PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 2
Strani 86–91

Janez Strnad:

METI

Ključne besede: fizika, mehanika, kinetična energija, zračni upor.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/13-2-Strnad.pdf

METI

Presek se je že dotaknil skokov in tekov. Kaj, ko bi se zdaj lotil druge lahkoatletske discipline – metov? Da bi metalec vrgel orodje čim dlje, ga pospeši do čim večje hitrosti in usmeri pod najugodnejšim kotom proti vodoravnici. Tako ločimo pri metu prvi del – *pospeševanje telesa* – in drugi del – njegov *let*. Kot se spodobi matematično–fizikalno–astronomskemu listu, bomo namesto "orodje" pisali kar "telo".

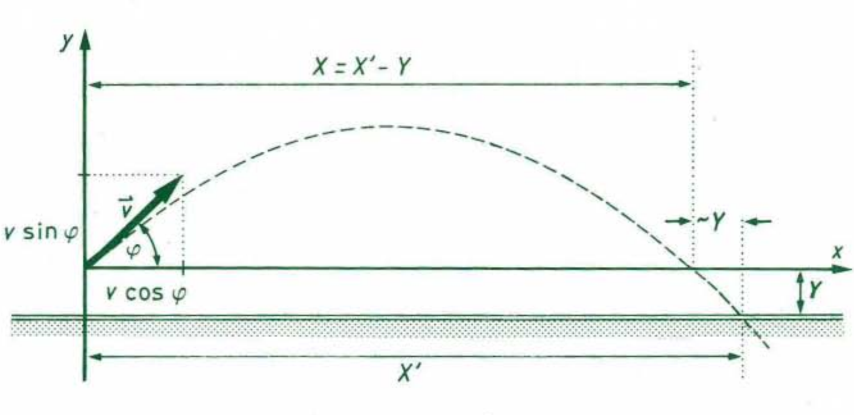
Med pospeševanjem deluje na telo sila metalčeve roke, ki opravi delo A. To delo določa hitrost v, s katero zapusti telo z maso m metalčevo roko:

$$A = \frac{1}{2} mv^2 \tag{1}$$

Kaj je sila? Intuitivno mislimo, da vemo, kaj ta beseda pomeni. Pojem je nastal ob dejanjih, kakor so potiskanje, metanje, vlečenje ali aktiviranje mišic, ki spremlja vsako tako dejanje. V splošni obliki pa pojem daleč presega te preproste primere.

A.Einstein, L.Infeld, *Razvoj fizike,*
Mladinska knjiga, Ljubljana 1962, str. 19

Pospeševanje. Kot je v mehaniki navada, izhajamo iz Newtonovega zakona: sila je masa krat pospešek. Zapišimo ga za primer, da se telo giblje premo, da pred pospeševanjem, ki se začne v času $t = 0$, miruje in da se sila F ne spremi-



Slika 1. Razmere pri poševnem metu pod kotom 45^0

nja s časom. Potem se tudi pospešek $a = v/t$ ne spreminja s časom; v je pri tem hitrost, ki jo ima telo v času t. V tem primeru povzema zakon enačba

$$F = mv/t$$

Pot s telesa dobimo, ko povprečno hitrost pomnožimo s časom. Povprečna hitrost je $(1/2)v$, saj je hitrost na začetku pospeševanja enaka nič, nato pa enakomerno narašča in doseže ob času t vrednost v. Tako imamo za pot

$$s = \frac{1}{2} vt$$

Pomnožimo to enačbo z zapisanim Newtonovim zakonom:

$$Fs = \frac{1}{2} mv^2$$

Produkt sile in poti vpeljemo kot *delo*, $A = Fs$, produkt polovične mase in kvadrata hitrosti pa kot *kinetično energijo telesa*, $W_k = (1/2)mv^2$. Ugotovili smo torej, kot pravi *izrek o kinetični energiji*, da je delo (edine) sile, ki pospešuje telo, enako spremembi kinetične energije (1). V našem primeru ima telo na začetku hitrost nič in kinetično energijo nič, tako da je sprememba kinetične energije kar enaka končni kinetični energiji.

