
29	....	7 . 347	....	13 . 233	....	19 . 191	....
31	....	11. 13. 17	....	7 . 433	....	....	....
37	....	....	7. 17. 23	....	47 . 71	....	31 . 127
41	....	....	....	....	13 . 257	11 . 331	7 . 563
43	....	7 . 349	13 . 211	17 . 179	....	....	....
47	19 . 113	....	41 . 67	11 . 277	....	7 . 521	....
49	7 . 307	31 . 79	....	....	17 . 197	41 . 89	11 . 359
53	....	11 . 223	....	43 . 71	7 . 479	13 . 281	59 . 67
59	17 . 127	....	31 . 89	7. 19. 23	....	....	37 . 107
61	....	23 . 107	11 . 251	....	....	7 . 523	17 . 233
67	11 . 197	....	....	....	7. 13. 37	19 . 193	....
71	13 . 167	7 . 353	17 . 163	37 . 83	....	....	11. 19. 19
73	41 . 53	....	47 . 59	7 . 439	....	....	29 . 137
77	7 . 311	....	....	17 . 181	11 . 307	....	41 . 97
79	....	37 . 67	7 . 397	....	31 . 109	13 . 283	23 . 173
83	37 . 59	13 . 191	11. 11. 23	....	17 . 199	29 . 127	7 . 569
89	11 . 199	19 . 131	....	....	....	7. 17. 31	....
91	7 . 313	47 . 53	....	11 . 281	....	....	13 . 307
97	13. 13. 13	11 . 227	....	19 . 163	43 . 79	....	7 . 571

N	2200	2500	2800	3100	3400	3700	4000
1	31 . 71	41 . 61	....	7 . 443	19 . 179	....	....
3	....	....	....	29 . 107	41 . 83	7. 23. 23	....
7	....	23 . 109	7 . 401	13 . 239	....	11 . 337	....
9	47 . 47	13 . 193	53 . 53	....	7 . 487	....	19 . 211
13	....	7 . 359	29 . 97	11 . 283	....	47 . 79	....
19	7 . 317	11 . 229	....	....	13 . 263	....	....
21	....	....	7. 13. 31	....	11 . 311	61 . 61	....
27	17 . 131	7. 19. 19	11 . 257	53 . 59	23 . 149	....	....
31	23 . 97	....	19 . 149	31 . 101	47 . 73	7. 13. 41	29 . 139
33	7. 11. 29	17 . 149	....	13 . 241	....	....	37 . 109
37	....	43 . 59	....	....	7 . 491	37 . 101	11 . 367
39	....	....	17 . 167	43 . 73	19 . 181	....	7 . 577
43	....	....	....	7 . 449	11 . 313	19 . 197	13 . 311
49	13 . 173	....	7. 11. 37	47 . 67	....	23 . 163	....

N	2200	2500	2800	3100	3400	3700	4000
51	....	....	....	23 . 137	7 . 17.29	11. 11.31	....
57	37 . 61	....	....	7. 11. 41	....	13. 17.17	....
61	7. 17. 19	13 . 197	....	29 . 109	....	....	31 . 131
63	31 . 73	11 . 233	7 . 409	....	....	53 . 71	17 . 239
67	....	17 . 151	47 . 61	....	....	....	7. 7. 83
69	....	7 . 367	19 . 151	....	....	....	13 . 313
73	....	31 . 83	13. 13.17	19 . 167	23 . 151	7.7.7.11	....
79	43 . 53	....	....	11. 17.17	7. 7. 71	....	....
81	....	29 . 89	43 . 67	....	59 . 59	19 . 199	7 .11. 53
87	....	13 . 199	....	....	11 . 317	7 . 541	61 . 67
91	29 . 79	....	7. 7. 59	....	....	17 . 223	....
93	....	....	11 . 263	31 . 103	7 . 499	....	....
97	....	7. 7. 53	....	23 . 139	13 . 269	....	17 . 241
99	11. 11. 19	23 . 113	13 . 223	7 . 457	....	29 . 131	....

N	2300	2600	2900	3200	3500	3800	4100
3	7. 7. 47	19 . 137	....	....	31 . 113	....	11 . 373
9	....	....	....	....	11. 11.29	13 . 293	7 . 587
11	....	7 . 373	41 . 71	13. 13.19	....	37 . 103	....
17	7 . 331	....	....	....	....	11 . 347	23 . 179
21	11 . 211	....	23 . 127	....	7 . 503	....	13 . 317
23	23 . 101	43 . 61	37 . 79	11 . 293	13 . 271	....	7 .19. 31
27	13 . 179	37 . 71	....	7 . 461	....	43 . 89	....
29	17 . 137	11 . 239	29 . 101	....	....	7 . 547	....
33	....	....	7 . 419	53 . 61	....	....	....
39	....	7. 13. 29	....	41 . 79	....	11 . 349	....
41	....	19 . 139	17 . 173	7 . 463	....	23 . 167	41 . 101
47	....	....	7 . 421	17 . 191	....	....	11. 13.29
51	....	11 . 241	13 . 227	....	53 . 67	....	7 . 593
53	13 . 181	7 . 379	....	....	11. 17.19	....	....
57	....	....	....	....	....	7 .19. 29	....
59	7 . 337	....	11 . 269	....	....	17 . 227	....
63	17 . 139	....	....	13 . 251	7 . 509	....	23 . 181
69	23 . 103	17 . 157	....	7 . 467	43 . 83	53 . 73	11 . 379
71	....	....	....	....	....	7. 7. 79	43 . 97
77	....	....	13 . 229	29 . 113	7. 7. 73	....	....
81	....	7 . 383	11 . 271	17 . 193	....	....	37 . 113
83	....	....	19 . 157	7. 7. 67	....	11 . 353	47 . 89
87	7. 11. 31	....	29 . 103	19 . 173	17 . 211	13. 13.23	53 . 79
89	....	....	7. 7. 61	11. 13.23	37 . 97	....	59 . 71
93	....	....	41 . 73	37 . 89	....	17 . 229	7 . 599
99	....	....	....	....	59 . 61	7 . 557	13. 17. 19

N	4200	4500	4800	5100	5400	5700	6000
1	....	7 . 643	....	....	11 . 491	....	17 . 353
7	7 . 601	....	11. 19. 23	....	....	13 . 439	....
11	....	13 . 347	17 . 283	19 . 269	7 . 773	....	....
13	11 . 383	....	....	....	....	29 . 197	7 . 859
17	....	....	....	7. 17. 43	....	....	11 . 547
19	....	....	61 . 79	....	....	7. 19. 43	13 . 463
23	41 . 103	....	7. 13. 53	47 . 109	11. 17.29	59 . 97	19 . 317
29	....	7 . 647	11 . 439	23 . 223	61 . 89	17 . 337	....
31	....	23 . 197	....	7 . 733	....	11 . 521	37 . 163
37	19 . 223	13 . 349	7 . 691	11 . 467	....	....	....
41	....	19 . 239	47 . 103	53 . 97	....	....	7 . 863
43	....	7. 11. 59	29 . 167	37 . 139	....	....	....
47	31 . 137	....	37 . 131	....	13 . 419	7 . 821	....
49	7 . 607	....	13 . 373	19 . 271	....	....	23 . 263
53	....	29 . 157	23 . 211	....	7. 19. 41	11 . 523	....
59	....	47 . 97	43 . 113	7. 11. 67	53 . 103	13 . 443	73 . 83
61	....	....	....	13 . 397	43 . 127	7 . 823	11. 19.29
67	17 . 251	....	31 . 157	....	7. 11. 71	73 . 79	....
71	....	7 . 653	....	....	....	29 . 199	13 . 467
73	....	17 . 269	11 . 443	7 . 739	13 . 421	23 . 251	....
77	7. 13. 47	23 . 199	....	31 . 167	....	53 . 109	59 . 103
79	11 . 389	19 . 241	7. 17. 41	....	....	....	....
83	....	....	19 . 257	71 . 73	....	....	7. 11. 79
89	....	13 . 353	....	....	11 . 499	7 . 827	....
91	7 . 613	....	67 . 73	29 . 179	17. 17.19	....	....
97	....	....	59 . 83	....	23 . 239	11. 17.31	7. 13. 67

N	4300	4600	4900	5200	5500	5800	6100
1	11. 17.23	43 . 107	13. 13.29	7 . 743	....	....	....
3	13 . 331	....	....	11. 11.43	....	7 . 829	17 . 359
7	59 . 73	17 . 271	7 . 701	41 . 127	....	....	31 . 197
9	31 . 139	11 . 419	....	....	7 . 787	37 . 157	41 . 149
13	19 . 227	7 . 659	17. 17.17	13 . 401	37 . 149	....	....
19	7 . 617	31 . 149	....	17 . 307	....	11. 23.23	29 . 211
21	29 . 149	....	7. 19. 37	23 . 227	....	....	....
27	....	7 . 661	13 . 379	....	....	....	11 . 557
31	61 . 71	11 . 421	....	....	....	7.7. 7. 17	....
33	7 . 619	41 . 113	....	....	11 . 503	19 . 307	....
37	....	....	....	....	7. 7. 113	13 . 449	17. 19.19
39	....	....	11 . 449	13. 13.31	29 . 191	....	7 . 877
43	43 . 101	....	....	7. 7. 107	23 . 241	....	....
49	....	....	7. 7. 101	29 . 181	31 . 179	....	11. 13.43

N	4300	4600	4900	5200	5500	5800	6100
51	19 . 229	....	....	59 . 89	7 . 13 . 61	....	....
57	....	....	....	7 . 751	....	....	47 . 131
61	7 . 7 . 89	59 . 79	11 . 11 . 41	....	67 . 83	....	61 . 101
63	....	....	7 . 709	19 . 277	....	11 . 13 . 41	....
67	11 . 397	13 . 359	....	23 . 229	19 . 293	....	7 . 881
69	17 . 257	7 . 23 . 29	....	11 . 479	....	....	31 . 199
73	....	....	....	....	....	7 . 839	....
79	29 . 151	....	13 . 383	....	7 . 797	....	37 . 167
81	13 . 337	31 . 151	17 . 293	....	....	....	7 . 883
87	41 . 107	43 . 109	....	17 . 311	37 . 151	7 . 29 . 29	23 . 269
91	....	....	7 . 23 . 31	11 . 13 . 37	....	43 . 137	41 . 151
93	23 . 191	13 . 19 . 19	....	67 . 79	7 . 17 . 47	71 . 83	11 . 563
97	....	7 . 11 . 61	19 . 263	....	29 . 193	....	....
99	53 . 83	37 . 127	....	7 . 757	11 . 509	17 . 347	....

