Jaka Cimprič, Jasna Prezelj

REŠENE NALOGE IZ ANALIZE 4

Ljubljana 2011

naslov: REŠENE NALOGE IZ ANALIZE IV
avtorske pravice: Jaka Cimprič, Jasna Prezelj
izdaja: prva izdaja
založnik: samozaložba Jaka Cimprič in Jasna Prezelj, Ljubljana
avtorja: Jaka Cimprič in Jasna Prezelj
leto izida: 2011
natis: elektronsko gradivo
dostop: `http://www.fmf.uni-lj.si/~prezelj/analiza4/Analiza4.pdf`

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.1/.4(075.8)(076.2)(0.034.2)

CIMPRIČ, Jaka
Rešene naloge iz analize 4 [Elektronski vir] / Jaka Cimprič, Jasna Prezelj. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. J. Prezelj : samozal. J. Cimprič, 2011

Način dostopa (URL): `http://www.fmf.uni-lj.si/~prezelj/analiza4/analiza_4.pdf`

ISBN 978-961-93108-1-6

1. Prezelj-Perman, Jasna

256642048

Kazalo

Predgovor

Pričujoča zbirka vsebuje naloge, ki sva jih avtorja sestavljala za vaje in kolokvije iz parcialnih diferencialnih enačb. Nekaj nalog je z vaj in kolokvijev najinih predhodnikov B. Gornika in S. Strleta, nekaj nalog pa sta prispevala profesorja M. Černe in M. Perman. Vsem se za njihov prispevek iskreno zahvaljujeva.

Zbirka vsebuje naslednja področja: parcialne diferencialne enačbe prvega reda, Fourierove vrste, Fourierova in Laplacova transformacija. klasifikacija parcialnih diferencialnih enačb, Laplacova enačba, difuzijska enačba, valovna enačba. Ta snov v celoti pokriva predmet Analiza 4 na prvi stopnji matematike in dele predmetov: Matematika 3 (praktična matematika), Matematika 3 in Matematika 4 (fizika, prva stopnja). Vse naloge so opremljene z rešitvami.

1. FOURIEROVE VRSTE

Klasični trigonometrijski sistem

Operatorju $A : y \mapsto -y''$ pravimo *Fourierov diferencialni operator*. Naj bo f dana funkcija na intervalu $[-l, l]$. Radi bi rešili enačbo $Ay = f$, pri čemer nas zanimajo rešitve, ki so periodične s periodo $2l$. Najprej poiščemo lastne funkcije operatorja A, ki so periodične in torej zadoščajo pogojema $y(-l) = y(l)$ in $y'(-l) = y'(l)$. Take funkcije tvorijo kompleten ortogonalen sistem v prostoru $L^2[-l, l]$ z običajnim skalarnim produktom, zato lahko vsako L^2 funkcijo f razvijemo v vrsto po lastnih funkcijah.

1.1 Naj bo $l > 0$ in

$$V_l = \{y \in \mathcal{C}^{(2)}[-l, l]; \quad y(-l) = y(l), \quad y'(-l) = y'(l)\}.$$

(a) Dokaži, da je V_l gost podprostor v $L^2[-l, l]$.

(b) Dokaži, da je operator $A : V_l \to L^2[l, l]$, $Ay = -y''$, simetričen in pozitiven, ni pa injektiven.

(c) Določi njegove lastne vrednosti in lastne vektorje.

1.2 Naj bosta A in V_l kot pri prejšnji nalogi, in $Gf = \int_{-l}^{l} G(x, t)f(t)\,dt$, kjer je

$$G(x, t) = \frac{1}{4l}(x - t)^2 + \frac{1}{2}|x - t|.$$

(a) Dokaži, da za vsak $f \in L^2[-l, l]$ velja $AGf = f - \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\ dt$ in da za vsak $g \in V_l$ velja $GAg = g - \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} g(t)\ dt$.

(b) Dokaži, da imata operatorja $A : V_l \to L^2[-l, l]$ in $G : L^2[-l, l] \to V_l$ iste lastne vektorje. Iz tega sklepaj, da lastni vektorji operatorja $A : V \to L^2[-l, l]$ tvorijo kompleten ortogonalen sistem.

Zaporedju

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots$$

pravimo *klasični trigonometrijski sistem* na $[-l, l]$.

1.3 Dokaži, da je klasični trigonometrijski sistem ortogonalen v $L^2[-l, l]$ ni pa normiran. Dokaži, da je sistem kompleten in zapiši Fourierovo vrsto in Parsevalovo identiteto za ta sistem.

1.4 Razvij naslednje funkcije v klasične Fourierove vrste na $[-\pi, \pi]$.

(a) $f(x) = x$,

(b) $f(x) = x^2$,

(c) $f(x) = (x^3 - \pi^2 x)/12$.

Zapiši tudi ustrezne Parsevalove identitete.

1.5 Izračunaj vsote vrst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

1.6 Bernoullijevi polinomi $\varphi_n(x)$ so definirani z naslednjo rekurzivno relacijo:

$$\varphi_n'(x) = \varphi_{n-1}(x), \quad \varphi_0(x) = 1 \text{ in } \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = 0, \; n > 0.$$

(a) Eksplicitno izračunaj prvih pet Bernoullijevih polinomov. (b) Razvij polinome $\varphi_n(x)$ v Fourierove vrste na intervalu $[0, 1]$. (c) Izrazi vsoto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$$

z Bernoullijevimi polinomi.

1.7 Naj bo $0 < a < 1$. Razvij funkcije $\chi_{[-a,a]}(x)$, $\cos ax$, $\sin ax$, $\operatorname{ch} ax$, $\operatorname{sh} ax$ v klasične Fourierove vrste na $[-\pi, \pi]$ in zapiši ustrezne Parsevalove identitete.

1.8 Naj bo n naravno število in $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Poišči minimum izraza $\|f - T_n\|$, kjer T_n teče po vseh linearnih kombinacijah elementov $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx$. Pri katerem T_n je dosežen?

1.9 Razvij funkcijo $f(x) = |\sin x|$ v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

1.10 Poišči periodično rešitev diferencialne enačbe

$$y''(x) + y(x) = |\sin x|.$$

Trigonometrijske vrste

Vsaki funkciji $f \in L^1[-\pi, \pi]$ priredimo števila

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\ dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\ dt,$$

ki jim pravimo *klasični Fourierovi koeficienti*. Zaporedju funkcij

$$(s_n f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

pravimo *klasična Fourierova vrsta* funkcije f.

Iz definicije še ne sledi, da $s_n f$ konvergira proti f v kakršnemkoli smislu. Za konvergenco so potrebne dodatne predpostavke.

(a) *Cesarova konvergenca.* Če je $f \in L^1[-\pi, \pi]$, potem je $\lim\limits_{N\to\infty} \|f - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} s_n f\|_1 = 0$.

(b) *Kvadratična konvergenca.* Če $f \in L^2[-\pi, \pi]$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n f - f\|_2 = 0$.

(c) *Konvegenca po točkah.* Če $f \in L^1[-\pi, \pi]$ in če je f odvedljiva v točki $x \in (-\pi, \pi)$, (zadošča obstoj levega in desnega odvoda), potem je $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n f)(x) = f(x)$.

(d) *Enakomerna konvergenca.* Če je funkcija f zvezna na $[-\pi, \pi]$, ima omejen totalni razmah in zadošča $f(\pi) = f(-\pi)$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n f - f\|_\infty = 0$.

Za dokaze teh trditev glej [9].

1.11 Primerjaj grafe naslednjih funkcij z grafi vsot njihovih klasičnih Fourierovih vrst.

(a) $f(x) = x$,

(b) $f(x) = x^2$,

(c) $f(x) = (x^3 - \pi^2 x)/12$.

Primerjaj vrednosti funkcij in njihovih Fourierovih vrst za $x = \frac{\pi}{2}$.

1.12

(a) Razvij funkcijo $f(x) = \cos a(\pi - |x|)$ v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Dokaži, da je
$$\mathrm{ctg}\ \pi t - \frac{1}{\pi t} = \frac{-2t}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - t^2}$$
in da ta vrsta enakomerno konvergira na vsaki kompaktni podmnožici v $\mathbb{R}$, ki ne vsebuje celih števil.

(c) Dokaži
$$\frac{\sin \pi t}{\pi t} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{t^2}{k^2}).$$

1.13 Izračunaj vsoti vrst
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$
Katero funkcijo boš moral razviti?

1.14 Naj bo m poljubno naravno število. Izrazi klasične Fourierove koeficiente funkcij $f(x) \cos mx$ in $f(x) \sin mx$ s klasičnimi Fourierovimi koeficienti funkcije $f(x)$.

1.15 Razvij funkciji $x \sin x$ in $x \cos x$ v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

1.16 Razvij funkciji

$$f(x) = \log(2\cos\frac{x}{2}), \quad g(x) = \log|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)|,$$

v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

1.17 *Odvajanje Fourierove vrste.* Naj bo funkcija f zvezna na $[-\pi, \pi]$, zvezno odvedljiva na $(-\pi, \pi)$ in naj velja $f(-\pi) = f(\pi)$ in $f' \in L^1[-\pi, \pi]$. Izrazi klasične Fourierove koeficiente funkcije f' s klasičnimi Fourierovimi koeficienti funkcije f.

1.18 Naj bo funkcija f periodična s periodo 2π in naj bo k-krat zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$. Dokaži, da velja $a_n, b_n = O(\frac{1}{n^k})$, ko $n \to \infty$.

1.19 *Enakomerna konvergenca.* Naj bo funkcija f zvezna na $[-\pi, \pi]$, zvezno odvedljiva na $(-\pi, \pi)$ in naj velja $f(-\pi) = f(\pi)$ in $f' \in L^2[-\pi, \pi]$. Dokaži, da $s_n f$ konvergira proti f enakomerno na $[-\pi, \pi]$.

1.20 *Integriranje Fourierove vrste.* Naj bo $f \in L^1[-\pi, \pi]$ poljubna funkcija in $a_0, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ njeni Fourierovi koeficienti. kjer je $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$. Naj bo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) - a_0)\ dt$$

in $A_0, \ldots, A_n, B_n, \ldots$ njeni Fourierovi koeficienti.

(a) Dokaži, da velja $F(-\pi) = F(\pi)$.

(b) Dokaži, da velja $A_n = -\frac{b_n}{n}$, $B_n = \frac{a_n}{n}$ in $A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < +\infty$.

(c) Dokaži, da Fourierovo vrsto za $\int_0^x f(t)\, dt - a_0$ dobimo tako, da formalno integriramo vrsto za $f - a_0$.

1.21 Dokaži, da trigonometrijska vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$$

ni klasična Fourierova vrsta nobene L^1 funkcije.

Kompleksni trigonometrijski sistem

Zaporedju e^{imx}, kjer $m \in \mathbb{Z}$, pravimo *kompleksni trigonometrijski sistem.*

1.22 Dokaži, da je kompleksni trigonometrijski sistem ortogonalen v prostoru $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, ni pa normiran. Skalarni produkt v tem prostoru je

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

1.23 Izrazi kompleksne Fourierove koeficiente s klasičnimi in obratno.

1.24 Dokaži, da je kompleksni trigonometrijski sistem kompleten in zapiši ustrezno Fourierovo vrsto in Parsevalovo identiteto.

1.25 Razvij funkcijo

$$\frac{1}{2 + \cos x}$$

v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pomagaj si s kompleksno integracijo.

1.26 Naj bo $a > b > 0$. Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{ab}{a^2 + b^2 + (b^2 - a^2)\cos x}$$

v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

1.27 Razvij funkcijo

$$f(x) = \exp(\exp(ix))$$

v kompleksno Fourierovo vrsto. Seštej vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

1.28 Poišči vsoti vrst

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n-1)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)}.$$

Nasvet: Pomagaj si s formulo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)} = z + (1-z)\log(1-z).$$

1.29 Funkcijo $f \in L^1[-\pi, \pi]$ periodično nadaljujemo na vso realno os. Naj bo $g(x) = f(mx)$, kjer je m naravno število. Izrazi kompleksne Fourierove koeficiente funkcije g s kompleksnimi Fourierovimi koeficienti funkcije f.

1.30 *Izoperimetrični problem.* Pokaži, da ima med vsemi sklenjenimi gladkimi krivuljami krog največjo ploščino.

Predpostavi, da ima krivulja obseg 2π in naj bo $z(s) = x(s) + iy(s)$ njena parametrizacija z naravnim parametrom. Razvij $z(s)$ v kompleksno Fourierovo vrsto po $[-\pi, \pi]$. Dokaži naslednje zaporedje enakosti in neenakosti:

$$\begin{aligned} p &= \ = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (xy' - x'y)\ ds = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\langle z', z\rangle = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 \leq \\ &\leq \ \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 = \frac{1}{2}\|z'\|_1^2 = \pi. \end{aligned}$$

1.31 *Konvolucija Fourierovih vrst.* Funkciji $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$ periodično nadaljujemo na $\mathbb{R}$. Izrazi kompleksne (klasične) Fourierove koeficiente funkcije $h(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\ dt$ s kompleksnimi (klasičnimi) Fourierovimi koeficienti funkcij f in g. Dokaži tudi, da je $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

1.32 Funkcijo $f \in L^2[-\pi, \pi]$ periodično nadaljujemo na $\mathbb{R}$. Izrazi kompleksne Fourierove koeficiente funkcije $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\ dt$ s kompleksnimi Fourierovimi koeficienti funkcije f. Izrazi še klasične Fourierove koeficiente funkcije g s klasičnimi Fourierovimi koeficienti funkcije f.

Zaporedju $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$ pravimo *sinusni sistem* na $[0, l]$, zaporedju $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $k = 0, 1, \ldots$ pa *kosinusni sistem* na $[0, l]$.

1.33 Razvij naslednje funkcije po sinusnem sistemu na $[0, \pi]$.

(a) $f(x) = 1$,

(b) $f(x) = \cos x$,

(c) $f(x) = x(\pi - x)$.

1.34 Definirajmo preslikavo

$$\Phi : L^2[0,l] \oplus L^2[0,l] \to L^2[-l,l], \quad \Phi(f,g)(x) = \frac{f(|x|) + \operatorname{sign}(x) g(|x|)}{\sqrt{2}}.$$

Dokaži, da je ta preslikava izomorfizem Hilbertovih prostorov in da preslika zaporedje $(1,0)$, $(\cos\frac{\pi x}{l},0)$, $(0,\sin\frac{\pi x}{l})$, $(\cos\frac{2\pi x}{l},0)$, $(0,\sin\frac{2\pi x}{l}),\ldots$ v klasičen trigonometrijski sistem na $[-l,l]$ pomnožen s konstanto $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ali je izometrija?

1.35 *Uteženi trigonometrijski sistem* je zaporedje $e_0(x), e_1(x), e_2(x), \ldots$,

$$e_{2k-1}(x) = \begin{cases} \lambda_2 \sin kx, & -\pi \le x \le 0 \\ \lambda_1 \sin kx, & 0 < x \le \pi \end{cases}, \quad e_{2k}(x) = \begin{cases} \lambda_1 \cos kx, & -\pi \le x \le 0 \\ \lambda_2 \cos kx, & 0 < x \le \pi \end{cases},$$

kjer sta λ_1, λ_2 taki realni števili, da velja $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$. Dokaži, da je to kompleten ortogonalen sistem v $L^2[-\pi,\pi]$ in izračunaj njegove norme.

Dvojni trigonometrijski sistemi

Pri funkcijah dveh spremenljivk potrebujemo razvoj v Fourierovo vrsto po obeh spremenljivkah. Tako dobimo *dvojne trigonometrijske sisteme.*

1.36 Dokaži, da funkcije

$$1, \ldots, \cos mx \cos ny, \cos mx \sin ny, \sin mx \cos ny, \sin mx \sin ny, \ldots$$

tvorijo kompleten ortogonalen sistem v prostoru $L^2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$. Dokaži, da funkcije $\frac{1}{2\pi^2} e^{imx+iny}, m,n \in \mathbb{Z}$ tvorijo kompleten ortonormiran sistem.

1.37 Razvij funkcije $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = \operatorname{sign}(x-y)$ in $h(x,y) = |x-y|$ v dvojni klasični trigonometrijski sistem na $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$.

1.38 Dokaži, da je funkcija

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx \sin ny$$

dobro definirana in zvezna. Dokaži, da je

$$f(x,y) = -\frac{1}{2} xy \text{ za } |x| + |y| \le \pi.$$

Pomagaj si s formulami

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

$$\frac{3x^2 - \pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

1.39 Dokaži, da je funkcija

$$f(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \sin ny \sin nz$$

dobro definirana in zvezna. Dokaži, da je

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{2} xyz \text{ za } |x| + |y| + |z| \leq \pi.$$

Pomagaj si s formulami

$$\sin a \sin b \sin c = \frac{1}{4}(\sin(a+b-c) + \sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) - \sin(a+b+c)),$$

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} \text{ za } -\pi \leq x \leq \pi.$$

2. FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

Osnove L^1 teorije

Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiramo njeno *Fourierovo transformiranko*

$$\mathcal{F}(f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-izt}\, dt.$$

Označimo z $C_0(\mathbb{R})$ prostor zveznih funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ki gredo proti 0, ko $x \to \pm\infty$. Izkaže se, da je $\mathcal{F}(L^1)$ prava podmnožica v $C_0(\mathbb{R})$. Preslikavi $\mathcal{F}$ pravimo *Fourierova transformacija.*

Inverzna formula

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^{r} \mathcal{F}(f)(z) e^{itz}\, dz$$

velja v vsaki točki t, kjer je f zvezna in izpolnjuje *Dinijev pogoj*: obstaja tak $a > 0$, da je integral

$$\int_0^a \left| \frac{f(t+u) - f(t) + f(t-u) - f(t)}{u} \right| du$$

končen; to je npr. res, če ima f levi in desni odvod v t. Če je $\mathcal{F}(f) \in L^1$, potem velja inverzna formula skoraj povsod (izrek o inverzu).

Fourierova sinusna in kosinusna transformacija sta definirani z

$$\mathcal{F}_c(f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\cos(xt)dt, \quad \mathcal{F}_s(f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\sin(xt)dt.$$

2.1 V slovenski matematični literaturi obravnavajo Fourierovo transformacijo trije avtorji [9, 19, 24] ki jo definirajo na tri različne načine.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{hla}(f)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-izt}\, dt,\\
\mathcal{F}_{suh}(f)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{izt}\, dt,\\
\mathcal{F}_{zak}(f)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi izt}\, dt.
\end{aligned}$$

Naša definicija se razlikuje od gornjih treh in je posebno priljubljena pri fizikih.

Kako se pretvarja med različnimi definicijami? Zapiši inverzno formulo za vsako od teh definicij. Dodaj še kako svojo definicijo.

2.2 Dokaži, da je Fourierova transformiranka sode funkcije vedno soda funkcija in da je Fourierova transformiranka lihe funkcije vedno liha funkcija.

2.3 Dokaži, da je Fourierova transformiranka realne funkcije realna natanko tedaj, ko je soda.

2.4 Naj bo funkcija f zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva ter $f, \mathcal{F}(f) \in L^1$. Dokaži:

(a) za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\mathcal{F}^2(f)(v) = f(-v)$,

(b) $\mathcal{F}^4(f) = f$,

(c) če je f tudi soda, potem je $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}^{-1}(f)$.

2.5 Naj bo $c > 0$. Z direktnim računom določi Fourierove transformiranke funkcij

(a) $f(t) = \chi_{[-c,c]}(t)$, kjer je $\chi_{[-c,c]}$ karakteristična funkcija intervala $[-c, c]$,

(b) $g(t) = e^{-c|t|}$.

2.6 Naj bo $c > 0$.

(a) Poišči Fourierovo transformiranko funkcije $h(t) = \frac{1}{c^2+t^2}$.

(b) Kakšna je s Fourierova transformiranka funkcije $k(t) = \frac{\sin cx}{x}$?

2.7 Poišči Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko funkcij

$$f(t) = \max(1 - |t|, 0), \quad g(t) = \max(1 - t^2, 0).$$

2.8 Naj bo $a > 0$ konstanta in $f \in L^1$ poljubna funkcija. Izrazi Fourierovi transformiranki funkcij $f(t) \cos at$ in $f(t) \sin at$ s Fourierovo transformiranko funkcije $f(t)$.

2.9 Naj bo $a, b > 0$. Izračunaj Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = e^{-a|t|} \cos bt, \quad g(t) = e^{-a|t|} \sin bt.$$

2.10 Izračunaj Fourierovo transformiranko funkcije $f(t) = e^{-|t|} \cos 2t \sin 3t$.

2.11 Izračunaj Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{e^{-a|t|} \sin bt}{t}$$

kjer sta $a, b > 0$.

2.12 Naj bo $c > 0$. Izračunaj kosinusni transformiranki funkcij

$$f(t) = \chi_{[0,c]}(t), \quad g(t) = e^{-ct}.$$

2.13 Naj bo $a, b \geq 0$. Izračunaj kosinusno transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}.$$

2.14 Dokaži, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc}
L^1(\mathbb{R}) & \stackrel{\mathcal{F}}{\longrightarrow} & C_0(\mathbb{R}) \\
\Phi \downarrow\uparrow \Psi & & \Phi \downarrow\uparrow \Psi \\
L^1(\mathbb{R}^+) \oplus L^1(\mathbb{R}^+) & \underset{\mathcal{F}_c \oplus i\mathcal{F}_s}{\longrightarrow} & C_0(\mathbb{R}^+) \oplus C_0(\mathbb{R}^+)
\end{array}$$

kjer sta preslikavi Φ in Ψ definirani z

$$\Phi(f)(x) = (\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))),$$

$$\Psi(f, g)(x) = f(|x|) + \mathrm{sign}(x) g(|x|)$$

in sta ena drugi inverzni.

2.15 Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in F njena sinusna transformiranka. Dokaži, da limita

$$\lim_{r \to \infty} \int_1^r \frac{F(x)}{x} dx$$

obstaja in je končna.

2.16 Dokaži, da funkcija

$$F(x) = \begin{cases} x/e, & 0 \le x \le e \\ 1/\ln x & e \le x < \infty \end{cases}$$

pripada $C_0(\mathbb{R}^+)$, vendar ni sinusna transformiranka nobene L^1 funkcije.

2.17 Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in F njena kosinusna transformiranka. Dokaži naslednjo trditev. Če obstaja tak $\varepsilon > 0$, da velja $\int_0^\varepsilon |f(t) \ln t| \, dt < \infty$, potem limita

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{F(x)}{x} \, dx$$

obstaja in je končna.

2.18 Poišči tako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, da ne obstaja limita

$$\lim_{r\to\infty} \int_e^r \frac{F(x)}{x} dx,$$

kjer je F kosinusna transformiranka funkcije f.

Odvajanje in integriranje

Fourierove transformiranke lahko računamo s pomočjo odvajanja ali integriranja slike ali originala.

2.19 Dokaži, da velja naslednja formula o *odvajanju originala.* Če je f zvezno odvedljiva in $f, f' \in L^1$, potem za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = ix\ \mathcal{F}\left(f\right)(x).$$

2.20 Dokaži, da velja formula o *višjih odvodih originala.* Če je f dvakrat zvezno odvedljiva in $f, f', f'' \in L^1$, potem je za vsak $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\left(f''\right)(x) = -x^2 \mathcal{F}\left(f\right)(x).$$

2.21 Dokaži formulo o *odvajanju slike.* Naj bosta funkciji f in $g(t) = tf(t)$, $t \in \mathbb{R}$, v L^1. Potem je $\mathcal{F}(f)$ odvedljiva na $\mathbb{R}$ in za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\left(\mathcal{F}f\right)'(x) = -i\mathcal{F}\left(g\right)(x).$$

2.22 Dokaži formulo o *višjih odvodih slike:* če so $f(t), tf(t), t^2 f(t)$ v L^1, potem je $\mathcal{F}f$ dvakrat odvedljiva na $\mathbb{R}$ in za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$(\mathcal{F}f)''(x) = -\mathcal{F}\left(t^2 f(t)\right)(x).$$

2.23 Naj bo funkcija f zvezno odvedljiva in naj $f, f' \in L^1$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{F}(f)(x) = o(|x|^{-1}),\ x \to \pm\infty.$$

2.24 Dokaži, da za vsako dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo f, ki zadošča $f, f', f'' \in L^1$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ velja Fourierova formula

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(x) e^{itx}\, dx.$$

2.25 Naj bo $a > 0$. Izračunaj Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = e^{-at^2}.$$

2.26 Naj bosta $a, b > 0$. Izračunaj Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = e^{-at^2} \cos bt \quad \text{ in } g(t) = e^{-at^2} \frac{\sin bt}{t}.$$

2.27 Naj bodo f, f' in f'' v $L^1(\mathbb{R})$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{F}_c(f''(t))(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) - x^2 \mathcal{F}_c(f(t))(x),$$

$$\mathcal{F}_s(f''(t))(x) = x\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) - x^2 \mathcal{F}_s(f(t))(x).$$

Konvolucija

Konvolucijo dveh funkcij $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiramo z

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t)\, dt.$$

Norma konvolucije zadošča neenakosti

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

in izreku o konvoluciji

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

2.28 Kako se glasi izrek o konvoluciji za transformacije $\mathcal{F}_{hla}$, $\mathcal{F}_{suh}$ in $\mathcal{F}_{zak}$?

2.29 Naj bosta $a, b > 0$. Izračunaj konvolucijo $f * g$, kjer je

(a) $f_1(t) = \chi_{[-a,a]}(t), \quad g_1(t) = \chi_{[-b,b]}(t)$,

(b) $f_2(t) = e^{-a|t|}, \quad g_2(t) = e^{-b|t|}$,

(c) $f_3(t) = \frac{\sin at}{t}, \quad g_3(t) = \frac{\sin bt}{t}$,

(d) $f_4(t) = \frac{1}{t^2+a^2}, \quad g_4(t) = \frac{1}{t^2+b^2}$.

2.30 Naj bodo funkcije F, G in FG iz zaloge vrednosti $\mathcal{F}$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{F}^{-1}(FG) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(F) * \mathcal{F}^{-1}(G).$$

2.31 Naj bo $0 < a < b$. Določi Fourierovo transformiranko in inverzno Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{\sin at \sin bt}{t^2}.$$

Pomagaj si z izrekom o konvoluciji.

2.32 Obravnavaj rešitve integralske enačbe v odvisnosti od parametra λ

$$f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|x-t|}\, dt + e^{-2|x|}.$$

Kompleksna integracija

Inverzna formula za Fourierovo transformacijo

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^{r} \mathcal{F}\,(f)\,(z) e^{itz}\, dz$$

velja v vsaki točki t, kjer je f zvezna in ima omejen levi in desni odvod (Dinijev izrek).

Jordanova lema. Naj bo $a > 0$, $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfna in R_n zaporedje nenegativnih števil z limito $+\infty$.

(a) Naj bo $C_n' = \{z; |z| = R_n\ ,\ \operatorname{Im} z > -a\}$ in $M_n' = \sup_{z\in C_n'} |F(z)|$.

Če je $\lambda > 0$ in $\lim_{n\to\infty} M_n' = 0$ potem je $\lim_{n\to\infty} \int_{C_n'} F(z)e^{i\lambda z}\, dz = 0$.

(b) Naj bo $C_n'' = \{z; |z| = R_n\ ,\ \operatorname{Im} z < -a\}$ in $M_n'' = \sup_{z \in C_n''} |F(z)|$.

Če je $\lambda < 0$ in $\lim_{n\to\infty} M_n'' = 0$, potem je $\lim_{n\to\infty} \int_{C_n''} F(z) e^{i\lambda z}\, dz = 0$.

Lema o delu residuuma. Naj bo F analitična v neki prebodeni okolici z_0 in naj ima v z_0 pol prve stopnje. Naj bo krivulja C_ε rob krožnega izseka $\{z;\ |z - z_0| = \epsilon,\ \phi_0 < \arg(z - z_0) < \phi_0 + \alpha\}$, potem velja

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} F(z)\, dz = i\alpha \operatorname{Res}(F, z_0).$$

Inverzne transformiranke racionalnih funkcij. Naj bosta A in B kompleksna polinoma, B brez realnih ničel in $\deg B \geq \deg A + 1$. Potem je

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \frac{A(z)}{B(z)} e^{itz}\, dz =$$
$$= \begin{cases} i \sum\limits_{z\in S^+} \operatorname{Res}(\frac{A(z)}{B(z)} e^{itz}, z), & t > 0, \\ -i \sum\limits_{z\in S^-} \operatorname{Res}(\frac{A(z)}{B(z)} e^{itz}, z), & t < 0, \end{cases}$$

kjer je $S^+ = \{z;\ B(z) = 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ in $S^- = \{z;\ B(z) = 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}$.