Let. Let telesa obravnavamo kot *poševni met*. To je posebna vrsta krivega gibanja, ki si ga mislimo razstavljeno na vodoravno in navpično gibanje. V vodoravni smeri se telo giblje enakomerno s hitrostjo v_x:

$$x = v_x t$$

v navpični pa enakomerno pospešeno s težnim pospeškom $-g$ (minus opozarja, da kaže pospešek navzdol) in z začetno hitrostjo v_y:

$$y = v_y t - \frac{1}{2} gt^2$$

Telo vržemo s hitrostjo v pod kotom φ proti vodoravnici, tako da je na začetku leta vodoravna komponenta hitrosti $v_x = v \cos\varphi$ in navpična $v_y = v \sin\varphi$. Iz enačbe za x izračunamo čas $t = x/v \cos\varphi$ in ga vstavimo v enačbo za y:

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2} gx^2/v^2 \cos^2\varphi$$

Krivulja, ki jo opisuje ta enačba, sodi med stožnice in jo imenujemo *parabolo.*

Če vržemo telo iz izhodišča $x = 0, y = 0$ (slika 1), pade na tla v oddaljenosti

$$x = 2 \sin\varphi \cos\varphi . v^2/g = v^2 \sin 2\varphi/g$$

od izhodišča. (To je drugi koren enačbe $y = 0$, prvi je $x = 0$). Dolžina meta x je največja, če ima sinus največjo vrednost 1, $\sin 2\varphi = 1$, in je $\varphi = 45^0$:

$$X = v^2/g$$

Pri metih v lahki atletiki pade telo v resnici na tla niže, kot ga vrže metalec, in sicer za višino ramen Y. Ker je nagib tira tudi ob udarcu na tla približno enak 45^0, dobimo dolžino meta v enaki višini X, tako da od prave dolžine X' odštejemo Y, torej $X = X' - Y$ (slika 1).

Dolžina meta je sorazmerna s kvadratom hitrosti, tako da je po enačbi (1) sorazmerna tudi z delom A:

$$A = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mgX$$

Zdaj smo si pripravili dovolj enačb, da se lahko lotimo svetovnih rekordov. S podatki za dolžino rekordnega meta in maso telesa izračunamo hitrost telesa $v = (gX)^{1/2}$ – pri tem vzamemo za težni pospešek kar 10 m/s^2 – in njegovo kinetično energijo $W_k = (1/2)\, mgX$, ko ga metalec spusti. Pri tem upoštevamo dolžino meta X v enaki višini in zato popravimo dolžino rekordnega meta: $X = X' - Y$. Za višino ramen vzamemo približno $Y = 1$ m.

Preglednica kaže, da je kinetična energija telesa pri ustrezni disciplini pri ženskah skoraj pol manjša kot pri moških. Relativna razlika je vsekakor večja kot pri tekih. Zato primerjamo moške discipline med sabo in ženske med sabo. Misel, da opravijo vrhunsko trenirani tekmovalci in vrhunsko trenirane tekmovalke pri metu na telesu enako delo, približno velja za disk in kroglo, ne pa za kopje in kladivo.

Kladivo je sploh nekaj posebnega. Metalec namreč pri metu kladiva vrže kroglo z enako maso kot pri metu krogle, le da je ta krogla pritrjena na 1,2 m dolgi žici. Žica ima vlogo nekakšnega vzvoda, ki omogoči metalcu, da zakroži okoli navpične osi skozi težišče krogle in svojega telesa in tako veliko učinkoviteje zavihti kroglo. Poleg tega si pri tem pomaga z obema rokama, medtem ko uporablja v drugih disciplinah eno samo roko. Tudi pri metanju diska in krogle

Disciplina	Masa telesa telesa m	Dolžina rek. meta X'	Hitrost v	Kinetična energija W_k	Ocena za silo F
		moški			
kopje	0,8 kg	99,72 m	31 m/s	400 J	400 N
disk	2	71,86	27	710	710
krogla	7,257	22,22	15	770	770
kladivo	7,257	84,14	28	3000	3000
		ženske			
kopje	0,6	74,76	27	220	220
disk	1	73,26	27	360	360
krogla	4	22,45	15	430	430

zakroži metalec okoli navpične osi, a mnogo manj učinkovito. Pri metu kopja zakroži roka okoli vodoravne osi. Pred časom so tudi kopje poskusili metati iz obrata, a so ta način metanja kmalu prepovedali.