N	4400	4700	5000	5300	5600	5900	6200
3	7 . 17 . 37	....	....	....	13 . 431	....	....
9	....	17 . 277	....	....	71 . 79	19 . 311	7 . 887
11	11 . 401	7 . 673	....	47 . 113	31 . 181	23 . 257	....
17	7 . 631	53 . 89	29 . 173	13 . 409	41 . 137	61 . 97	....
21	....	....	....	17 . 313	7 . 11 . 73	31 . 191	....
23	....	....	....	....	....	....	7 . 7 . 127
27	19 . 233	29 . 163	11 . 457	7 . 761	17 . 331	....	13 . 479
29	43 . 103	....	47 . 107	73 . 73	13 . 433	7 . 7 . 11 . 11	....
33	11 . 13 . 31	....	7 . 719	....	43 . 131	17 . 349	23 . 271
39	23 . 193	7 . 677	....	19 . 281	....	....	17 . 367
41	....	11 . 431	71 . 71	7 . 7 . 109	....	13 . 457	9 . 79
47	....	47 . 101	7 . 7 . 103	....	....	19 . 313	....
51	....	....	....	....	....	11 . 541	7 . 19 . 47
53	61 . 73	7 . 7 . 97	31 . 163	53 . 101	....	....	13 . 13 . 37
57	....	67 . 71	13 . 389	11 . 487	....	7 . 23 . 37	....
59	7 . 7 . 7 . 13	....	....	23 . 233	....	59 . 101	11 . 569
63	....	11 . 433	61 . 83	31 . 173	7 . 809	67 . 89	....
69	41 . 109	19 . 251	37 . 137	7 . 13 . 59	....	47 . 127	....
71	17 . 263	13 . 367	11 . 461	41 . 131	53 . 107	7 . 853	....
77	11 . 11 . 37	17 . 281	....	19 . 283	7 . 811	43 . 139	....
81	....	7 . 683	....	....	13 . 19 . 23	....	11 . 571
83	....	....	13 . 17 . 23	7 . 769	....	31 . 193	61 . 103
87	7 . 641	....	....	....	11 . 11 . 47	....	....
89	67 . 67	....	7 . 727	17 . 317	....	53 . 113	19 . 331
93	....	....	11 . 463	....	....	13 . 461	7 . 29 . 31
99	11 . 409	....	....	....	41 . 139	7 . 857	....

N	6300	6600	6900	7200	7500	7800	8100
1	....	7 · 23 · 41	67 · 103	19 · 379	13 · 577	29 · 269	....
7	7 · 17 · 53	....	....	....	....	37 · 211	11 · 11 · 67
11	....	11 · 601	....	....	7 · 29 · 37	73 · 107	....
13	59 · 107	17 · 389	31 · 223	....	11 · 683	13 · 601	7 · 19 · 61
17	....	13 · 509	....	7 · 1031	....	....	....
19	71 · 89	....	11 · 17 · 37	....	73 · 103	7 · 1117	23 · 353
23	....	37 · 179	7 · 23 · 43	31 · 233	....	....	....
29	....	7 · 947	13 · 13 · 41	....	....	....	11 · 739
31	13 · 487	19 · 349	29 · 239	7 · 1033	17 · 443	41 · 191	47 · 173
37	....	....	7 · 991	....	....	17 · 461	79 · 103
41	17 · 373	29 · 229	11 · 631	13 · 557	....	....	7 · 1163
43	....	7 · 13 · 73	53 · 131	....	19 · 397	11 · 23 · 31	17 · 479
47	11 · 577	17 · 17 · 23	....	....	....	7 · 19 · 59	....
49	7 · 907	61 · 109	....	11 · 659	....	47 · 167	29 · 281
53	....	....	17 · 409	....	7 · 13 · 83	....	31 · 263
59	....	....	....	7 · 17 · 61	....	29 · 271	41 · 199
61	....	....	....	53 · 137	....	7 · 1123	....
67	....	59 · 113	....	13 · 13 · 43	7 · 23 · 47	....	....
71	23 · 277	7 · 953	....	11 · 661	67 · 113	17 · 463	....
73	....	....	19 · 367	7 · 1039	....	....	11 · 743
77	7 · 911	11 · 607	....	19 · 383	....	....	13 · 17 · 37
79	....	....	7 · 997	29 · 251	11 · 13 · 53	....	....
83	13 · 491	41 · 163	....	....	....	....	7 · 7 · 167
89	....	....	29 · 241	37 · 197	....	7 · 7 · 7 · 23	19 · 431
91	7 · 11 · 83	....	....	23 · 317	....	13 · 607	....
97	....	37 · 181	....	....	71 · 107	53 · 149	7 · 1171

N	6400	6700	7000	7300	7600	7900	8200
1	37 · 173	....	....	7 · 7 · 149	11 · 691	....	59 · 139
3	19 · 337	....	47 · 149	67 · 109	....	7 · 1129	13 · 631
7	43 · 149	19 · 353	7 · 7 · 11 · 13	....	....	....	29 · 283
9	13 · 17 · 29	....	43 · 163	....	7 · 1087	11 · 719	....
13	11 · 11 · 53	7 · 7 · 137	....	71 · 103	23 · 331	41 · 193	43 · 191
19	7 · 7 · 131	....	....	13 · 563	19 · 401	....	....
21	....	11 · 13 · 47	7 · 17 · 59	....	....	89 · 89	....
27	....	7 · 31 · 31	....	17 · 431	29 · 263	....	19 · 433
31	59 · 109	53 · 127	79 · 89	....	13 · 587	7 · 11 · 103	....
33	7 · 919	....	13 · 541	....	17 · 449	....	....
37	41 · 157	....	31 · 227	11 · 23 · 29	7 · 1091	....	....
39	47 · 137	23 · 293	....	41 · 179	....	17 · 467	7 · 11 · 107
43	17 · 379	11 · 613	....	7 · 1049	....	13 · 13 · 47	....
49	....	17 · 397	7 · 19 · 53	....	....	....	73 · 113

N	6400	6700	7000	7300	7600	7900	8200
51	....	43 · 157	11 · 641	....	7 · 1093	....	37 · 223
57	11 · 587	29 · 233	....	7 · 1051	13 · 19 · 31	73 · 109	23 · 359
61	7 · 13 · 71	....	23 · 307	17 · 433	47 · 163	19 · 419	11 · 751
63	23 · 281	....	7 · 1009	37 · 199	79 · 97	....	....
67	29 · 223	67 · 101	37 · 191	53 · 139	11 · 17 · 41	31 · 257	7 · 1181
69	....	7 · 967	....	....	....	13 · 613	....
73	....	13 · 521	11 · 643	73 · 101	....	7 · 17 · 67	....
79	11 · 19 · 31	....	....	47 · 157	7 · 1097	79 · 101	17 · 487
81	....	....	73 · 97	11 · 11 · 61	....	23 · 347	7 · 7 · 13 · 13
87	13 · 499	11 · 617	19 · 373	83 · 89	....	7 · 7 · 163	....
91	....	....	7 · 1013	19 · 389	....	61 · 131	....
93	43 · 151	....	41 · 173	....	7 · 7 · 157	....	....
97	73 · 89	7 · 971	47 · 151	13 · 569	43 · 179	11 · 727	....
99	67 · 97	13 · 523	31 · 229	7 · 7 · 151	....	19 · 421	43 · 193

N	6500	6800	7100	7400	7700	8000	8300
3	7 · 929	....	....	11 · 673	....	53 · 151	19 · 19 · 23
9	23 · 283	11 · 619	....	31 · 239	13 · 593	....	7 · 1187
11	17 · 383	7 · 7 · 139	13 · 547	....	11 · 701	....	....
17	7 · 7 · 7 · 19	17 · 401	11 · 647	....	....	....	....
21	....	19 · 359	....	41 · 181	7 · 1103	13 · 617	53 · 157
23	11 · 593	....	17 · 419	13 · 571	....	71 · 113	7 · 29 · 41
27	61 · 107	....	....	7 · 1061	....	23 · 349	11 · 757
29	....	....	....	17 · 19 · 23	59 · 131	7 · 31 · 37	....
33	47 · 139	....	7 · 1019	....	11 · 19 · 37	29 · 277	13 · 641
39	13 · 503	7 · 977	11 · 11 · 59	43 · 173	71 · 109	....	31 · 269
41	31 · 211	....	37 · 193	7 · 1063	....	11 · 17 · 43	19 · 439
47	....	41 · 167	7 · 1021	11 · 677	61 · 127	13 · 619	17 · 491
51	....	13 · 17 · 31	....	....	23 · 337	83 · 97	7 · 1193
53	....	7 · 11 · 89	23 · 311	29 · 257	....	....	....
57	79 · 83	....	17 · 421	....	....	7 · 1151	61 · 137
59	7 · 937	19 · 19 · 19	....	....	....	....	13 · 643
63	....	....	13 · 19 · 29	17 · 439	7 · 1109	11 · 733	....
69	....	....	67 · 107	7 · 11 · 97	17 · 457	....	....
71	....	....	71 · 101	31 · 241	19 · 409	7 · 1153	11 · 761
77	....	13 · 23 · 23	....	....	7 · 11 · 101	41 · 197	....
81	....	7 · 983	43 · 167	....	31 · 251	....	17 · 17 · 29
83	29 · 227	....	11 · 653	7 · 1069	43 · 181	59 · 137	83 · 101
87	7 · 941	71 · 97	....	....	13 · 599	....	....
89	11 · 599	83 · 83	7 · 13 · 79	....	....	....	....
93	19 · 347	61 · 113	....	59 · 127	....	....	7 · 11 · 109
99	....	....	23 · 313	....	11 · 709	7 · 13 · 89	37 · 227