2.33 Dokaži gornjo formulo za inverzno transformacijo racionalnih funkcij, ki nimajo realnih polov.

2.34 Naj bo $a > 0$. Določi Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)}.$$

2.35 Naj bo $a > 0$. Določi Fourierovi in inverzni Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^2}, \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^2}.$$

2.36 Naj bo $a > 0$. Določi Fourierovi in inverzni Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^3}, \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^3}.$$

2.37 Določi Fourierove in inverzne Fourierove transformiranke funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)}, \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)},$$

$$h(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)}, \quad k(t) = \frac{t^3}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)}.$$

2.38 Izračunaj Fourierovi in inverzni Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + t + 1)}, \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + t + 1)^2}.$$

2.39 Naj bo $0 < a < 1$. Izračunaj Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko meromorfne funkcije

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch} at}{\sqrt{2\pi} \operatorname{ch} t}.$$

2.40 Naj bo $0 < a < \pi$. Izračunaj Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko funkcije

$$\frac{\operatorname{sh} at}{\sqrt{2\pi}(1 + t^2) \operatorname{sh} \pi t}.$$

2.41 Naj bo $\alpha, \beta > 0$ in

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha - 1} e^{-t/\beta} \chi_{[0,\infty)}(t).$$

Določi Fourierovo transformiranko $\mathcal{F}(f)(y)$.

2.42 Izračunaj kosinusni transformiranki funkcij

$$f(x) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

L^2 teorija

Naj bo $L^1 = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in $L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. V L^2 teoriji najprej dokažemo *Parsevalovo identiteto*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

za vsako funkcijo $f \in L^1 \cap L^2$. Odtod sledi, da je $\mathcal{F}$ omejena linearna preslikava iz prostora $L^1 \cap L^2$ v prostor L^2. Ker je $L^1 \cap L^2$ gost podprostor prostora L^2, lahko torej $\mathcal{F}$ razširimo po zveznosti do preslikave

$$\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2,$$

$$\mathcal{F}_2|_{L^1 \cap L^2} = \mathcal{F}.$$

Izkaže se, da je ta preslikava bijektivna (Plancherelov izrek) izometrija (Parsevalova identiteta velja za vsak $f \in L^2$.)

2.43 Dokaži, da ni niti $L^1 \subseteq L^2$ niti $L^2 \subseteq L^1$.

2.44 Naj bo $c > 0$. Dokaži, da funkcija

$$f(t) = \frac{\sin ct}{t}$$

pripada L^2, ne pripada pa L^1. Dokaži, da $\mathcal{F}_2 f$ pripada L^2, ne pripada pa $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.45 Naj bo $c > 0$. Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin ct}{t} \right)^2 \, dt.$$

2.46 Dokaži identiteto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_2 \left(f \right) (t) g(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathcal{F}_2 \left(g \right) (t) \, dt,$$

za poljubni funkciji $f, g \in L^2$! Ali odtod sledi, da je operator $\mathcal{F}_2$ hermitski?

2.47 Dokaži identiteto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_2 f)(t) (\mathcal{F}_2 g)(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) g(t) \, dt,$$

za poljubni funkciji $f, g \in L^2$.

2.48 Naj bosta $a, c > 0$. Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin cx}{x(a^2 + x^2)} \, dx.$$

2.49 Dokaži, da velja

$$(\mathcal{F}_2^* f)(x) = (\mathcal{F}_2 f)(-x) = (\mathcal{F}_2^{-1} f)(x)$$

za vsak $f \in L^2$. Izpelji odtod naslednje lastnosti:

(a) $\mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_2^* = I$,

(b) $(\mathcal{F}_2^2 f)(x) = f(-x)$ za vsak $f \in L^2$,

(c) $(\mathcal{F}_2)^4 = I$.

2.50 Dokaži, da so funkcije

$$f_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

lastni vektorji operatorja $\mathcal{F}_2$, kjer so H_n Hermitovi polinomi. Kakšne so pripadajoče lastne vrednosti?

2.51 Dokaži, da velja $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.

2.52 Dokaži, da velja $\mathcal{F}_2(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_1(f) \mathcal{F}_2(g)$.

2.53 Naj bo funkcija f zvezno odvedljiva in naj $f \in L^1$ in $f' \in L^1 \cap L^2$. Dokaži, da je $\mathcal{F} f \in L^1$. Pomagaj si s Cauchy-Schwartzovo neenakostjo. To pomeni, da inverzna formula za f velja v vsaki točki.

Preostale naloge se nanašajo na L^2-verziji sinusne in kosinusne transformacije.

2.54 Dokaži, da za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$ velja

$$\|\mathcal{F}_c f\|_2 = \|\mathcal{F}_s f\|_2 = \|f\|_2.$$

Dokaži, da obstajata razširitvi

$$\mathcal{F}_{c,2}, \mathcal{F}_{s,2} : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$$

preslikav $\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_s : L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$. Dokaži, da za vsak $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$

$$\|\mathcal{F}_{c,2} f\|_2 = \|\mathcal{F}_{s,2} f\|_2 = \|f\|_2.$$

2.55 Definirajmo preslikavo

$$\Phi : L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}), \quad \Phi(f,g)(x) = \frac{f(|x|) + \operatorname{sign}(x) g(|x|)}{\sqrt{2}}.$$

Dokaži, da je Φ izomorfizem Hilbertovih prostorov in izračunaj njegov inverz Ψ.

2.56 Dokaži, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & L^2(\mathbb{R}) \\ \Phi \downarrow\uparrow \Psi & & \Phi \downarrow\uparrow \Psi \\ L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+) & \xrightarrow[\mathcal{F}_{c,2} \oplus i\mathcal{F}_{s,2}]{} & L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+) \end{array}$$

kjer sta preslikavi Φ in Ψ definirani kot v prejšnji nalogi.

2.57 Dokaži, da za vsak $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ velja

$$(\mathcal{F}_{c,2})^2 f = (\mathcal{F}_{s,2})^2 f = f!$$

Dokaži, da je $\mathcal{F}_{c,2}^{-1} = \mathcal{F}_{c,2}$ in $\mathcal{F}_{s,2}^{-1} = \mathcal{F}_{s,2}$.

3. LAPLACOVA TRANSFORMACIJA

Osnovne lastnosti

Laplacova transformiranka funkcije $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je definirana z

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\, dt.$$

Če je f integrabilna na vsakem končnem intervalu in če za dano kompleksno število z_0 obstaja $\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z_0)$, potem je funkcija $\mathcal{L}f$ definirana in analitična v vsakem $z \in \mathbb{C}$, ki zadošča $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.

Merljiva funkcija f je *eksponentega naraščanja*, če obstajajo taka števila $M, N > 0$ in $k \in \mathbb{R}$, da je f integrabilna na $[0, N]$ in za vsak $x \geq N$ velja $|f(x)| \leq Me^{kx}$. Za take funkcije $\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z)$ obstaja in je analitična za vsak z, ki zadošča $\operatorname{Re} z > k$.

Običajno $\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z)$ najprej izračunamo za velike realne z, nato pa s pomočjo principa enoličnosti za analitične funkcije dobimo vrednost tudi za kompleksne z.

Če imata dve funkciji enako Laplacovo transformiranko, potem sta enaki skoraj povsod (Lerchov izrek).

3.1 Dokaži, da je Laplacova transformiranka konstantne funkcije 1 v točki z enaka $\frac{1}{z}$, če je $\operatorname{Re} z > 0$.

3.2 Naj bo $\alpha > -1$. Dokaži, da je

$$\mathcal{L}\left(t^\alpha\right)(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}},$$

če je $\operatorname{Re} z > 0$.

3.3 Dokaži, da je

$$\mathcal{L}\left(\ln t\right)(z) = \frac{\gamma - \ln z}{z},$$

kjer je $\gamma = \Gamma'(1)$ Eulerjeva konstanta.

3.4 Naj bo $\alpha > -1$. Dokaži, da je

$$\mathcal{L}\left(t^\alpha \ln t\right)(z) = \frac{\Gamma'(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+1)\ln z}{z^{\alpha+1}}.$$

3.5 Dokaži, da za vsak $k > 0$ velja

$$\mathcal{L}\left(f(kt)\right)(z) = \frac{1}{k}\mathcal{L}\left(f(t)\right)\left(\frac{z}{k}\right).$$

3.6 *Premik slike.* Dokaži, da za vsak $a \in \mathbb{C}$ velja

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right)(z) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)(z-a).$$

3.7 Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $\operatorname{Re} z > a$. Dokaži, da je

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right)(z) = \frac{1}{z-a}, \quad \mathcal{L}\left(\operatorname{ch} at\right)(z) = \frac{z}{z^2-a^2}, \quad \mathcal{L}\left(\operatorname{sh} at\right)(z) = \frac{a}{z^2-a^2}.$$

3.8 Naj bo a poljubno realno število. Izrazi Laplacovi transformiranki funkcij $f(t)\operatorname{ch} at$ in $f(t)\operatorname{sh} at$ z Laplacovo transformiranko funkcije $f(t)$.

3.9 Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $\operatorname{Re} z > 0$. Dokaži, da je

$$\mathcal{L}\left(\cos at\right)(z) = \frac{z}{z^2+a^2} \text{ in } \mathcal{L}\left(\sin at\right)(z) = \frac{a}{z^2+a^2}.$$

3.10 Izračunaj

$$\mathcal{L}\left(e^{at}t^n\right)(z), \quad \mathcal{L}\left(e^{at}\cos bt\right)(z) \text{ in } \mathcal{L}\left(e^{at}\sin bt\right)(z).$$

Inverzna transformacija

Inverzna formula za Laplacovo transformacijo. Naj bo funkcija $f(t)$ zvezna in odvedljiva na $[0,\infty)$ in od nekod naprej omejena z Me^{kt}. Če je $c > k$ poljubno število, potem je

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR} e^{zt}\mathcal{L}\left(f\right)(z)\;dz = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Jordanova lema. Naj bo c realno število, $F(z)$ merljiva funkcija na območju $\operatorname{Re} z < c$ in $R_n \in \mathbb{R}^+$ zaporedje, ki konvergira proti ∞. Označimo $\mathcal{C}_n = \{z : \; |z| = R_n, \; \operatorname{Re} z \leq c\}$ in $M_n = \sup_{z\in\mathcal{C}_n} |F(z)|$. Če velja $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ in $t > 0$, potem je $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}_n} F(z)e^{zt}\;dz = 0$.

Iz inverzne formule in Jordanove leme sledi *drugi izrek o razvoju.* Naj bo funkcija $F(z)$ meromorfna na $\mathbb{C}$, naj bo holomorfna na $\operatorname{Re} z > c$, in naj zadošča predpostavkam Jordanove leme. Potem je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(z)\right)(t) = \begin{cases} \sum\limits_{\{z_i \text{ pol } F(z)\}} \operatorname{Res}(F(z)e^{zt}, z_i), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Kadar ima funkcija $F(z)$ razvejišče v točki 0, si pomagamo tudi z integracijo po *Bromvičevi krivulji.* To je sklenjena krivulja, ki gre najprej po krožnici $|z| = R$ od premice $\operatorname{Re} z = c$ do abcisne osi, nato po abcisi od $-R$ do $-\varepsilon$, naredi en zavoj po krožnici $|z| = \varepsilon$, gre spet po abcisi od $-\varepsilon$ do $-R$, zavije po krožnici $|z| = R$ do premice $\operatorname{Re} z = c$ in nato nadaljuje po premici $\operatorname{Re} z = c$ dokler se ne sklene. Integrala po abscisni osi se ne pokrajšata, ker integriramo različni veji funkcije F.

3.11 Naj bo $a > 0$. Izračunaj inverzni Laplacovi transformiranki funkcij

$$F(z) = \frac{1}{(a^2 + z^2)^2}, \quad G(z) = \frac{z}{(a^2 + z^2)^2}.$$

3.12 Naj bo $0 < x < 1$. Izračunaj inverzno Laplacovo transformiranko funkcije

$$F(z) = \frac{\operatorname{ch}(x\sqrt{z})}{\operatorname{ch}(\sqrt{z})}.$$

3.13 Naj bo $0 < x < \pi$. Izračunaj inverzno Laplacovo transformiranko funkcije

$$F(z) = \frac{\operatorname{sh}(xz)}{(1 + z^2)\operatorname{sh}(\pi z)}.$$

3.14 Naj bo $\nu > 0$. S pomočjo krivuljne integracije po Bromvičevi krivulji izračunaj inverzno Laplacovo transformiranko funkcije

$$\frac{1}{z^{\nu+1}}.$$

3.15 Naj bo ω pozitivna konstanta. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\omega t\right)(z) = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 + \omega^2} + z}{z^2 + \omega^2}},$$

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin\omega t\right)(z) = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2+\omega^2}-z}{z^2+\omega^2}}.$$

Inverzne transformiranke nekaterih realnih racionalnih funkcij lahko računamo tako, da najprej racionalno funkcijo razstavimo na parcialne ulomke in upoštevamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z-a)^n}\right)(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A(z-a)+Bb}{(z-a)^2+b^2}\right)(t) = Ae^{at}\cos bt + Be^{at}\sin bt.$$

3.16 Izračunaj inverzne Laplacove transformiranke funkcij

(a) $F(z) = \frac{1}{z^2-4}$,

(b) $F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$,

(c) $F(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$,

(d) $F(z) = \frac{z}{z^3+z^2+z+1}$,

(e) $F(z) = \frac{1}{z^4+4}$.

3.17 *Periodičen original.* Naj bo funkcija $y(t)$ zvezna in periodična s periodo ω. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}(y(t))(z) = \frac{1}{1-e^{-\omega z}}\int_0^\omega y(t)e^{-zt}\,dt.$$

3.18 Naj bo $f(x) = |x|$, če je $|x| \leq \pi$ in naj bo f periodična s periodo 2π. Izračunaj Laplacovo transformiranko funkcije f.

3.19 Dokaži, da je

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}\right)(z) = \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}.$$

Laplacovo transformiranko $\mathcal{L}(f(t))(z)$ lahko izračunamo tudi tako, da $f(t)$ razvijemo v potenčno vrsto in zamenjamo vrstni red seštevanja in integracije. Inverzno Laplacovo tranformiranko $\mathcal{L}^{-1}(F(z))(t)$ lahko izračunamo tudi tako, da $F(z)$ razvijemo v vrsto po potencah $\frac{1}{z}$ in zamenjamo vrstni red seštevanja in invertiranja.

3.20 Naj bo $a > 0$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}\right)(z) = \frac{1}{z\sqrt{z}}e^{-\frac{a}{z}} \text{ in } \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}\right)(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}e^{-\frac{a}{z}}.$$

3.21 Naj bo $a > 0$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\sqrt{z}}e^{\frac{a}{z}}\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\operatorname{sh} 2\sqrt{at} \text{ in } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}e^{\frac{a}{z}}\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{ch} 2\sqrt{at}.$$

3.22 Dokaži *prvi izrek o razvoju:* Če je funkcija $F(z)$ analitična v ∞ in ima v okolici ∞ Laurentov razvoj $F(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$, potem je njena inverzna Laplacova transformiranka dana z $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}$. Pri tem je $f(t)$ cela funkcija.

3.23 Izračunaj naslednje inverzne Laplacove transformiranke

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}\right)(t)$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{(z^2+1)^2}\right)(t)$,

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z^2+1)^3}\right)(t)$, (d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{(z^2+1)^3}\right)(t)$.

Heavisideova funkcija je definirana z

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

3.24 *Premik originala v levo.* Naj bo $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija in $k > 0$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(f(t+k)\right)(z) = e^{kz}\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) - e^{kz}\int_0^k f(t)e^{-zt}\, dt.$$

3.25 *Premik originala v desno.* Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija in $k > 0$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(f(t-k)H(t-k)\right)(z) = e^{-kz}\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z).$$

Vsakemu zaporedju $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleksnih števil lahko priredimo stopničasto funkcijo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\chi_{[n,n+1)}(x)$. Laplacovo transformiranko zaporedja definiramo kot Laplacovo transformiranko njegove stopničaste funkcije.

3.26 Dokaži

$$\mathcal{L}\left(\{a_n\}\right)(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nz}.$$

3.27 Izračunaj Laplacove transformiranke naslednjih zaporedij:

$$a_n = 2^n, \quad b_n = n2^n, \quad c_n = n^2 2^n.$$

3.28 Dokaži, da za poljubna $k, n > 0$ velja formula

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-kz}}{z^n}\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!}(t-k)^{n-1}H(t-k).$$

3.29 Izračunaj inverzne Laplacove transformiranke funkcij

$$A(z) = \frac{1}{z(1-e^{-z})}, \quad B(z) = \frac{1}{z(z-e^{-z})}, \text{ in } C(z) = \frac{1}{z^k(z-e^{-z})^2},$$

kjer je k poljubno naravno število.

Odvajanje in integriranje

Laplacove transformiranke lahko računamo s pomočjo odvajanja ali integriranja slike ali originala.

3.30 *Odvajanje originala.* Naj bo funkcija $y(t)$ zvezno odvedljiva na $[0, \infty)$ in eksponentnega naraščanja. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right)(z) = -y(0) + z\mathcal{L}\left(y(t)\right)(z).$$

3.31 Reši naslednje sisteme diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

(a) $y'(t) = -11y(t) + 6z(t)$, $y(0) = 1$,
$z'(t) = -18y(t) + 10z(t)$, $z(0) = 2$,

(b) $y'(t) = y(t) - 4z(t) + e^{-t}$, $y(0) = 0$,
$z'(t) = y(t) - 3z(t)$, $z(0) = 0$,

(c) $y'(t) = 2y(t) - z(t)$, $y(0) = 0$,
$z'(t) = 4y(t) - 2z(t)$, $z(0) = 1$.

3.32 Naj bo funkcija $y(t)$ eksponentnega naraščanja in zvezno odvedljiva za vsak $t > 0$, razen za $t = a$, kjer naj ima skok. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(y'(t)\right)(z) = e^{-az}[y(a-0) - y(a+0)] - y(0) + z\mathcal{L}\left(y(t)\right)(z).$$

3.33 *Višji odvodi originala.* Naj bo funkcija $y(t)$ n-krat zvezno odvedljiva in naj bodo funkcije $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ eksponentnega naraščanja. Dokaži

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}(t)\right)(z) = -y^{(n-1)}(0) - \ldots - z^{n-1}y(0) + z^n\mathcal{L}\left(y(t)\right)(z).$$

3.34 S pomočjo Laplacove transformacije reši naslednje diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

(a) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 9 + 18t$, $y(0) = y'(0) = 0$,

(b) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \operatorname{ch} t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,

(c) $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = e^{-2t}\sin 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

3.35 Reši diferencialno enačbo

$$y^{(4)}(t) + 2y''(t) + y(t) = \sin t$$

pri začetnih pogojih

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$$

3.36 Reši sistem enačb

$$y''(t) = y(t) + z(t) + t,$$

$$z''(t) = -4y(t) - 3z(t) - t,$$

pri začetnih pogojih

$$y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$$

3.37 Reši naslednjo diferenčno-diferencialno enačbo

$$y'(t) = y(t-1) + 1, \quad y(0) = 0.$$

3.38 Reši naslednjo diferenčno-diferencialno enačbo

$$y''(t) + 4y'(t-1) + 4y(t-2) = t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

3.39 *Odvajanje slike.* Naj bo funkcija $y(t)$ zvezna na $[0, \infty)$ in eksponentnega naraščanja, $f(t) \leq Me^{kt}$. Dokaži, da za $\operatorname{Re} z > k$ velja

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}\left(y(t)\right)(z) = -\mathcal{L}\left(ty(t)\right)(z).$$

3.40 *Višji odvodi slike.* Naj bo funkcija $y(t)$ zvezna na $[0, \infty)$ in eksponentnega naraščanja. Dokaži, da velja

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \mathcal{L}\left(y(t)\right)(z) = (-1)^n \mathcal{L}\left(t^n y(t)\right)(z).$$

3.41 Pripravi tabelico naslednjih transformirank : $\mathcal{L}\left(ty(t)\right)(z)$, $\mathcal{L}\left(ty'(t)\right)(z)$ in $\mathcal{L}\left(ty''(t)\right)(z)$.

3.42 Reši enačbo

$$ty''(t) - (1+t)y'(t) + 2(1-t)y(t) = 0,$$

pri začetnih pogojih $y(0) = a, \quad y'(0) = b$. Ali je začetni problem rešljiv pri poljubnih a in b? Ali je rešitev enolična? Razloži ta pojav s pomočjo eksistenčnega izreka.

3.43 Poišči vse rešitve diferencialne enačbe

$$ty''(t) + (4t-1)y'(t) + (4t-2)y(t) = 0,$$

ki zadoščajo pogoju $y(0) = 0$.

3.44 Poišči vse rešitve diferencialne enačbe

$$ty''(t) + (2t+2)y'(t) + (t+2)y(t) = 0.$$

3.45 *Integriranje slike.* Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(z) = \int_z^\infty \mathcal{L}\left(f(t)\right)(u)\, du.$$

3.46 Dokaži, da je

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(z) = \operatorname{arcctg} z.$$

3.47 Naj bo $a, b > 0$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}\right)(z) = \ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right).$$

3.48 *Integriranje originala.* Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\, du\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z).$$

3.49 Dokaži, da velja

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du\right)(z) = \frac{\operatorname{arcctg} z}{z}.$$

3.50 Če je funkcija f zvezno odvedljiva na intervalu $[0, \infty)$ in če sta f in f' eksponentnega naraščanja, potem dokaži, da velja

$$\lim_{x\to\infty} z\mathcal{L}\left(f(t)\right)(x) = f(0).$$

Inverzne transformiranke lahko računamo tudi s pomočjo formul za odvajanje ali integriranje slike in originala.

3.51 Izračunaj inverzno Laplacovo transformiranko funkcije

$$F(z) = \ln(1 + \frac{1}{z}).$$

3.52 Naj bo $a > 0$. Izračunaj inverzni Laplacovi transformiranki funkcij

$$F(z) = \ln(1 + \frac{a^2}{z^2}), \quad G(z) = \ln(1 - \frac{a^2}{z^2}).$$

3.53 Izračunaj inverzno Laplacovo transformiranko funkcije

$$F(z) = \frac{1}{z} \ln\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

3.54 Izračunaj inverzno Laplacovo transformiranko funkcije

$$F(z) = \frac{1}{z} \ln(1 + z).$$

3.55 Izračunaj inverzno Laplacovo transformiranko funkcije

$$F(z) = \frac{\operatorname{arctg} z}{z}.$$

Konvolucija

Konvolucija funkcij $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je definirana s formulo

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\ dt.$$

Izrek o konvoluciji pravi

$$\mathcal{L}\left(f * g\right)(z) = \mathcal{L}\left(f\right)(z) \cdot \mathcal{L}\left(g\right)(z).$$

Iz izreka o konvoluciji sledi, da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(z)G(z)\right)(t) = (F * G)(t) = \int_0^t F(t-u)G(u)\ du,$$

če sta F in G v sliki Laplacove transformacije.

3.56 Dokaži, da je $f * g = g * f$.

3.57 Izračunaj $\cos at * \cos bt$ in $e^{-at} * e^{-bt}$.

3.58 Naj bo $a > 0$. Izračunaj inverzni Laplacovi transformiranki funkcij z uporabo izreka o konvoluciji.

$$F(z) = \frac{1}{(a^2 + z^2)^2}, \quad G(z) = \frac{z}{(a^2 + z^2)^2}.$$

3.59 Naj bo $a > 0$. Izrazi inverzne Laplacove transformiranke funkcij

$$F_1(z) = \frac{a}{z\sqrt{z + a^2}}, \quad F_2(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z - a^2)} \text{ in } F_3(z) = \frac{1}{z + a\sqrt{z}}$$

s funkcijo napake $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\, ds$.

3.60 Naj bo $a, b > 0$. Reši naslednje Volterrove integralske enačbe prve vrste:

(a) $\int_0^x \cos a(x - t)\phi(t)\, dt = \sin bx$,

(b) $\int_0^x e^{a(x-t)}\phi(t)\, dt = 1 - \cos bx$,

(c) $\int_0^x e^{a(x-t)}\phi(t)\, dt = xe^{bx}$.

3.61 Reši naslednje Volterrove integralske enačbe druge vrste:

(a) $\phi(t) = \int_0^x \phi(t)\, dt + e^t$,

(b) $\phi(t) = \int_0^x e^{t-x}\phi(t)\, dt + \cos x$,

(c) $\phi(t) = \int_0^x (x - t)\phi(t)\, dt + \cos x$.

3.62 Reši naslednjo integro-diferencialno enačbo :

$$y''(x) = 2\int_0^x \sin(x - t)y(t)\, dt + \cos(x).$$

Preostale naloge se nanašajo na posplošeni izrek o konvoluciji.

3.63 Dokaži *posplošeni izrek o konvoluciji.* Če za funkcije f, F, g, G, q velja

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) = F(z), \quad \mathcal{L}\left(g(t,\tau)\right)(z) = G(z)e^{-\tau q(z)},$$

potem velja

$$\mathcal{L}\left(\int_0^\infty f(\tau)g(t,\tau)d\tau\right)(z) = F(q(z))G(z).$$

3.64 Dokaži, da za primerno funkcijo f velja

$$\frac{\mathcal{L}\left(f(t)\right)(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(s)e^{-\frac{s^2}{4t}}\ ds\right)(z).$$

3.65 Izračunaj

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{z}}}{z}\right)(t).$$

3.66 Dokaži, da za primerno funkcijo f velja

$$\mathcal{L}\left(f(x)\right)(\ln z) = \mathcal{L}\left(\int_0^\infty \frac{x^{t-1}f(t)}{\Gamma(t)}\ dt\right)(z).$$

3.67 Izračunaj

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\ln z}\right)(x).$$

3.68 Dokaži, da za primerno funkcijo f velja

$$\frac{1}{z}\mathcal{L}\left(f(x)\right)(\ln z) = \mathcal{L}\left(\int_0^\infty \frac{x^t f(t)}{\Gamma(1+t)}\ dt\right)(z).$$

3.69 Izračunaj

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\ln z}\right)(x).$$

4. PARCIALNE DIFERENCIALNE ENAčBE PRVEGA REDA

Kvazlinearna PDE prvega reda na $\mathbb{R}^2$ je enačba oblike

$$Lu = F(x, y, u, p, q) = a(x, y, u)p + b(x, y, u)q - c(x, y, u) = 0,$$

kjer sta p in q običajni oznaki za parcialna odvoda u po x oz. y.

Zanima nas rešitev kvazilinearne enačbe $Lu = 0$, pri čemer zahtevamo, naj graf u vsebuje krivuljo S. Recept za reševanje je naslednji:

(1) parametriziramo krivuljo S, $s \mapsto \gamma(s) = (x(s), y(s), u(s))$,

(2) rešimo karakteristični sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p &= a, \\ \dot{y} &= F_q &= b, \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q &= c; \end{aligned}$$

pika označuje odvod na t.

Na podoben način se lotimo začetnih nalog za *nelinearne enačbe prvega reda:*

$$Lu = F(x, y, u, p, q) = 0, \text{ graf } u \text{ vsebuje krivuljo } S$$

le da je gornjemu karakterističnemu sistemu potrebno dodati še enačbi za $\dot{p}$ in $\dot{q}$, in izračunati začetna pogoja za p in q. Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, \\ \dot{y} &= F_q, \\ \dot{u} &= pF_p + qF_q, \\ \dot{p} &= -F_x - pF_u, \\ \dot{q} &= -F_y - qF_u, \end{aligned}$$

začetna pogoja za p in q pa izračunamo iz parametrizacije krivulje in diferencialne enačbe. Analogno gre reševanje za enačbe na $\mathbb{R}^n$, le da je karakteristični sistem ustrezno večji.

Pfaffova enačba je enačba oblike

$$p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz = 0.$$

Če označimo $\mathbf{F} = (p, q, r)$, se enačba prepiše v

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Rešitve enačbe so vse ploskve, ki so pravokotne na vektorsko polje $\mathbf{F}$. Še drugače, rešitve so vse ploskve $G(x, y, z) = c$, kjer je $\operatorname{grad} G = \mu\mathbf{F}$ za neko funkcijo μ.

Izkaže se, da je Pfaffova enačba rešljiva natanko tedaj, ko je $\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. Metoda za reševanje je naslednja:

(a) Fiksirajmo eno spremenljivko, npr. z. Pri fiksnem z dobimo enačbo $p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy = \mathbf{F_2} \cdot d\mathbf{r} = 0$, kjer je $\mathbf{F_2} = (p, q)$.

(b) Ker v $\mathbb{R}^2$ za vsako vektorsko polje $\mathbf{V}$ obstaja tak Lagrangev množitelj μ, da je $\mu\mathbf{V} = \operatorname{grad} G$ za neko funkcijo G, je gornja enačba rešljiva. Naj bo $G_2(x, y, z) + f(z)$ rešitev, kjer je $f(z)$ integracijska 'konstanta'.

(c) Pišimo $G(x, y, z) = G_2(x, y, z) + f(z)$. Radi bi določili f tako, da bo $\operatorname{grad} G = \mu\mathbf{F}$ za nek μ. Pogoj $\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ zagotavlja, da bomo iz gornjega sistema dobili navadno diferencialno enačbo prvega reda za f, kar nam bo dalo rešitev originalne enačbe.

4.1 Dan je diferencialni operator $Lu = xu_x + yu_y$.

(a) Uvedi taki novi koordinati α in β, da bo enačba $Lu = 0$ v novih koordinatah oblike $u_\beta = f(\alpha, \beta, u)$.

(b) Reši enačbo $Lu = 0$ pri naslednjih pogojih

(1) $u(x, y) = 1$ na $x^2 + y^2 = 1$,

(2) $u(x, y) = xy$ na $x^2 + y^2 = 1$,

(3) $u(x, x) = 1$,

(4) $u(x, 1 - x) = x^2 + 1$.