Kinetična energija telesa je v trenutku, ko telo zapusti metalčevo roko, enaka delu sile roke. Če vzamemo, da se sila roke med pospeševanjem ne spreminja, in ocenimo pot s, na kateri roka pospešuje telo, z 1 m, dobimo oceno za silo roke, navedeno v zadnjem stolpcu preglednice. Sila je tem večja, čim večja je masa telesa. Metalec krogle ali diska deluje na kroglo ali na disk s približno tolikšno silo, kot da bi v eni roki držal dvignjeno utež za 77 ali 71 kg. Po tem tudi razumemo, zakaj na kopju opravi sila roke manjše delo. Kopje se zaradi majhne mase razmeroma hitro umika roki, tako da ta ne more delovati nanj s polno silo. Pri podrobnejšem obravnavanju bi bilo treba upoštevati, da je sila roke odvisna od hitrosti telesa, na katero deluje.

Doslej smo molčali o *zračnem uporu.* To silo je v računih težavno upoštevati. Pri hitrosti, ki jo doseže telo pri metih, je zračni upor sorazmeren s kvadratom hitrosti. Zato so enačbe za gibanje, ki ga upoštevajo, dokaj zapletene. Upor vsebuje namreč kvadrat velikosti hitrosti, tako da nastopa v enačbi za gibanje v vodoravni smeri tudi navpična komponenta hitrosti in v enačbi za gibanje v navpični smeri tudi vodoravna komponenta hitrosti.

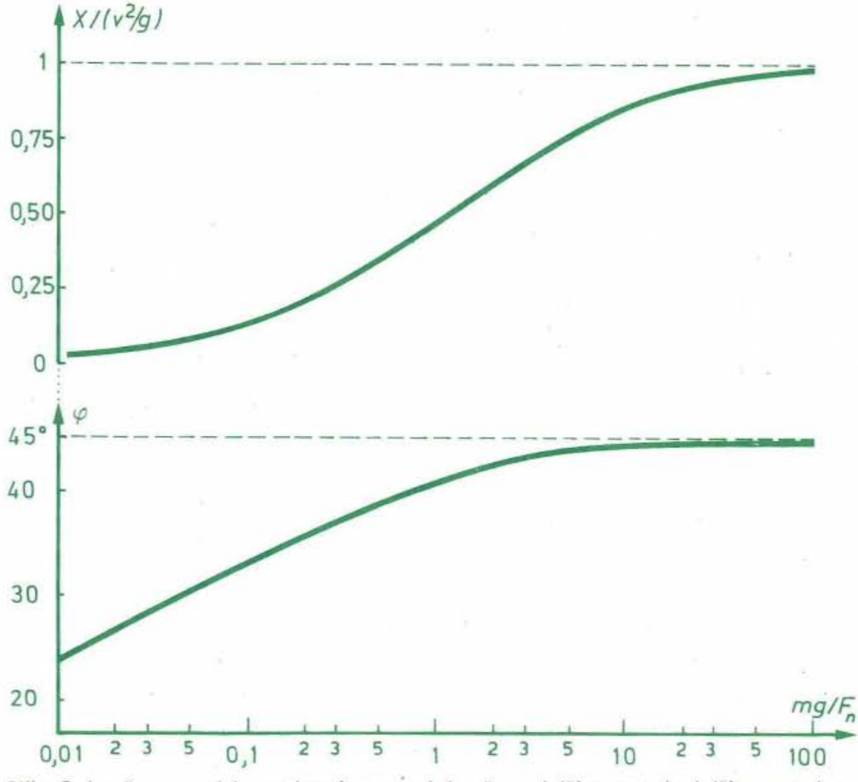
Zračni upor. V razmerah, kakršne nas zanimajo pri metih, velja za zračni upor kvadratni zakon: Upor F_u je sorazmeren s kvadratom hitrosti telesa, s koeficientom upora c_u, ki ga določa oblika telesa, s čelnim presekom telesa S in z gostoto zraka ρ:

$$F_u = \frac{1}{2} c_u \rho v^2 S$$

Hitro lahko ocenimo razmerje med zračnim uporom kopja in zračnim uporom krogle. Koeficient upora za kroglo je c_u = 0,45, najmanjši koeficient za telo ribje oblike je 0,04, za kopje pa vzamemo 0,06. Čelni presek kopja je krog z radijem 1,3 cm, čelni presek krogle pa krog z radijem 6 cm. Tako dobimo za razmerje uporov

$$(F_u)_{kopja}/(F_u)_{krogla} = (\frac{1}{2} c_u \rho v^2 \pi r^2)_{kopje}/(\frac{1}{2} c_u \rho v^2 \pi r^2)_{krogla} =$$

$$= (0{,}06.1{,}3^2.31^2)/(0{,}45.6^2.15^2) = 0{,}03$$



Slika 2. Izračunana odvisnost kvocienta med doseženo dolžino meta in dolžino meta brez zračnega upora od kvocienta med težo krogle in uporom pri začetni hitrosti (a). Izračunana odvisnost najugodnejšega kota od kvocienta med težo krogle in uporom pri začetni hitrosti (b). Sliki sta posneti po navedenem članku J.A. Zafiraja in J.R. Sanmartina.

Pri kopju se zračni upor precej manj pozna kot pri krogli.

Kako pa se pozna zračni upor pri gibanju krogle? Sposodimo si rezultate iz članka J.A. Zafiraja in J.R. Sanmartina *Influence of Air Drag on the Optimal Hand Launching of a Small, Round Projectile* (Vpliv zračnega upora pri metu majhnega, okroglega telesa z roko) v reviji American Journal of Physics 50 (1982) 59. Slika 2a kaže odvisnost kvocienta med izmerjeno dolžino meta X in dolžino meta v^2/g brez zračnega upora od kvocienta med težo krogle in uporom pri zračni hitrosti. Slika 2b pa kaže odvisnost najugodnejšega kota pri metu od kvocienta med težo krogle in uporom pri začetni hitrosti. Ko vstavimo poleg znanih podatkov še gostoto zraka $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$, dobimo za upor pri začetni hitrosti $F_u = (1/2)c_u\rho v^2\pi r^2 = 0{,}5.0{,}45.1{,}2\ \mathrm{kgm^{-3}}.(15\mathrm{ms^{-1}})^2.3{,}14.$ $.(0{,}06\mathrm{m})^2 = 0{,}69\ \mathrm{N}$. Kvocient teže in upora je potemtakem $mg/F_u =$ $= 72{,}6\ \mathrm{N}/0{,}69\ \mathrm{N} = 105$. Z diagramov (slika 2a in 2b) razberemo, da sta pri tolikšnem kvocientu dolžina meta in najugodnejši kot tolikšna, kot da ne bi bilo zračnega upora.

Pri metu krogle zračni upor ne igra upoštevanja vredne vloge. Tako je tudi pri kopju. Nekoliko drugače je pri disku, a iz nekega drugega razloga. Disk z značilno obliko krožnika se med metom vrti okoli simetrijske osi in os ostane med letom približno sama sebi vzporedna. Zaradi tega disk nekoliko spominja na letalsko krilo in leti dlje, kot če se ne bi vrtel (slika 3).

Slika 3. Dolžina meta diska se podaljša zaradi vrtenja. Slika je vzeta iz znanega učbenika R.W. Pohla *Mechanik, Akustik und Wärmelehre,* Springer, Berlin 1955, str. 74, iz poglavja o vrtavkah. Podaljšek dolžine meta je narisan pretirano. Da je vrtenje diska bistveno za nemoten let, pa se lahko hitro prepričamo, če vržemo podstavek za pivo kot disk. Podstavek zavije s poti. Zračni upor namreč prehitro zavre njegovo vrtenje, medtem ko ne zavre zaznavno vrtenja diska z mnogo večjo maso.

Čeprav se je sestavek ukvarjal z zelo splošnimi vprašanji, upajmo, da ni dolgočasil bralcev. Bolj zanimive, a tudi težje postanejo zadeve, ko poskuša fizik pripomoči vrhunskemu metalcu do daljšega meta. Tedaj natanko opazuje gibanje metalca, pri čemer si pomaga s hitro filmsko kamero, s precej bolj zapletenimi enačbami in – z računalnikom.

Janez Strnad