N	8400	8700	9000	9300	9600	9900	10200
1	31 . 271	7. 11. 113	....	71 . 131	....	....	101 . 101
7	7 . 1201	....	....	41 . 227	13 . 739	....	59 . 173
11	13 . 647	31 . 281	....	....	7 . 1373	11. 17. 53	....
13	47 . 179	....	....	67 . 139	....	23 . 431	7 . 1459
17	19 . 443	23 . 379	71 . 127	7. 11. 11. 11	59 . 163	47 . 211	17 . 601
19	....	....	29 . 311	....	....	7. 13. 109	11 . 929
23	....	11. 13. 61	7 . 1289	....	....	....	....
29	....	7. 29. 43	....	19 . 491	....	....	53 . 193
31	....	....	11 . 821	7. 31. 43	....	....	13 . 787
37	11. 13. 59	....	7 . 1291	....	23 . 419	19 . 523	29 . 353
41	23 . 367	....	....	....	31 . 311	....	7. 7. 11. 19
43	....	7 . 1249	....	....	....	61 . 163	....
47	....	....	83 . 109	13 . 719	11 . 877	7. 7. 7. 29	....
49	7. 17. 71	13 . 673	....	....	....	....	37 . 277
53	79 . 107	....	11 . 823	47 . 199	7. 7. 197	37 . 269	....
59	11 . 769	19 . 461	....	7. 7. 191	13 . 743	23 . 433	....
61	....	....	13. 17. 41	11. 23. 37	....	7 . 1423	31 . 331
67	....	11 . 797	....	17. 19. 29	7 . 1381	....	....
71	43 . 197	7. 7. 179	47 . 193	....	19 . 509	13. 13. 59	....
73	37 . 229	31 . 283	43 . 211	7. 13. 103	17 . 569	....	....
77	7. 7. 173	67 . 131	29 . 313	....	....	11 . 907	43 . 239
79	61 . 139	....	7 . 1297	83 . 113	....	17 . 587	19 . 541
83	17 . 499	....	31 . 293	11 . 853	23 . 421	67 . 149	7. 13. 113
89	13 . 653	11. 17. 47	61 . 149	41 . 229	....	7 . 1427	....
91	7 . 1213	59 . 149	....	....	11 . 881	97 . 103	41 . 251
97	29 . 293	19 . 463	11 . 827	....	....	13 . 769	7 . 1471

N	8500	8800	9100	9400	9700	10000	10300
1	....	13 . 677	19 . 479	7. 17. 79	89 . 109	73 . 137	....
3	11 . 773	....	....	....	31 . 313	7 . 1429	....
7	47 . 181	....	7 . 1301	23 . 409	17 . 571	....	11 . 937
9	67 . 127	23 . 383	....	97 . 97	7. 19. 73	....	13. 13. 61
13	....	7 . 1259	13 . 701	....	11 . 883	17. 19. 31	....
19	7 . 1217	....	11 . 829	....	....	43 . 233	17 . 607
21	....	....	7 . 1303	....	....	11 . 911	....
27	....	7. 13. 97	....	11 . 857	71 . 137	37 . 271	23 . 449
31	19 . 449	....	23 . 397	....	37 . 263	7 . 1433	....
33	7. 23. 53	11. 11. 73	....	....	....	79 . 127	....
37	....	....	....	....	7. 13. 107	....	....
39	....	....	13. 19. 37	....	....	....	7. 7. 211
43	....	37 . 239	41 . 223	7. 19. 71	....	11. 11. 83	....
49	83 . 103	....	7 . 1307	11 . 859	....	13 . 773	79 . 131

N	8500	8800	9100	9400	9700	10000	10300
51	17 . 503	53 . 167	....	13 . 727	7. 7. 199	19. 23.23	11 . 941
57	43 . 199	17 . 521	....	7. 7. 193	11 . 887	89 . 113	....
61	7 . 1223	....	....	....	43 . 227	....	13 . 797
63	....	....	7.7.11.17	....	13 . 751	29 . 347	43 . 241
67	13 . 659	....	89 . 103	....	....	....	7 . 1481
69	11. 19. 41	7. 7. 181	53 . 173	17 . 557	....	....	....
73	....	19 . 467	....	....	29 . 337	7 . 1439	11. 23.41
79	23 . 373	13 . 683	67 . 137	....	7. 11.127	....	97 . 107
81	....	83 . 107	....	19 . 499	....	17 . 593	7 . 1483
87	31 . 277	....	....	53 . 179	....	7. 11.131	13. 17.47
91	11. 11. 71	17 . 523	7. 13.101	....	....	....	....
93	13 . 661	....	29 . 317	11 . 863	7 . 1399	....	19 . 547
97	....	7. 31. 41	17 . 541	....	97 . 101	23 . 439	37 . 281
99	....	11 . 809	....	7. 23. 59	41 . 239	....	....

N	8600	8900	9200	9500	9800	10100	10400
3	7 . 1229	29 . 307	....	13. 17.43	....	....	101. 103
9	....	59 . 151	....	37 . 257	17 . 577	11 . 919	7 . 1487
11	79 . 109	7 . 19.67	61 . 151	....	....	....	29 . 359
17	7 . 1231	37 . 241	13 . 709	31 . 307	....	67 . 151	11 . 947
21	37 . 233	11 . 811	....	....	7. 23. 61	29 . 349	17 . 613
23	....	....	23 . 401	89 . 107	11. 19.47	53 . 191	7 . 1489
27	....	79 . 113	....	7 . 1361	31 . 317	13. 19.41	....
29	....	....	11 . 839	13 . 733	....	7 . 1447	....
33	89 . 97	....	7 . 1319	....	....	....	....
39	53 . 163	7 . 1277	....	....	....	....	11. 13.73
41	....	....	....	7. 29. 47	13 . 757	....	53 . 197
47	....	23 . 389	7 . 1321	....	43 . 229	73 . 139	31 . 337
51	41 . 211	....	11. 29.29	....	....	....	7 . 1493
53	17 . 509	7 . 1279	19 . 487	41 . 233	59 . 167	11. 13.71	....
57	11 . 787	13. 13.53	....	19 . 503	....	7 . 1451	....
59	7 . 1237	17. 17.31	47 . 197	11. 11.79	....	....	....
63	....	....	59 . 157	73 . 131	7 . 1409	....	....
69	....	....	13. 23.31	7 . 1367	71 . 139	....	19. 19.29
71	13. 23.29	....	73 . 127	17 . 563	....	7 . 1453	37 . 283
77	....	47 . 191	....	61 . 157	7. 17. 83	....	....
81	....	7 . 1283	....	11. 13.67	41 . 241	....	47 . 223
83	19 . 457	13 . 691	....	7. 37. 37	....	17 . 599	11 . 953
87	7. 17. 73	11. 19.43	37 . 251	....	....	61 . 167	....
89	....	89 . 101	7 . 1327	43 . 223	11. 29.31	23 . 443	17 . 617
93	....	17. 23.23	....	53 . 181	13 . 761	....	7 . 1499
99	....	....	17 . 547	29 . 331	19 . 521	7 . 31.47	....

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000
11	121	1331	14641	161051	1771561
12	144	1728	20736	248832	2985984
13	169	2197	28561	371293	4826809
14	196	2744	38416	537824	7529536
15	225	3375	50625	759375	11390625
16	256	4096	65536	1048576	16777216
17	289	4913	83521	1419857	24137569
18	324	5832	104976	1889568	34012224
19	361	6859	130321	2476099	47045881
20	400	8000	160000	3200000	64000000
21	441	9261	194481	4084101	85766121
22	484	10648	234256	5153632	113379904
23	529	12167	279841	6436343	148035889
24	576	13824	331776	7962624	191102976
25	625	15625	390625	9765625	244140625
26	676	17576	456976	11881376	308915776
27	729	19683	531441	14348907	387420489
28	784	21952	614656	17210368	481890304
29	841	24389	707281	20511149	594823321
30	900	27000	810000	24300000	729000000
31	961	29791	923521	28629151	887503681
32	1024	32768	1048576	33554432	1073741824
33	1089	35937	1185921	39135393	1291467969
34	1156	39304	1336336	45435424	1544804416
35	1225	42875	1500625	52521875	1838265625
36	1296	46656	1679616	60466176	2176782336
37	1369	50653	1874161	69343957	2565726409
38	1444	54872	2085136	79235168	3010936384
39	1521	59319	2313441	90224199	3518743761
40	1600	64000	2560000	102400000	4096000000
41	1681	68921	2825761	115856201	4750104241
42	1764	74088	3111696	130691232	5489031744
43	1849	79507	3418801	147008443	6321363049
44	1936	85184	3748096	164916224	7256313856
45	2025	91125	4100625	184528125	8303765625
46	2116	97336	4477456	205962976	9474296896
47	2209	103823	4879681	229345007	10779215329
48	2304	110592	5308416	254803968	12230590464
49	2401	117649	5764801	282475249	13841287201
50	2500	125000	6250000	312500000	15625000000

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
51	2601	132651	6765201	345025251	17596287801
52	2704	140608	7311616	380204032	19770609664
53	2809	148877	7890481	418195493	22164361129
54	2916	157464	8503056	459165024	24794911296
55	3025	166375	9150625	503284375	27680640625
56	3136	175616	9834496	550731776	30840979456
57	3249	185193	10556001	601692057	34296447249
58	3364	195112	11316496	656356768	38068692544
59	3481	205379	12117361	714924299	42180533641
60	3600	216000	12960000	777600000	46656000000
61	3721	226981	13845841	844596301	51520374361
62	3844	238328	14776336	916132832	56800235584
63	3969	250047	15752961	992436543	62523502209
64	4096	262144	16777216	1073741824	68719476736
65	4225	274625	17850625	1160290625	75418890625
66	4356	287496	18974736	1252332576	82653950016
67	4489	300763	20151121	1350125107	90458382169
68	4624	314432	21381376	1453933568	98867482624
69	4761	328509	22667121	1564031349	107918163081
70	4900	343000	24010000	1680700000	117649000000
71	5041	357911	25411681	1804229351	128100283921
72	5184	373248	26873856	1934917632	139314069504
73	5329	389017	28398241	2073071593	151334226289
74	5476	405224	29986576	2219006624	164206490176
75	5625	421875	31640625	2373046875	177978515625
76	5776	438976	33362176	2535525376	192699928576
77	5929	456533	35153041	2706784157	208422380089
78	6084	474552	37015056	2887174368	225199600704
79	6241	493039	38950081	3077056399	243087455521
80	6400	512000	40960000	3276800000	262144000000
81	6561	531441	43046721	3486784401	282429536481
82	6724	551368	45212176	3707398432	304006671424
83	6889	571787	47458321	3939040643	326940373369
84	7056	592704	49787136	4182119424	351298031616
85	7225	614125	52200625	4437053125	377149515625
86	7396	636056	54700816	4704270176	404567235136
87	7569	658503	57289761	4984209207	433626201009
88	7744	681472	59969536	5277319168	464404086784
89	7921	704969	62742241	5584059449	496981290961
90	8100	729000	65610000	5904900000	531441000000
91	8281	753571	68574961	6240321451	567869252041
92	8464	778688	71639296	6590815232	606355001344
93	8649	804357	74805201	6956883693	646990183449
94	8836	830584	78074896	7339040224	689869781056
95	9025	857375	81450625	7737809375	735091890625
96	9216	884736	84934656	8153726976	782757789696
97	9409	912673	88529281	8587340257	832972004929
98	9604	941192	92236816	9039207968	885842380864
99	9801	970299	96059601	9509900499	941480149401
100	10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000

	0	100	200	300	400
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601
50	2500	22500	62500	122500	202500

	500	600	700	800	900
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	720801	900601
50	302500	422500	562500	722500	902500

	0	100	200	300	400
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23409	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	68121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	83521	151321	239121
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001
100	10000	40000	90000	160000	250000