(c) Reši enačbo $Lu = u - x^2 - y^2$ pri pogoju $u(x, -2) = x - x^2$.

4.2 Reši enačbo

$$(xy^2 + xu)p - (yx^2 + yu)q + (x^2 - y^2)u = 0$$

pri pogoju $u = 1, x + y = 0$.

4.3 Reši enačbo

$$xzu_x + yzu_y - (x^2 + y^2)u_z = 0$$

pri začetnem pogoju $u(x, y, 0) = 2x+y$. Nasvet: rešitev išči v implicitni obliki.

4.4 Reši enačbo

$$xp + yq = pq$$

pri pogoju $u(x, 0) = 2x$.

4.5 Poišči vse rešitve enačbe

$$xu_x + yu_y - u_y^2 = 0$$

pri pogoju $u(x, 0) = \frac{1}{2}x^2$.

4.6 Poišči vse rešitve enačbe

$$xpq + yq^2 = 1$$

pri pogoju $u(x, 1 - x) = 2$.

4.7 (a) Poišči popolni integral (dvoparametrično družino rešitev) enačbe

$$2qz = 2pqx + 2q^2y + 1 + q^2.$$

(b) Poišči vse članice zgornje družine, ki se dotikajo ploskve $2x = y^2 + z^2$. Nasvet: iz pogoja na gradiente izrazi y, z kot funkciji parametra.
(c) Poišči tisto rešitev, ki se dotika ploskve $2x = y^2 + z^2$ vzdolž neke krivulje. Določi še krivuljo.

4.8 Poišči vse rešitve enačbe

$$pq - xp^2 + yq^2 = -1$$

pri pogoju $u(x,x) = 2$. Rešitev izrazi z originalnimi koordinatami.

4.9 Poišči vse rešitve enačbe

$$pq - xp + yq = 0$$

pri pogoju $u(x,0) = x$.

4.10 Reši $xu_y - yu_x = u$ pri pogoju $u(x,0) = h(x)$.

4.11 Reši $F(p) = q$ pri pogoju $u(x,0) = h(x)$, če je F razreda $\mathcal{C}^1$.

4.12 Reši $xu_x - u_y = 0$ pri pogoju $u(x,0) = x$.

4.13 Naj bo $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ nekonstantna. Pokaži, da u ne more biti rešitev enačbe $xp^3 + yq^3 = 0$.

4.14 Reši enačbo

$$u_x + u_y + u_z = u_x u_y u_z$$

pri pogoju $u(x,y,0) = 2x + y$.

4.15 Reši enačbo

$$xu_x + yu_y = \frac{1}{u_x + u_y}$$

pri pogoju $u(x,0) = x$.

4.16 Reši enačbo

$$xu_x + yu_y + zu_z = \frac{1}{u_x + u_y + u_z}$$

pri pogoju $u(x,y,0) = x + y$.

4.17 Reši enačbo

$$p^2 + pq + q^2 - u^2 = 0.$$

pri pogoju $u(x, -x) = 2\sqrt{3}$.

4.18 Reši enačbo

$$p^3 + p^2 q + pq^2 + q^3 - u = 0$$

pri pogoju $u(x, -x) = 4$. Rešitev izrazi z originalnimi koordinatami.

4.19 Pokaži, da je $F(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$ implicitno podana rešitev kvazilinearne parcialne diferencialne enačbe, če je F prvi integral karakterističnega sistema. Naj bosta F, G prva integrala karakterističnega sistema. Pokaži, da je z enačbo $H(F, G) = 0$ tudi implicitno podana rešitev kvazilinearne parcialne diferencialne enačbe.

4.20 Dana je linearna diferencialna enačba

$$f(x, y, z)u_x + g(x, y, z)u_y + h(x, y, z)u_z = a(x, y, z, u),$$

$|f| + |g| + |h| \neq 0$. Naj bosta F in G funkcijsko neodvisna prva integrala sistema $\dot{x} = f, \dot{y} = g, \dot{z} = h$. Pokaži, da (vsaj lokalno) obstaja taka funkcija H, da ima v novih koordinatah $\alpha = F$, $\beta = G$, $\gamma = H$ diferencialna enačba obliko $u_\gamma = A(\alpha, \beta, \gamma, u)$.

4.21 (a) Med vsemi ploskvami v prostoru, katerih normala je pravokotna na krajevni vektor, poišči tisto, ki vsebuje krivuljo $s \mapsto (\cos s, \sin s, s)$.

(b) Poišči vse ploskve, katerih normala je pravokotna na krajevni vektor. Kakšno lastnost imajo njihove implicitne enačbe? Odgovor utemelji!

Nasvet: Reši najprej problem za krivulje v ravnini.

4.22 Med vsemi ploskvami, ki so ortogonalne na družino

$$z = a + xy, \ a \in \mathbb{R}$$

poišči tisto, ki vsebuje krivuljo

$$\mathbf{r}(s) = (s, 0, s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

4.23 Dani sta družini ploskev $y^2 - z^2 = A$, $x(y-z) = B$.

(a) Poišči vektorsko polje $\mathbf{V}$, ki je tangentno na obe družini.

(b) Poišči ploskev h, ki je ortogonalna na vektorsko polje $\mathbf{V}$ in vsebuje krivuljo $\gamma(s) = (s, -s, s/2)$.

(c) Poišči ploskev h, ki je tangentna na vektorsko polje $\mathbf{V}$ in vsebuje krivuljo $\gamma(s) = (s, -s, s/2)$.

Rešitvi pri (b) in (c) izrazi v originalnih koordinatah.

4.24 Poišči družino ploskev, ortogonalnih na družini $x^2 + y^2 + z^2 = C$, $x^2 + y^2 = Dz$.

4.25 Poišči družino ploskev, ortogonalnih na družini $x^2 + y^2 + z = C$, $x^2 - y^2 + z = D$.

4.26 Dano je vektorsko polje $\mathbf{F} = (z(3z+1), z(3z+1), x+y)$.

(a) Poišči družino ploskev $f(x,y,z) = C$, ki so ortogonalne na $\mathbf{F}$.

(b) Poišči družino ploskev, ki so ortogonalne na $f(x,y,z) = C$. Katera vsebuje krivuljo $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$?

4.27 Poišči družino ploskev, ki je taka, da gredo vse tangentne ravnine na posamezni članici družine skozi isto točko. Katera vsebuje $r(s) = (1, s, s)$?

4.28 (a) Naj bo $\mathbf{d} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ neničeln vektor. Pokaži, da vsaka rotacijska ploskev $z = u(x,y)$ v $\mathbb{R}^3$, ki ima $\mathbb{R}\mathbf{d}$ za rotacijsko os, zadošča kvazilinearni parcialni diferencialni enačbi

$$(bz - cy)u_x + (cx - az)u_y = ay - bx.$$

Nasvet: Pokaži, da je vsaka krožnica s središčem na $\mathbb{R}\mathbf{d}$, ki leži v ravnini z normalo $\mathbf{d}$, karakteristika.

(b) Reši zgornjo enačbo za $(a,b,c) = (1,1,1)$ pri začetnem pogoju $u(x,x) = 0$. Katero ploskev dobiš?

5. KLASIFIKACIJA PDE DRUGEGA REDA V DVEH SPREMENLJIVKAH

Naj bo
$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + f$$
diferencialni operator drugega reda. Operator
$$L_0 u = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$$
imenujemo glavni del L. Glede na diskriminanto
$$D(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$
enačbe lahko klasificiramo. Enačba $Lu = 0$ je v točki (x, y) *hiperbolična*, če je $D(x, y) > 0$, *parabolična*, če je $D(x, y) = 0$ in *eliptična*, če je $D(x, y) < 0$.

Tip enačbe je neodvisen od koordinatnega sistema. Izkaže se, da za vsak tip enačbe lahko najdemo posebej enostavno obliko enačbe, ki ji pravimo kanonična. Kanonična oblika za eliptično enačbo je $Lu = u_{xx} + u_{yy} + L_1(u)$, kjer je L_1 diferencialni operator prvega reda. Parabolična enačba ima kanonično obliko $Lu = u_{xx} + L_1(u)$, za hiperbolično pa sta dva, in sicer $Lu = u_{xx} - u_{yy} + L_1(u)$ in $Lu = u_{xy} + L_1(u)$.

5.1 Klasificiraj enačbo in jo reši:
$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$$

5.2 Klasificiraj enačbo in jo prevedi na kanonično obliko:
$$u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

5.3 Klasificiraj enačbo in jo prevedi na kanonično obliko:
$$\operatorname{ch}^2 x u_{xx} - 2 \operatorname{sh} x u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

5.4 Klasificiraj enačbo in jo prevedi na kanonično obliko:
$$y^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = (y^2/x)u_x + (x^2/y)u_y$$

5.5 Zapiši enačbo

$$2u_{xx} - 2(y-1)u_{yy} - u_y = 0, \quad y > 1,$$

v kanonični obliki. Reši enačbo pri pogojih

$$\lim_{y \to 1^+} u(x,y) = x, \lim_{y \to 0^+} \sqrt{y} u_y(x, y+1) = x.$$

6. LAPLACOVA ENAčBA

Laplacova enačba se glasi

$$\triangle u = 0,$$

kjer je

$$\triangle u = u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}.$$

Rešitvam Laplacove enačbe pravimo *harmonične funkcije*. Harmonične funkcije zadoščajo *principu maksima*: če je D odprto omejeno območje in f nekonstantna harmonična funkcija na D, ki je zvezna na $\overline{D}$, zavzame f maksimum (in minimum) na robu. Harmonične funkcije imajo tudi *lastnost povprečne vrednosti*: za vsaka a, r za katera je $B(a,r) \subset D$, velja

$$f(a) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B(a,r))} \int_{B(a,r)} f(x) dV_x.$$

Fundamentalna rešitev za Laplacov operator je funkcija $N(x)$, ki v (smislu distribucij) reši enačbo $\triangle N = \delta_0$. Za $\mathbb{R}^n$ dobimo naslednje rešitve:

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{2\pi} \log |x| \text{ v dveh dimenzijah in} \\ N(x) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n |x|^{n-2}} \text{ za } n > 2, \end{aligned}$$

kjer je

$$\omega_n = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

površina enotske sfere v $\mathbb{R}^n$.

Naj bo D omejeno območje gladkim (to je C^∞) robom in $S = \partial D$. *Greenova funkcija* območja D za Laplacov operator z Dirichletovimi robnimi pogoji je funkcija $G(x,y)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

(a) $G(x,y)$ je definirana za vsak $x \in D$, $y \in \overline{D}$, $x \neq y$,

(b) za vsak $x \in D$ je funkcija $y \to G(x,y) + N(x-y)$ harmonična na D in zvezna na $\overline{D}$,

(c) za vsak $x \in D$ in vsak $y \in S$ je $G(x,y) = 0$.

Izkaže se, da obstaja ena sama taka funkcija. Omenimo tri lastnosti Greenovih funkcij:

- velja $G(x, y) = G(y, x)$ za poljubna $x, y \in D$, $x \neq y$,
- velja $0 < G(x, y) < -N(x - y)$ za poljubna $x, y \in D$, $x \neq y$,
- za vsako dovolj lepo funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ je funkcija $v(x)$, definirana s predpisom $v(x) = -\int_D G(x, y)f(y)dy$, rešitev naloge $\triangle v = f$, $v|_{\partial D} = 0$.
- za vsako dovolj lepo funkcijo $g : S \to \mathbb{R}$ je funkcija $w(x)$, definirana s predpisom $w(x) = -\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y)g(y)dy$, rešitev naloge $\triangle w = 0$, $w|_{\partial D} = g$.

Funkciji $P : D \times S \to \mathbb{R}$, ki je definirana kot minus normalni odvod G na robu, $P(x, y) = -\frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y)$, pravimo *Poissonovo jedro* za območje D.

Harmonične funkcije, Greenova funkcija, Poissonovo jedro

6.1 Naj bosta $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ območji. Pokaži, da C^2 difeomorfizem $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ ohranja harmoničnost, se pravi

$$u \text{ harmonična na } \Omega_2 \Rightarrow \; u \circ f \text{ harmonična na } \Omega_1,$$

natanko tedaj, ko je konformna preslikava. Namig. V eno smer zadošča pogoj napisati na harmoničnih polinomih nizkih stopenj.

6.2 Naj bo $F : D \to D'$ konformna preslikava, ki je homeomorfizem $\overline{D} \to \overline{D'}$, kjer sta $D, D' \subset \mathbb{R}^2$ odprti omejeni množici z Greenovima funkcijama G oziroma G'. Dokaži:

$$G(x, y) = G'(F(x), F(y)).$$

6.3 Napiši Greenovo funkcijo za naslednja območja: (1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, (2) prvi kvadrant, (3) $B^2(0, a) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, (4) pas $\mathbb{R} \times [0, a]$, (5) prvi oktant, (6) $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$, (7) $B^n(0, a) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$.

6.4 Naj bo $P(x, y)$ Poissonovo jedro za krog $B^2(0, a)$, $G(x, y)$ pa Greenova funkcija ($x, y \in \mathbb{R}^2$). Izračunaj integrala

$$\int_{S^1(0,a)} P(x, y)\ ds_y \quad \text{in} \quad \int_{B^2(0,a)} G(x, y)\ dV_y$$

6.5 (a) Naj bosta a in b realni števili. Reši

$$\begin{aligned} \triangle u &= a \text{ na } \overline{B}^n(0, 1), \\ u &= b \text{ na } S^{n-1}(0, 1). \end{aligned}$$

(b) Naj bo g zvezna funkcija na $S^{n-1}(0, 1)$ in $f \in C^2(\overline{B}^n(0, 1))$. Pokaži, da je

$$\sup_{\overline{B}^n(0,1)} |u| \leq \sup_{S^{n-1}(0,1)} |g| + \frac{1}{2n} \sup_{\overline{B}^n(0,1)} |f|,$$

če je funkcija u rešitev enačbe $\triangle u = -f$, $u|_{S^{n-1}(0,1)} = g$.

6.6 Naj bo $Z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zrcaljenje preko hiperravnine $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ in $D \subset \mathbb{R}^n$ območje, za katerega je $Z(D) = D$. Privzemimo, da ima D Greenovo funkcijo $G(x, y)$ in Poissonovo jedro $P(x, y)$. Z $G^+(x, y)$ in $P^+(x, y)$ označimo Greenovo funkcijo in Poissonovo jedro za območje $D^+ = D \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$.

(a) Izrazi G^+ z G.

(b) Poišči zvezo med P in P^+.

Naj bo $(\partial D)^+ = \partial D \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$ in $L = \overline{D} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.

(c) Za dano funkcijo $f : (\partial D)^+ \to \mathbb{R}$ definiramo

$$F^+(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\partial D)^+, \\ 0, & x \in L \end{cases} \quad \text{in} F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\partial D)^+, \\ -f(Z(x)), & Z(x) \in (\partial D)^+ \end{cases}.$$

Privzemi, da je F^+ zvezna in pokaži, da funkcija

$$H(x) := \int_{\partial D} P(x, y) F(y)\ dS_y$$

reši enačbo $\triangle H(x) = 0$ na D^+, $H|_{\partial D^+} = F^+(x)$.

Preden se lotiš reševanja, si nariši sliko!

6.7 Naj bo $0 < a < b$. Reši Poissonovo enačbo

$$\triangle u = \begin{cases} 0, & r < a \\ -1, & a \le r \le b \\ 0, & b > r \end{cases},$$

kjer je u zvezno parcialno odvedljva funkcija na $\mathbb{R}^3$, ki je odvisna samo od oddaljenosti r od izhodišča in gre v neskončnosti proti 0.

Reševanje z integralskimi transformacijami

Kadar je območje D ravnina, polravnina, kvadrant, pas ali polpas se lotimo Laplacove enačbe na D z eno od treh Fourierovih transformacij. Izbor je odvisen od robnih pogojev. Ponovimo osnovne formule:

$$\mathcal{F}(f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-izx}\, dx,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(z) e^{izx}\, dz,$$

$$\mathcal{F}_s(f)(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin zx\, dx,\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s(f)(z) \sin zx\, dz,$$

$$\mathcal{F}_c(f)(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos zx\, dx,\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_c(f)(z) \cos zx\, dz.$$

Predpostavili smo, da sta tako funkcija f kot njena transformiranka v L^1. Pri računanju inverzne transformiranke si pogosto pomagamo s formulo

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}(f)(z)\, \mathcal{F}(g)(z), \quad (f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) g(u)\, du$$

ali pa z izrekom o residuih. Drugi odvodi se transformirajo takole:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(f''\right)(z) &= -z^2 \mathcal{F}(f)(z), \\ \mathcal{F}_s\left(f''\right)(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) z - z^2 \mathcal{F}_s(f)(z), \\ \mathcal{F}_c\left(f''\right)(z) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) - z^2 \mathcal{F}_s(f)(z). \end{aligned}$$

Pri tem smo predpostavili, da je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ in $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$.

6.8 Naj bosta $a, b > 0$, $ab \neq k\pi$. Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq a$ pri robnih pogojih

$$u(x,0) = e^{-b|x|}, \quad u(x,a) = 0.$$

6.9 Naj bosta $a, b > 0$. Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $x \in \mathbb{R}, y \geq 0$ pri robnem pogoju

$$u(x,0) = \begin{cases} b, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}.$$

Rešitev tudi geometrijsko interpretiraj.

6.10 Naj bosta $a, b > 0$ in $h \in \mathbb{R}$. Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $x \in \mathbb{R}, y \geq 0$ pri robnem pogoju

$$u_y(x,0) + hu(x,0) = \begin{cases} b, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}.$$

Kaj se zgodi v primeru $h = 0$?

6.11 Naj bosta $a, b > 0$. Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $x \geq 0, y \geq 0$ pri robnih pogojih

$$u(0,y) = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} b, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}.$$

6.12 Naj bosta $a, b > 0$. Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $x \geq 0, y \geq 0$ pri robnih pogojih

$$u(0,y) = 0, \quad u_y(x,0) = \begin{cases} b, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}.$$

6.13 Naj bosta $a, b > 0$. Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $x \geq 0$, $0 \leq y \leq a$ pri robnih pogojih

$$u(0,y) = 0 \text{ in } \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,a) = b.$$

Reševanje s separacijo spremenljivk

Enačbe, ki jih dobimo po separaciji spremenljivk, so odvisne od tega, v katerih koordinatah delamo. Obravnavali bomo kartezične, polarne, cilindrične in sferične koordinate.

Kartezične koordinate

Kadar je območje D interval, pravokotnik ali kvader, uporabimo pri reševanju Laplacove enačbe na D kartezične koordinate. V teh treh primerih je

$$\triangle u = u''(x), \quad \triangle u = u_{xx} + u_{yy} \text{ oziroma } \triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Po separaciji spremenljivk dobimo eno od trigonometrijskih vrst. Katero, je odvisno od robnih pogojev.

6.14 Naj bo $0 < a < b$. Reši enačbo

$$u''(x) = \begin{cases} -2, & |x| < a \\ 0, & a \leq |x| \leq b \end{cases},$$

pri robnih pogojih $u(-b) = u(b) = 0$.

Reši isto enačbo pri nehomogenih robnih pogojih oblike $u(-b) = c$, $u(b) = d$ tako, da jo s primerno substitucijo prevedeš na enačbo s homogenimi robnimi pogoji.

6.15 Naj bosta $a, b > 0$ in $f_1, f_2 \in L^2[0, a]$. Reši Laplacovo enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $[0, a] \times [0, b]$ pri robnih pogojih

$$u(x, 0) = f_1(x),\ u(x, b) = f_2(x),$$

$$u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0.$$

6.16 Naj bosta $a, b > 0$ in $f_1, f_2 \in L^2[0, a]$ in $g_1, g_2 \in L^2[0, b]$. Reši Laplacovo enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $[0, a] \times [0, b]$ pri robnih pogojih

$$u(x, 0) = f_1(x),\ u(x, b) = f_2(x),$$

$$u(0, y) = g_1(x),\ u(a, y) = g_2(x).$$

6.17 Reši enačbo $\triangle u = 0$ na območju $[-\pi/2, \pi/2]^2$ pri pogojih

$$u(x, -\pi/2) = u(x, \pi/2) = 0, \quad u(-\pi/2, y) = \cos(y) = -u(\pi/2, y).$$

6.18 Reši enačbo $\triangle u = 0$ na območju $[-\pi, \pi]^2$ pri pogojih

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, -\pi) = u(x, \pi) = \pi^2 - x^2.$$

6.19 Naj bosta $a, b > 0$ in $f \in L^2[0, a]$. Reši Laplacovo enačbo

$$\triangle u = 0$$

na območju $[0, a] \times [0, b]$ pri robnih pogojih

$$u_y(x, 0) = 0,\ u(x, b) = f(x),$$

$$u_x(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0.$$

6.20 Naj bo $D = [0, a] \times [0, b]$ in $h \in L^2(D)$. Reši Poissonovo nalogo

$$\triangle u = -h$$

na območju D pri robnem pogoju $u|_{\partial D} = 0$. V primeru $h = 2$ koeficiente tudi eksplicitno izračunaj.

6.21 Naj bo $D = [0,a] \times [0,b]$ in $(x_0, y_0) \in D$. Predstavljajmo si, da je $(x_0, y_0) \times \mathbb{R}$ žica, po kateri je razporejen naboj s konstantno linearno gostoto μ in da je $\partial D \times \mathbb{R}$ prevodna škatla. Kakšna je porazdelitev električnega potenciala u znotraj škatle?

6.22 Naj bo $D = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$. Predstavljajmo si, da je ∂D prevodna škatla in da se v točki $(x_0, y_0, z_0) \in D^0$ nahaja naboj e. Kakšna je porazdelitev električnega potenciala u znotraj škatle?

6.23 Reši enačbo $\triangle u = yx$ na območju $D = [0,\pi]^2$ pri pogoju $u|_{\partial D} = 0$.

Polarne koordinate

Kadar je območje D krog, krožni izsek, zunanjost kroga, izsek zunanjosti kroga, kolobar ali izsek kolobarja uporabimo pri reševanju Laplacove enačbe na D polarne koordinate. V tem primeru je

$$\triangle u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}.$$

Oglejmo si najprej nekaj primerov, ko je funkcija u odvisna samo od r. V tem primeru zadnji člen v gornji formuli odpade.

6.24 Reši Poissonovo nalogo

$$\triangle u = -1$$

na enotskem krogu pri robnem pogoju

$$u(1, \varphi) = 0.$$

6.25 Poišči kakšno rešitev enačbe

$$\triangle u = \|x\|^{2002} + \|x\|^{2004}$$

v $\mathbb{R}^3$.

6.26 Reši Poissonovo enačbo

$$\triangle u = -1$$

na neskončnem valju z radijem a pri robnem pogoju

$$(u_r + hu)|_{r=a} = 0, \quad h \neq 0.$$

6.27 Naj bo $0 < a < b$. Reši Poissonovo enačbo

$$\triangle u = \begin{cases} 0, & r < a \\ -1, & a \leq r \leq b \\ 0, & b < r \end{cases},$$

kjer je u zvezno parcialno odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}^2$, ki je odvisna samo od oddaljenosti r od z osi. Dokaži, da je u v neskončnosti neomejena.

V primeru, ko je funkcija u odvisna tako od r kot φ, dobimo za rešitev Laplacove enačbe $\triangle u = 0$ s separacijo spremenljivk $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ enačbi

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad r^2R''(r) + rR'(r) - \nu^2R(r) = 0.$$

Glede na robne pogoje določimo ν. V splošnem je nastavek oblike

$$u(r,\theta) = A\log r + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^{\nu_n} + B_n r^{-\nu_n})(C_n\cos\nu_n\varphi + D_n\sin\nu_n\varphi), \nu_n \neq 0.$$

Glede na obliko območja D ločimo naslednje možnosti:

(1) Če je območje D krog, zunanjost kroga ali kolobar potem zaradi periodičnosti dobimo $\nu_n = n \in \mathbb{N}_0$. Če je D krog, vzamemo zaradi omejenosti v 0 $A = 0$, $A_n = 1$, $B_n = 0$. Če je D zunanjost kroga, imamo običajno pogoj na omejenost v neskončnosti, zato v takem primeru vzamemo $A_n = 0$, $B_n = 1$, $n \geq 1$. Koeficienta C_n in D_n določimo iz robnih pogojev po r.

(2) Če je območje D izsek kroga, zunanjosti kroga ali kolobarja, kjer φ teče od 0 do φ_0, potem je ν_n odvisen od robnega pogoja po φ:

a) Če je $u(r,0) = u(r,\varphi_0) = 0$, je $A = 0$, $C_n = 0$, $D_n = 1$ in $\nu_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Če je $u(r,0) = u_\varphi(r,\varphi_0) = 0$, je $C_n = 0$, $D_n = 1$ in $\nu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\varphi_0}$.

c) Če je $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\varphi_0) = 0$, je $C_n = 1$, $D_n = 0$ in $\nu_n = \frac{n\pi}{\varphi_0}$. Če je D izsek kroga, je $A = 0$.

V primeru nehomogenih ali mešanih pogojev po φ nastopijo težave. Koeficiente A_n in B_n potem določimo iz robnih pogojev po r. Pri izseku kroga vzamemo $B_n = 0$ in pri izseku zunanjosti kroga vzamemo $A_n = 0$.

6.28 Reši enačbo $\triangle u = 0$ na $B^2(0,1)$ pri pogoju

$$u(1,\varphi) = |\varphi|,\ \varphi \in [-\pi,\pi].$$

Kaj lahko poveš o konvergenci dobljene vrste?

6.29 Reši enačbo $\triangle u = 0$ na $B^2(0,1)$ pri pogoju

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} -\sin\varphi, & -\pi < \varphi < 0 \\ \sin\varphi, & 0 < \varphi < \pi \end{cases}.$$

6.30 Reši enačbo $\triangle u = 0$ na $B^2(0,1)$ pri pogoju

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} -1, & -\pi < \varphi < 0 \\ 1, & 0 < \varphi < \pi \end{cases}.$$

Rešitev izrazi z elementarno funkcijo. Koliko je $u(1/2,\pi/2)$?

6.31 Naj bo $a > 0$, n naravno število in D krožni izsek z radijem a in kotom π/n. Reši Laplacovo enačbo

$$\triangle u = 0$$

pri robnih pogojih

$$u(a,\varphi) = \sin n\varphi, \quad u(r,0) = 0 \text{ in } u(r,\frac{\pi}{n}) = 0.$$

6.32 Reši enačbo $\triangle u = 0$ na $D = B^2(0,1) \cap (\mathbb{R}^+)^2$ pri pogojih

$$u(1,\varphi) = \varphi(\pi - 2\varphi),\ \ \varphi \in [0,\pi/2] \text{ in } u(r,0) = u(r,\frac{\pi}{2}) = 0,\ \ r \in [0,1].$$

6.33 Na komplementu kroga $B^2(0, a)$ reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

pri robnem pogoju

$$u_r(a, \varphi) = 0$$

in pri asimptotskem pogoju

$$u(r, \varphi) = cr \cos \varphi$$

za velike r. Naloga opisuje kako se vede ravninski tok idealne tekočine, ki s hitrostjo c teče v smeri x osi, ko naleti na krog $B^2(0, a)$. Hitrost tekočine je gradient funkcije u.

Nasvet: Pomagaj si z substitucijo $v = u - cr \cos \varphi$.

6.34 Naj bo D polkrog z radijem a, ki leži na gornji polravnini. Reši enačbo

$$\triangle u = -2, \quad u|_{\partial D = 0}.$$

Nasvet: Pomagaj si s substitucijo $v(r, \varphi) = u(r, \varphi) + y^2 = u(r, \varphi) + r^2 \sin^2 \varphi$.

6.35 Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na polkrogu $r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$ pri robnih pogojih

$$u(r, 0) = r, \quad u(r, \pi) = -r, \quad u(1, \varphi) = f(\varphi).$$

Nasvet: Pomagaj si s substitucijo $v(r, \varphi) = u(r, \varphi) - r \cos \varphi$.

7. DIFUZIJSKA ENAčBA

Difuzijska enačba v eni spremenljivki se glasi

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

in opisuje prevajanje toplote po (končni ali neskončni) palici.

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ omejeno območje z robom S in $0 < T < \infty$. Potem obstaja največ ena zvezna funkcija u na $\overline{D} \times [0, T]$, ki se na paraboličnem robu $(\overline{D} \times 0) \cup (S \times [0, T])$ ujema z dano funkcijo in reši enačbo $u_t = c^2 u_{xx}$.

Izrek. *Parabolični princip maksima.* Če je u zvezna na $\Omega\overline{D} \times [0, T]$ in reši enačbo $u_t = \triangle u$, zavzame maksimum $\max_\Omega u$ na paraboličnem robu.

7.1 Naj bo $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$ omejen interval. Naj funkcija u reši enačbo $u_t = u_{xx}$ na D. Začetna porazdelitev toplote naj bo $u(x, 0) = f(x)$ in naj bo območje na robu ali izolirano ali pa naj ima rob temperaturo 0. Privzemi, da je rešitev dovolj gladka na $[a, b]$ in pokaži, da je

$$E(t) := \int_a^b u^2(x, t)\, dx \le \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Naj bo $u(x) = \lim_{t\to\infty} u(x, t)$. Kateri enačbi ustreza funkcija $u(x)$? Za oba primera u tudi izračunaj.