	500	600	700	800	900
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434281	576081	737881	919681
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	321489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327184	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	990025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001
100	360000	490000	640000	810000	1000000

	0	100	200	300	400
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30956144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84017672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000

	500	600	700	800	900
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000

	0	100	200	300	400
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499
100	1000000	8000000	27000000	64000000	125000000

	500	600	700	800	900
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999
100	216000000	343000000	512000000	729000000	1000000000

	0	100	200	300	400
1	1,000000	10,04988	14,17745	17,34935	20,02498
2	1,414214	09951	21267	37815	04994
3	1,732051	14889	24781	40690	07486
4	2,000000	19804	28286	43560	09975
5	236068	24695	31782	46425	12461
6	449490	29563	35270	49286	14944
7	645751	34408	38749	52142	17424
8	2,828427	39230	42221	54993	19901
9	3,000000	44031	45683	57840	22375
10	162278	10,48809	14,49138	17,60682	20,24846
11	316625	53565	52584	63519	27313
12	464102	58301	56022	66352	29778
13	605551	63015	59452	69181	32240
14	741657	67708	62874	72005	34699
15	3,872983	72381	66288	74824	37155
16	4,000000	77033	69694	77639	39608
17	123106	81665	73092	80449	42058
18	242641	86278	76482	83255	44505
19	358899	90871	79865	86057	46949
20	472136	10,95445	14,83240	17,88854	20,49390
21	582576	11,00000	86607	91647	51828
22	690416	04536	89966	94436	54264
23	795832	09054	93318	17,97220	56696
24	4,898980	13553	14,96663	18,00000	59126
25	5,000000	18034	15,00000	02776	61553
26	099020	22497	15,03330	05547	63977
27	196152	26943	06652	08314	66398
28	291503	31371	09967	11077	68810
29	385166	35782	13275	13836	71231
30	477226	11,40175	15,16575	18,16590	20,73644
31	567764	44552	19868	19341	76054
32	656854	48913	23155	22087	78461
33	744563	53256	26434	24829	80865
34	830952	57584	29706	27567	83267
35	5,916080	61895	32971	30301	85665
36	6,000000	66190	36229	33030	88061
37	082763	70470	39480	35756	90455
38	164414	74734	42725	38478	92845
39	244998	78983	45962	41195	95233
40	324555	83216	15,49193	18,43909	20,97618
41	403124	87434	52417	46619	21,00000
42	480741	91638	55635	49324	02380
43	557439	11,95826	58846	52026	04757
44	633250	12,00000	62050	54724	07131
45	708204	04159	65248	57418	09502
46	782330	08305	68439	60108	11871
47	855655	12436	71623	62794	14237
48	6,928203	16553	74802	65476	16601
49	7,000000	20656	77973	68154	18962
50	7,071068	12,24745	15,81139	18,70829	21,21320

	500	600	700	800	900
1	22,38303	24,51530	26,47640	28,30194	30,01666
2	40536	53569	49528	31960	03331
3	42766	55606	51415	33725	04996
4	44994	57641	53300	35489	06659
5	47221	59675	55184	37252	08322
6	49444	61707	57066	39014	09983
7	51666	63737	58947	40775	11644
8	53886	65766	60827	42534	13304
9	56103	67793	62705	44293	14963
10	22,58318	24,69818	26,64583	28,46050	30,16621
11	60531	71841	66458	47806	18278
12	62742	73863	68333	49561	19934
13	64950	75884	70206	51315	21589
14	67157	77902	72078	53069	23243
15	69361	79919	73948	54820	24897
16	71563	81935	75818	56571	26549
17	73763	83948	77686	58321	28201
18	75961	85961	79552	60070	29851
19	78157	87971	81418	61818	31501
20	22,80351	24,89980	26,83282	28,63564	30,33150
21	82542	91987	85144	65310	34798
22	84732	93993	87006	67054	36445
23	86919	95997	88866	68798	38092
24	89105	24,97999	90725	70540	39737
25	91289	25,00000	92582	72281	41381
26	93469	01999	94439	74022	43025
27	95648	03997	96294	75761	44667
28	22,97825	05993	26 98148	77499	46309
29	23,00000	07987	27,00000	79236	47950
30	02173	25,09980	01851	28,80972	30,49590
31	04344	11971	03701	82707	51229
32	06513	13961	05550	84441	52868
33	08679	15949	07397	86174	54505
34	10844	17936	09243	87906	56141
35	13007	19921	11088	89637	57777
36	15168	21904	12932	91366	59412
37	17326	23886	14774	93095	61046
38	19483	25866	16616	94823	62679
39	21637	27845	18455	96550	64311
40	23,23790	25,29822	27,20294	28,98275	30,65942
41	25941	31798	22132	29,00000	67572
42	28089	33772	23968	01724	69202
43	30236	35745	25803	03446	70831
44	32381	37716	27636	05168	72458
45	34524	39685	29469	06888	74085
46	36664	41653	31300	08608	75711
47	38803	43619	33130	10326	77337
48	40940	45584	34959	12044	78961
49	43075	47548	36786	13760	80584
50	23,45208	25,49510	27,38613	,2915476	30,82207

	0	100	200	300	400
51	7,141428	12,28821	15,84298	18,73499	21,23676
52	211103	32883	87451	76166	26029
53	280110	36932	90597	78829	28380
54	348469	40967	93738	81489	30728
55	416199	44990	15,96872	84144	33073
56	483315	49000	16,00000	86796	35416
57	549834	52996	03122	89444	37756
58	615773	56981	06238	92089	40093
59	681146	60952	09348	94730	42429
60	745967	12,64911	12452	18,97367	21,44761
61	810250	68858	15549	19,00000	47091
62	874008	72792	18641	02630	49419
63	7,937254	76715	21727	05256	51743
64	8,000000	80625	24808	07878	54066
65	062258	84523	16,27882	10497	56386
66	124038	88410	30951	13113	58703
67	185353	92285	34013	15724	61018
68	246211	12,96148	37071	18333	63331
69	306624	13,00000	40122	20937	65641
70	366600	03841	43168	19,23538	21,67948
71	426150	07670	46208	26136	70253
72	485281	11488	49242	28730	72556
73	544004	15295	52271	31321	74856
74	602325	19091	55295	33908	77154
75	660254	22876	16,58312	36492	79449
76	717798	26650	61325	39072	81742
77	774964	30413	64332	41649	84033
78	831761	34166	67333	44222	86321
79	888194	37909	70329	46792	88607
80	8,944272	13,41641	16,73320	19,49359	21,90890
81	9,000000	45362	76305	51922	93171
82	055385	49074	79286	54482	95450
83	110434	52775	82260	57039	21,97726
84	165151	56466	85230	59592	22,00000
85	219545	60147	88194	62142	02272
86	273619	63818	91153	64688	04541
87	327379	67479	94107	67232	06808
88	380832	71131	16,97056	69772	09072
89	433981	74773	17,00000	72308	11334
90	486833	78405	02939	19,74842	13594
91	539392	82027	05872	77372	15852
92	591663	85641	08801	79899	18107
93	643651	89244	11724	82423	20360
94	695360	92839	14643	84943	22611
95	746794	13,96424	17556	87461	24860
96	797959	14,00000	20465	89975	27106
97	848858	03567	23369	92486	29350
98	899495	07125	26268	94994	31591
99	9,949874	10674	29162	19,97498	33831
100	10,000000	14,14214	17,32051	20,00000	22,36068

	500	600	700	800	900
51	23,47339	25,51470	27,40438	29,17190	30,83829
52	49468	53429	42262	18904	85450
53	51595	55386	44085	20616	87070
54	53720	57342	45906	22328	88689
55	55844	59297	47726	24038	90307
56	57965	61250	49545	25748	91925
57	60085	63201	51363	27456	93542
58	62202	65151	53180	29164	95158
59	64318	67100	54995	30870	96773
60	23,66432	25,69047	27,56810	29,32576	30,98387
61	68544	70992	58623	34280	31,00000
62	70654	72936	60435	35984	01612
63	72762	74879	62245	378 6	02224
64	74868	76820	64055	39388	04835
65	76973	78759	65863	41088	06445
66	79075	80698	67671	42788	08054
67	81176	82634	69476	44486	09662
68	83275	84570	71281	46184	11270
69	85372	86503	73085	47881	12876
70	23,87467	25,88436	27,74887	29,49576	31,14482
71	89561	90367	76689	51271	16087
72	91652	92296	78489	52965	17691
73	93742	94224	80288	54657	19295
74	95830	96151	82086	56349	20897
75	23,97916	25,98076	83882	58040	22499
76	24,00000	26,00000	85678	59730	24100
77	02082	01922	87472	61419	25700
78	04163	03843	89265	63106	27299
79	06242	05763	91057	64793	28898
80	08319	07681	92848	29,66479	31,30495
81	10394	09598	94638	68164	32092
82	12468	11513	96426	69848	33688
83	14539	13427	27,98214	71532	35283
84	16609	15339	28,00000	73214	36877
85	24,18677	26,17250	01785	74895	38471
86	20744	19160	03569	76575	40064
87	22808	21068	05352	78255	41656
88	24871	22975	07134	79933	43247
89	26932	24881	08914	81610	44837
90	28992	26785	10694	29,83287	31,46427
91	31049	28688	12472	84962	48015
92	33105	30589	14249	86637	49603
93	35159	32489	16026	88311	51190
94	37212	34388	17801	89983	52777
95	24 39262	26,36285	28,19574	91655	54362
96	41311	38181	21347	93326	55947
97	43358	40076	23119	94996	57531
98	45404	41969	24889	96665	59114
99	47448	43861	26659	29,98333	60696
100	24,49490	26,45751	28,28427	30,00000	31,62278

	0	100	200	300	400
1	1,000000	4,657010	5,857766	6,701759	7,374198
2	259921	672329	67464	09173	80323
3	442250	687548	77131	16570	86437
4	587401	4,702669	86765	23951	92542
5	709976	17694	5,896369	31316	7,398636
6	817121	32623	5,905941	38664	7,404721
7	1,912931	47459	15482	45997	10795
8	2,000000	62203	24992	53313	16860
9	080084	76856	34472	60614	22914
10	154435	4,791420	43922	67899	28959
11	223980	4,805896	53342	75169	34994
12	289429	20285	62732	82423	41019
13	351335	34588	72093	89661	47034
14	410142	48808	81424	6,796884	53040
15	466212	62944	5,990726	6,804092	59036
16	519842	76999	6,000000	11285	65022
17	571282	4,890973	09245	18462	70999
18	620741	4,904868	18462	25624	76966
19	668402	18685	27650	32771	82924
20	2,714418	32424	36811	39904	88872
21	758924	46087	45944	47021	7,494811
22	802039	59676	55049	54124	7,500741
23	843867	73190	64127	61212	06661
24	884499	4,986631	73178	68286	12572
25	924018	5,000000	82202	75344	18473
26	2,962496	13298	6,091199	82389	24365
27	3,000000	26526	6,100170	89419	30248
28	036589	39684	09115	6,896434	36122
29	072317	52774	18033	6,903436	41987
30	107233	65797	26926	10423	47842
31	141381	78753	35792	17396	53689
32	174802	5,091643	44634	24356	59526
33	207534	5,104469	53449	31301	65355
34	239612	17230	62240	38232	71174
35	271066	29928	71006	45150	76985
36	301927	42563	79747	52053	82787
37	332222	55137	88463	58943	88579
38	361975	67649	6,197154	65820	7,594363
39	391211	80101	6,205822	72683	7,600139
40	3,419952	5,192494	14465	79532	05905
41	448217	5,204828	23084	86368	11663
42	476027	17103	31680	6,993191	17412
43	503398	29322	40252	7,000000	23152
44	530348	41483	48800	06796	28884
45	556893	53588	57325	13579	34607
46	583048	65637	65827	20349	40321
47	608826	77632	74305	27106	46027
48	634241	5,289573	82761	33850	51725
49	659306	5,301459	91195	40580	57414
50	3,684031	5,313293	6,299605	7,047298	7,663094

	500	600	700	800	900
1	7,942293	8,439010	8,883262	9,287044	9,658468
2	47574	43688	87488	90907	62040
3	52848	48361	91706	94767	65610
4	58114	53028	8,896920	9,298624	69176
5	63374	57691	8,900130	9,302478	72740
6	68627	62348	04337	06328	76302
7	73873	67000	08539	10175	79860
8	79112	71647	12737	14019	83417
9	84358	76289	16931	17860	86970
10	89570	80926	21121	21698	90521
11	7,994788	85558	25308	25532	94069
12	8,000000	90185	29490	29363	9,697615
13	05205	94806	33669	33192	9,701158
14	10403	8,499423	37843	37016	04699
15	15595	8,504035	42014	40839	08237
16	20779	08642	46181	44657	11772
17	25957	13243	50344	48473	15305
18	31128	17840	54503	52286	18835
19	36293	22432	58658	56095	22363
20	41452	27019	62810	59902	25888
21	46603	31601	66957	63705	29411
22	51748	36178	71101	67505	32931
23	56886	40750	75241	71302	36449
24	62018	45317	79377	75096	39963
25	67143	49880	83509	78887	43476
26	72263	54437	87637	82675	46986
27	77374	58990	91762	86460	50493
28	82480	63538	8,995883	90242	53998
29	87579	68081	9,000000	94021	57500
30	92672	72619	04113	9,397796	61000
31	8,097759	77152	08223	9,401569	64497
32	8,102839	81681	12329	05339	67992
33	07913	86205	16431	09105	71485
34	12983	90724	20529	12869	74974
35	18041	95238	24624	16630	78462
36	23096	8,599748	28715	20387	81947
37	28145	8,604252	32802	24142	85429
38	33187	08753	36886	27894	88909
39	38223	13248	40966	31642	92386
40	43253	17739	45042	35388	95861
41	48276	22225	49114	39131	9,799334
42	53294	26706	53183	42870	9,802804
43	58306	31183	57248	46607	06271
44	63310	35655	61310	50341	09736
45	68309	40123	65368	54072	13199
46	73302	44586	69422	57800	16659
47	78289	49044	73473	61525	20117
48	83269	53497	77520	65247	23572
49	88244	57947	81563	68966	27025
50	8,193213	8,662390	9,085603	9,472683	9,830476

	0	100	200	300	400
51	3,708430	5,325074	6,307994	7,054004	7,668766
52	732511	36803	16360	60697	74430
53	756286	48481	24704	67377	80086
54	779763	60109	33026	74044	85733
55	802953	71685	41326	80699	91372
56	825862	83213	49604	87341	7,697002
57	848501	5,394691	57861	7,093971	7,702624
58	870877	5,406120	66097	7,100588	08239
59	892997	17502	74311	07194	13845
60	914868	28835	82504	13787	19443
61	936497	40122	90677	20367	25032
62	957892	51362	6,398828	26936	30614
63	3,979057	62556	6,406959	33492	36188
64	4,000000	73704	15069	40037	41753
65	020726	84807	23158	46569	47311
66	041240	5,495865	31228	53090	52861
67	061548	5,506878	39277	59599	58402
68	081655	17848	47306	66096	63936
69	101566	28775	55315	72581	69462
70	121285	39658	63304	79054	74981
71	140818	50499	71274	85516	80490
72	160168	61298	79224	91966	85993
73	179339	72055	87155	7,198405	91488
74	198336	82770	6,495065	7,204832	7,796975
75	217163	5,593445	6,502957	11248	7,802454
76	235824	5,604079	10830	17652	07925
77	254321	14672	18684	24045	13389
78	272659	25226	26519	30427	18845
79	290340	35741	34335	36797	24294
80	4,308870	46216	42133	43156	29735
81	326749	56653	49912	49505	35169
82	344482	67051	57672	55842	40595
83	362071	77411	65414	62167	46013
84	379519	87734	73139	68482	51424
85	396830	5,698019	80844	74786	56828
86	414005	5,708267	88532	81079	62224
87	431048	18479	6,596202	87362	67613
88	447960	28654	6,603855	93633	72994
89	464745	38794	11489	7,299894	78368
90	481405	48897	19106	7,306144	83735
91	497941	58965	26705	12383	89095
92	514357	68999	34287	18611	94447
93	530655	78997	41852	24829	7,899792
94	546836	88960	49400	31037	7,905129
95	562903	5,798891	56930	37234	10460
96	578857	5,808786	64444	43420	15783
97	594701	18648	71940	49597	21099
98	610436	28477	79420	55762	26409
99	626065	38272	86883	61918	31710
100	4,641589	5,848035	6,694330	7,368063	7,937006

	500	600	700	800	900
51	8,198175	8,666831	9,089639	9,476396	9,833924
52	8,203132	71267	93672	80106	37370
53	08082	75697	9,097701	83814	40813
54	13027	80124	9,101727	87518	44254
55	17966	84546	05749	91220	47692
56	22899	88963	09767	94919	51128
57	27825	93376	13782	9,498615	54562
58	32746	8,697784	17793	9,502308	57993
59	37661	8,702188	21801	05998	61422
60	42571	06588	25805	09685	64848
61	47474	10983	29806	13370	68272
62	52372	15373	33803	17052	71694
63	57263	19760	37797	20730	75113
64	62149	24141	41787	24406	78531
65	67029	28519	45774	28080	81945
66	71904	32892	49758	31750	85357
67	76773	37260	53738	35417	88767
68	81636	41625	57714	39082	92175
69	86493	45985	61687	42744	95580
70	91344	50340	65656	46403	9,898983
71	8,296190	54692	69623	50059	9,902384
72	8,301031	59038	73585	53712	05782
73	05865	63381	77544	57363	09178
74	10694	67719	81500	61011	12571
75	15518	72053	85453	64656	15962
76	20335	76383	89402	68298	19351
77	25148	80708	93345	71938	22738
78	29954	85030	9,197290	75575	26122
79	34755	89347	9,201229	79209	29504
80	39551	93659	05164	82840	32884
81	44341	8,797968	09096	86468	36262
82	49126	8,802272	13025	90094	39636
83	53905	06572	16951	93717	43009
84	58678	10868	20873	9,597337	46380
85	63447	15160	24791	9,600955	49747
86	68209	19447	28707	04570	53114
87	72967	23731	32619	08182	56478
88	77719	28010	36528	11791	59839
89	82465	32285	40433	15398	63198
90	87207	36556	44336	19002	66554
91	91942	40823	48234	22603	69910
92	8,396673	45085	52130	26202	73262
93	8,401398	49345	56022	29797	76612
94	06118	53599	59911	33391	79960
95	10833	57849	63797	36981	83305
96	15542	62095	67680	40569	86649
97	20246	66337	71559	44154	89990
98	24945	70576	75435	47737	93329
99	29638	74810	79308	51317	9,996666
100	8,434327	8,879[illegible]40	9,283178	9,654894	10,000000

Verwandlung der Fuße, Zolle, Linien, und Punkte des zwölftheiligen Maßes in Dezimaltheile der Klafter, des Fußes, und des Zolles; wie auch umgekehrt.

Fuß.	= Klaft.	Zoll.	= Klaft.	Lin.	= Klaft.	Punkt	= Klaft.
1	0,1666666	1	0,0138888	1	0,0011574	1	0,0000964
2	0,3333333	2	0,0277777	2	0,0023148	2	0,0001929
3	0,5000000	3	0,0416666	3	0,0034722	3	0,0002893
4	0,6666666	4	0,0555555	4	0,0046296	4	0,0003858
5	0,8333333	5	0,0694444	5	0,0057870	5	0,0004822
6	1,0000000	6	0,0833333	6	0,0069444	6	0,0005787
7	1,1666666	7	0,0972222	7	0,0081018	7	0,0006751
8	1,3333333	8	0,1111111	8	0,0092592	8	0,0007716
9	1,5000000	9	0,1250000	9	0,0104166	9	0,0008680
10	1,6666666	10	0,1388888	10	0,0115740	10	0,0009645
11	1,8333333	11	0,1527777	11	0,0127314	11	0,0010609

Zoll.	= Fuß.	Lin.	= Fuß.	Pkt	= Fuß.	$\frac{1}{12}$ P.	= Fuß.
1	0,0833333	1	0,0069444	1	0,0005787	1	0,0000482
2	0,1666666	2	0,0138888	2	0,0011574	2	0,0000965
3	0,2500000	3	0,0208333	3	0,0017361	3	0,0001447
4	0,3333333	4	0,0277777	4	0,0023148	4	0,0001929
5	0,4166666	5	0,0347222	5	0,0028935	5	0,0002411
6	0,5000000	6	0,0416666	6	0,0034722	6	0,0002894
7	0,5833333	7	0,0486111	7	0,0040509	7	0,0003376
8	0,6666666	8	0,0555555	8	0,0046296	8	0,0003858
9	0,7500000	9	0,0625000	9	0,0052083	9	0,0004340
10	0,8333333	10	0,0694444	10	0,0057870	10	0,0004823
11	0,9166666	11	0,0763888	11	0,0063657	11	0,0005305

Lin	= Zoll.	Pkt	= Zoll.	$\frac{1}{12}$ P.	= Zoll.	$\frac{1}{144}$ P.	= Zoll.
1	0,0833333	1	0,0069444	1	0,0005787	1	0,0000482
2	0,1666666	2	0,0138888	2	0,0011574	2	0,0000965
3	0,2500000	3	0,0208333	3	0,0017361	3	0,0001447
4	0,3333333	4	0,0277777	4	0,0023148	4	0,0001929
5	0,4166666	5	0,0347222	5	0,0028935	5	0,0002411
6	0,5000000	6	0,0416666	6	0,0034722	6	0,0002894
7	0,5833333	7	0,0486111	7	0,0040509	7	0,0003376
8	0,6666666	8	0,0555555	8	0,0046296	8	0,0003858
9	0,7500000	9	0,0625000	9	0,0052083	9	0,0004340
10	0,8333333	10	0,0694444	10	0,0057870	10	0,0004823
11	0,9166666	11	0,0763888	11	0,0063657	11	0,0005305

Inhalt.