Reševanje z integralskimi transformacijami

Kadar je območje D enako $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{R}^+$, rešujemo difuzijsko enačbo na D bodisi z Laplacovo transformacijo po t bodisi z eno od treh Fourierovih transformacij po x. Prva metoda ima prednost, kadar je začetni pogoj homogen, druga pa kadar je robni pogoj homogen. Laplacovo transformacijo po t bi lahko uporabili tudi v primeru, ko je D končen interval, vendar si v tem primeru raje pomagamo s separacijo spremenljivk.

7.2 Reši enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ pri začetnem pogoju
$$u(x,0) = f(x),$$
kjer je f dana funkcija. Enačba opisuje prevajanje toplote po neskončni palici.

7.3 S pomočjo Fourierove transformacije reši enačbo
$$u_t = u_{xx}$$
na območju $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ pri pogoju $u(x,0) = xe^{-x^2}$.

7.4 Reši enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u(0,t) = \phi(t)$$
in začetnem pogoju
$$u(x,0) = 0.$$
Predpostavi, da je funkcija u omejena.

7.5 Reši enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u_x(0,t) = \psi(t)$$
in začetnem pogoju
$$u(x,0) = 0.$$
Predpostavi, da je funkcija u omejena.

7.6 Reši enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u(0,t) = 0$$
in začetnem pogoju
$$u(x,0) = f(x).$$

7.7 Reši enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u_x(0,t) = 0$$
in začetnem pogoju
$$u(x,0) = f(x).$$

7.8 Izpelji rešitev enačbe
$$u_t = u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri začetnem pogoju
$$u(x,0) = \sin x + \cos 2x,$$
in robnem pogoju
$$u_x(0,t) = e^{-t}.$$

7.9 Naj bo $c, u_0, h > 0$ in f dana funkcija. Reši enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0, t \geq 0$ pri začetnem pogoju
$$u(x,0) = u_0$$
in robnem pogoju
$$u_x(0,t) = hu(0,t).$$
Preveri, če dobiš smiseln rezultat, ko gre $h \to 0$ ali $x \to 0$.

7.10 Reši enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u(0,t) = \phi(t)$$
in pri začetnem pogoju
$$u(x,0) = f(x).$$

7.11 Reši enačbo
$$u_t = u_{xx} + e^{-ax}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri pogojih
$$u(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0.$$

Reševanje s separacijo spremenljivk

Naj bo $D = (a,b)$ in $c > 0$ konstanta. Iščemo tako funkcijo $u = u(x,t)$, $x \in [a,b]$, $t \geq 0$, ki reši nehomogeno difuzijsko enačbo
$$u_t = c^2 u_{xx} + F(x,t)$$
pri pogojih
$$u(x,0) = f(x),\ x \in [a,b]$$
$$B_a(u) = \alpha u(a,t) + \beta u_x(a,t) = A, \quad B_b(u) = \gamma u(b,t) + \delta u_x(b,t) = B, \quad t \geq 0.$$
Recept je takle:

(a) Homogenizacija robnih pogojev. Če konstanti A in B nista obe enaki nič, potem poiščemo tako funkcijo $w = w(x)$, ki zadošča obema robnima pogojema in napravimo substitucijo $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + w(x)$. Nova enačba je $\tilde{u}_t = c^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{F}(x,t)$, kjer je $\tilde{F} = F + w_{xx}$, nova začetna pogoja pa sta $\tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x)$, kjer je $\tilde{f} = f - w$ in $B_a(\tilde{u}) = 0$, $B_b(\tilde{u}) = 0$.

(b) Reševanje lastnega problema. S separacijo spremenljivk rešimo lastni problem $v_{xx} = \lambda v$, $B_a(v) = B_b(v) = 0$. Dobimo števno mnogo lastnih vrednosti. Vsaki pripada končno lastnih vektorjev. Naj bo v_n kompleten ortogonalen sistem lastnih vektorjev.

(c) Razvijemo $\tilde{F}(x,t) = \sum_n F_n(t)v_n(x)$ in $\tilde{f}(x) = \sum_n f_n v_n(x)$, kjer je

$$F_n(t) = \frac{\int_a^b \tilde{F}(x,t)v_n(x)\,dx}{\int_a^b v_n(x)^2\,dx} \text{ in } f_n = \frac{\int_a^b \tilde{f}(x)v_n(x)\,dx}{\int_a^b v_n(x)^2\,dx}.$$

(d) Rešitev (nove) enačbe je

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_n T_n(t)v_n(x),$$

kjer je funkcija T_n rešitev začetne naloge

$$T_n'(t) = c^2\lambda_n T_n(t) + F_n(t), \quad T_n(0) = f_n.$$

Na koncu k $\tilde{u}$ prištejemo w, da dobimo u.

Kartezične koordinate

Naslednje naloge se nanašajo na prevajanje toplote po palici dolžine l. Pri vsaki pojasni fizikalni pomen.

7.12 Naj bo $c, l, T_0 > 0$. Reši enačbo

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

pri začetnem pogoju

$$u(x,0) = f(x)$$

in robnih pogojih

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primere

$$f(x) = T_0, \quad f(x) = T_0 x/l, \quad f(x) = T_0 x(l-x)/l^2,$$

kjer je T_0 konstanta.

7.13 Naj bo $c, l > 0$ in $F(x,t)$ dana funkcija. Reši enačbo

$$u_t = c^2 u_{xx} + F(x,t)$$

pri začetnem pogoju

$$u(x,0) = 0$$

in robnih pogojih

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primera

(a) $F(x,t) = \chi_{[0,h]}(x)$, kjer je $0 < h < l$,

(b) $F(x,t) = A\frac{x}{l}\cos\omega t$, kjer $A, \omega > 0$.

7.14 Naj bo $c, l > 0$. Reši enačbo

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

pri začetnem pogoju

$$u(x,0) = 0$$

in robnih pogojih

$$u(0,t) = \phi(t), \quad u(l,t) = \psi(t).$$

Podrobno obravnavaj primera

(a) $\phi(t) = 0$, $\psi(t) = T_0$, kjer je T_0 konstanta ter

(b) $\phi(t) = 0$, $\psi(t) = T_0 \sin\omega t$, kjer sta $T_0, \omega > 0$ konstanti.

7.15 Reši enačbo

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

pri začetnem pogoju

$$u(x,0) = f(x)$$

in pri robnih pogojih

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0.$$

7.16 Naj bodo $a, b, l > 0$. Reši enačbo

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

pri začetnem pogoju

$$u(x, 0) = 0$$

in robnih pogojih

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = b.$$

7.17 Reši difuzijsko enačbo $u_t = u_{xx}$ za končno palico dolžine l, ki je v krajiščih izolirana, začetna porazdelitev temperature pa je $u(x, 0) = x$. Kakšna je stacionarna porazdelitev temperature?

8. VALOVNA ENAčBA

Valovna enačba v eni dimenziji se glasi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Opisuje nihanje strune. Za nihanje neskončne strune

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

na območju $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ pri začetnih pogojih $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, nam rešitev pove D'Alembertova formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\ ds.$$

Valovno enačbo na končnem intervalu lahko rešujemo bodisi s separacijo bodisi z Laplacovo transformacijo po t.

Izrek. *Območje vpliva.* Naj bo u C^2 funkcija, definirana na $\mathbb{R} \times [0,T]$ za nek $T > 0$ in naj reši $u_{tt} = u_{xx}$. Če je $u = u_t = 0$ na intervalu $(x_0 - t_0, x_0 + t_0) \times \{0\}$, $t_0 \in (0,T]$, potem je u enaka 0 na območju

$$\{(x,t), 0 \leq t \leq t_0 \text{ in } |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$

8.1 Naj funkcija u reši valovno enačbo $u_{tt} = u_{xx}$ pri pogojih $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, za $f, g \in C_c^1(\mathbb{R})$. Definirajmo kinetično in potencialno energijo

$$\begin{aligned} k(t) &:= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)^2\ dx, \\ p(t) &:= \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)^2\ dx, \end{aligned}$$

Dokaži

(*a*) $p(t) + k(t) = c$,

(*b*) $k(t) = p(t)$ za vse dovolj velike t. Nasvet: uporabi D'Alembertovo rešitev.

Reševanje z integralskimi transformacijami

8.2 Reši enačbo
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ pri začetnih pogojih $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = e^{-a|x|}$.

8.3 Reši enačbo
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u(0,t) = \phi(t)$$
in začetnih pogojih
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$

8.4 Reši enačbo
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u_x(0,t) + hu(0,t) = \psi(t)$$
in začetnih pogojih
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$
Posebej obravnavaj primer $h = 0$.

8.5 Reši enačbo
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju
$$u(0,t) = 0$$
in začetnih pogojih
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$
Pomagaj si z lihim nadaljevanjem funkcij $f(x)$, $g(x)$, $u(x,t)$ z območja $x > 0$ na $x \in \mathbb{R}$.

8.6 Reši enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

na območju $x \geq 0$, $t \geq 0$ pri robnem pogoju

$$u_x(0,t) = 0$$

in začetnih pogojih

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Pomagaj si s sodim nadaljevanjem funkcij $f(x)$, $g(x)$, $u(x,t)$ z območja $x > 0$ na $x \in \mathbb{R}$.

8.7 Reši enačbo nihanja polneskončne strune

$$u_{tt} = u_{xx} + 2e^{-t}\sin(x)$$

na območju $x \geq 0$ pri pogojih $u(0,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

8.8 Naj bo $a > 0$. Reši enačbo

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

na območju $x \geq 0$, pri pogojih $u_x(0,t) - u(0,t) = e^{-t} - 1$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

Reševanje s separacijo spremenljivk

8.9 Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ dani odvedljivi funkciji, ki sta v 0 in l enaki 0 in naj bosta $c, l > 0$ konstanti. Reši enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

pri robnih pogojih

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

in začetnih pogojih

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Podrobno obravnavaj primera

(a) $f(x) = 2h\min(x/l, 1 - x/l)$, $g(x) = 0$.

(b) $f(x) = 0$, $g(x) = \begin{cases} 1, & h < x < l - h \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$.

8.10 Reši enačbo nihanja za končno struno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0,1], \ a \in (0,1),$$

pri pogojih $u(0,t) = \cos(t), u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 1 - x$, $u_t(x,0) = 0$.

8.11 Naj bo $F(x,t)$ dana funkcija na $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ in naj bosta $c, l > 0$ konstanti. Reši enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t)$$

pri robnih pogojih

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

in pri začentih pogojih

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primera

(a) $F(x,t) = A\sin(\omega t)$,

(b) $F(x,t) = B\sin(\omega t)x/l$,

kjer so $A, B, \omega > 0$ konstante.

8.12 Naj bosta $\phi(t)$ in $\psi(t)$ dani funkciji in $c, l > 0$ konstanti. Reši enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

na intervalu $[0,l]$ pri robnih pogojih

$$u(0,t) = \phi(t), \quad u(l,t) = \psi(t)$$

in začenih pogojih

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primer

$$\phi(t) = 0, \quad \psi(t) = A\sin\omega t,$$

kjer sta $A, \omega > 0$ konstanti. Loči primera, ko ω je oziroma ni lastna frekvenca strune.

9. REšITVE NALOG

Fourierove vrste

1.1 (a) Neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije s kompaktnim nosilcem v $(-l,l)$ so goste v $L^2[-l,l]$ in hkrati ležijo v V_l.

(b) Za poljubna $y,z \in V$ velja $\langle Ay,z\rangle = \int_{-l}^{l}(-y'')z dx = \int_{-l}^{l} y'z'\ dx$. Odtod sledi, da je $\langle Ay,z\rangle = \langle Az,y\rangle$ in $\langle Ay,y\rangle \geq 0$. Operator $A : V_l \to L^2[-l,l]$ ni injektiven, ker ima v jedru konstantno funkcijo 1.

(c) Lastne vrednosti so $\lambda_k = -(k\pi/l)^2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Lastni podprostor za $\lambda_0 = 0$ je enodimenzionalen in generiran s konstantno funkcijo 1. Če je $k = 1,2,\ldots,$ potem je lastni podprostor za λ_k dvodimenzionalen in generiran s $\cos(k\pi x/l)$ in $\sin(k\pi x/l)$.

1.2 Dovolj je trditev dokazati za C^2 funkcije, ki imajo v krajiščih odvod in funkcijsko vrednost enako 0.

$$\begin{aligned}
Gf(x) &= \int_{-l}^{l}\frac{1}{4l}(x-t)^2 f(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_{-l}^{x}(x-t)f(t)\ dt - \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{x}^{l}(x-t)f(t)\ dt \\
AGf(x) &= \int_{-l}^{l}\frac{-1}{2l}f(t)\ dt - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\int_{-l}^{x}f(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{l}f(t)\ dt\right) = \\
&= \int_{-l}^{l}\frac{-1}{2l}f(t)\ dt + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(-f'')(x) &= -\int_{-l}^{l}\frac{1}{4l}(x-t)^2 f''(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_{-l}^{x}(x-t)f''(t)\ dt + \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{x}^{l}(x-t)f''(t)\ dt = \\
&= -\int_{-l}^{l}\frac{1}{2l}(x-t)f'(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_{-l}^{x}(-1)f'(t)\ dt - \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{x}^{l}(-1)f'(t)\ dt =
\end{aligned}$$

$$= \quad -\int_{-l}^{l} \frac{1}{2l} f(t)\ dt + \frac{1}{2}(-1)f'(x)\ dt - \frac{1}{2}(-1)f(x).$$

1.3 Fourierova vrsta in Parsevalova identiteta se glasita

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\pi x/l) + b_k \sin(k\pi x/l)),$$

$$\int_{-l}^{l} f(t)^2\ dt = 2la_0^2 + l\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

kjer je $a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\ dt$, $a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi x}{l}\ dt$, $b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi x}{l}\ dt$. Ostale trditve so posledice nalog 1.1 in 1.2.

1.4 Fourierove vrste in Parsevalove identitete so

(a) $$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \qquad \frac{2\pi^3}{3} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2},$$

(b) $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad \frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

(c) $$\frac{x^3 - \pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx, \qquad \frac{\pi^7}{945} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$$

1.5 Uporabimo nalogo 1.4 in dobimo rešitve (a) $\pi^2/6$, (b) $\pi^4/90$, (c) $\pi^6/945$.

1.6 Prvih pet polinomov je

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1,\\
\varphi_1(x) &= x - 1/2,\\
\varphi_2(x) &= \frac{1}{2!}(x^2 - x + 1/6),\\
\varphi_3(x) &= \frac{1}{3!}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x),\\
\varphi_4(x) &= \frac{1}{4!}(x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}).
\end{aligned}$$

Razvoj $\varphi_1(x)$ v Fourierovo vrsto je

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{\pi}\sum\frac{\sin 2k\pi x}{k}.$$

Iz rekurzivne formule dobimo

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\cos 2k\pi x}{k^2} + c.$$

Zaradi pogoja, da je vsaka funkcija ortogonalna na konstanto, mora biti $c = 0$. Splošna formula je

$$\varphi_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{(2\pi)^n} \sum \frac{\cos 2k\pi x}{k^n}$$

za sode n in

$$\varphi_n(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}+1} \frac{2}{(2\pi)^n} \sum \frac{\sin 2k\pi x}{k^n}$$

za lihe n. Vsota je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1}(2\pi)^{2m} \frac{1}{2} \varphi_{2n}(0).$$

1.7 Fourierove vrste so

$$\begin{aligned}
\chi_{[-a,a]}(x) &= \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx, \\
\cos ax &= \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos nx \right), \\
\sin ax &= \frac{\sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos nx, \\
\operatorname{ch} ax &= \frac{2a \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} \cos nx \right), \\
\operatorname{sh} ax &= \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{a^2 + n^2} \sin nx.
\end{aligned}$$

Ko uredimo Parsevalove identitete, dobimo

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}, \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 - n^2)^2} = \frac{1}{4a^4} \left(-2 + a\pi \operatorname{ctg} a\pi + a^2\pi^2(1 + \operatorname{ctg}^2 a\pi) \right),
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2-n^2)^2} = \frac{\pi}{4a}\left(a\pi(1+\operatorname{ctg}^2 a\pi) - \operatorname{ctg} a\pi\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)^2} = \frac{1}{4a^4}\left(-2 + a\pi \operatorname{cth} a\pi + a^2\pi^2(\operatorname{cth}^2 a\pi - 1)\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi}{4a}\left(\operatorname{cth} a\pi + \pi a(1-\operatorname{cth}^2 a\pi)\right).$$

1.8 Naj bodo a_i, b_j klasični Fourierovi koeficienti funkcije f. Minimum je enak kvadratnemu korenu iz

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt - \left(2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

Dosežen je pri $f_0 = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

1.9 Vrsta je

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

1.10 Rešitev iščemo z nastavkom $y(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_n \cos nx + d_n \sin nx$. Ko vstavimo v enačbo še vrsto za $|\sin x|$, opazimo, da so koeficienti d_n enaki 0, koeficienti c_n enaki 0 za lihe n. Za ostale dobimo enačbe $c_0 = \frac{2}{\pi}$ in

$$(-4k^2+1)c_k = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}.$$

Rešitev je

$$y(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{4k^2-1}\right)^2 \cos 2kx.$$

1.11 Za vsak $x \in \mathbb{R}$ definiramo $g(x) = \lim_{n\to\infty}(s_n f)(x)$.

(a) Velja $g(x) = x$ za vsak $x \in (-\pi, \pi)$ in $g(\pi) = 0$. Izven intervala $[\pi, \pi]$ dobimo $g(x)$ s periodičnim nadaljevanjem. Grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ se ujemata samo na intervalu $(-\pi, \pi)$. Velja $\frac{\pi}{2} = 2(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots)$.

(b) Velja $g(x) = x^2$ za vsak $x \in [-\pi, \pi]$. Izven intervala $[\pi, \pi]$ dobimo $g(x)$ s periodičnim nadaljevanjem. Grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ se ujemata samo na intervalu $[-\pi, \pi]$. Velja $\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

(c) Velja $g(x) = f(x)$ za vsak $x \in [-\pi, \pi]$. Izven intervala $[\pi, \pi]$ dobimo $g(x)$ s periodičnim nadaljevanjem. Grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ se ujemata samo na intervalu $[-\pi, \pi]$. Velja $-\frac{\pi^3}{32} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$.

1.12 Fourierova vrsta je $\frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2-n^2} \cos nx \right)$. Ker ima f levi in desni odvod v 0, je po točki (c) iz uvoda vsota vrste za $x = 0$ enaka $f(0)$. Odtod sledi (b), če zamenjamo a z t. Funkcijska vrsta $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-t^2}$ je enakomerno konvergentna na $[-\pi, \pi]$, ker je majorizirana s konvergentno številsko vrsto $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$. Točko (c) dobiš, če integriraš identiteto iz (b) od 0 do t in antilogaritmiraš.

1.13 Razviti je potrebno funkcijo $\operatorname{ch} x$ (naloga 1.7) in izračunati vrednosti v 0 in π. Vsoti sta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} - \frac{1}{2} \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi \operatorname{cth} \pi - 1}{2}.$$

1.14 Naj $a_n(g)$ pomeni Fourierov koeficient funkcije g pri $\cos nx$ in $b_n(g)$ Fourierov koeficient g pri $\sin nx$. Po definiciji Fourierovih koeficientov je

$$a_0(f(x)\cos mx) = \begin{cases} a_m(f)/2 & m > 0 \\ a_0(f) & m = 0 \end{cases},$$
$$a_n(f(x)\cos mx) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{|m-n|}(f) + a_{m+n}(f)) & m \neq n \\ a_0(f) + \frac{1}{2}a_{2n}(f) & m = n \end{cases},$$
$$b_n(f(x)\cos mx) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(n-m)b_{|m-n|}(f) + b_{m+n}(f)), & m \neq n \\ \frac{1}{2}b_{2n}(f) & m = n \end{cases}.$$

Podobno velja za $f(x) \sin mx$.

1.15 Velja

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \sin nx,$$
$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cos nx.$$

Prva metoda: odvajaj vrsti za $\cos ax$ in $\sin ax$ po a in pošlji $a \to 1$. Druga metoda: pomnoži vrsto za x s $\cos x$ ali $\sin x$ in razcepi produkte. Tretja metoda: uporabi prejšnjo nalogo.

1.16 Fourierovi koeficienti so $a_0(f) = 0$, $a_n(f) = (-1)^{n-1}n^{-1}$, $b_n(f) = 0$, $a_n(g) = 0$, $b_{2n}(g) = 0$ in $b_{2n+1}(g) = 2(-1)^n(2n+1)^{-1}$.

1.17 $a_0(f') = 0$, $a_n(f') = nb_n(f)$, $b_n(f') = -na_n(f)$.

1.18 Če $2k$ oziroma $(2k-1)$-krat integriramo per partes, dobimo

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx\right| &= n^{-2k}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(2k)}(x)\cos nx\ dx\right| \\
&\leq 2\quad \pi n^{-2k}\|f^{(2k)}\|_\infty, \\
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx\right| &= n^{-2k+1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(2k-1)}(x)\sin nx\ dx\right| \leq \\
&\leq 2\quad \pi n^{-2k+1}\|f^{(2k-1)}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Podobno ocenimo člene b_n.

1.19 Ker je f zvezna na $[-\pi,\pi]$, zvezno odvedljiva na $(-\pi,\pi)$ in $f(-\pi) = f(\pi)$, je $s_n(f') = \sum_{k=1}^n (kb_k\cos kx - ka_k\sin kx)$. Iz Cauchy-Schwartzove neenakosti sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2 + b_k^2) = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\|f'\|_2}{\pi} < +\infty.$$

Odtod sledi, da je vrsta $s_n(f)$ enakomerno in absolutno konvergentna. Ker so njeni sumandi zvezne funkcije, konvergira $s_n(f)$ proti neki zvezni funkciji g. Če dokažemo, da je $f = g$, je naloga končana. Ker je vrsta $s_n(f)$ enakomerno konvergentna, jo lahko členoma integriramo, zato imata funkciji f in g iste klasične Fourierove koeficiente. Ker je $s_n(f) = s_n(g)$, iz izreka o kvadratični konvergenci sledi, da sta f in g enaki v prostoru $L^2[-\pi,\pi]$. Ker sta f in g zvezni in enaki skoraj povsod, sta enaki povsod.

1.20 Funkcija F je zvezna. Za prvo točko izračunamo

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{-\pi}(f(x) - a_0)\ dx = 0.$$

Z integracijo per partes takoj dobimo prvi dve zvezi za Fourierove koeficiente. Ker je F monotona, ima omejen totalni razmah, zato njena Fourierova vrsta konvergira v sup normi, torej je $F(0) = 0 = A_0 - \sum b_n/n$, kar da še zadnjo enakost. Zadnja točka je trivialna posledica druge.

1.21 Iz naloge 1.20 sledi, da bi morala biti vsota vrste $\sum(n \log n)^{-1}$ končna, kar ne drži.

1.22 Skalarni produkt je

$$\langle e^{imx}, e^{inx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = 2\pi\delta_{m,n}.$$

1.23 Naj bo c_m Fourierov koeficient pri e^{imx} in a_m, b_m običajni Fourierovi koeficienti. Potem je $c_m + c_{-m} = a_m, m \geq 0$, $c_0 = a_0$, $i(c_m - c_{-m}) = b_m$. Obratno, $c_m = (a_m - ib_m)/2, c_{-m} = (a_m + ib_m)/2$, $m > 0$.

1.25 Kompletnost sledi iz povezave z običajno Fourierovo vrsto. Naj bo f enaka svojemu razvoju v običajno Fourierovo vrsto. Potem je

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}, \quad c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{imx}\, dx.$$

Parsevalova enakost je

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_m|^2.$$

1.25 Naloga je poseben primer naloge 1.26, kjer je rešitev izpeljana. Izračunamo $a = 2^{-1/2}$, $b = (3/2)^{1/2}$. Dobimo

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2(2+\cos x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n \cos nx.$$

1.26 Integral prepišemo v obliko

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\langle f(x), e^{inx}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = \\
&= \frac{2ab}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{s^{-n}}{(b^2-a^2)s^2 + 2(a^2+b^2)s + (b^2-a^2)}\, ds = \\
&= \frac{2ab}{2\pi i(b^2-a^2)}\int_{S^1} \frac{s^{-n}}{s^2 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2-a^2}s + 1}\, ds =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2ab}{2\pi i(b^2-a^2)} 2\pi i(\mathrm{Res}(g(s),0) + \mathrm{Res}(g(s),s_1)),$$

kjer je

$$g(s) = \frac{s^{-n}}{s^2 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2-a^2}s + 1}$$

in

$$s_1 = \frac{a-b}{a+b}$$

ničla polinoma $s^2 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2-a^2}s + 1$, ki leži znotraj S^1. Druga ničla je $s_2 = s_1^{-1}$. Za izračun residuov uporabimo razcep na parcialne ulomke in dobimo

$$g(s) = \frac{s^{-n}}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{s^{-n}}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right).$$

Za izračun ločimo primera $n > 0$ in $n \leq 0$. Če je $n > 0$, sta residuum v 0 in v s_1 enaka

$$\mathrm{Res}(g(s),0) = \frac{s_1^n - s_2^n}{s_1 - s_2}, \quad \mathrm{Res}(g(s),s_1) = \frac{s_1^{-n}}{s_1-s_2} = \frac{s_2^n}{s_1-s_2},$$

zato je vsota enaka

$$\mathrm{Res}(g(s),0) + \mathrm{Res}(g(s),s_1) = \frac{s_1^n}{s_1-s_2}.$$

Pri $n \leq 0$ dobimo le residuum v s_1 in ta je

$$\mathrm{Res}(g(s),0) = \frac{s_1^n}{s_1-s_2}.$$

Izračunajmo še

$$s_1 - s_2 = \frac{4ab}{b^2-a^2}$$

in vstavimo v formulo:

$$\frac{1}{2\pi}\langle f(x), e^{inx}\rangle = \frac{b^2-a^2}{4ab}\frac{2ab}{(b^2-a^2)}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n.$$

Iskana vrsta je

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n e^{inx}.$$

Rezultat, izražen z običajnimi koeficienti je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n \cos nx.$$

1.27 Če v vrsto za $\exp(z)$ vstavimo $z = \exp(ix)$, dobimo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}.$$

Ko vzamemo realni, oziroma imaginarni del, dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

1.28

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n-1)} = \cos x + \frac{1}{2}(\log(2-2\cos x) - \cos x \log(2-2\cos x)) + \frac{x-\pi}{2} \sin x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)} = \sin x + \frac{\pi - x}{2}(-1+\cos x) - \frac{1}{2} \log(2-2\cos x) \sin x.$$

1.29 Če je funkcija f enaka vsoti svoje Fourierove vrste, potem zamenjamo x z mx in dobimo Fourierovo vrsto za g. Če m deli n, je $c_n(g) = c_{\frac{n}{m}}(f)$, sicer pa je $c_n(g) = 0$. Če f ni enaka vsoti svoje vrste, je rezultat isti, račun pa bistveno daljši. Velja namreč:

$$\begin{aligned}
\langle g(x), e^{inx} \rangle &= \int_0^{2\pi} f(mx) e^{-inx} dx = \frac{1}{m} \int_0^{2m\pi} f(x) e^{-i\frac{n}{m}x} \, dx = \\
&= \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} f(x) e^{-i\frac{n}{m}x} \, dx = \\
&= \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\frac{n}{m}(x-2\pi l)} \, dx = \\
&= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\frac{n}{m}x} \, dx \sum_{l=0}^{m-1} e^{-2\pi l}.
\end{aligned}$$

Zadnja vsota je enaka 0, če m ne deli n in enaka m sicer.

1.30 Vse neenakosti so lahke, razen predzadnje. Velja namreč, da je

$$\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 = \frac{1}{2}\|z'\|_2^2.$$

Ker pa je krivulja parametrizirana z naravnim parametrom, je $|z'(s)| = 1$, torej je pod integralom konstanta in zato je $\|z'\|_1^2 = \|z'\|_2^2$. Enakost velja natanko tedaj, ko velja $z(s) = c_0 + c_1 e^{is}$.

1.31 Za kompleksne Fourierove koeficiente dobimo $c_n(h) = c_n(f)c_n(g)$. Odtod sledi $a_0(h) = a_0(f)a_0(g)$, $a_n(h) = (a_n(f)a_n(g) - b_n(f)b_n(g))/2$ in $b_n(h) = (a_n(f)b_n(g) + a_n(g)b_n(f))/2$. Iz zveze

$$\begin{aligned} a_0(|h|) &= \frac{1}{2\pi}\langle |h|, 1\rangle \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\ dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(x-t)|\ dx = a_0(|f|)a_0(|g|) \end{aligned}$$

dobimo še $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

1.32 Za kompleksne Fourierove koeficiente dobimo $c_n(g) = c_{-n}(f)c_n(f) = c_{-n}(g)$. Členi $b_n(g)$ so enaki 0, $a_0(g) = a_0(f)^2$, $a_n(g) = (a_n(f)^2 + b_n(f)^2)/4$.

1.33 Funkcije liho nadaljujemo na interval $[-l, 0]$ in uporabimo običajne formule za izračun Fourierovih koeficientov. Dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nx, \\ \cos x &= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx, \\ x(\pi - x) &= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x. \end{aligned}$$

1.34 Izračunamo

$$\Phi(\cos\frac{2\pi x}{l}, 0)(x) = \frac{\cos\frac{2\pi|x|}{l}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{2\pi x}{l}.$$

Podobno za sinuse. Ker norme slik baznih vektorjev ostanejo enake, je preslikava izometrija.

1.35 Definirajmo preslikavo

$$\Phi : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$$

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\left(\lambda_1 f_s(x) + \lambda_2 f_l(x)\right), & -\pi \le x < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\left(\lambda_2 f_s(x) + \lambda_1 f_l(x)\right), & 0 \le x \le \pi \end{cases},$$

kjer je f_s sodi, f_l pa lihi del funkcije f. Krajši račun pokaže, da je Φ izomorfizem Hilbertovih prostorov, ki klasični trigonometrijski sistem preslika v uteženi trigonometrijski sistem pomnožen s konstanto $\frac{2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$.

1.36 Produkt kompletnih sistemov je kompleten sistem na katrezičnem pro-- duktu.

1.37 Za funkcijo $f(x,y) = xy$ lahko uporabimo kar razvoj x v vrsto in izračunamo produkt vrst. Dobimo

$$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \sin mx \sin ny.$$

Zaradi preprostejše pisave bomo ostali funkciji razvili v kompleksno Fourierovo vrsto. Skalarni produkti so:

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{sign}(x-y), e^{imx+iny} \rangle &= 0, \;\; m,n \ne 0, \\ &= \frac{-4\pi i}{m}, \;\; m+n=0, \\ &= \frac{4\pi i(-1)^m}{m}, \;\; n=0, \\ &= \frac{4\pi i(-1)^n}{n}, \;\; m=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle |x-y|, e^{imx+iny} \rangle &= \frac{4\pi(-1)^{m+n}}{mn}, \;\; m,n \ne 0, \\ &= -\frac{8\pi}{m^2}, \;\; m+n=0, \\ &= \frac{4\pi(-1)^m}{m^2}, \;\; n=0, \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}, \quad m = 0.$$

1.38 Vrsta je majorirana s konvergentno številsko vrsto, zato je absolutno in enakomerno konvergentna in ima zvezno limito. S pomočjo formul dobimo

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx \sin ny = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos(n(x-y)) - \cos(n(x+y))\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos nu - \cos nv\right), \end{aligned}$$

kjer smo uvedli novi spremenljivki $u = x - y$ in $v = x + y$. Ker velja

$$\frac{3u^2 - \pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nu}{n^2}, \quad -\pi \le u \le \pi,$$

je

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos nu - \cos nv\right) = \frac{u^2 - v^2}{8}.$$

Ker je $4xy = v^2 - u^2$, enakost sledi za $|x| + |y| \le \pi$. Za ostale točke z območja $[-\pi, \pi]^2$ je funkcija enaka periodičnemu nadaljevanju $\frac{u^2 - v^2}{8}$.

1.39 Vrsta je majorirana s konvergentno številsko vrsto, zato je absolutno in enakomerno konvergentna in ima zvezno limito. S pomočjo formul dobimo

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \sin ny \sin nz = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (\sin(n(x+y-z)) + \sin(n(-x+y+z)) + \\ &\quad + \sin(n(x-y+z)) - \sin(n(x+y+z))) = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(\sin nu + \sin nv + \sin nw - \sin(n(u+v+w))\right). \end{aligned}$$

kjer smo uvedli nove spremenljivke $u = x+y-z$, $v = -x+y+z$ in $w = x-y+z$. Ker velja

$$\frac{u^3 - \pi^2 z}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nu}{n^3}, \quad -\pi \le u \le \pi,$$

je

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(\sin nu + \sin nv + \sin nw - \sin(n(u+v+w))\right) =$$
$$= \frac{1}{48}(u^3 + v^3 + w^3 - (u+v+w)^3).$$

Ker je $-24xyz = u^3+v^3+w^3-(u+v+w)^3$, enakost sledi za $|x|+|y|+|z| \le \pi$. Za ostale točke z območja $[-\pi,\pi]^3$ je funkcija enaka periodičnemu nadaljevanju $(u^3 + v^3 + w^3 - (u+v+w)^3)/48$.

Fourierova transformacija

2.1 Za izhodišče vzamemo naslednjo Fourierovo formulo, ki velja za dovolj lepe funkcije:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\, dz \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivz}\, dv.$$

S premeščanjem konstante in substitucijama $z \to -z$ in $z \to 2\pi z$ dobimo inverzne formule

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}_{hla}^{-1} f\right)(z) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} f(t) e^{-izt}\, dt,\\
\left(\mathcal{F}_{suh}^{-1} f\right)(z) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} f(t) e^{izt}\, dt,\\
\left(\mathcal{F}_{zak}^{-1} f\right)(z) &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t) e^{-2\pi izt}\, dt.
\end{aligned}$$

Opazimo, da je $\mathcal{F}_{zak}$ izometrija.

2.2 Če je f soda, potem je $\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}\, dt =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(-s)e^{-isx}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-isx}\, ds = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(x)$, torej je tudi $\mathcal{F}(f)$ soda. Pri drugem enačaju smo napravili substitucijo $s = -t$. Če je f liha, potem pri tretjem enačaju pridelamo minus, torej je tudi $\mathcal{F}(f)$ liha.

2.3 Obe trditvi sta ekvivalentni trditvi

$$\mathcal{F}\left(f\right)\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(tx)\ dt.$$

2.4 Ker velja Fourierova formula (glej rešitev naloge 2.1), dobimo zvezo iz točke (a) tako, da v integralu štejemo minus k spremenljivki v :

$$\mathcal{F}^2(f)(v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(-v)z}\ dz\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-itz}\ dt=f(-v).$$

Točki (b) in (c) sta direktni posledici točke (a).

2.5

$$\mathcal{F}\left(f\right)\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin cx}{x},\quad \mathcal{F}\left(g\right)\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{c}{c^2+x^2}.$$

2.6 S pomočjo inverzne formule in prejšnje naloge, dobimo

$$\mathcal{F}\left(h\right)\left(x\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{e^{-c|x|}}{c}.$$

Pri nalogi (b) je problem v tem, da funkcija k ne pripada L^1, zato ni v definicijskem območju Fourierove transformacije. Kasneje bomo spoznali, da lahko Fourierovo transformacijo razširimo na L^2 in da velja

$$\mathcal{F}\left(k\right)\left(x\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{[-c,c]}(x).$$

2.7

$$\mathcal{F}\left(f\right)\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{x}\right)^2\sin^2\frac{x}{2},\quad \mathcal{F}\left(g\right)\left(x\right)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}.$$

2.8

$$\mathcal{F}\left(f(t)\cos at\right)\left(x\right)=\frac{\mathcal{F}\left(f\right)\left(x-a\right)+\mathcal{F}\left(f\right)\left(x+a\right)}{2},$$
$$\mathcal{F}\left(f(t)\sin at\right)\left(x\right)=\frac{\mathcal{F}\left(f\right)\left(x-a\right)-\mathcal{F}\left(f\right)\left(x+a\right)}{2i}.$$

2.9

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a^2+(x+b)^2} + \frac{1}{a^2+(x-b)^2}\right),$$
$$\mathcal{F}(g)(x) = \frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a^2+(x+b)^2} - \frac{1}{a^2+(x-b)^2}\right).$$

2.10 Razcepimo $\cos 2t \sin 3t = \frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t)$ in dvakrat uporabimo prejšnjo nalogo.

2.11 Opazimo, da je

$$\frac{\sin bt}{t} = \int_0^b \cos ct \; dc$$

in z zamenjavo vrstnega reda integriranja dobimo

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_0^b \mathcal{F}\left(e^{-a|t|}\cos ct\right)(x)\; dc = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x-b}{a}\right).$$

2.12

$$\mathcal{F}_c(f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin cx}{x}, \quad \mathcal{F}_c(g)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{c}{c^2+x^2}.$$

2.13 Z upoštevanjem

$$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t} = \int_a^b -e^{-ct}\; dc$$

in zamenjavo vrstnega reda integriranja, dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c(f(t))(x) &= -\int_a^b \mathcal{F}_c(e^{-ct})(x)\; dc \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^b \frac{c}{c^2+x^2}\; dc \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\log(c^2+x^2)\right]_{c=a}^{c=b} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\log\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right).
\end{aligned}$$

2.14 Trditev direktno sledi iz naslednjih dejstev: Fourierova transformiranka sode funkcije je enaka kosinusni transformiranki njene zožitve na $[0,\infty)$, Fourierova transformiranka lihe funkcije je enaka sinusni transformiranki njene zožitve na $[0,\infty)$, pomnožene z i in $\mathcal{F}\left(f(-t)\right)(x) = \mathcal{F}\left(f(t)\right)(-x)$.

2.15 Naj bo $g(x,t) = f(t)(\sin tx)/x$. Velja ocena

$$\int_1^r \left(\int_0^\infty |g(x,t)|\ dt\right) dx \le \ln r\ \|f\|_1.$$

Po Fubinijevem izreku je

$$\int_1^r \left(\int_0^\infty g(x,t)\ dt\right)\ dx = \int_0^\infty \left(\int_1^r g(x,t)\ dx\right)\ dt.$$

Ko izračunamo levo in desno stran, dobimo

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_1^r \frac{F(x)}{x}\ dx = \int_0^\infty f(t)h(r,t)\ dt.$$

kjer je $h(r,t) = \int_1^r \frac{\sin tx}{x}\ dx$. Za vsak $r \ge 1$ in $t > 0$ velja ocena

$$|h(r,t)| \le \max_k \left|\int_t^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\ dx\right| \le \pi,$$

kar vidimo tako, da funkciji $h(r,t)$ pri fiksnem t določimo lokalne ekstreme in upoštevamo, je pri $r = 1$ in $r \to \infty$ enaka 0. Iz te ocene in Lebesgueovega izreka o dominirani konvergenci sledi

$$\lim_{r\to\infty}\int_1^r \frac{F(x)}{x}\ dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\lim_{r\to\infty} h(t,r)\ dt$$

in obstoj integrala na desni.

2.16 Limita

$$\lim_{r\to\infty}\int_e^r \frac{1}{x\ln x}\ dx = \lim_{r\to\infty}\ln(\ln r)$$

ni končna (glej nalogo 2.15).

2.17 Kot pri sinusni transformiranki za vsak $r \ge 1$ dokažemo

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_1^r \frac{F(x)}{x}\ dx = \int_0^\infty f(t)h(r,t)\ dt,$$

kjer je $h(r,t) = \int_1^r \frac{\cos tx}{x}\, dx$. Podobno kot pri sinusni transformaciji dokažemo, da za vsak $r \geq 1$ in $t > 0$ velja ocena

$$|h(r,t)| \leq \max_k \left| \int_t^{(k-\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos x}{x}\, dx \right| \leq \ln \frac{3\pi}{2} - \ln \min(t, \frac{\pi}{2}).$$

Odtod in iz ε-predpostavke sledi

$$|f(t)h(r,t)| \leq |f(t)\ln t|\chi_{[0,\varepsilon]}(t) + C(\varepsilon)f(t) \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci je

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{F(x)}{x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \lim_{r\to\infty} h(t,r)\, dt$$

in integral na desni obstaja.

2.18 $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$.

2.19 Z integracijo per partes dobimo

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ixt}\, dt =$$

$$\left[f(t)e^{-itx}\right]_{t=-\infty}^{t=\infty} + ix \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}\, dt = i\sqrt{2\pi}x\mathcal{F}(f)(x).$$

Zakaj je izintegrirani del enak nič?

2.20 Dvakrat uporabimo nalogo 2.19.

2.21 Po definiciji odvoda je

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(x)' &= \sqrt{2\pi} \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(f)(x+h) - \mathcal{F}(f)(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ith}-1}{h} f(t)e^{-ixt}\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^{-ith}-1}{h} \right) f(t)e^{-ixt}\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)f(t)e^{-ixt}\, dt = i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(x).
\end{aligned}$$

Zakaj smemo zamenjati vrstni red integriranja in limitiranja?

2.22 Dvakrat uporabi nalogo 2.21.

2.23 Ker $f' \in L^1$, je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathcal{F}\left(f'\right)(x) = 0,$$

torej je tudi

$$\lim_{x\to\pm\infty} ix\mathcal{F}(f)(x) = 0.$$

2.24 Če dvakrat uporabimo prejšnjo nalogo, dobimo $\mathcal{F}(f)(x) = o(\frac{1}{x^2})$, ko $x \to \pm\infty$. Odtod sledi $\mathcal{F}f \in L^1$. Iz Dinijevega izreka sedaj sledi, da za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja formula

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathcal{F}(f)(x)e^{itx}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(x)e^{itx}\ dx.$$

2.25 Za Fourierovo transformiranko dobimo diferencialno enačbo

$$\mathcal{F}(f)(x)' = -i\mathcal{F}(tf(t))(x) = -\frac{x}{2a}\mathcal{F}(f)(x)$$

(integracija per partes) in začetni pogoj $\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ (substitucija). Rešitev je

$$\mathcal{F}\left(e^{-at^2}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo kompleksne integracije. Naj bo

$$\mathcal{F}_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-at^2} e^{-itx}\ dt.$$

Zapišimo eksponent integranda malo drugače:

$$-at^2 + itx = -a\left(t + \frac{ix}{2a}\right)^2 - \frac{x^2}{4a}.$$

Zgornji integral je enak

$$\mathcal{F}_R(x) = e^{-\frac{x^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+\frac{ix}{2a}\right)^2}\ dt.$$

Uvedimo substitucijo

$$u = t + \frac{ix}{2a}$$

v zgornji integral:

$$\int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \int_{-R+\frac{ix}{2a}}^{R+\frac{ix}{2a}} e^{-au^2}\ du.$$

Zanima nas limita tega integrala, ko gre $R \to\ \infty$. Če bi bile meje $\pm R$, bi integral zlahka izračunali, saj je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\ du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Vemo, da je integral funkcije e^{-au^2} po robu pravokotnika $[-R, R] \times [0, \frac{ix}{2a}]$ enak 0. Če dokažemo, da gresta integrala po navpičnih stranicah pravokotnika proti 0, bo

$$\lim_{R\to\ \infty} \int_{-R+\frac{ix}{2a}}^{R+\frac{ix}{2a}} e^{-au^2}\ du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\ du.$$

Oglejmo si integral na daljici med $-R$ in $-R + \frac{ix}{2a}$. Velja ocena

$$|e^{-au^2}| \leq e^{-a(R^2 - \frac{y^2}{4a})}$$

za vsak $y \in [0, \frac{x}{2a}]$. Zato je

$$\lim_{r\to\ \infty} \int_{-R}^{-R+\frac{ix}{2a}} e^{-au^2}\ du = 0.$$

Podobno je na drugi navpični stranici. Zato je

$$\lim_{R\to\ \infty} \mathcal{F}_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

2.26 Upoštevamo, da je $\cos bt = \mathrm{Re}(e^{ibt})$ in dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2a}} \left(e^{-(x+b)^2/4a} + e^{-(x-b)^2/4a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-(x^2+b^2)/4a} \operatorname{ch} \frac{xb}{2a}, \\
\mathcal{F}(g)(x) &= \int_0^b \mathcal{F}(f)(x)\ db = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{b-x}{2\sqrt{a}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{b-x}{2\sqrt{a}}\right)\right),
\end{aligned}$$

kjer je $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

2.27 Dvakrat per partes.

2.28

$$\mathcal{F}_{hla}(f * g) = \mathcal{F}_{hla}(f)\ \mathcal{F}_{hla}(g).$$
$$\mathcal{F}_{suh}(f * g) = \mathcal{F}_{suh}(f)\ \mathcal{F}_{suh}(g).$$
$$\mathcal{F}_{zak}(f * g) = \mathcal{F}_{zak}(f)\ \mathcal{F}_{zak}(g).$$

2.29

$$\begin{aligned}
(f_1 * g_1)(x) &= \max(0, \min(b+x, a) + \min(b-x, a)),\\
(f_2 * g_2)(x) &= \frac{2}{a^2-b^2}\left(ae^{-b|x|} - be^{-a|x|}\right),\\
(f_3 * g_3)(x) &= \frac{\pi}{x}\sin(x \min(a,b)),\\
(f_4 * g_4)(x) &= \frac{\pi(a+b)}{ab(x^2+(a+b)^2)}.
\end{aligned}$$

Prvi dve dobimo z direktnim računom, drugi dve pa z izrekom o konvoluciji.

2.30 Uporabimo inverzno transformacijo in izrek o konvoluciji.

2.31 Ker je f soda funkcija, se njena transformiranka in inverzna transformiranka ujemata. Če v prejšnjo nalogo vstavimo $F(t) = \frac{\sin at}{t}$ in $G(t) = \frac{\sin bt}{t}$, dobimo $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{[-a,a]}\right) * \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{[-b,b]}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\max(0, \min(b + x, a) + \min(b - x, a))$.

2.32 Če obe strani pomnožimo z $\frac{e^{-ixy}}{\sqrt{2\pi}}$, integriramo od $-\infty$ do ∞ in da desni upoštevamo izrek o konvoluciji, dobimo

$$\mathcal{F}(f)(y) = \lambda\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}\right)\mathcal{F}(f)(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{4+y^2}.$$

Odtod izračunamo

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{4(1+y^2)}{\sqrt{2\pi}(4+y^2)(1+y^2-2\lambda)}.$$

Če je $\lambda \geq \frac{1}{2}$, enačba ni rešljiva. Če je $\lambda = -\frac{3}{2}$, dobimo

$$f(x) = -\frac{1}{8}e^{-2|t|}(6|t| - 5).$$

V ostalih primerih dobimo

$$f(x) = \frac{-3}{a^2-4}e^{-2|x|} + \frac{2(a^2-1)}{a(a^2-4)}e^{-a|x|},$$

kjer je $a = \sqrt{1-2\lambda}$.

2.33 Formula sledi iz inverzne formule, Jordanove leme in leme o delu residuuma. Za $t > 0$ integriramo po robu polkrogov v zgornji polravnini z radijem r, tako da na robu ni nobenega pola z neničelnim imaginarnim delom. Morebitne realne ničle obkrožimo z majhnimi ε-polkrogci in uporabimo lemo o delu residuuma.

2.34

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2a}e^{-a|x|}.$$

2.35

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{4a^3}(1 + a|x|)e^{-a|x|},$$
$$\mathcal{F}(g)(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = -\frac{i}{4a}xe^{-a|x|}.$$

2.36

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{16a^5}(3 + 3a|x| + a^2x^2)e^{-a|x|},$$
$$\mathcal{F}(g)(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = -\frac{i}{16a^3}x(1 + a|x|)e^{-a|x|}.$$

2.37 Ker so poli enostavni, lahko uporabimo dejstvo, da je

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(t)}{g(t)}, \alpha\right) = \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)},$$

če je α enostavna ničla g in f holomorfna na okolici α.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{8a^3}(\cos ax + \operatorname{sign} x \sin ax)e^{-a|x|},\\
\mathcal{F}(g)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{i}{4a^2}\sin ax\ e^{-a|x|},\\
\mathcal{F}(h)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(h)(x) = -\frac{1}{4a}(\cos ax + \operatorname{sign} x \sin ax)e^{-a|x|},\\
\mathcal{F}^{-1}(k)(x) &= \frac{i}{2}\operatorname{sign} x \cos ax\ e^{-a|x|}, \quad k \notin L^1.
\end{aligned}$$

2.38 Ker funkciji nista sodi, se transformiranki razlikujeta od inverznih transformirank.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-ix/2}e^{-\sqrt{3}|x|/2},\\
\mathcal{F}(g)(x) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-ix/2}(2+\sqrt{3}|x|)e^{-\sqrt{3}|x|/2},\\
\mathcal{F}^{-1}(f)(x) &= \mathcal{F}(f)(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{ix/2}e^{-\sqrt{3}|x|/2},\\
\mathcal{F}^{-1}(g)(x) &= \mathcal{F}(g)(-x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{ix/2}(2+\sqrt{3}|x|)e^{-\sqrt{3}|x|/2}.
\end{aligned}$$

2.39 $\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cos(a(k+\frac{1}{2})\pi)e^{-\pi(k+\frac{1}{2})|x|}$.

2.40 Zaradi sodosti sta transformiranka in inverzna transformiranka enaki:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{4\pi}((2|x|+1)\sin a - 2a\cos a)e^{-|x|} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2-1}\sin ak\ e^{-k|x|}.$$

2.41 Najprej v integral

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t/\beta+itx}\ dt$$

uvedemo substitucijo $t/\beta = u$ in potem še $u(1+i\beta x) = v$. Integriramo po poltraku $P = \mathbb{R}_+(1+i\beta x)$:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)(1+i\beta x)^{-\alpha}}\int_P v^{\alpha-1}e^{-v}\ dv.$$

Naj bo γ polarni kot, ki pripada $1 + i\beta x$. Ta kot je na $(-\pi/2, \pi/2)$ zato je kosinus na tem intervalu navzdol omejen s $c > 0$. Integral po delu krožnice z radijem R med kotoma 0 in φ zato lahko ocenimo z

$$\left| \int_0^\gamma (Re^{i\varphi})^{\alpha-1} e^{-Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi}\, d\varphi \right| \le R^\alpha e^{-Rc} |\gamma|.$$

To gre proti 0 ko gre R v neskončnost, zato je

$$\int_0^\infty v^{\alpha-1} e^{-v}\, dv = \int_P v^{\alpha-1} e^{-v}\, dv = \Gamma(\alpha).$$

Rezultat je

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + i\beta x)^{-\alpha}.$$

2.42 Transformiranka funkcije f je realni del integrala

$$I = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-at} e^{itx}\, dx,$$

Za izračun transformiranke si pomagamo s kompleksno integracijo po robu krožnega izseka (podobno, kot v nalogi 2.41) in dobimo

$$I = \frac{1}{\sqrt{a - ix}}.$$

Realni del je

$$\mathcal{F}_c(f)(x) = \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + x^2}}}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Funkcija g ni ne v L^1 ne v L^2, zato nima transformiranke v običajnem smislu. Ker pa je lokalno v L^1 (vsaka točka ima okolico, na kateri je funkcija v L^1), ima transformiranko v smislu distribucij, ki je enaka

$$\mathcal{F}_c(g)(x) = \lim_{a \to 0} \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + x^2}}}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2.43 Funkcija $f(t) = \frac{1}{1+|t|}$ je v L^2 ne pa v L^1. Funkcija $g(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}$ je v L^1, ne pa pa v L^2.

2.44 Da je funkcija v L^2, je očitno, saj ima v 0 končno limito. Ploščino k-tega hribčka lahko ocenimo navzdol z $2(\pi(k+1))^{-1}$, torej funkcija ni v L^1. Transformiranka je

$$\mathcal{F}_2\left(f\right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{[-c,c]}(x).$$

2.45 S pomočjo Parsevalove identitete dobimo $I = \pi c$.

2.46 Za dokaz identitete je potrebno le zamenjati vrstni red integracije. Operator $\mathcal{F}_2$ ni hermitski. Integrala nista skalarna produkta, ker manjka konjugiranje.

2.47 Uporabimo prejšnjo nalogo in upoštevamo, da je $\mathcal{F}_2^2(f)(x) = f(-x)$.

2.48 S pomočjo prejšnje naloge dobimo $I = \frac{\pi}{a^2}(1 - e^{-ac})$.

2.49 Po definiciji je

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_2^* f, g\rangle &= \langle f, \mathcal{F}_2 g\rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\mathcal{F}\left(g(x)\right)(t)}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}_2\left(\overline{g}(-x)\right)(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Iz naloge 2.46 sledi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}_2\left(\overline{g}(-x)\right)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2\left(f(x)\right)(t)\overline{g}(-t)\ dt\ = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2\left(f\right)(-t)\overline{g}(t)\ dt \\
&= \langle \mathcal{F}_2\left(f\right)(-t), g\rangle.
\end{aligned}$$

Ker za funkcje, za katere so f, f' in f'' v L^2, velja Fourierova inverzna formula, je

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} f(y)\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} f(-y)\ dy = \mathcal{F}_2^* f.
\end{aligned}$$

Zadnji dve enakosti sledita iz naloge 2.4.

2.50 Po (fizikalni) definiciji je

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

torej je

$$f_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Rodovna funkcija za Hermitove polinome, pomnožena z $e^{-x^2/2}$ je

$$e^{-x^2/2+2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

njena Fourierova transformiranka pa

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-x^2/2+2xt-t^2}\right)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} e^{-x^2/2+2xt-t^2}\, dx \\
&= e^{-y^2/2-2yit+t^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-y^2/2} H_n(y) \frac{(-it)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{f_n(y)} \frac{(-it)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Fourierova transformiranka desne strani je

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}\left(e^{-x^2/2} H_n(x)\right) \frac{t^n}{n!}.$$

Ker se členi pri potencah t^n ujemajo, je

$$\mathcal{F}(f_n)(y) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2/2} H_n(x)\right)(y) = e^{-y^2/2} H_n(y) \frac{(-i)^n}{n!} = \frac{(-i)^n}{n!} f_n(y).$$

2.51 Iz Cauchy-Schwartzove neenakosti in Jensenove neenakosti sledi

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|\, dt\right)^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|^2\, dt = \\
&= \|f\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|^2\, dt.
\end{aligned}$$

Če integriramo obe strani od $-\infty$ do ∞ in na desni zamenjamo vrstni red integriranja po x in po t (Fubini), dobimo želeno oceno.

2.52 Če $f \in L^1$ in $g \in L^1 \cap L^2$, potem velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$ in $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g_2\| < \infty$. Torej je $f * g \in L^1$. V tem primeru gornja formula sledi iz izreka o konvoluciji. Formula sedaj sledi iz dejstva, da je $L^1 \cap L^2$ gosta v L^2 in da sta leva in desna stran zvezni v g (Plancherel).

2.53 Ker je $\mathcal{F}(f)(x)$ zvezna, je integral

$$\int_{-1}^{1} |\mathcal{F}(f)(x)| \, dx$$

končen. Ker je

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\mathcal{F}(f')(x)}{ix},$$

lahko ocenimo

$$\left(\int_1^\infty |\mathcal{F}(f)(x)| \ dx \right)^2 \leq \int_1^\infty \frac{1}{|x|} \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} f'(t) \ \ dt \right| \ dx \leq$$

$$\leq \int_1^\infty \frac{1}{|x|^2} \ dx \int_1^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} f'(t) \ dt \right|^2 \ dx \leq |\mathcal{F}\left(f'\right)(x)|_2^2.$$

Na intervalu $(-\infty, -1]$ naredimo enako oceno.

2.54 Ker je kosinusna (sinusna) transformacija f enaka Fourierovi transformaciji sodega (lihega) nadaljevanja f na $(-\infty, 0]$, je prva trditev očitna. Iz istega razloga obstajata razširitvi na L^2, za kateri velja Plancherelov izrek.

2.55 Inverzna preslikava je

$$\Psi(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f(x) + f(-x), f(x) - f(-x)).$$

Norma je

$$\|\Psi(f)(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty 2f(x)^2 + 2f(-x)^2 \ dx = \|f\|_2^2.$$

2.56. Ker je $\mathcal{F}(f(t))(-x) = \mathcal{F}(f(-t))(x)$, je

$$\Phi(\mathcal{F}(f)(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{F}(f)(x) + \mathcal{F}(f)(-x) \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{F}(f)(x) - \mathcal{F}(f)(-x) \right) \right)$$

in

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{c,2} \oplus i\mathcal{F}_{s,2}(\Psi(f))(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_{c,2}(f(t)+f(-t))(x), \frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_{s,2}(f(t)-f(-t))(x)\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_2(f(t)+f(-t))(x), \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_2(f(t)-f(-t))(x)\right).\end{aligned}$$

2.57 Ker je $\mathcal{F}_{c,2}(f)(x) = \mathcal{F}_2(f)(x)$ za sode funkcije, lahko privzamemo, da je f soda na $\mathbb{R}$. Ker velja zveza $\mathcal{F}^2(h)(x) = h(-x)$ za poljubno funkcijo h, je za sodo f

$$\mathcal{F}_{c,2}^2(f)(x) = \mathcal{F}_2^2(f)(x) = f(-x) = f(x).$$

Podobno je za lihe funkcije. Drugi del je očitna posledica prve zveze.

Laplacova transformacija

3.1 Za $\operatorname{Re} z > 0$ integral

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, dt$$

obstaja in velja

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, dt = z^{-1}.$$

3.2 Če je $z_0 > 0$, potem $\mathcal{L}(t^\alpha)(z_0)$ obstaja. Po izreku iz prvega odstavka uvoda sledi, da $\mathcal{L}(t^\alpha)(z)$ obstaja in je analitična na območju $\operatorname{Re} z > z_0$. Ker je z_0 lahko poljubno majhen, je $\mathcal{L}(t^\alpha)(z)$ definirana in analitična na $\operatorname{Re} z > 0$. Tudi funkcija $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$ je definirana in analitična na $\operatorname{Re} z > 0$. Z direktnim računom (substitucija $u = zt$) dokažemo, da se funkciji na levi in funkcija na desni ujemata za vsak $z > 0$. Sedaj uporabimo princip enoličnosti za analitične funkcije: ker sta leva in desna stran analitični na $\operatorname{Re} z > 0$ in ker se ujemata na množici s stekališčem ($z > 0$), se ujemata na $\operatorname{Re} z > 0$.