Erste Vorlesung, von den Rechnungsarten mit ganzen Größen.

I. Abschnitt, vorläufige Einleitung.

§. 1. Einheit; Zahl. 2. Größe. 3. Mathematik; stetige, unstetige Größe; Arithmetik; Geometrie; reine, angewandte Mathematik, deren Haupttheile; technische Mathematik. 4. bis 8. das Bezeichnen und Aussprechen der Zahlen. 9. bis 11. unbenannte und benannte, ungleichnamige und gleichnamige Zahlen; die einfachste Vergleichung der letztern. 12. Drey Grundsätze.

II. Abschnitt, von der Addition.

§. 13. bis 15. Summe, Addition und deren Bezeichnung. 16. Zwey Grundsätze. 17. und 18. Regeln, und Prüfung der Addition.

III. Abschnitt, von der Subtraktion.

§. 19. bis 21. Differenz, Subtraktion, Minuendus, Subtrahendus, Bezeichnung. 22. Drey Grundsätze. 23. u. 24. Regeln und Prüfung der Subtraktion. 25. Einige Beyspiele zur Anwendung der Addition und Subtraktion.

IV. Abschnitt, von der Multiplikation.

§. 26. bis 28. Multipliziren, Multiplikandus, Multiplikator, Faktoren, Produkt, Bezeichnung, Einmaleins.

§. 29. Zwey Grundsätze. 30. bis 33. Regeln und Prüfung der Multiplikation. 34. Einige Beyspiele zur Anwendung.

V. Abschnitt, von der Division.

§. 35. bis 38. Dividiren, Dividendus, Divisor, Quotient, Bezeichnung; Division einer benannten Zahl durch eine gleichnamig benannte, durch eine unbenannte Zahl. 39. Drey Grundsätze. 40. Unveränderlichkeit des Quotienten in gewissen Fällen bey geändertem Dividendus und Divisor. 41. bis 44. Regeln und Prüfung der Division. 45. Einige Beyspiele zur Anwendung.

VI. Abschnitt, von den Rechnungsarten mit ungleichnamigen Größen, welche gleichnamig gemacht werden können.

§. 46. Benennung und Eintheilung einiger in Rechnungen vorkommenden Dinge. 47. bis 51. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bey solchen ungleichnamigen Dingen.

VII. Abschnitt, von den Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 52. bis 58. Was jeder Buchstab einzeln bedeute? Gemeine und allgemeine Arithmetik. Bezeichnung der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der durch Buchstaben ausgedrückten Größen; Exponent; Koeffizient; algebraische Größe, einnamige, mehrnamige; deren Glieder, gleichnamige, ungleichnamige. 59. u. 60. Entgegengesetzte Größen, positive, negative. 61. bis 67. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der algebraischen Größen. 68. Zerlegung der algebraischen Größen in Faktoren durch mehrere Beyspiele erläutert. 69. Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12; was eine Primzahl sey? 70. Zerlegung einer Zahl in alle einfache und zusammengesetzte Faktoren.

Zwey=

Zweyte Vorlesung, von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

I. Abschnitt, von den Brüchen überhaupt.

§. 71. u. 72. Was ein Bruch sey? dessen Nenner, Zähler, Bezeichnung; eigentlicher, uneigentlicher Bruch. 73. u. 74. Der Werth eines bezeichneten Bruches, und dessen Bestimmung. 75. Verwandlung einer unbenannten ganzen Zahl in einen uneigentlichen, und einer benannten Zahl in einen eigentlichen Bruch. 76. Verwandlung einer ganzen Zahl nebst einem Bruche, in einen einzelnen Bruch. 77. bis 79. Wie sich der Werth eines Bruches verändere, wenn dessen Zähler oder Nenner mit etwas multipliret oder dividiret wird. 80. Abkürzung der Brüche. 81. Das größte gemeinschaftliche Maß von zwey gegebenen Zahlen zu finden. 82. u. 83. Brüche von gleicher, von verschiedener Benennung; letztere auf gleiche Benennung zu bringen. 84. Von mehreren Zahlen das kleinste Vielfache zu finden. 85. Verwandlung eines Bruches in einen andern von gegebenem Nenner oder Zähler. 86. Veränderung des Bruches, wenn zum Zähler und Nenner etwas hinzu addiret, oder davon subtrahiret wird.

II. Abschnitt, von der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Brüche.

§. 87. bis 90. Regeln der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Brüche. 91. Werth eines gebrochenen Bruches. 92. Verwandlung ungleichnamiger Größen in Brüche. 93. Rechnungsarten mit benannten Brüchen. 94. Einige Beyspiele zur Anwendung.

III. Abschnitt, von den Dezimalbrüchen.

§. 95. bis 97. Bezeichnung der Dezimalbrüche; Werthe der Dezimalstellen; Dezimalbrüche auf gleiche Benennung

zu

zu bringen. 98. Verwandlung der gemeinen in Dezimalbrüche. 99. bis 104. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Dezimalbrüche. 105. Den Werth eines benannten Dezimalbruches in Einheiten kleinerer Gattung anzugeben. 106. Abgekürzte Multiplikation und Division der Dezimalbrüche, nebst einigen andern Abkürzungen.

IV. Abschnitt, von zusammenhängenden Brüchen.

§. 107. Entstehung eines zusammenhängenden Bruches. 108. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen zusammenhängenden. 109. Aus den zusammenhängenden Bruche lassen sich mehrere Brüche ableiten, die sich dem wahren Werthe immer mehr und mehr nähern. 110. Großer und wichtiger Nutzen davon bey Abkürzung der Brüche. 111. und 112. Praktische Regel um die abgekürzten Brüche abzuleiten sowohl bey eigentlichen, als auch bey uneigentlichen Brüchen.

Dritte Vorlesung, von den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

I. Abschnitt, von den Potenzen und Wurzeln überhaupt.

§. 113. bis 117. Potenz oder Dignität, Wurzel, Exponent; 2te, 3te Potenz, oder Quadrat, Kubus, Quadrat- und Kubikwurzel; *m*te Potenz; *m*te Wurzel; Bezeichnung der Wurzel. 118. Potenzen von positiven, von negativen Wurzeln. 119. Wurzeln aus positiven, aus negativen Größen. 120. bis 123. Potenz eines Produktes, eines Bruches. 124. u. 125. Irrationale, rationale Wurzeln. 126. u. 127. Einige Verwandlungen der Potenzen, z. B. a^0, a^{-m} u. s. w. 128. u. 129. Einnamige Potenzen wieder auf andere Potenzen zu erheben, und Wurzeln daraus zu ziehen. 130. bis 132. Die Theile des Quadrats einer zwey- und mehrnamigen Größe anzugeben. 133. bis 135. Und eben so die Theile des Kubus. 136. Wie auch die

die Theile der 4ten, 5ten Potenz ꝛc. einer zwey = oder mehrnamigen Größe. 137. Zwey Grundsätze.

II. Abschnitt, von der Ausziehung der Quadrat = und Kubikwurzel aus zusammengesetzten Größen insbesondere.

§. 138. bis 140. Regeln für die Ausziehung der Quadrat = und Kubikwurzel aus mehrnamigen algebraischen Größen. 141. bis 144. Untersuchungen, wie die verschiedenen Theile der Quadratzahlen in Beziehung auf deren Wurzeln nach der dekadischen Ordnung mit einander verbunden sind. 145. bis 148. Daraus abgeleitete Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel aus jeder vorgelegten Zahl. 149. bis 154. Eben solche Untersuchungen, und daraus abgeleitete Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzel. Nutzen der Tafeln von Quadrat = und Kubikzahlen.

III. Abschnitt, von den Wurzelgrößen, und ihren Rechnungsarten.

§. 155. Wurzelgrößen von der nämlichen, von verschiedener Benennung. 156. Verwandlung der Wurzelgrößen in Bruchpotenzen, und umgekehrt. 157. Solche auf eine andere Benennung zu bringen. 158. u. 159. Abkürzungen und andere Verwandlungen der Wurzelgrößen. 160. Solche auf gleiche Benennung zu bringen; gleichartige Wurzelgrößen. 161. Wurzelgrößen zu addiren und zu subtrahiren. 162. Zu multipliziren. 163. Zu dividiren; eine zusammengesetzte irrationale Größe aus dem Nenner wegzuschaffen. 164. Multiplikation und Division der unmöglichen Größen. Ob es jederzeit willkührlich sey bey der Wurzel eines geraden Exponenten + oder − zu nehmen; wenn dieses wäre, so könnte man jede negative Größe in eine positive, ja sogar jede unmögliche Größe in eine mögliche verwandeln. 165. Wurzelgrößen auf Potenzen zu erheben. 166. Wurzeln daraus zu ziehen. 167. Die Regeln für die Rechnungsarten der

Po=

Potenzen mit ganzen Exponenten gelten auch bey gebrochenen Exponenten. 168. Bey einer angezeigten Potenz einer zusammengesetzten Größe ein Glied inner den Klammern von einem Faktor zu befreyen. 169. Wie auch einen außer den Klammern befindlichen Faktor hineinzuschaffen.

Vierte Vorlesung, von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf verschiedene Rechnungsfragen.

I. Abschnitt, von den Verhältnissen.

§. 170. bis 176. Verhältniß, arithmetisches, geometrisches; Differenz oder Namen beym ersten, und Quotient oder Exponent beym zweyten; vorderes, hinteres Glied; gleiche, ungleiche Verhältnisse; allgemeine Bezeichnung; das Verhältniß verbleibt in einigen Fällen ungeändert, wenn man die Glieder verändert; zusammengesetztes Verhältniß, quadratisches, kubisches, biquadratisches.