3.3 Naloga je poseben primer naloge 3.4, kjer je rešitev izpeljana.

3.4 Formulo $\mathcal{L}(t^\alpha)(z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^{\alpha+1}}$ odvajamo po α in zamenjamo na levi vrstni red odvajanja in integriranja. Da dokažemo, da smemo zamenjati vrstni red integriranja in odvajanja, mora odvedeni integral

$$I(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty t^\alpha \ln t \; e^{-zt} \; dt$$

(lokalno) enakomerno konvergirati po parametru α. Če je realni del z pozitiven, težav z enakomerno konvergenco v neskončnosti ni. Problem je pri krajišču 0, če je $\alpha \leq 0$, saj je za $\alpha > 0$ funkcija $t^\alpha \ln t$ zvezna tudi v 0. Pokažimo, da integral

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 t^\alpha \ln t \; e^{-zt} \; dt$$

enakomerno konvergira na intervalu $[a, 1]$, kjer je $-1 < a < 0$. Res, ker je $t \in (0, 1)$ velja

$$|t^\alpha \ln t \; e^{-zt}| \leq |t^a \ln t \; e^{-zt}|.$$

Ker je singularnost $t^a \ln t$ integrabilna pri 0, integral $I(\alpha)$ lokalno enakomerno konvergira in je zato enak

$$I(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{z^{\alpha+1}} \right) = \frac{\Gamma'(\alpha + 1) - \Gamma(\alpha + 1) \ln z}{z^{\alpha+1}}.$$

3.5 V integral uvedemo novo spremenljivko $kt = u$.

3.6 Za poljubna $a, z \in \mathbb{C}$ velja

$$\mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right)(z) = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-zt} \; dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(z-a)t} \; dt = \mathcal{L}\left(f(t)\right)(z - a),$$

pod pogojem da ti integrali obstajajo.

3.7 Iz $\mathcal{L}1(z) = z^{-1}$ dobimo prvo transformiranko, drugi dve pa iz zvez $\operatorname{ch}(at) = (e^{at} + e^{-at})/2$ in $\operatorname{sh}(at) = (e^{at} - e^{-at})/2$.

3.8 Velja

$$\mathcal{L}\left(f(t) \operatorname{ch} at\right)(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z - a) + \mathcal{L}\left(f(t)\right)(z + a))$$

in

$$\mathcal{L}\left(f(t) \operatorname{sh} at\right)(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z - a) - \mathcal{L}\left(f(t)\right)(z + a)).$$

3.9 Transformiranki dobimo iz zvez $\cos(at) = (e^{iat} + e^{-iat})/2$ in $\sin(at) = (e^{iat} - e^{-iat})/2i$.

3.10 Velja

$$\mathcal{L}\left(e^{at}t^n\right)(z) = \mathcal{L}\left(t^n\right)(z-a) = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}},$$

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\cos bt\right)(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(1)(z-a-bi) + \mathcal{L}(1)(z-a+bi)) = \frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$$

in

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\sin bt\right)(z) = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}(1)(z-a-bi) - \mathcal{L}(1)(z-a+bi)) = \frac{b}{(z-a)^2+b^2}.$$

3.11

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(F(z)\right)(t) &= \frac{-at\cos(at)+\sin(at)}{2a^3}, \\ \mathcal{L}^{-1}\left(G(z)\right)(t) &= \frac{t\sin(at)}{2a}. \end{aligned}$$

3.12 $f(t) = 2\pi\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1+2k)e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\cos\frac{2k+1}{2}\pi x$.

3.13

$$f(t) = \frac{1}{\pi}(\sin x\sin t - 2x\cos x\sin t - 2t\cos t\sin x) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2-1}\sin kx\sin kt.$$

3.14 $t^{\nu}/\Gamma(\nu+1)$.

3.15 Naj bo $z > 0$ in $\sqrt{z-\omega i}$ tisti koren števila $z-\omega i$, ki leži v četrtem kvadrantu. Naj bo Γ_R krivulja omejena z krožnico $|z| = R$, pozitivnim delom realne osi in poltrakom skozi $\sqrt{z-\omega i}$. Integriraj funkcijo $f(z) = e^{-z^2}$ po krivulji Γ_R na dva različna načina.

3.16 (a) $\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$, (b) $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$, (c) $e^{-t}\sin t$, (d) $\frac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t})$, (e) $\frac{1}{4}(\operatorname{ch}t\sin t - \operatorname{sh}t\cos t)$.

3.17

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt &= \sum_0^\infty \int_{0+k\omega}^{\omega+k\omega} f(t)e^{-zt}\,dt = \\ &= \sum_0^\infty e^{-zk\omega}\int_0^\omega f(t)e^{-zt}\,dt = \\ &= \frac{1}{1-e^{-\omega z}}\int_0^\omega y(t)e^{-zt}\,dt.\end{aligned}$$

3.18 $\mathcal{L}(f)(z) = z^{-2}(1-e^{-\pi z})$.

3.19 V integralu na desni napravimo substitucijo $s = a(2\sqrt{t})^{-1} - \sqrt{zt}$ in dobimo

$$\frac{dt}{\sqrt{t}} = \left(-1 + \frac{s}{\sqrt{s^2+2a\sqrt{s}}}\right)\frac{ds}{\sqrt{z}},$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}e^{-zt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+2a\sqrt{s}}}\right)e^{-s^2-a\sqrt{z}}\,ds = \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}.$$

3.20 Za $\operatorname{Re} z > 0$ vse vrste enakomerno konvergirajo, zato ni težav z zamenjavo vrstnega reda integracije in seštevanja. Naj bo $\alpha > -1$. Ker je $\mathcal{L}(t^\alpha)(z) = \Gamma(1+\alpha)z^{-1-\alpha}$, dobimo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sin 2\sqrt{at}\right)(z) &= \sum_0^\infty \frac{(2\sqrt{a})^{2n+1}(-1)^n\Gamma(3/2+n)z^{-3/2-n}}{(2n+1)!} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi a}}{z\sqrt{z}}\sum_0^\infty \frac{2^{2n+1}(-1)^n(2n+1)!!(a/z)^n}{2^{n+1}(2n+1)!} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi a}}{z\sqrt{z}}\sum_0^\infty \frac{(-a/z)^n}{n} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi a}}{z\sqrt{z}}e^{-\frac{a}{z}}.\end{aligned}$$

Podobno postopamo pri drugi nalogi.

3.21

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\sqrt{z}}e^{\frac{a}{z}}\right)(t) = \sum_0^\infty \frac{a^n\mathcal{L}^{-1}\left(z^{-3/2-n}\right)(t)}{n!} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_0^\infty \frac{a^n t^{n+1/2}}{\Gamma(3/2+n)n!} = \\
&= \sum_0^\infty \frac{2^{2n+1}(\sqrt{at})^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)!!\sqrt{\pi a}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{sh} 2\sqrt{at}.
\end{aligned}
$$

3.22 Ker je $\mathcal{L}\left(t^k\right)(z) = \Gamma(1+k)z^{-1-k}$, je

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(z^{-k}\right)(t) = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.
$$

Ker je f analitična v okolici ∞, za nek $R > 0$ velja, da jo lahko majoriramo s konvergentno geometrijsko vrsto, $|c_k/z^k| \leq aq^k$ za vsak $|z| \geq R$. Iy tega sledi ocena za koeficiente $c_k \leq a(qR)^k$. Vrsto zato lahko majoriramo z vrsto, ki konvergira povsod:

$$
\sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k|}{(k-1)!}|t|^{k-1} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{a}{(k-1)!}|qRt|^{k-1}.
$$

3.23 (a) $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$, (b) $\frac{1}{2}t\sin t$, (c) $\frac{1}{8}(3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t)$, (d) $\frac{1}{8}(t\sin t - t^2\cos t)$.

3.24 Z uvedbo nove spremenljivke $u = t + k$ dobimo

$$
\int_0^\infty f(t+k)e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty f(u)e^{-z(u-k)}\,du - \int_0^k f(u)e^{-z(u-k)}\,du.
$$

3.25 Z uvedbo nove spremenljivke $u = t - k$ dobimo

$$
\int_k^\infty f(t-k)e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty f(u)e^{-z(u+k)}\,du.
$$

3.26 Upoštevamo, da je

$$
\int_n^{n+1} e^{-zt}\,dt = \frac{e^{-z(n+1)} - e^{-zn}}{-z}
$$

in rezultat sledi iz razvoja v vrsto.

3.27 (a) $\frac{2(1-e^{-z})}{z(e^z-2))}$, (b) $\frac{2e^{-z}(1-e^{-z})}{(1-2e^{-z})^2 z}$, (c) $\frac{2e^{-z}(1+2e^{-z})(1-e^{-z})}{(1-2e^{-z})^3 z}$.

3.28 Ker veljajo zveze za premik originala, zadošča dokazati, da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^n}\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1},$$

kar pa smo izračunali v nalogi 3.22

3.29 Iz razvojev funkcij A, B in C v vrsto po potencah e^{-z} sledi (a) $\mathcal{L}^{-1}(A(z))(t) = \sum_{k=0}^{\infty} H(t-k) = \sum_{k=0}^{\infty} n\chi_{[n,n+1)}(x)$,
(b) $\mathcal{L}^{-1}(B(z))(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} H(t-k)$,
(c) $\mathcal{L}^{-1}(C(z))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(t-n+1)^{n+k}}{(n+k)!} H(t-n+1)$.

3.30 Enkrat per partes.

3.31 Naj bo $\mathcal{L}(y) = Y$ in $\mathcal{L}(z) = Z$. Če uporabimo Laplacovo transformacijo na obeh enačbah, dobimo iz (a) sistem enačb $uY-1 = -11Y+6Z$, $uZ-2 = -18Y+10Z$. Rešitvi sistema sta $y = e^t$, $z = 2e^t$. Podobno pri (b) in (c) . (b) $y = t(1+t)e^{-t}$, $z = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$, (c) $y = -t$, $z = 1-2t$.

3.32

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(y'(t)\right)(z) &= \int_0^a y'(t)e^{-zt}\,dt + \int_a^\infty y'(t)e^{-zt}\,dt = \\ &= e^{-az}y(a-0) - y(0) + z\int_0^a e^{-zt}\,dt - e^{-az}y(z+0) + \\ &\quad +z\int_a^\infty e^{-zt}\,dt.\end{aligned}$$

3.33 Nalogo 3.30 uporabimo n-krat.

3.34 (a) $y = -1 + e^{-3t} + 3t$, (b) $y = \frac{1}{8}(7 + e^{2t} - 2t + 2t^2)e^{-t}$, (c) $y = \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t\cos 2t)e^{-2t}$.

3.35 $y = \frac{1}{8}(3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t)$.

3.36 $y = 2t + \frac{1}{2}t\cos t - \frac{5}{2}\sin t$, $z = -3t - t\cos t + 4\sin t$.

3.37 Enačbo pomnožimo z e^{-zt} in integriramo od 0 do ∞. Pri tem upoštevamo, da funkcije razširimo na celotno realno os tako, da predpišemo vrednost 0 za negativne argumente. Ob upoštevanju začetnega pogoja za $\mathcal{L}(y)(z)$ dobimo enačbo

$$z\mathcal{L}(y)(z) = e^{-z}\mathcal{L}(y)(z) + \frac{1}{z},$$

oziroma $\mathcal{L}(y)(z) = (z(z-e^{-z}))^{-1}$. Iz naloge 3.29 preberemo, da je

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-k)^{k+1}}{(k+1)!} H(x-k).$$

3.38 Transformirana enačba je $(z^2 + 4ze^{-z} + 4z^2e^{-2z})\mathcal{L}(y)(z) = 1/z^2$, in $\mathcal{L}(y)(z) = \frac{1}{z^4(1+2e^{-z}/z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z^4}\left(-\frac{2e^{-z}}{z}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k2^{k-1}\frac{e^{-(k-1)z}}{z^{k+3}}$. Sledi $y = \sum_{k=0}^{\infty} k2^{k-1}\frac{1}{(k+2)!}(t-k+1)^{k+2}H(t-k+1)$.

3.39 Odvajamo po parametru z in rešitev sledi.

3.41 Odvajamo po parametru pod integralom in rešitev sledi.

3.41

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(ty(t))(z) &= -\frac{d}{dz}\mathcal{L}(y(t))(z), \\
\mathcal{L}\left(ty'(t)\right)(z) &= -\mathcal{L}(y(t))(z) - z\frac{d}{dz}\mathcal{L}(y(t))(z), \\
\mathcal{L}\left(ty''(t)\right)(z) &= -\frac{d}{dz}\mathcal{L}\left(y''(t)\right)(z) \;=\; y(0) - \frac{d}{dz}\left(z^2\mathcal{L}(y(t))(z)\right).
\end{aligned}$$

3.42 Če je $b \neq 2a$, potem enačba nima rešitve. Če je $b = 2a$ potem ima enačba enoparametrično družino rešitev $y = (a-c)e^{2t} + c(1+3t)e^{-t}$. To ni v nasprotju z eksistenčnim izrekom, ker je točka $t = 0$ singularna.

3.43 $y = t^2e^{-2t}$.

3.44 $y = Ae^{-t} + Be^{-t}/t$.

3.45 Upoštevamo, da je $\int_z^{\infty} e^{-ut}\,du = t^{-1}e^{-zt}$ in zamenjamo vrstni red integriranja v dvojnem integralu.

3.46 Rešitev sledi iz naloge 3.45, ker je $\mathcal{L}(\sin t)(z) = (1+z^2)^{-1}$.

3.47 Rešitev sledi iz naloge 3.45, ker je $\mathcal{L}\left(e^{at}\right)(z) = (z-a)^{-1}$.

3.48 V prvem integralu zamenjamo vrstni red integracije.

3.49 Sledi iz nalog 3.46 in 3.48.

3.50 Ker je funkcija f' eksponentnega naraščanja, lahko zamenjamo limito in integral, zato je

$$0 = \lim_{z\to\infty} \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}\, dt = -f(0) + \lim_{z\to\infty} z\mathcal{L}(f(t))(z).$$

3.51 S pomočjo odvajanja slike dobimo $f(t) = (1-e^{-t})/t$.

3.52 $f(t) = 2(1-\cos at)/t$, $g(t) = 2(1-\operatorname{ch} at)/t$.

3.53 $f(t) = \int_0^t \frac{\cos x - 1}{x}\, dx$.

3.55 Opazimo, da je $\pi/2 - \operatorname{arcctg} z = \operatorname{arctg} z$, torej je $f(t)$ inverzna transformiranka funkcije

$$\frac{1}{z}\left(\pi/2 - \operatorname{arcctg} z\right).$$

Inverzna transformiranka z^{-1} je 1, inverzna transformiranka $z^{-1}\operatorname{arcctg} z$ pa $\int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx$. Ker je $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi/2$, je rezultat $f(t) = \int_t^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

3.56 V integral uvedemo novo spremenljivko $x - t = u$.

3.57 $(\cos at * \cos bt)(x) = \frac{b \sin bx - a \sin ax}{b^2 - a^2}$, $(e^{-at} * e^{-bt})(x) = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{a-b}$.

3.58 $\mathcal{L}^{-1}(F(z))(t) = a^{-2}(-ax\cos(ax) + \sin(ax))/(2a))$ in $\mathcal{L}^{-1}(G(z))(t) = x\sin(ax)/(2a^2)$.

3.59 Spomnimo se, da je $\mathcal{L}\left((\pi x)^{-1/2}\right)(z) = z^{-1/2}$. Potem je $\mathcal{L}\left((\pi x)^{-1/2}\right)(z + a^2) = (z+a^2)^{-1/2}$. Ker je $\mathcal{L}\left((\pi x)^{-1/2}\right)(z+a^2) = \mathcal{L}\left((\pi x)^{-1/2}e^{-a^x}\right)(z)$, je inverzna transformiranka prve funkcije enaka konvoluciji funkcij a in $(\pi x)^{-1/2}e^{-a^x}$. Z uvedbo nove spremenljivke $u = a^2 x$ dobimo funkcijo $f_1(t) = \operatorname{erf}(a\sqrt{t})$. Podobno je pri ostalih dveh: $f_2(t) = e^{a^2 t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})/a$, $f_3(t) = e^{a^2 t}(1 - \operatorname{erf}(a\sqrt{t}))$.

3.60 (a) $\phi(x) = (a^2 + (b^2 - a^2)\cos bx)/b$, (b) $\phi(x) = (-a + a\cos bx + b\sin bx)$, (c) $\phi(x) = e^{bx} + (b-a)xe^{bx}$.

3.61 (a) $\phi(x) = (1+x)e^x$, (b) $\phi(x) = \cos x + \sin x$, (c) $\phi(x) = (\operatorname{ch} x + \cos x)/2$.

3.62 $y(x) = (\operatorname{ch} x - \cos(\sqrt{2}x))/3$.

3.63 Zamenjaj vrstni red integracije po t in τ.

3.64 Vzamemo $g(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$ in upoštevamo, da je $\mathcal{L}\left(g(t,\tau)\right)(z) = e^{-\tau\sqrt{z}}/\sqrt{z}$.

3.65 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{z}}}{z}\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty H(s-a) e^{-\frac{s^2}{4t}}\, ds = 1 - \operatorname{erf}(\frac{a}{2\sqrt{t}})$.

3.66 Vzamemo $g(t,\tau) = t^{\tau-1}/\Gamma(\tau)$ in uporabimo nalogo 3.63.

3.67 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\ln z}\right)(x) = \int_0^\infty \frac{x^{t-1}}{\Gamma(t)}\, dt$.

3.68 Vzamemo $g(t,\tau) = t^\tau/\Gamma(\tau+1)$ in uporabimo nalogo 3.63.

3.69 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z\ln z}\right)(x) = \int_0^\infty \frac{x^t}{\Gamma(1+t)}\, dt$.

Parcialne diferencialne enačbe prvega reda

4.1. Privzemimo, da je $x \neq 0$. Ker je $\operatorname{Char}_{(x,y)} L = \mathbb{R}(-y, x)$, bo ena nova koordinata kar $\alpha = x^{-1}y$, saj je $\operatorname{grad}\alpha \in \operatorname{Char}_{(x,y)} L$ (za $x = 0$, je potrebno vzeti $\alpha = y^{-1}x$). Za drugo koordinato lahko izberemo $\beta = x^2 + y^2$. V novih koordinatah je diferencialna enačba oblike $u_\beta = 0$. Rešitev je potem oblike $f(\alpha)$. Izračunajmo še funkcije f za primere iz (b):

(1) $u(\cos t, \sin t) = 1 = f(\operatorname{tg} t) \Rightarrow\ f = 1$,

(2) $u(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = f(\operatorname{tg} t) \Rightarrow\ f(u) = \frac{u}{u^2+1}$,

(3) $u(x,x) = 1 = f(1) \Rightarrow$ rešitev je vsaka funkcija f, za katero je $f(1) = 1$. Zakaj ni enoličnosti?

(4) $u(x, 1-x) = x^2 + 1 = f(x^{-1} - 1) \Rightarrow\ f(s) = (s+1)^{-1} + 1$.

Podobno rešimo primer (c). V novih koordinatah $\alpha = x^{-1}y, \beta = x$ se enačba prevede na

$$u_\beta = \frac{1}{\beta}u - \beta - \alpha^2\beta, \quad u(-2\beta^{-1}, \beta) = \beta - \beta^2.$$

Dobili smo navadno diferencialno enačbo prvega reda, ki ima rešitev $u(\alpha, \beta) = -\beta^2(1 + \alpha^2) + \beta(1 - 2\alpha)$ oziroma $u(x, y) = -(x^2 + y^2) + x - 2y$.

4.2. Parametrizacija začetnih pogojev: $x(s) = s$, $y(s) = -s$, $u(s, -s) = 1$. Prva integrala karakterističnega sistema sta $x^2 + y^2 + 2u = A$ in $xyu^{-1} = B$. Iz začetnih pogojev dobimo zvezo $A = -2B + 2$, torej je $x^2 + y^2 + 2u = -2xyu^{-1} + 2$ oziroma

$$u(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2 - 2) + \sqrt{(x^2 + y^2 - 2)^2 - 16xy}}{4}.$$

Zakaj ni dveh rešitev?

4.3. Prvi integrali karakterističnega sistema so $A = xy^{-1}, B = x^2 + y^2 + z^2$ in $C = u$. Rešitev iščemo v obliki $f(A, B, C) = 0$. Vstavimo začetne pogoje: $F(sv^{-1}, s^2 + v^2, 2s + v) = 0$. Iz enačb $s = Av$, $s^2 + v^2 = B$ in $C = 2s + v$ dobimo $F(A, B, C) = B - (2A + 1)^{-2}(A^2 + 1)C^2$. Rešitev je

$$u = (2x + y)\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.4. Začetna pogoja za p in q sta $p = 2$ in $q = s$. Rešitve karakterističnega sistema so $x = s \operatorname{ch} t$, $y = -2 \operatorname{sh} t$, $u = s(e^{-2t} + 1)$, $p = 2e^{-t}$, $q = se^{-t}$. Rešitev v originalnih koordinatah je $u = x(y + \sqrt{y^2 + 4})$.

4.5. Parametrizacija začetnih pogojev: $x(s) = s$, $y(s) = 0$, $p(s) = s$, $q(s) = \pm s$, $u(s) = \frac{1}{2}s^2$. Rešitve karakterističnega sistema so $x(s, t) = se^t$, $y(s, t) = \pm 2s \operatorname{sh} t$, $u(s, t) = \frac{1}{2}s^2e^{-2t}$, $p(s, t) = se^{-t}$, $q(s, t) = \pm se^{-t}$. V originalnih koordinatah dobimo $u_{1,2} = \frac{1}{2}(x \pm y)^2$.

4.6. Parametrizacija začetnih pogojev: $x(s) = s$, $y(s) = 1 - s$, $u(s, -s) = 2$, $p(s) = q(s) = \pm 1$. Rešitve karakterističnega sistema so

$$p(s, t) = \frac{A(s)}{t + B(s)}, \ q(s, t) = \frac{1}{t + B(s)},$$

$$x(s,t) = \frac{C(s)}{t+B(s)},\ y(s,t) = A(s)C(s) + \frac{2y}{t+B(s)},\ u(s,t) = 2t + E(s).$$

Imamo dve rešitvi: če je $p(s) = 1$, dobimo $u(x,y) = 2\sqrt{x+y}$, če pa je $p(s) = -1$, je $u(x,y) = -2\sqrt{x+y} + 4$.

4.7. (a) Iz karakterističnega sistema sledi, da je $p = a$ in $q = b$ za neki konstanti a in b. Če ju vstavimo v originalno enačbo in izrazimo z, dobimo popolni integral

$$z = ax + by + \frac{1+b^2}{2b}.$$

(b) Tangencialnost pomeni $(a, b, -1) = \lambda(2, -2y, -2z)$, hkrati pa se morata ploskvi dotikati:

$$z - by - \frac{1+b^2}{2b} = \frac{a}{2}(y^2 + z^2).$$

Iz prve enačbe dobimo $z = \frac{1}{a}$, $y = -\frac{b}{a}$ in vstavimo v drugo:

$$\frac{1}{a} + \frac{b^2}{a} - \frac{1+b^2}{2b} = \frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right).$$

Ko poenostavimo, dobimo $a = b$. Iskana družina je

$$z = ax + ay + \frac{1+a^2}{2a}.$$

Za (c) je potrebno poiskati ogrinjalko te družine: $z_a = x + y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} = 0$. Iz tega sledi $a^2 = \frac{1}{2x+2y+1}$. Rešitev je

$$z = \pm(2x + 2y + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Ploskvi se dotikata vzdolž krivulje $z^2 = 2x - 1$, $y = -1$.

4.8. Parametrizacija začetnih pogojev: $x(s) = s$, $y(s) = s$, $u(s,s) = 2$, $q(s) = -p(s) = \pm 1$. Rešitve karakterističnega sistema so:

$$2x = (2s+1)(t \pm 1)^2 - 1,\ 2y = 1 - (1-2s)(t + D(s))^2,\ u = -2t + 2,$$

$$p = -(t \pm 1)^{-1},\ q = (t \pm 1)^{-1}.$$

V originalnih koordinatah imamo dve rešitvi: $u(x,y) = -2\sqrt{x-y+1} + 4$, $u(x,y) = 2\sqrt{x-y+1}$.

4.9. Parametrizacija začetnih pogojev: $x(s) = s$, $y(s) = 0$, $u(s,0) = s$, $p(s) = 1$, $q(s) = s$. Rešitve karakterističnega sistema so $x(s,t) = se^{-t}(t+1)$, $y = te^t$, $u = s(t+1)$.

4.10. $u = h(\sqrt{x^2+y^2})\exp\left(\operatorname{arctg}(y/x)\right)$.

4.11. $x = F'(h'(s))t + s$, $y = -t$, $u = (h'(s)F'(h(s)) - F(h'(s)))\,t + h(s)$.

4.12. $u = xe^y$.

4.13. Iz karakterističnega sistema dobimo $2p^2 = (t-D)^{-1}$ in $y = (t-D)^{\frac{3}{2}}E$, kar je v nasprotju z zahtevo, da je $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4.14. Pišimo p, q, r namesto u_x, u_y, u_z po vrsti. Parametrizacija začetnih pogojev je $x(s_1,s_2) = s_1$, $y(s_1,s_2) = s_2$, $z(s_1,s_2) = 0$, $p(s_1,s_2) = 2$, $q(s_1,s_2) = 1$, $r(s_1,s_2) = 3$ in $u(s_1,s_2) = 2s_1 + s_2$. Rešitve karakterističnega sistema so $p = 2$, $q = 1$, $r = 3$, $x = -2t + s_1$, $y = -5t + s_2$, $z = -t$, $u = -12t + 2s_1 + s_2$. V originalnih koordinatah je $u = 2x + y + 3z$.

4.15. $u(x,y) = x - y + \frac{y}{x-y}$.

4.16. $u(x,y,z) = x + y - 2z + \frac{z}{x+y-2z}$.

4.17. $u(x,y) = 2\sqrt{3}\exp(\pm\frac{x+y}{\sqrt{3}})$.

4.18. $u(x,y) = 4\left(\frac{x+y}{6} + 1\right)^{\frac{3}{2}}$.

4.19. F odvajaj na x_i in vstavi v primerne enačbe.

4.20. Ker sta F in G funkcijsko neodvisna prva integrala, je

$$(f,g,h)\operatorname{grad}F = (f,g,h)\operatorname{grad}G = 0.$$

Naj bo (x_0,y_0,z_0) neka fiksna točka in definirajmo

$$H(x,y,z) = (x,y,z)(f(x_0,y_0,z_0), g(x_0,y_0,z_0), h(x_0,y_0,z_0)).$$

Funkcije F, G, H očitno tvorijo koordinatni sistem v okolici (x_0,y_0,z_0), saj so njihovi gradienti v (x_0,y_0,z_0) linearno neodvisni. V novih koordinatah je

$$f(x,y,z)u_x(x,y,z) + g(x,y,z)u_y(x,y,z) + h(x,y,z)u_z(x,y,z)$$

$$\begin{aligned} &= u_\alpha(x,y,z)(f,g,h)(x,y,z)\operatorname{grad}\alpha(x,y,z) + u_\beta(x,y,z)(f,g,h)(x,y,z)\operatorname{grad}\beta(x,y,z) \\ &\quad + u_\gamma(f,g,h)(x,y,z)\operatorname{grad}H(x,y,z) \\ &= u_\gamma(f,g,h)(x,y,z)(f,g,h)(x_0,y_0,z_0) = a. \end{aligned}$$

Po izreku o inverzni preslikavi lahko iz sistema $\alpha = F$, $\beta = G$, $\gamma = H$ izrazimo spremenljivke α, β in γ kot funkcije x, y, z.

4.21. (a) Rešujemo $(p,q,-1)(x,y,z) = 0$. Rešitve karakterističnega sistema so

$$x(s,t) = A(s)e^t,\ y(s,t) = B(s)e^t,\ z = C(s)e^t.$$

Ko vstavimo še začetne pogoje, dobimo za $x \neq 0$

$$z = \operatorname{arctg}(y/x)\sqrt{x^2+y^2}.$$

Podobno za $y \neq 0$.

(b) Rešitev iščemo v implicitni obliki $f(x,y,z) = 0$. Rešujemo enačbo $xf_x + yf_y + zf_z = 0$. Rešitve so natanko vse homogene funkcije f, to so take, za katere je $f(tx,ty,tz) = g(t)f(x,y,z)$.

4.22. Rešujemo enačbo $py+qx+1 = 0$ pri danem začetnem pogoju. Parametrizacija začetnih pogojev je $x(s) = s, y(s) = 0, u(s) = s$, Rešitve karakterističnega sistema pa $x = s\operatorname{ch} t, y = s\operatorname{sh} t, u = -t+s$. Rešitev v originalnih koordinatah je $u(x,y) = -\operatorname{Arth}(x^{-1}y) + \sqrt{x^2-y^2}$.

4.23. (a) $\mathbf{V} = (0,2y,-2z)\times(y-z,x,-x) = 2(z-y)(x,z,y)$. Za (b) je potrebno rešiti Pfaffovo enačbo $xdx + zdy + ydz = 0$ pri danih začetnih pogojih. Ker je $\operatorname{rot}(x,z,y) = 0$, je enačba rešljiva. Fiksirajmo z. Rešitve enačbe $xdx+zdy = 0$ so ploskve $G(x,y,z) = x^2 + 2yz + f(z) = 0$. Vstavimo G v enačbo $\operatorname{grad} G = \mu(x,z,y)$:

$$\begin{aligned} G_x &= 2x = \mu x, \\ G_y &= 2z = \mu z, \\ G_z &= 2y + f'(z) = \mu y. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $\mu = 2$, zato je rešitev tretje $f(z) = C$. Dobili smo družino ploskev $G(x,y,z) = x^2 + 2yz = C$. Krivuljo $\gamma(s)$ vsebuje ploskev $x^2 + 2yz = 0$. V primeru (c) rešujemo $(p,q,-1)\mathbf{V} = 0$ pri danih pogojih. Ker sta družini ploskev iz (a) prva integrala pripadajočega karakterističnega sistema, je rešitev oblike $f(A,B)=0$. Vstavimo začetne pogoje: $f(\frac{3}{4}s^2,-\frac{3}{2}s^2)=0$ in dobimo $f(s,t)=2s+t$. Rešitev je $2y^2-2z^2+x(y-z)=(y-z)(2z+2y+x)=0$. Ker začetna krivulja ne leži na ravnini $y=z$, je rešitev $x+2y+2z=0$.

4.24. Iskana družina ploskev ima normalo v smeri vektorskega produkta normal na dani družini: $\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=c(-y,x,0)$. Rešujemo Pfaffovo enačbo $-ydx+xdy=0$. Ker je $\mathrm{rot}(-y,x,0)=0$, je enačba rešljiva in rešitev je družina $y=Ax$.

4.25. $x=e^{2z+C}$.

4.26. (a) $z(x+y)(3z+1)^{-1}=E$. (b) Prva integrala karakterističnega sistema sta $A=x-y$ in $B=4z^3+2z^2-(x+y)^2$, rešitev pri danem pogoju pa $4z^3+2z^2-(x+y)^2-(x-y)^2-4=0$.

4.27. Rešitev je oblike

$$y-y_0=z-z_0+(x-x_0)\frac{z_0-y_0}{1-x_0},$$

kjer je (x_0,y_0,z_0) točka, skozi katero gredo ravnine.

4.28. (a) Če je taka krožnica karakteristika, mora biti $(bz-cy,cx-az,ay-bx)$ njen tangentni vektor. Tangentni vektor na tako krožnico v točki (x,y,z) pa je $\mathbf{d}\times(x,y,z)=(bz-cy,cx-az,ay-bx)$

(b) Prva integrala karakterističnega sistema sta $A=x+y+z$ in $B=x^2+y^2+z^2$. Rešitev iščemo v obliki $F(A,B)=0$. Za F lahko vzamemo npr. $F(A,B)=A^2-2B$. Ploskev je stožec.

Klasifikacija PDE drugega reda v dveh spremenljivkah

5.1. Enačba je parabolična. Nove koordinate so npr. $\varphi=2x-y$, $\psi=y$, $u(x,y)=A(\varphi)\psi+B(\varphi)$, kjer sta A in B poljubni funkciji.

5.2. Nove koordinate so $\varphi=(x-y)/2$, $\psi=(x+y)/(2\sqrt{2})$, enačba v novih koordinatah pa $u_{\varphi\varphi}-u_{\psi\psi}=0$.

5.3. Enačba je eliptična, nove koordinate so $\varphi=y-\mathrm{ch}^{-1}(x)$, $\psi=\mathrm{th}(x)$.

5.4. Označimo novi koordinati s φ in ψ. Za parcialne odvode φ dobimo

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4x^2y^2}}{2y^2} = \frac{x}{y}.$$

Enačba je parabolična. Za koordinati izberimo $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ in $\psi = x$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$u_{\psi\psi} = \frac{u_\psi}{\psi}.$$

Imamo navadno diferencialno enačbo. Njena rešitev je

$$u = A(\varphi)\psi^2 + B(\varphi) = x^2 f(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2),$$

kjer sta A in B oziroma f in g poljubni funkciji.

5.5. Enačba je hiperbolična. Novi spremenljivki bosta

$$\begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= \int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\, dy = 2(y-1)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Izračunajmo parcialna odvoda na η :

$$u_y = u_\eta \eta_y = u_\eta (y-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$u_{yy} = u_{\eta\eta}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}u_\eta (y-1)^{-\frac{3}{2}}$$

Zgornja enačba se prepiše v

$$2u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\eta} + u_\eta (y-1)^{-\frac{1}{2}} - u_\eta (y-1)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Rešitev je oblike

$$u(x,y) = f(x - 2\sqrt{y-1}) + g(x + 2\sqrt{y-1}).$$

Prvi pogoj da $f(x) + g(x) = x$, drugi pa je

$$\lim_{y \to 1^+} \sqrt{y-1}(f'(x - 2\sqrt{y-1})\frac{-1}{\sqrt{y-1}} + g'(x + 2\sqrt{y-1})\frac{1}{\sqrt{y-1}}) = x.$$

Drugi pogoj pomeni $f'(x) - g'(x) = -x$ oziroma $f(x) - g(x) = -\frac{x^2}{2}$. Dobimo

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2}}{2}, \quad g(x) = \frac{x + \frac{x^2}{2}}{2},$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{y-1} + x + 2\sqrt{y-1} + 4x\sqrt{y-1}) = x + 2x\sqrt{y-1}.$$

Laplacova enačba

6.1. Najprej si oglejmo, kaj pomeni konformnost. Preslikava f je konformna, če je

$$Df = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{bmatrix} = aQ,$$

za neko konstanto a in ortogonalno matriko Q. To pomeni: normi stolpcev sta enaki, vrstici sta pravokotni. Odvod je

$$Df = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ -f_{1y} & f_{1x} \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad Df = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{1y} & -f_{1x} \end{bmatrix}.$$

Pri prvi verziji dobimo $f_{2yx} = f_{1xx}$ in $f_{2xy} = -f_{1yy}$, torej je f_1 harmonična. Podobno je za f_2 in za drugi primer.

Naj bo u funkcija argumentov ξ, η. Izračunajmo $\triangle_{x,y} u \circ f(x, y)$:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi f_{1x} + u_\eta f_{2x}, \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi} f_{1x}^2 + u_{\eta\eta} f_{2x}^2 + 2u_{\xi\eta} f_{1x} f_{2x} + u_\xi f_{1xx} + u_\eta f_{2xx}, \\
u_y &= u_\xi f_{1y} + u_\eta f_{2y}, \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi} f_{1y}^2 + u_{\eta\eta} f_{2y}^2 + 2u_{\xi\eta} f_{1y} f_{2y} + u_\xi f_{1yy} + u_\eta f_{2yy}, \\
u_{xx} + u_{yy} &= u_{\xi\xi}(f_{1x}^2 + f_{1y}^2) + u_{\eta\eta}(f_{2x}^2 + f_{2y}^2) + \\
& \quad 2u_{\xi\eta}(f_{1x} f_{2x} + f_{1y} f_{2y}) + \\
& \quad u_\xi(f_{1xx} + f_{1yy}) + u_\eta(f_{2xx} + f_{2yy}).
\end{aligned}$$

Recimo, da je f konformna. Potem sta zadnja oklepaja zaradi harmoničnosti enaka 0, tretji oklepaj pa je 0 zaradi pravokotnosti vrstic. Ker sta normi stolpcev enaki, sta prva oklepaja enaka. Ker je u harmonična, je $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, torej je tudi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Recimo, da je $u_{xx} + u_{yy} = 0$ za vsako v (ξ, η)-koordinatah harmonično funkcijo u. Izberimo si naslednje harmonične polinome:

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta) &= \xi \Rightarrow f_{1xx} + f_{1yy} = 0, \\
u(\xi, \eta) &= \eta \Rightarrow f_{2xx} + f_{2yy} = 0, \\
u(\xi, \eta) &= \xi\eta \Rightarrow f_{1x} f_{2x} + f_{1y} f_{2y} = 0, \\
u(\xi, \eta) &= \xi^2 - \eta^2 \Rightarrow 2(f_{1x}^2 + f_{1y}^2) - 2(f_{2x}^2 + f_{2y}^2) = 0.
\end{aligned}$$

To pa ne pomeni nič drugega, kot da sta komponenti harmonični in da sta v Df normi vrstic enaki, stolpca pa pravokotna, zato je $Df = aQ$ za neko ortogonalno matriko Q.

6.2. Preveriti moramo, da $G'(F(x), F(y))$ zadošča definiciji Greenove funkcije na D. Potem je zaradi enoličnosti Greenove funkcije enaka $G(x, y)$. Ker je funkcija $g'(x, y) = G'(x, y) - N(x - y)$ harmonična za vsak $y \in D'$ in ker je F konformna, je tudi $g'(F(x), F(y))$ harmonična za vsak $y \in D$. Ta funkcija je tudi zvezna po y na $\overline{D}$. Najzanimivejši del je pokazati, da je funkcija $y \to N(F(x) - F(y)) - N(x - y)$ zvezna po y v $y = x$. To sledi iz dejstva, da je odvod konformne preslikave ortogonalna matrika, zato ohranja normo. Po principu enoličnosti je ta funkcija tudi harmonična v $y = x$. S tem smo dokazali, da je funkcija $y \to G'(F(x), F(y)) - N(x - y)$ harmonična na D in zvezna na $\overline{D}$. Očitno je $G'(F(x), F(y)) = 0$ za vsak $x \in D$ in $y \in S$.

Nalogo lahko rešimo tudi drugače. Naj bo $g : D \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Definirajmo

$$v(x) = \int_D G'(F(x), F(y))g(y)\, dV_y.$$

Dokazati je treba, da funkcija v reši enačbo $\triangle_x v = g$ na D. Pišimo $s = F(x)$, $t = F(y)$ in $x = F^{-1} \circ F(x)$. Po izreku o substituciji je

$$\begin{aligned} v(F^{-1} \circ F(x)) &= \int_D G'(F(x), F(y)) \frac{g(F^{-1} \circ F(y))}{|JF(F^{-1} \circ F(y))|} |JF(F^{-1} \circ F(y))|\, dV_y. \\ v(F^{-1}(s)) &= \int_{D'} G'(s, t) \frac{g(F^{-1}(t))}{|JF(F^{-1}(t))|}\, dV_t \\ &= \int_{D'} G'(s, t) g(F^{-1}(t)) |JF^{-1}(t)|\, dV_t. \end{aligned}$$

Po definiciji Greenove funkcije G' to pomeni, da je

$$\triangle_s (v(F^{-1}(s)) = g(F^{-1}(s))|JF^{-1}(s)|.$$

Pišimo $F^{-1} = (F_1, F_2)$ in izračunajmo $\triangle_s(v(F^{-1}(s)))$:

$$\begin{aligned} \triangle_s (v(F^{-1}(s)) &= (\triangle_x v)(F^{-1}(s)) \| \operatorname{grad} F_1 \|^2 \\ &= (\triangle_x v)(F^{-1}(s)) |JF^{-1}(s)|, \end{aligned}$$

saj je F konformna. Če združimo obe enakosti, dobimo

$$g(F^{-1}s)|JF^{-1}(s)| = (\triangle_x v)(F^{-1}(s))|JF^{-1}(s)|.$$

Ko krajšamo Jakobijevko in pišemo $F^{-1}(s) = x$, dobimo

$$g(x) = (\triangle_x v)(x).$$

6.3. Označimo z Z zrcaljenje čez $\mathbb{R}^{n-1} \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ in z W_a zrcaljenje čez $S^{n-1}(0,a) \subset \mathbb{R}^n$.

(1) $G(r, r_0) = -(2\pi)^{-1}(\log|r - r_0| - \log|r - r_1|)$, $r_1 = Z(r_0)$.

(2) $G(r, r_0) = -(2\pi)^{-1}(\log|r - r_0| - \log|r - r_1| + \log|r - r_2| - \log|r - r_3|)$, $r_1 = Z(r_0)$, $r_2 = -r_0$, $r_3 = Z(r_2)$.

(3) $G(r, r_0) = -(2\pi)^{-1}(\log|r - r_0| - \log|r - r_1| - \log(|r_0||r - r_2|/a) + \log(|r_0||r - r_3|/a))$, $r_1 = Z(r_0)$, $r_2 = W_a(r_0)$, $r_3 = Z(r_2)$.

(4) $G(x, y, x_0, y_0) = -(2\pi)^{-1}(\log\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{a}(x - x_0)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}(y - y_0)\right)\right) -$
$- \log\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{a}(x - x_0)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}(y + y_0)\right)\right)$.

(5) $G(r, r_0) = (4\pi)^{-1}(|r - r_0|^{-1} - |r - r_1|^{-1} - |r - r_2|^{-1} - |r - r_3|^{-1} + +|r - r_4|^{-1} + |r - r_5|^{-1} + |r - r_6|^{-1} - |r - r_7|^{-1})$, kjer je $r_1 = Z_z(r_0)$, $r_2 = Z_y(r_0)$, $r_3 = Z_x(r_0)$, $r_4 = Z_y(r_1)$, $r_5 = Z_y(r_3)$, $r_6 = Z_x(r_2)$ in $r_7 = -r_0$. Oznake Z_x, Z_y, Z_z pomenijo zrcaljenja čez ravnine $x = 0, y = 0, z = 0$ po vrsti.

(6) $G(r, r_0) = ((n - 2)\omega_n)^{-1}(|r - r_0|^{2-n} - |r - r_1|^{2-n})$, kjer je $r_1 = Z(r_0)$.

(7) $G(r, r_0) = ((n - 2)\omega_n)^{-1}(|r - r_0|^{2-n} - |r - r_1|^{2-n} - (\frac{a}{|r_0|})^{n-2}|r - r_2|^{2-n} + (\frac{a}{|r_0|})^{n-2}|r - r_3|^{2-n})$, kjer je $r_1 = Z(r_0)$, $r_2 = W_a(r_0)$, $r_3 = Z(r_2)$.

6.4. Prvi integral predstavlja rešitev Laplacove enačbe, ki ima na krožnici vrednost 1. Ker je taka rešitev ena sama, to je $u = 1$, je integral enak 1. Drugi integral pa je rešitev nehomogene enačbe $\triangle u = -1$, ki ima na robu vrednost 0. Na krogu seveda tako rešitev takoj uganemo: $u = \frac{1}{4}(a^2 - x_1^2 - x_2^2)$.

6.5. (a) Problem razbijemo na dva dela. Funkcijo u iščemo kot vsoto $u = v + w$, kjer v reši enačbo

$$\triangle v = a, \quad v|_{S^{n-1}(0,1)} = 0,$$

w pa enačbo

$$\triangle w = 0, \quad w|_{S^{n-1}(0,1)} = b.$$

Za drugo enačbo takoj uganemo, da je rešitev $w = b$. Rešitev za prvo enačbo bo odvisna le od radija, zato poskusimo z nastavkom

$$v = \alpha + \beta \sum_1^n x_i^2.$$

Izračunamo
$$\triangle v = 2n\beta = a,$$
torej je $\beta = a/2n$. Funkcija mora biti na sferi enaka 0, zato je
$$\alpha + \frac{a}{2n} = 0.$$
Rešitev je
$$u = b + \frac{a}{2n}(\sum_1^n x_i^2 - 1).$$

(b) Rešitev dane naloge je
$$u(x) = \int_{S^{n-1}(0,1)} P(x,y)g(y)\,dS_y + \int_{B^n(0,1)} G(x,y)f(y)\,dV_y.$$
Ocenimo
$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \sup_{S^{n-1}(0,1)} |g| \int_{S^{n-1}(0,1)} |P(x,y)|\,dS_y + \\ &\quad + \sup_{\overline{B}^n(0,1)} |f| \int_{B^n(0,1)} |G(x,y)|\,dV_y \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $P > 0$ in $G > 0$ in uporabimo rezultate prejšnje naloge. Edina rešitev Dirichletove naloge $\triangle w = 0$, $w|_{S^{n-1}(0,1)} = 1$ je
$$w = \int_{S^{n-1}(0,1)} P(x,y) \cdot 1\,dS_y = 1$$
Edina rešitev Poissonove naloge $\triangle v = -1$, $v|_{S^{n-1}(0,1)} = 0$ je
$$v(x) = \int_{B^n(0,1)} G(x,y) \cdot 1\,dV_y = -\frac{1}{2n}(\sum_1^n x_i^2 - 1) \le \frac{1}{2n}.$$

6.6. (a) $G^+(x,y) = G(x,y) - G(Z(x),y)$. Iz Greenove funkcije izračunamo za točko (b) Poissonovo jedro
$$P^+(x,y) = \begin{cases} P(x,y) - P(Z(x),y), & y \in (\partial D)^+ \\ \frac{\partial G^+}{\partial y_n}(x,y), & y \in L \end{cases},$$

kjer y_n označuje n-to komponento vektorja y. Za dokaz točke (c) upoštevajmo zvezo med P in P^+:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P(x,y)F(y)\;dS_y &= \int_{(\partial D)^+} P(x,y)F(y)\,dS_y - \int_{Z((\partial D)^+)} P(x,y)F(y)\;dS_y \\ &= \int_{(\partial D)^+} P(x,y)F(y)\,dS_y + \int_{\partial D^+} P(x,Z(y))F(Z(y))\,dS_y \\ &= \int_{(\partial D)^+} (P(x,y) - P(x,Z(y))F(y)\,dS_y\end{aligned}$$

Ker je preslikava $Z = (Z_1,\ldots,Z_n) : D \to D$ zrcaljenje, zanjo velja drugi dokaz naloge 6.2, saj je $|JZ| = \|\operatorname{grad} Z_i\|$, je $G(Z(x),Z(y))$ Greenova funkcija za $Z(D) = D$, torej je $G(Z(x),Z(y)) = G(x,y)$. Odtod sledi, da je
$G(Z(x),y) = G(x,Z(y))$ in zato $P(Z(x),y) = P(x,Z(y))$. Dobimo

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P(x,y)F(y)\;dS_y &= \int_{(\partial D)^+} (P(x,y) - P(Z(x),y))F(y)\,dS_y \\ &= \int_{\partial D^+} P^+(x,y)F^+(y)\,dS_y\end{aligned}$$

6.7. Rešitev je

$$u(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}(b^2 - a^2), & r \le a \\ \frac{1}{3r}(r^3 - a^3) + \frac{1}{2}(b^2 - r^2), & a \le r \le b \\ \frac{1}{3r}(b^3 - a^3), & r \ge b \end{cases}.$$

6.8. Uporabimo Fourierovo transformacijo

$$v(z,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)e^{-izx}\;dx.$$

Transformirana enačba enačba se glasi

$$-z^2 v(z,y) + v_{yy} = 0,$$

Njena splošna rešitev je

$$v(z,y) = A(z)e^{-zy} + B(z)e^{zy}.$$

Transformirani robni pogoji so

$$v(z,0) = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}(b^2+z^2)}, \quad v(z,a) = 0.$$

Od tod izračunamo

$$A(z) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}(b^2+z^2)}\frac{e^{az}}{\operatorname{sh} az}, \quad B(z) = -\frac{b}{\sqrt{2\pi}(b^2+z^2)}\frac{e^{-az}}{\operatorname{sh} az},$$

$$v(z,y) = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}(b^2+z^2)}\frac{\operatorname{sh}(a-y)z}{\operatorname{sh} az}.$$

Inverzno transformiranko

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(z,y)e^{izx}\,dz.$$

lahko določimo s pomočjo residuov. Za vsak $x > 0$ velja

$$u(x,y) = i\sqrt{2\pi}\left(\operatorname{Res}(v(z,y)e^{izx}, ib) + \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Res}(v(z,y)e^{izx}, k\pi i/a)\right).$$

Če ab ni večkratnik π, potem je

$$u(x,y) = \frac{\sin((a-y)b)}{\sin ab}e^{-bx} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2ab(-1)^{k+1}}{(ab)^2-(k\pi)^2}\sin((a-y)k\pi/a)e^{-k\pi x/a}.$$

Celotno rešitev dobimo tako, da na desni x zamenjamo z $|x|$.

6.9. Uporabimo Fourierovo transformacijo po x. Dobimo

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{b}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin az}{z}e^{-|z|y}e^{izx}\,dz \\
&= \frac{2b}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin az}{z}e^{-zy}\cos zx\,dz \\
&= \frac{b}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(a+x)z}{z}+\frac{\sin(a-x)z}{z}\right)e^{-zy}\,dx \\
&= \frac{b}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{a+x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{a-x}{y}\right] \\
&= \frac{b}{\pi}\,\varphi,
\end{aligned}$$

kjer je φ kot pod katerim iz točke $T = (x,y)$ vidimo interval $[-a,a]$.

6.10. Uporabimo Fourierovo transformacijo po x. Dobimo

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\frac{b}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin az}{z(|z|-h)} e^{-|z|y} e^{izx}\, dz \\ &= -\frac{2b}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin az}{z(z-h)} e^{-zy} \cos zx\, dz. \end{aligned}$$

Če $h=0$, potem ta integral ne obstaja. To je tudi fizikalno smiselno. Če je $h=0$ imamo namreč opravka s stacionarno porazdelitvijo temperature, kjer v območje priteka konstanten pozitiven toplotni tok.

6.11. Uporabimo sinusno transformacijo po x.

$$v(z,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\sin zx\, dx.$$

Transformirana enačba se glasi

$$-z^2 v(z,y) + v_{yy} = 0,$$

kjer smo uporabili $u(0,y)=0$. Njena splošna rešitev je

$$v(z,y) = C(z)e^{-zy}.$$

Iz drugega robnega pogoja sledi

$$\begin{aligned} C(z) &= v(z,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,0)\sin zx\, dx \\ &= b\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \sin zx\, dx \\ &= \frac{b}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-\cos az). \end{aligned}$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty v(z,y)\sin zx\, dz \\ &= \frac{2b}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos az}{z}\, e^{-zy}\sin zx\, dz \\ &= \frac{b}{\pi}\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} - \mathrm{arctg}\,\frac{x+a}{y} + \mathrm{arctg}\,\frac{a-x}{y}\right). \end{aligned}$$

6.12. Rešitev je

$$u(x,y) = -\frac{2b}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos az}{z^2}\; e^{-zy}\sin zx\; dz.$$

6.13. S substitucijo $v(x,y) = u(x,y) - \frac{b}{a}y$ dosežemo, da so robni pogoji v L^2. Dobimo

$$\triangle v = 0,$$

$$v(0,y) = -\frac{b}{a}y, \quad v(x,0) = 0 \text{ in } v(x,a) = 0.$$

Uporabimo sinusno transformacijo po spremenljivki x.

$$w(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty v(x,y)\sin xz\; dx.$$

Transformirana enačba in transformirana robna pogoja se glasijo

$$-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}yz - z^2 w(z,y) + w_{yy} = 0,$$

$$w(z,0) = 0, \quad w(z,a) = 0.$$

Odtod sledi

$$w(z,y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{by}{az} + A(z)\operatorname{ch} yz + B(z)\operatorname{sh} yz,$$

$$A(z) = 0, \quad B(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{b}{z\operatorname{sh} az}$$

torej je

$$u(x,y) = \frac{b}{a}y + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty w(z,y)\sin xz\; dz =$$

$$\frac{b}{a}y + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{b\operatorname{sh} yz}{z\operatorname{sh} az} - \frac{by}{az}\right)\sin xz\; dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{b\operatorname{sh} yz}{z\operatorname{sh} az}\sin xz\; dz.$$

6.14. Rešitev je

$$u(x) = \begin{cases} -x^2 - a^2 + 2ab, & |x| < a \\ 2a(b-|x|), & a \le |x| \le b \end{cases}.$$

Pri drugem delu si pomagamo s substitucijo

$$v(x) = u(x) - \frac{1}{2b}\left(u(-b)(b-x) + u(b)(b+x)\right).$$

6.15. Poskusimo s separacijo. Iščimo rešitve v obliki $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Dobimo enačbi $X'' = cX$ in $Y'' = -cY$. Opazimo, da za funkcijo Y nimamo homogenih robnih pogojev, imamo pa homogene robne pogoje za funkcijo X : $X(0) = 0$ in $X(a) = 0$. Rešitve diferencialne enačbe $X'' = aX$ pri danih robnih pogojih so funkcije $X_k = \sin\frac{k\pi x}{a}$. To pomeni, da mora funkcija Y rešiti enačbo $Y_k'' = \frac{(k\pi)^2}{a^2}Y$, torej dobimo $Y_k = A_k \operatorname{ch}\frac{k\pi y}{a} + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi y}{a}$. Rešitev iščemo z nastavkom $u(x,y) = \sum_1^\infty X_k(x)Y_k(y)$. Vstavimo še robne pogoje in dobimo

$$\begin{aligned} u(x,0) = f_1(x) &= \sum_1^\infty X_k(x)Y_k(0) = \sum_1^\infty \sin\frac{k\pi x}{a}A_k, \\ u(x,b) = f_2(x) &= \sum_1^\infty X_k(x)Y_k(b) = \sum_1^\infty \sin\frac{k\pi x}{a}(A_k \operatorname{ch}\frac{k\pi b}{a} + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}). \end{aligned}$$

Pišimo

$$f_1(x) = \sum_1^\infty f_{1k}\sin\frac{k\pi x}{a} \text{ in } f_2(x) = \sum_1^\infty f_{2k}\sin\frac{k\pi x}{a},$$

kjer je

$$f_{1k} = \frac{2}{a}\int_0^a f_1(t)\sin\frac{k\pi t}{a}\,dt, \quad f_{2k} = \frac{2}{a}\int_0^a f_2(t)\sin\frac{k\pi t}{a}\,dt.$$

Rešitev je

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^\infty \sin\frac{k\pi x}{a}\cdot\frac{f_{1k}\operatorname{sh}\frac{k\pi(b-y)}{a} + f_{2k}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}}.$$

6.16 Najprej opazimo, da je u oblike $u = u_1 + u_2$, kjer sta u_1 in u_2 rešitvi robnih problemov

$$\triangle u_1 = 0,\ u_1(x,0) = f_1(x),\ u_1(x,b) = f_2(x),\ u_1(0,y) = u_1(a,y) = 0,$$

$$\triangle u_2 = 0,\ u_2(x,0) = u_2(x,b) = 0,\ u_2(0,y) = g_1(x), u_2(a,y) = g_2(x).$$

Uporabimo rešitev naloge 6.15.

6.17. Rešitev je $u(x,y) = \mathrm{sh}(x)(\mathrm{sh}(-\frac{\pi}{2})^{-1}\cos(y))$.

6.18. Rešitev je

$$u(x,y) = \frac{32}{\pi}\sum_k \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{2k+1}{2}y\right)\cos\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}.$$

6.19. Rešitev je

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\left(\mathrm{ch}\,\frac{2k+1}{2a}\pi b\right)^{-1}\cos\left(\frac{2k+1}{2a}\pi x\right)\mathrm{ch}\left(\frac{2k+1}{2a}\pi y\right),$$

kjer je

$$f_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\cos\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{a}\pi t\right)\,dt.$$

6.20. Najprej rešimo lastni problem

$$u_{xx} + u_{yy} = \lambda u, \quad u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0.$$

Dobimo dvoparametričen sistem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti

$$\lambda_{kl} = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2, \quad v_{kl}(x,y) = \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}.$$

Nato razvijemo $h = \sum_{k,l} h_{kl}v_{kl}$ v $L^2(D)$. Rešitev iščemo z nastavkom $u = \sum_{k,l} c_{kl}v_{kl}$. Dobimo $c_{kl} = -\frac{h_{kl}}{\lambda_{kl}}$. Torej je

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{h_{kl}}{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b},$$

$$h_{kl} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b h(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}\,dxdy.$$

V primeru $h \equiv 2$ dobimo

$$h_{kl} = \frac{8}{\pi^2 kl}(1-(-1)^k)(1-(-1)^l).$$

6.21. Pripadajoča gostota nabojev je

$$\rho(x, y) = \mu\delta_{x_0}(x)\delta_{y_0}(y),$$

kjer sta δ_{x_0} in δ_{y_0} delta funkciji. Kot v prejšnji nalogi dobimo za rešitev robnega problema

$$\triangle u = -\rho/\varepsilon_0, \quad u|_{\partial D} = 0$$

$$u(x, y) = \frac{4\mu}{ab\pi^2\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x_0}{a} \sin \frac{l\pi y_0}{b}}{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}.$$

Če se želimo izogniti uporabi delta funkcij, potem predpostavimo, da ima žica majhno debelino 2δ, rešimo enačbo

$$\triangle u = \begin{cases} -\mu/4\delta^2\varepsilon_0, & |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},$$

pri pogoju $u|_{\partial D} = 0$ in pošljemo $\delta \to 0$.