II. Abschnitt, von den Proportionen.

§. 177. Proportion, arithmetische, geometrische; Proportionalglieder, die äußeren, die inneren; stetigen oder zusammenhängenden. 178. bis 180. Allgemeine Bezeichnung der arithmetischen Proportion; deren Haupteigenschaft; einige Folgen; arithmetisches Mittel oder Durchschnitt. 181. bis 184. Bezeichnung oder allgemeine Formel der geometrischen Proportion; deren Haupteigenschaft; einige Folgen. 185. Aus zwey gleichen Produkten eine Proportion abzuleiten. 186. Zwey Kennzeichen von der Richtigkeit einer Proportion. 187. Verschiedene Verwandlungen einer Proportion, durch Verwechslung, Umkehrung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Formirung der Potenzen und Wurzeln. 188. Der daraus entspringende Nutzen. 189. u. 190. Zusammengesetzte Proportionen und verschiedene

dene Abkürzungen derselben. 191. Merkwürdiger Satz von mehrern gleichen Verhältnissen.

III. Abschnitt, von der einfachen Regel Detri.

§. 192. bis 195. Einige Dinge, die im geometrischen Verhältnisse miteinander stehen. Bedeutung des Wortes Verhältniß im gemeinen Leben auch bey zwey ungleichnamigen Dingen; gerades, verkehrtes Verhältniß; solches praktisch leicht zu erkennen. Regel Detri, gerade, verkehrte; Fragezahl bey derselben. 196. u. 197. Anweisung die einfache Regel Detri anzusetzen, und aufzulösen, nebst der Anwendung auf verschiedene Beyspiele. 198. u. 199. Sorgfältige Vergleichung verschiedener Gewichte und Maße gegeneinander, theils durch eigene Untersuchung, theils durch kritische Prüfung anderer Angaben bestimmet. Um solche Vergleichungen in kleinen Zahlen auszudrücken ist die Lehre von zusammenhängen Brüchen höchst nützlich.

IV. Abschnitt, von der zusammengesetzten Regel Detri.

§. 200. Zusammengesetzte Regel Detri; der bekannte, der unbekannte Fall. 201. Auflösung der zusammengesetzten Regel Detri durch Wiederholung der einfachen. 202. bis 204. Vorbereitung zur Auflösung der zusammengesetzten Regel Detri durch eine einzige Proportion, sowohl bey geraden als auch bey verkehrten Verhältnissen 205. Anweisung die zusammengesetzte Regel Detri vortheilhaft anzusetzen, und aufzulösen, oder die sogenannte Reesische Regel. 206. Anweisung die sogenannte Kettenregel vortheilhaft anzusetzen, und aufzulösen.

V. Abschnitt, von der Gesellschaftsrechnung.

§. 207. u. 208. Gebrauch der Gesellschaftsregel beym Gewinn und Verlust; bey gleichen, bey ungleichen Dauerzeiten der Einlage; wie auch bey den Mischungen verschiedener Ingredienzien nach bekannten Verhältnissen.

Fünf-

Fünfte Vorlesung, von den Gleichungen des 1ten und 2ten Grades, nebst deren Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

I. Abschnitt, von den Gleichungen und ihrer Auflösung.

§. 209. und 210. Gleichung, Theile, Glieder derselben; identische, wirkliche algebraische Gleichung. 211. Drey merkwürdige Sätze von den Gleichungen. 212. Der Werth einer unbekannten oder zu bestimmenden Größe in einer Gleichung. 213. Einfache, höhere, reine, verwickelte Gleichung. 214. Beyspiele zur Auflösung der reinen Gleichungen 215. Auflösung der verwickelten quadratischen Gleichungen durch mehrere Beyspiele erläutert.

II. Abschnitt, von den algebraischen Aufgaben und ihrer Auflösung.

§. 216. bis 218. Algebraische Aufgabe mit einer, mit mehrern unbekannten Größen; bestimmte, unbestimmte, ungereimte Aufgaben. Was bey der Auflösung einer algebraischen Aufgabe überhaupt zu beobachten sey. 219. Auflösung der algebraischen Aufgaben mit einer unbekannten Größe, durch mehrere Beyspiele erläutert, die theils auf einfache, theils auf quadratische Gleichungen führen. 220. bis 222. Auflösung der bestimmten Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen. Hinwegschaffung der unbekannten Größen 1) durch den Grundsatz, wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind solche auch unter sich gleich; 2) durch die Substitution; 3) am gewöhnlichsten durch Addition und Subtraktion mit andern Kunstgriffen verbunden, Um die Verstandeskräfte der Anfänger zu schärfen, und solche zu analytischen Untersuchungen, und mathematischen Erfindungen geschickt auszubilden, sind in diesem Abschnitte mehrere algebraische Aufgaben mit verschiedenen Einkleidungen angebracht; welche theils aufgelöset, theils dem eigenen Fleisse des eifrigern Lehrlings überlassen sind. Die 16te

Auf-

Aufgabe im 219. §. zeuget deutlich, daß von den zwey Zeichen ± vor einer quatratischen Wurzelgröße zuweilen eines gänzlich ausgeschlossen sey. 223. Abkürzung der Wurzelgröße $\sqrt{(a \pm \sqrt{b})}$ in einigen Fällen. 224. u. 225. Auflösung der unbestimmten Aufgaben. 226. u. 227. Erinnerungen über die unmöglichen oder ungereimten Aufgaben. 228. Aus der Gleichung $a^x = b$ den Werth für x zu bestimmen.

Sechste Vorlesung, von den Reihen und ihrer Anwendung.

I. Abschnitt, von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 229. bis 231. Von den Reihen überhaupt; das allgemeine, das summatorische Glied einer Reihe; aus dem summatorischen Gliede läßt sich das Allgemeine sehr leicht herleiten. 232. bis 234. Arithmetische Reihe; deren allgemeine Bezeichnung; Formel für das $n$te Glied als erste Fundamentalgleichung; die Summe von n Gliedern als die zweyte Fundamentalgleichung; daraus entstehen zusammen 20 verschiedene Formeln, von denen jede eine andere Frage beantwortet. 235. Anwendung dieser 20 Formeln auf die Auflösung verschiedener Aufgaben. 236. bis 238. Von den arithmetischen Reihen des 2ren Ranges; Formeln für das allgemeine und summatorische Glied, wie solches in jedem Falle bey einer solchen vorgelegten Reihe zu bestimmen sey. 239. Polygonal- und Pyramidalzahlen. 240. bis 243. Bestimmung der Formeln für die Berechnung der Kugelschlichtungen. 244. Eine einzige allgemeine Regel um die verschiedenen Kugelschichtungen zu berechnen. 245. Umgekehrte Aufgabe von Kugelschlichtungen. 246. u. 247. Von höhern arithmetischen Reihen; Formel für das allgemeine, und für das summatorische Glied. 248. bis 252. Von den Verbindungen und Versetzungen der Größen. Formeln für die sogenannten Amben, Ternen, Quaternen ꝛc. aus der Lehre von höhern arithmetischen

tischen

tischen Reihen abgeleitet. Anwendung davon auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit in der gewöhnlichen Lotterie etwas zu treffen; Gewinn der Lottokammer von der sämmtlichen Einlage aller Spieler. Berechnung der Wahrscheinlichkeit beym Würfelspiele. 253. u. 254. Von den geometrischen Reihen; deren allgemeine Bezeichnung; zwey Fundamentalformeln, eine für das allgemeine, und die andere für das summatorische Glied; woraus wieder zusammen 20 verschiedene Gleichungen abgeleitet werden, um eben so viele Fragen zu beantworten.

II. Abschnitt, von den Logarithmen.

§. 255. u. 256. Erklärung und Entstehung der Logarithmen; Grundzahl eines logarithmischen Systems. 257. Die merkwürdigsten Eigenschaften der Logarithmen. 258. bis 270. Von dem gemeinen oder briggischen System der Logarithmen; Möglichkeit ihrer Berechnung; Kennziffer oder Charakteristik. Anweisung zum Gebrauch der logarithmischen Tafeln; deren großer Nutzen. 171. Modul eines logarithmischen Systems.

III. Abschnitt, Anwendung der geometrischen Reihen und der Logarithmen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 272. bis 275. Verschiedene Aufgaben, besonders alle merkwürdige Fälle bey der zusammengesetzten Interesserechnung, wo die logarithmischen Tafeln vorzüglich nützlich sind.

IV. Abschnitt, von den Funktionen, und ihren Verwandlungen.

§. 276. bis 282. Veränderliche, unveränderliche Größen in einer Gleichung. Funktion von einer, von mehreren veränderlichen Größen. Ganze, gebrochene, rationale, irrationale Funktionen. Die Glieder einer Funktion zu ordnen,

nen, und kurz zu bezeichnen. Die Rechnungsarten mit Funktionen. 283. Merkwürdiger und sehr nützlicher Lehrsatz bey einer geordneten und auf Null gebrachten Funktion einer veränderlichen Größe. 284. u. 285. Auflösung gebrochener und auch irrationaler Funktionen in gleichgiltige Reihen. Erwähnung der rekurrenten Reihen. 286. Aus einem rationalen allgemeinen Gliede einer Reihe das dazugehörige summatorische Glied unmittelbar abzuleiten. 287. Zerlegung gebrochener Funktionen in mehrere einfacher ausgedrückte Brüche. 288. Umkehrung der Funktionen, oder umgekehrte Methode der Reihen. Erinnerung, wie da die wahre Gestalt der Reihe, oder das Gesetz der Exponenten beschaffen seyn müsse.

V. Abschnitt, Anwendung der Reihen auf die Berechnung der Logarithmen.

§. 289. Für jede Zahl $1 + x$ läßt sich der zugehörige Logarithmus nach den wenigen bisher angeführten Gründen mittelst einer Reihe angeben. 290. Diese logarithmische Reihe wird in eine andere verwandelt, die sehr schnell abnimmt. 291. Eine ungemein schnell abnehmende Reihe für die Berechnung der Logarithmen der Primzahlen. 292. u. 193. Natürliche, oder hyperbolische Logarithmen, bey denen der Modul $= 1$ ist. Der Modul des Briggischen Systems. Verwandlung der natürlichen Logarithmen in Briggische, und umgekehrt. Zu einem gegebenen Logarithmischen Modul die zugehörige Grundzahl, und umgekehrt zu finden. Berechnung der Grundzahl $= h$ der natürlichen Logarithmen. 295. u. 294. Eine Reihe für h^x, und auch für a^x. 296. Eine Anwendung der Grundzahl h der natürlichen Logarithmen.

VI. Abschnitt, Anwendung der Reihen auf eine allgemeine Entwicklung der Potenzen.

§. 297 u. 298. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten wird aus der Lehre von höhern arith-

 meti-

metischen Reihen abgeleitet. 299. Daß solcher für jeden Exponenten gelte, wird mittelst der logarithmischen Reihe dargethan. 300. bis 304. Geschmeidige Einrichtung des binomischen Lehrsatzes, und dessen Anwendung auf verschiedene Beyspiele. Abkürzungen bey der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel. Eine andere Reihe für die *mte* Potenz eines Binomiums.