6.22. Rešitev je

$$u(x, y, z) = \frac{8e}{abc\pi^2\varepsilon_0} \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x_0}{a} \sin \frac{l\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi z_0}{c}}{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{m\pi z}{c}.$$

6.23. Rešitev je

$$u(x, y) = 4 \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{km(k^2 + m^2)} \sin kx \sin my.$$

6.24. Rešitev je $u = u(r, \varphi) = \frac{1}{4}(1 - r^2)$.

6.25. Rešitev je odvisna le od radija, $u = u(r)$. Rešujemo enačbo

$$u'' + 2r^{-1}u' = r^{2002} + r^{2004}.$$

Ker operatorja u'' in $2r^{-1}u'$ znižata polinomom stopnjo za 2, je

$$u = ar^{2004} + br^{2006}$$

očitni kandidat za rešitev. Odvajamo in vstavimo v enačbo in dobimo $a = (2004 \cdot 2005)^{-1}$ in $b = (2005 \cdot 2006)^{-1}$.

6.26. Rešitev je $u = \frac{a}{2h} + \frac{a^2 - r^2}{4}$.

6.27 Naj bo $u(0) = T_0$. Potem je

$$u = \begin{cases} T_0, & r < a \\ \frac{a^2}{2}(\log r - \log a) - \frac{1}{4}(r^2 - a^2) + T_0, & a \le r \le b \\ \frac{a^2-b^2}{2}\log r + \frac{b^2}{2}\log b - \frac{a^2}{2}\log a + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) + T_0, & b < r \end{cases}.$$

6.28. Nastavek za rešitev je

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_1^\infty r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Ker je funkcija $|\varphi|$ soda, imamo razvoj po kosinusih.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\ dx = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi \cos n\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\varphi \frac{\sin n\varphi}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin n\varphi\, d\varphi\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos n\varphi\Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(-1 + (-1)^n). \end{aligned}$$

Členi s sodimi indeksi odpadejo, za lihe n pa je $(-1 + (-1)^n) = -2$. Torej je

$$u(r, \varphi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)\varphi).$$

Vrsta konvergira na vsem krogu enakomerno in absolutno, saj jo majorizira konvergentna številska vrsta $\sum_1^\infty (2n+1)^{-2}$.

6.29. Rešitev je $u(r,\varphi) = 2\pi^{-1}(1 - 2\sum_1^\infty (4m^2-1)^{-1} r^{2m}\cos(2m\varphi))$.

6.30. Rešitev je $u(r,\varphi) = \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{r^{2n-1}}{2n-1}\sin((2n-1)\varphi)$. Odtod dobimo $u(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}(\log(1+z) - \log(1-z))$, $z = re^{i\varphi}$. Ko upoštevamo formulo $\log z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$, dobimo $u = \frac{2}{\pi}\big(\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x} + \operatorname{arctg}\frac{y}{1-x}\big)$. Po adicijskem izreku za arctg odtod sledi $u = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2y}{1-x^2-y^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\big(\frac{2r}{1-r^2}\sin\varphi\big)$. Torej je $u(1/2,\pi/2) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

6.31. $u(r,\varphi) = (r/a)^n \sin n\varphi$.

6.32. Rešitev je $u(r,\varphi) = \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{r^{4k-2}}{(2k-1)^3}\sin((4k-2)\varphi)$.

6.33. Rešitev je $u(r,\varphi) = (r + a^2/r)\cos\varphi$.

6.34. Po substituciji dobimo enačbo $\triangle v = 0$ z robnima pogojema $v(r,0) = v(r,\pi) = 0$, $v(a,\varphi) = a^2\sin^2\varphi$. Rešitev je oblike

$$v(r,\varphi) = \sum_1^\infty A_n r^n \sin n\varphi.$$

Sledi, da je

$$A_n a^n \pi/2 = a^2 \int_0^\pi \sin^2\varphi \sin n\varphi \; d\varphi = a^2(2\cos n\pi - 2)/(n^3 - 4n)$$

$$v(r,\varphi) = \frac{-8a^2}{\pi}\sum_1^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \frac{\sin((2n+1)\varphi)}{(2n+1)((2n+1)^2-4)}.$$

6.35. Po substituciji dobimo enačbo $\triangle v = 0$ in robne pogoje $v(r,0) = 0$, $v(r,\pi) = 0$, $v(1,\varphi) = f(\varphi) - \cos\varphi$. Njena rešitev je

$$v(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty r^n \Big[\int_0^\pi (f(t) - \cos t)\sin nt \; dt\Big] \sin n\varphi.$$

Difuzijska enačba

7.1. Robna pogoja sta ali $u(a) = u(b) = 0$ ali $u_x(a) = u_x(b) = 0$. Odvajajmo

E in dokažimo, da je odvod negativen:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_a^b 2u(x,t)u_t(x,t)\ dx = \int_a^b 2u(x,t)u_{xx}\ dx \\ &= 2u(x,t)u_x(x,t)|_a^b - \int_a^b 2u_x^2\ dx = -\int_a^b 2u_x^2\ dx\ \le 0. \end{aligned}$$

To pomeni, da je $E(T) \le E(0) = \int_a^b f^2(x)\,dx$. Funkcija $u(z)$ ustreza enačbi $u_{xx} = 0$. V obeh primerih sta rešitvi konstanti. Kateri?

7.2. Naj bo

$$v(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-izx}\ dx.$$

Dokaži, da je $v(z,0) = \mathcal{F}(f(x))(z)$ in $v_t = -c^2z^2v$. Odtod sledi, da je

$$v(z,t) = \mathcal{F}(f(x))(z)e^{-c^2z^2t}.$$

Pri računanju inverzne transformiranke potrebujemo še transformiranko funkcije

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2c^2t}}e^{-x^2/4c^2t},$$

ki je

$$\mathcal{F}(g(x))(z) = e^{-c^2z^2t}.$$

Iz izreka o konvoluciji sledi

$$u(x,t) = f * g = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-(x-u)^2/4c^2t}\ du.$$

Po substituciji $\xi = (u-x)/2c\sqrt{t}$ dobimo

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2c\xi\sqrt{t})e^{-\xi^2}\ d\xi.$$

7.3. Privzemimo, da lahko vedno zamenjamo vrstni red odvajanja in integriranja. Če z $v(z,t)$ označimo Fourierovo transformiranko $u(x,t)$ po spremenljivki x, ena-čba preide v

$$v_t(z,t) = -z^2v(z,t).$$

Za fiksen z je to navadna diferencialna enačba z začetnim pogojem

$$\begin{aligned} v(0,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}e^{-izx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{-izx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\left(-ize^{-izx}\right)\,dx \\ &= \frac{-iz}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-izx}\,dx \\ &= \frac{-iz}{2\sqrt{2}}e^{-z^2/4}. \end{aligned}$$

Rešitev tega začetnega problema je

$$v(z,t) = \frac{-iz}{2\sqrt{2}}e^{-z^2/4}e^{-z^2t}.$$

Rešitev originalne enačbe dobimo z inverzno Fourierovo transformacijo.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} v(z,t)e^{izx}\,dz \\ &= \frac{i}{2\sqrt{\pi}(4t+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}\right)' e^{izx}\,dz \\ &= \frac{i}{2\sqrt{\pi}(4t+1)}\left(\left[e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}e^{izx}\right]_{z=-\infty}^{z=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}\left(e^{izx}\right)'\,dz\right) \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}(4t+1)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2(t+\frac{1}{4})}e^{izx}\,dz \\ &= \frac{x}{(4t+1)^{3/2}}e^{-z^2/(4t+1)}. \end{aligned}$$

7.4. Rešujemo z Laplacovo transformacijo po t. Naj bo

$$U(x,p) = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-tp}\,dt.$$

Dokaži, da je $c^2U_{xx} = pU$, $U(0,p) = \mathcal{L}\left(\varphi(t)\right)(p)$ in da je za vsak $p > 0$ funkcija $x \to U(x,p)$ omejena. Odtod sledi, da je

$$U(x,p) = \mathcal{L}\left(\varphi(t)\right)(p)e^{-\sqrt{p}x/c}.$$

Pri računanju inverzne transformiranke bomo potrebovali formulo

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{Erf}(\alpha/2\sqrt{t})\right)(p) = \frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-s^2}\,ds.$$

Sledi

$$U(x,p) = p\mathcal{L}\left(\phi(t)\right)(p) \cdot \frac{1}{p} e^{-\sqrt{p}x/c} = \left(\mathcal{L}\left(\phi'(t)\right)(p) + \phi(0)\right)\mathcal{L}\left(\operatorname{Erf}(x/2c\sqrt{t})\right)(p).$$

Iz izreka o konvoluciji dobimo

$$u(x,t) = \phi'(t) * \operatorname{Erf}(x/2c\sqrt{t}) + \phi(0)\operatorname{Erf}(x/2c\sqrt{t}).$$

Po integraciji per partes in krajšanju dveh členov dobimo

$$u(x,t) = -\int_0^t \phi(t-u)\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{Erf}(x/2c\sqrt{u})\,du = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t \phi(t-u)\frac{e^{-x^2/4c^2u}}{u^{3/2}}\,du.$$

S substitucijo $u = \frac{x^2}{4c^2\xi^2}$ dobimo

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2c\sqrt{t}}^{\infty} \phi\left(t - \frac{x^2}{4c^2\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

7.5. Z Laplacovo transformacijo po t dobimo

$$\mathcal{L}\left(u(x,t)\right)(p) = -\mathcal{L}\left(\psi(t)\right)(p)\frac{c}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}x/c}.$$

Pri računanju inverzne transformiranke uporabimo formulo

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\alpha^2/4t}\right)(p) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

in izrek o konvoluciji. Dobimo

$$u(x,t) = -c\int_0^t \psi(t-u)\frac{1}{\sqrt{\pi u}}e^{-x^2/4c^2u}\,du.$$

S substitucijo $\xi = \frac{x}{2c\sqrt{u}}$ prevedemo rešitev na

$$u(x,t) = -\frac{x}{c\sqrt{t}}\int_{x/2c\sqrt{t}}^{\infty} \psi\left(t - \frac{x^2}{4c^2\xi^2}\right)\frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2}\,d\xi.$$

7.6. S pomočjo sinusne transformacije po x dobimo

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} f(u)\left(e^{-(x-u)^2/4c^2t} - e^{-(x+u)^2/4c^2t}\right)\,du.$$

7.7. S pomočjo kosinusne transformacije po x dobimo

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(u) \left(e^{-(x-u)^2/4c^2t} + e^{-(x+u)^2/4c^2t} \right) \, du.$$

7.8. Naj bo

$$v(x,p) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-pt} \, dt$$

Laplacova transformiranka funkcije u po t. Transformirana enačba je

$$v_{xx} = pv - \sin x - \cos 2x.$$

Splošna rešitev je

$$v(x,p) = \frac{1}{1+p} \sin x + \frac{1}{4+p} \cos 2x + A(p) e^{-x\sqrt{p}} + B(p) e^{x\sqrt{p}}.$$

Ker mora biti v omejena, je $B(p) \equiv 0$, iz transformiranega robnega pogoja

$$v_x(0,p) = \frac{1}{1+p}$$

pa dobimo, da je tudi $A(p) \equiv 0$. Inverzna transformiranka je

$$u(x,t) = e^{-t} \sin x + e^{-4t} \cos 2x.$$

7.9. Dokaži, da je

$$\begin{aligned} U(x,p) &= \mathcal{L}\left(u(x,t)\right)(p) \\ &= \frac{u_0}{p} \left(1 - \frac{hc}{\sqrt{p} + hc} e^{-\sqrt{p}x/c} \right) = \\ &= \frac{u_0}{p} \left(1 - e^{-\sqrt{p}x/c} \right) + \frac{u_0}{\sqrt{p}(\sqrt{p} + hc)} e^{-\sqrt{p}x/c} \end{aligned}$$

Iz formule

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{Erf}(\alpha/2\sqrt{t}) \right)(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$$

dobimo, da je inverzna transformiranka prvega člena enaka

$$u_0 \left(1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}} \right) \right) = u_0 \, \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}} \right).$$

Če uporabimo Efrosev izrek na

$$f(t) = e^{h(x-ct)}\chi_{[x/c,\infty)}(t)$$

dobimo

$$\mathcal{L}\left(f\right)\left(p\right) = \frac{1}{p+ch}e^{-px/c},$$

Inverzna transformiranka drugega člena enaka

$$\frac{u_0}{\sqrt{\pi t}}\int_{x/c}^{\infty} e^{h(x-c\tau)-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau.$$

S substitucijo $\xi = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} + hc\sqrt{t}$ preide ta izraz v

$$u_0 e^{hx+c^2h^2t}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}} + hc\sqrt{t}\right).$$

7.10. Poišči funkcijo v, ki zadošča enačbi, robnemu pogoju $v(0,t) = \phi(t)$ in začetnemu pogoju $v(x,0) = 0$ (naloga 7.4). Poišči funkcijo w, ki zadošča enačbi, robnemu pogoju $w(0,t) = 0$ in začetnemu pogoju $w(x,0) = f(x)$ (naloga 7.6). Potem je $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ iskana rešitev.

7.11. Uporabimo kosinusno transformacijo po x. Naj bo

$$v(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u(x,t)\cos zx\,dx.$$

Potem je

$$v_t = -z^2 v + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{z^2+a^2}, \quad v(z,0) = 0,$$

$$v(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{z^2(a^2+z^2)}(1-e^{-tz^2}),$$

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} v(z,t)\cos zx\,dz.$$

7.12. Funkcija u opisuje spreminjanje temperature palice $[0,l]$, ki ima na začetku v točki $0 \leq x \leq l$ temperaturo $f(x)$ nato pa njeni krajišči držimo pri temperaturi 0. Dobimo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-(n\pi c)^2 t/l^2},$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

V primeru $f(x) = T_0$ dobimo

$$f_n = \frac{2T_0}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right),$$

v primeru $f(x) = T_0 x/l$ je

$$f_n = \frac{2T_0}{n\pi} (-1)^{n+1},$$

v primeru $f(x) = T_0 x(l-x)/l^2$ pa

$$f_n = \frac{4T_0}{(n\pi)^3} \left(1 - (-1)^n\right).$$

7.13. Z nastavkom

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

dobimo

$$T_n'(t) + \omega_n T_n(t) = f_n(t), \quad T_n(0) = 0,$$

kjer je $\omega_n = \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2$ in

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

Z Laplacovo transformacijo dobimo

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n (t-s)} f_n(s) \, ds.$$

V primeru (a) je

$$f_n(t) = f_n = \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi h}{l}\right),$$

$$T_n(t) = \frac{f_n}{\omega_n}\left(1 - e^{-\omega_n t}\right),$$

v primeru (b) pa

$$f_n(t) = f_n \cos\omega t, \quad f_n = A\frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1},$$

$$T_n(t) = \frac{f_n}{\omega_n^2 + \omega^2}\left(\omega \sin\omega t + \omega_n \cos\omega t - \omega_n e^{-\omega_n t}\right).$$

7.14. Po substituciji

$$v(x,t) = u(x,t) - G(x,t), \quad G(x,t) = (1 - \frac{x}{l})\phi(t) + \frac{x}{l}\psi(t)$$

preide enačba v

$$u_t = c^2 u_{xx} - G_t$$

začetni in robni pogoji pa v

$$v(x,0) = -G(x,0), \quad v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0.$$

Če so robni in začetni pogoji kompatibilni, je $G(x,0) = 0$, torej smo v situaciji iz prejšnje naloge. V splošnem razvijemo

$$G(x,t) = \sum g_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

kjer je

$$g_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left(\phi(t) + (-1)^{n+1}\psi(t)\right).$$

Potem z nastavkom $v(x,t) = \sum T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$ dobimo

$$T_n' + \omega_n T_n = -g_n'(t), \quad T_n(0) = -g_n(0),$$

kjer je $\omega_n = \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2$. Z Laplacovo transformacijo dobimo

$$T_n(t) = -g_n(t) + \omega_n \int_0^t e^{-\omega_n(t-s)} g_n(s)\, ds,$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(g_n(t) + T_n(t))\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n \int_0^t e^{-\omega_n(t-s)} g_n(s)\, ds\, \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

V primeru (a) dobimo $g_n(t) = g_n = \frac{2T_0}{\pi n}(-1)^{n+1}$ in

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left(1 - e^{-\omega_n t}\right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

v primeru (b) pa $g_n(t) = g_n \sin \omega t$ in

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \omega_n}{\omega_n^2 + \omega^2} \left(\omega_n \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\omega_n t}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

7.15. Rešitev je

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l} e^{-\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi c}{l}\right)^2 t},$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}\, dx.$$

7.16. S substitucijo

$$u(x,t) = v(x,t) + bx$$

preide enačba v

$$v_t = c^2 v_{xx},$$

začetni in robni pogoji pa v

$$v(x,0) = -bx, \quad v(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0.$$

Velja

$$bx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}, \quad f_n = \frac{2bl(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

Rešitev novega problema je potem

$$v(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l} e^{-\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi c}{l}\right)^2 t}.$$

Odtod sledi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l} \left(1 - e^{-\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi c}{l}\right)^2 t}\right).$$

7.17. Dobimo

$$u(x,t) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{\frac{-(2k+1)^2\pi^2 t}{l^2}}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right).$$

Stacionarna porazdelitev temperature je $u(x) = \frac{l}{2}$.

Valovna enačba

8.1. Izračunajmo $k'(t) + p'(t)$:

$$\begin{aligned} k'(t) + p'(t) &= \int_{\infty}^{\infty} 2(u_t(x,t)u_{tt}(x,t) + 2u_x(x,t)u_x(x,t))\,dx = \\ &= 2\int_{\infty}^{\infty}(u_t(x,t)u_{xx}(x,t) + u_x(x,t)u_x(x,t))\,dx = \\ &= 2u_t(x,t)u_x(x,t)|_{-\infty}^{\infty}. \end{aligned}$$

Po D'Alembertu je

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\ ds;$$

za vsak fiksen t ima u kompakten nosilec, zato sta $u_t(x,t)$ in $u_x(x,t)$ na zgornji in spodnji meji enaka 0. Za drugi del najprej izračunajmo

$$u_x^2(x,t) - u_t^2(x,t) = (f'(x-t) - g(x-t))(f'(x+t) - g(x+t)).$$

Denimo da imata f in g nosilca v $[-M, M]$ za nek dovolj velik M. Če je $|t| > M$ je $|(x-t)-(x+t)| > 2M$, zato $x-t$ in $x+t$ nista hkrati v $[-M, M]$, torej je $(f'(x-t) - g(x-t))(f'(x+t) - g(x+t)) = 0$ za $|t| > M$.

8.2. S Fourierovo transformacijo po x, dobimo D'Alembertovo formulo

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\ ds.$$

V našem primeru je $f(x) = 0$, $g(x) = e^{-a|x|}$ dobimo

$$u(x,t) = \mathrm{sign}(x+ct)\frac{1}{2ac}(1 - e^{-a|x+ct|}) - \mathrm{sign}(x-ct)\frac{1}{2ac}(1 - e^{-a|x-ct|}).$$

8.3. Dodatno definirajmo $\phi(t) = 0$ za $t \leq 0$. Z Laplacovo transformacijo po t dobimo
$$u(x,t) = \phi(t - \frac{x}{c}).$$

8.4. Z Laplacovo transformacijo po t dobimo
$$u(x,t) = -ce^{h(ct-x)}\chi_{[0,\infty)}(t - \frac{x}{c}) \int_0^{t-\frac{x}{c}} e^{hcs}\psi(s)\ ds.$$
kjer je $\chi_{[0,\infty)}$ karakteristična funkcija intervala $[0,\infty)$. V primeru $h = 0$ dobimo
$$u(x,t) = -c\chi_{[0,\infty)}(t - \frac{x}{c}) \int_0^{t-\frac{x}{c}} \psi(s)\ ds.$$

8.5. Naj bosta
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}, \text{ in } G(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0, \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$
lihi nadaljevanji funkcij $f(x)$ in $g(x)$ iz $(0,\infty)$ na $(-\infty,\infty)$ in
$$U(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x > 0 \\ -u(-x,t), & x < 0 \end{cases}$$
liho nadaljevanje funkcije $u(x,t)$. Po D'Alembertovi formuli je
$$U(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\ ds.$$
Odtod sledi
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\ ds, & 0 < t < \frac{x}{c}, \\ \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)\ ds, & t > \frac{x}{c} > 0 \end{cases}.$$

8.6. Rešitev je
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\ ds, & 0 < t < \frac{x}{c}, \\ \frac{f(x+ct)+f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} g(s)ds + \int_0^{ct-x} g(s)\ ds\right), & t > \frac{x}{c} > 0 \end{cases}.$$

8.7. Z Laplacovo transformacijo dobimo $u(x,t) = \sin x(e^{-t} + \sin t - \cos t)$.

8.8. Če je $a = 1$, dobimo

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-(t+x)} - \frac{1}{2}e^{t+x}, & t \leq -x, \\ 0, & -x \leq t \leq x, \\ 1 + (x-t-1)e^{x-t}, & t \geq x \end{cases}.$$

Za ostale a je rešitev naslednja:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{x+at}}{a+1} - \frac{ae^{-\frac{x}{a}-t}}{1+a}, & t \leq -\frac{x}{a}, \\ 0, & -\frac{x}{a} \leq t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{e^{x-at}}{a-1} + \frac{ae^{\frac{x}{a}-t}}{1-a} + 1, & t \geq \frac{x}{a} \end{cases}.$$

8.9. Dobimo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + \frac{g_n l}{n\pi c} \sin \frac{n\pi ct}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l},$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad g_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Rešitev lahko zapišemo tudi v D'Alembertovi obliki

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(x+ct) + F(x-ct)\right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\, ds,$$

kjer funkciji F in G dobimo tako, da funkciji f in g liho nadaljujemo iz $[0,l]$ na $[-l,l]$ nato pa periodično s periodo $2l$ na celo realno os. V primeru (a) dobimo

$$f_n = \frac{8h}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad g_n = 0,$$

v primeru (b) pa

$$f_n = 0, \quad g_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \cos \frac{n\pi h}{l}.$$

8.10. S substitucijo $v(x,t) = u(x,t) - (1-x)\cos t$ problem prevedemo na $v_{tt} = a^2 v_{xx} + (1-x)\cos t$ pri pogojih $u(0,t) = 0, u(1,t) = 0,\ u(x,0) = 0$ $u_t(x,0) = 0$. S separacijo spremenljivk ne dobimo lastnih funkcij za T (razen

$T = 0$). Kljub temu pa lahko naredimo separacijo po spremenljivki x. Pišimo $v(x,t) = X(x)T(t)$. Vstavimo v enačbo in dobimo kompletem sistem lastnih funkcij po x, $X_k(x) = \sin k\pi x$. Ker za vsak fiksen t rešitev lahko razvijemo v Fourierovo vrsto po x, bo rešitev oblike

$$u(x,t) = \sum_1^\infty T_k(t) \sin k\pi x.$$

Nastavek odvajamo, vstavimo v enačbo in dobimo

$$\sum_1^\infty (T_k''(t) + a^2(k\pi)^2 T_k(t)) \sin k\pi x = (1-x)\cos t = \sum_1^\infty \frac{2\cos t}{k\pi} \sin k\pi x.$$

Dobimo družino nehomogenih linearnih diferencialnih enačb drugega reda s konstantnimi koeficienti

$$T_k''(t) + a^2(k\pi)^2 T_k(t) = \frac{2\cos(t)}{k\pi},\ T(0) = 0,\ T'(0) = 0.$$

Zadnja pogoja dobimo iz začetnih pogojev. Rešitve so

$$T_k(t) = \frac{2}{k\pi((k\pi a)^2 - 1)} (\cos(t) - \cos(k\pi a t)).$$

8.11. Lastne vrednosti in lastni vektorji Laplacovega operatorja so

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Razvijemo nehomogeni del po lastnih vektorjih Laplacovega operatorja

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^\infty f_n(t) v_n(x), \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t) v_n(x)\ dx.$$

Definirajmo lastne frekvence $\omega_n = \lambda_n c = \frac{n\pi c}{l}$. Ko vstavimo v enačbo nastavek $u(x,t) = \sum_k T_k(t) v_k(x)$ in primerjamo istoležne koeficiente, dobimo

$$T_n'' + \omega_n^2 T_n = f_n(t), \quad T_n(0) = T_n'(0) = 0.$$

S pomočjo Laplacove transformacije dobimo rešitev

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin \omega_n(t-s) f_n(s)\ ds.$$

Če je $f_n(t) = C_n \sin \omega t$, potem je

$$T_n(t) = \begin{cases} \frac{C_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}\left(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t\right) & \omega \neq \omega_n \\ \frac{C_n}{2\omega_n^2}\left(\sin \omega_n t - \omega_n t \cos \omega_n t\right) & \omega = \omega_n \end{cases}.$$

V primeru (a) dobimo $C_n = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)A$, v primeru (b) pa $C_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}B$. Če nas zanimajo samo členi s frekvenco ω, vzamemo preprostejši nastavek $u(x,t) = X(x)\sin\omega t$. Dobimo $-\omega^2 X = c^2 X'' + A$, $X(0) = X(l) = 0$.

8.12. S substitucijo

$$u(x,t) = v(x,t) + G(x,t), \quad G(x,t) = \phi(t)(1-\frac{x}{l}) + \psi(t)\frac{x}{l}$$

dobimo naslednji robni problem

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} - G_{tt}$$

$$v(x,0) = -G(x,0), \quad v_t(x,0) = -G_t(x,0), \quad v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

Nadaljujemo kot v prejšnji nalogi. Najprej izračunamo

$$g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l G(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{n\pi}\phi(t) + \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\psi(t).$$

Z nastavkom $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ dobimo

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n = -g_n''(t), \quad T_n(0) = -g_n(0), \quad T_n'(0) = -g_n'(0).$$

Z Laplacovo transformacijo dobimo

$$T_n(t) = -g_n(t) + \omega_n\int_0^t \sin\left(\omega_n(t-s)\right)g_n(s)\,ds.$$

V primeru $\phi(t) = 0$, $\psi(t) = A\sin\omega t$ dobimo

$$g_n(t) = g_n\sin\omega t, \quad g_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}A.$$

Rešitev je

$$u(x,t) = G(x,t) + v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

kjer je

$$f_n(t) = g_n(t) + T_n(t) = \begin{cases} \frac{g_n\omega_n}{\omega^2-\omega_n^2}\left(\omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega t\right) & \omega \neq \omega_n \\ \frac{g_n}{2}\left(\sin\omega_n t - \omega_n t\cos\omega_n t\right) & \omega = \omega_n \end{cases}.$$

Literatura

Zbirke nalog

[1] Thomas William Körner, *Exercises in Fourier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Pavlina Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja*, 3. del, 2. izdaja, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1991.

[3] Murray R. Spiegel, *Fourier analysis with applications to boundary value problems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1974.

[4] Momčilo Ušćumlić, Pavle Miličić, *Zbirka zadataka iz više matematike, 2. dio*, 4. izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

Teorija z nalogami in/ali primeri

[5] Vladimir Arnold, *Lectures on partial differential equations*, Springer, 2004.

[6] Lawrence Evans, *Partial differential equations*, AMS, Providence, 1998.

[7] Gerald Folland, *Introduction to partial differential equations*, Princeton university Press, Princeton -New Jersey, 1995.

[8] Fritz John, *Partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1991.

[9] Milan Hladnik, *Povabilo v harmonično analizo*, DMFA, Ljubljana, 1992.

[10] Andrej Nikolaevič Kolmogorov, Sergej Vasil'evič Fomin, *Elementi teoriji funkcij i funkcionalnogo analiza*, izdanije šestoje, Nauka, Moskva, 1989. (Angleški prevod ne vsebuje poglavja o diferencialnem računu v normiranih prostorih).

[11] France Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DMFA, Ljubljana, 1974.

[12] France Križanič, *Navadne in parcialne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana, 1985.

[13] France Križanič, *Parcialne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana, 2004.

[14] David Logan, *Applied differential equations* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest 2004

[15] Alois Kufner, Jan Kadlec, *Fourier series*, English Translation, Iliffe Books, London, 1971.

[16] Mihail Alekseevič Lavrent'ev, Boris Vladimirovič Šabat, *Metodi teorii funkciji kompleksnogo peremenogo*, Nauka, Moskva, 1987.

[17] Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein, *An introduction to partial diffferential equations* Cambridge university press, 2007.

[18] Ian N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1951.

[19] Anton Suhadolc, *Integralske transformacije in integralske enačbe*, DMFA, Ljubljana, 1985.

[20] Anton Suhadolc, *Robni problemi za linearne diferencialne enačbe drugeg reda*, DMFA, Ljubljana, 1993.

[21] Anton Suhadolc, *Navadne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana 1996.

[22] Nico M. Temme, *An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1996.

[23] Egon Zakrajšek, *Analiza 3*, DMFA, Ljubljana, 2000.

[24] Egon Zakrajšek, *Analiza 4*, skripta.

[25] Wolfgang Walter, *Einführung in die Theorie der Distributionen*, BI Wissenschaftsverlag, 1974.