VII. Abschnitt, von der Summirung einiger besondern, theils endlichen, theils unendlichen Reihen, nebst vorläufigen Begriffen von dem unendlich Großen, und unendlich Kleinen.

§. 305. bis 309. Gewöhnliche Begriffe von dem unendlich Großen und unendlich Kleinen für die Anfänger um den Vortrag in verschiedenen höchst nützlichen mathematischen Schriften verstehen zu können. 310. Summirung einer unendlichen Reihe von Brüchen, deren Nenner in einer geometrischen Progression wachsen, nebst Anwendung auf verschiedene Beyspiele. 311. u. 312. Summirung der Reihen, welche aus arithmetischen und geometrischen Progressionen zusammengesetzt sind. 313. Summirung einiger besondern Reihen, wo die Nenner in höhern arithmetischen Progressionen steigen. Erwähnung einer besondern Reihe, die sich nicht genau summiren läßt. 314. Nutzen der Reihen beym Bombenwerfen. 315. Allgemeine Interpolationsformel; wie auch allgemeines und summatorisches Glied für jede höhere arithmetische Reihe. 316. Summirung der *mten* Potenzen der natürlichen Zahlen; Bestimmung der sogenannten Bernoullischen Zahlenkoeffizienten. 317. Summe einer unendlichen Reihe von Potenzen der natürlichen Zahlen. Erinnerung über das Weglassen, oder Verschwinden einiger Größen bey arithmetischen Untersuchungen, und über die verschiedenen Ordnungen des Unendlichen, wie auch über den Rest bey steigenden Reihen. 318. u. 319. Summirung der *mten* Potenzen einer arithmetischen Reihe sowohl für einen positiven, als auch für einen negativen Exponenten.

Sie-

Siebente Vorlesung, von den höheren Gleichungen.

Von den Eigenschaften und der Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen.

§. 320. bis 322. Verwickelte höhere Gleichungen; vollständige, unvollständige; wie solche zu ordnen; allgemeine Bezeichnung einer geordneten höhern Gleichung; Wurzeln derselben. 323. u. 324. Entstehung der höhern Gleichungen aus der Multiplikation binomischer Faktoren, und daraus abgeleitete Eigenschaften derselben. 325. u. 326. Bestimmung der rationalen Wurzeln. Wie die gleichen rationalen Wurzeln zu finden. Zerlegung algebraischer Größen in Faktoren. 327. bis 330. Einige Verwandlungen der höhern Gleichungen; als Vermehrung und Verminderung der Wurzeln um jede beliebige Zahl. Hinwegschaffung des 2ten Gliedes. Verminderung der Faktoren des letzten Gliedes. 331. bis 333. Multiplikation und Division der Wurzeln; Hinwegschaffung der gebrochenen, und auch der irrationalen Koeffizienten. 334. u. 335. Bestimmung der Gränzen für die irrationalen Wurzeln; solche durch eine Annäherung anzugeben; wie die unmöglichen Wurzeln zu erkennen. 336. Allgemeine Näherungsformel für die Bestimmung der Wurzeln aus jeder geordneten höhern Gleichung. 337. Eine eben solche Näherungsformel für die Ausziehung der Potenzwurzeln aus vorgelegten Zahlen. 338. und 339. Die Auflösung der kubischen Gleichungen mittelst der Cardanischen Formeln, und die Zerlegung der biquadratischen in zwey gemeine quadratische Gleichungen, wird als eine bloß theoretische Uebung nur kurz berühret. 340. Und so auch die Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen von zwey veränderlichen Größen mittelst unendlicher Reihen, wo zugleich gezeiget wird, wie die Exponenten bey solchen Reihen zu bestimmen sind. Endlich eine Schlußanmerkung, worin eine kurze Anweisung enthalten ist, wie die scharfsinnigern Anfänger, nachdem sie sich schon bereits einen guten Vorrath der nützlichsten

sten mathematischen Wahrheiten eigen gemacht haben, die Schlußfolgen nach der gemeinen Induction bey analytischen Untersuchungen in verschiedenen Fällen in eine schärfere Beweisart verwandeln können.

Anhang

von einigen Tafeln.

1) Tafel aller einfachen Faktoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10500.
2) Tafel der 2, 3, 4, 5 und 6ten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis 100.
3) Tafeln der Quadratzahlen der natürlichen Wurzeln von 1 bis 1000.
4) Tafel der Cubikzahlen der natürlichen Wurzeln von 1 bis 1000.
5) Tafel der Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.
6) Tafel der Cubikwurzeln der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.
7) Tafel um Fuße, Zolle, Linien, und Punkte des zwölftheiligen Maßes in Decimaltheile der Klafter, des Fußes und des Zolles; wie auch umgekehrt, zu verwandeln.

Gedruckt bey Math. Andreas Schmidt, k. k. Hofbuchdrucker.

Zusatz zu §. 199. Seite 213. Zeile 9.

Beym Abdrucke dieses letzten Blattes erhalte ich aus Paris die Etalons (Grundmuster) des neuen, aus der Größe unserer Erdkugel, abgeleiteten Maß- und Gewichts-systems. Bey der genauesten Vergleichung derselben, mit der Maß- und Gewichtsverfassung der k. k. Erblande, überzeugte ich mich mit Vergnügen, daß die von mir in meinem Log. Trig. Handb Leipzig 1800, und in O. L. v. Zach Monatl. Corresp. May 1800 angegebenen Vergleichungen des alten und neuen französischen Gewichtes mit dem Wiener, mit dem mittlern Cöllnischen, mit dem Holländischen, mit dem Nürnberger u. m. a. Gewichten richtig sind; obschon meine Bemühung, einen Etalon des französischen Poid de Marc zu erhalten, durch zwanzig Jahre vergeblich war. Die Theile des erwähnten neuen Gewichts-Etalons wurden bey der genauesten in meiner Gegenwart im Cimentirungs-Zimmer des Wiener-Stadt-Magistrats vorgenommenen Abwägung in Granen des wien. Apothek. Gewichtes (von 12 Unzen zu 8 Drachmen zu 60 Gran) folgender Maßen schwer befunden:

500 Grammes $= 6857\frac{1}{2}$; 200 Grammes $= 2742\frac{1}{2}$;
100 Gr. $= 1371\frac{1}{2}$; 50 Gr. $= 685\frac{3}{4}$; 20 Gr. $= 274\frac{33}{64}$;
10 Gr. $= 137\frac{33}{128}$; 5 Gr. $= 68\frac{81}{128}$; 2 Gr. $= 27\frac{115}{256}$;
1 Gramme $= 13\frac{45}{64}$; $\frac{5}{10}$ Gr. $= 6\frac{57}{64}$; $\frac{2}{10}$ Gr. $= 2\frac{183}{256}$;
$\frac{1}{10}$ Gr. $= 1\frac{49}{128}$; $\frac{5}{100}$ Gr. $= \frac{179}{256}$ Wien. Gran.

Verbesserung der Druckfehler.

Seite	Zeile	Anstatt	Muß seyn
95	11	$\frac{5}{53}$	$\frac{5}{43}$
97	8	$\frac{80504}{1000}$	$\frac{86504}{1000}$
101	6 7	288 144	288 144
108	16	$\frac{351}{1495}$	$\frac{361}{1495}$
124	8	$a^m : a^m$	$a^m : a^{2m}$
124	letzten	$\frac{a^2x}{p(c^2-x^2)^n}$	$\frac{a^2x}{p(c^2-x^2)^{-m}}$
155	21.22.23	6615 1575 125	6615 1575 125
170	23	$x^{np}\left(\frac{a^m+bx^n}{x}\right)^p$	$x^{np}\left(\frac{a^m+bx^n}{x^n}\right)^p$
171	3	$x(a^8-ax^2)^{\frac{3}{2}}$	$x(a^3x-ax^2)^{\frac{3}{2}}$
—	5	$(ay^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$	$(ay^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}$
185	26	$2:3=-4:6$	$-2:3=-4:6$
217	21	Bayern 1282	Bayern 1294 *)
232	13	W:B=1401.2277.1689=1139.1351.3433.	W:B=1401.2277.1689:1139.1351.3433.
274	24	$100x$	$110x$
286	7	$\sqrt{(a\sqrt{\pm b})}$	$\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}$
351	21	$aq^n - a$	$aq^n - a$
354	Formel 20	$a^n =$	$q^n =$
360	4	log 3565	log 3564

*) Auch in meinem Log. Trig. Handb. Leipz. 1800 Seite 299. ist auszubessern: Bayern Fuß = 129,38; Elle = 370,16. Eben so in meinen Log. Trig. Tafeln bey München.

Verbesserung der Druckfehler.

Seite	Zeile	Anstatt	Muß seyn
377	3	$\frac{a\sqrt[m]{q-1}}{q-1}$	$\frac{a(\sqrt[m]{q}-1)}{q-1}$
381	15	$\frac{a(100+c)}{100}$	$\frac{a(100+c)_2}{100}$
386	10	$\frac{bp(p^{n-1}\ 1)}{p-1}$	$\frac{bp(p^{n-1})}{p-1}$
403	1	$2B\frac{1}{2}$	$2Bx\frac{1}{2}$
403	21	$2ACx^{8}$	$2ACx^{3}$
404	17	$\frac{5a^9}{81a^8}$	$\frac{5x^9}{81a^8}$
415	10	$\log 3 = 1 + 2A$	$\log 3 = \log 1 + 2A$
415	12	$\log 5 = 3 + 2A$	$\log 5 = \log 3 + 2A$
423	14	$\log \text{nat.} \frac{x}{c}$	$\log \text{nat.} \frac{x^3}{c}$
437	16	$82+\frac{532}{3(82)^2}=82,02574$	$83+\frac{532}{3(83)^2}=83,02574$
438	5	$-\frac{3}{4}.a^{\frac{2}{4}}.\frac{x}{a}$	$-\frac{3}{4}.a^{\frac{3}{4}}.\frac{x}{a}$
438	11	$\frac{3.7.11.15.a^{1\frac{9}{4}}x^4}{1.2.3.4.\ 4^3}$	$\frac{3.7.11.15.a^{\frac{19}{4}}x^4}{1.2.3.4.4^4}$
445	14	$\frac{43}{362}$	$\frac{48}{162}$
445	3	$a=\frac{b}{c}$	$a=\frac{b}{c}$
448	letzten	122456790	123456790.
526	29 Z. Sp. 2	5,385166	5,385165
527	letzt Z. Sp. 5	,2915476	29,15476
419	20	$\log(1+y)+m$	$\log(1+y)=m$
458	11	Δ^3	Δ^2
458	12	Δ^2	Δ^3
489	letzten	$125-50=105+$	$125-50-105+$